Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL

Associação ampla UFSJ / CEFET-MG

Estimativa Intervalar da Transformada Rápida de Fourier

Elisa Alvina de Moraes Arcanjo

Orientador: Erivelton G. Nepomuceno

Coorientador: Leonardo B. Felix

São João del-Rei, 09 de Junho de 2017.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL

Associação ampla UFSJ / CEFET-MG

Estimativa Intervalar da Transformada Rápida de Fourier

Elisa Alvina de Moraes Arcanjo

Dissertação apresentada à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Erivelton G. Nepomuceno

Coorientador: Leonardo B. Felix

São João del-Rei, 09 de Junho de 2017.

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A668e

Arcanjo, Elisa Alvina de Moraes.
Estimativa Intervalar da Transformada Rápida de Fourier / Elisa Alvina de Moraes Arcanjo ; orientador Erivelton Geraldo Nepomuceno; coorientador Leonardo Bonato Felix. -- São João del Rei, 2017.
77 p.

Dissertação (Mestrado - Engenharia Elétrica) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2017.

1. Transformada Rápida Fourier. 2. Estimativa Intervalar da FFT. 3. Método de Monte Carlo. 4. Erros Relativos. 5. Aritmética Intervalar. I. Nepomuceno, Erivelton Geraldo , orient. II. Felix, Leonardo Bonato, co-orient. III. Título.

Dedico este trabalho à minha família, aos professores e ao meu marido pelo apoio e incentivo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por cada desafio superado, pelos dias de aprendizado e pelo dom da vida. Agradeço meu marido Luís Guilherme pelo apoio, incentivo, ensinamentos, paciência e amor. Agradeço imensamente todos os professores que compartilharam conhecimento e tempo, dentro e fora da sala de aula, em especial aos professores Erivelton e Bonato por todo apoio, por acreditarem em mim, pela orientação e pelos momentos de conversas e risos. Agradeço aos colegas pelo conhecimento trocado, pelas ajudas e dias de estudos, em especial aos amigos: Alisson, Brenda, Glaucia, Julia, Juan, Marco e Melanie.

"Para se ter sucesso, é necessário amar de verdade o que se faz. Caso contrário, levando em conta apenas o lado racional, você simplesmente desiste."

Steve Jobs

Resumo

Este trabalho demonstra a utilização de conceitos da Aritmética Intervalar juntamente com o Método de Monte Carlo aplicados aos cálculos da FFT (*Fast Fourier Transform*). Isto é possível a partir do uso do teorema de Avaliação Finita e análise de cálculos estatísticos que definiram a média das FFTs calculadas e, assim, encontrar os limites das frequências significativas do sinal no Espectro, demonstrando que erros existentes no domínio do tempo impactam no domínio da frequência. Na literatura, existem diversos trabalhos que analisam erros durante os cálculos feitos por esse algoritmo, erros como de arredondamento e de truncamento. Porém, erros provenientes das limitações técnicas de diferentes aparelhos e instrumentos eletrônicos ou as interferências ocorridas durante as coletas de dados geralmente não são levadas em conta antes ou durante a aplicação da Transformada Rápida de Fourier. Assim, este trabalho mostra o impacto que este último tipo de erro causa no domínio do tempo e no domínio da frequência. E, os resultados demonstram um comportamento assintótico das médias das FFTs na definição dos limites do Espectro.

Palavras-chave: FFT, Transformada de Fourier, Método de Monte Carlo, Aritmética Intervalar, Erros.

Abstract

This work demonstrates the utility of Interval Arithmetic concepts along with the Monte Carlo Method applied to the FFT calculation. We use the Finite Evaluation Theorem and analysis of statistical calculations that defined the mean of calculated FFTs. In the literature, there are several studies that analyze errors during calculations made by this algorithm, errors such as rounding and truncation. However, errors related to the technical limitations of different devices or interferences occurred during data collection are not considered during the application of Fast Fourier Transform. Thus, this work shows the impact that this type of error causes in time domain and frequency domain. And, the results demonstrate an asymptotic behavior of the FFTs averages in the definition of Spectrum boundaries.

Keywords: FFT, Fourier Transform, Monte Carlo Method, Arithmetic Interval. Errors.

Lista de Figuras

3.1 Método de Monte Carlo 16

4.1 Sinal 1 21
4.2 Sinal 2 21
4.3 Sinal 3 22
4.4 Sinal 4 23
4.5 Sinal 1 e Seus Limites 23
4.6 Sinal 2 e Seus Limites 24
4.7 Sinal 3 e Seus Limites 24
4.8 Sinal 4 e Seus Limites 25
4.9 Sinal Coletado do Trabalho de Silva (2016) e Seu Espectro de Fourier 26
4.10 Sinal Coletado do Trabalho de Silva (2016) e Seus Limites 27

5.1 10 Espectros de Fourier do Sinal 1 30
5.2 10 Espectros de Fourier do Sinal 1 - Imagem Ampliada 30
5.3 2400 Espectros de Fourier do Sinal 1 31
5.4 2400 Espectros de Fourier do Sinal 1 - Imagem Ampliada 31
5.5 Médias das FFTs do Sinal 1 32
5.6 Limites do Sinal 1 no Domínio da Frequência 33
5.7 2400 Espectros de Fourier do Sinal 2 - Imagem Ampliada 34
5.8 Médias das FFTs do Sinal 2 35
5.9 Limites do Sinal 2 no Domínio da Frequência 36
5.10 2400 Espectros de Fourier do Sinal 3 - Imagem Ampliada 36
5.11 Médias das FFTs do Sinal 3 37

5.12 Limites do Sinal 3 no Domínio da Frequência 38
5.13 2400 Espectros de Fourier do Sinal 4 - Imagem Ampliada 38
5.14 Médias das FFTs do Sinal 4 39
5.15 Limites do Sinal 4 no Domínio da Frequência 40
5.16 2400 FFTs do Sinal Coletado em Silva (2016) 40
5.17 2400 FFTs do Sinal Coletado em Silva (2016) - Imagem Ampliada em 10 Hz . 41
5.18 Médias das FFTs do Sinal Coletado em Silva (2016) 41

Lista de Tabelas

5.1 Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 1 32
5.2 Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 2 34
5.3 Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 3 35
5.4 Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 4 39
5.5 Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal Coletado em Silva (2016) na Frequência $9{,}985$ Hz 41

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Objetivos 4

1.2 Contribuições da Dissertação 4

1.3 Organização do Trabalho 4

2 Revisão de Literatura **5**

3 Fundamentação Teórica **9**

3.1 Análise no Domínio da Frequência 9

3.1.1 Transformada de Fourier 10

3.1.2 Transformada Rápida de Fourier 11

3.1.3 Espectro de Fourier 12

3.2 Aritmética Intervalar 13

3.2.1 Teorema da Avaliação Finita 14

3.3 Método de Monte Carlo 15

3.4 Planejamento Experimental e Tamanho da Amostra 16

3.4.1 Planejamento Experimental 16

3.4.2 Determinação do Tamanho da Amostra 17

4 Metodologia **19**

4.1 Tamanho da Amostra 19

4.2 Sinais 20

4.3 Conjunto de Dados Testado 25

4.4 A Estimativa Intervalar da FFT 26

5 Resultados **29**

5.1 Resultados e Análises do Sinal 1 29

5.2 Resultados e Análises do Sinal 2 33

5.3 Resultados e Análises do Sinal 3 34

5.4 Resultados e Análises do Sinal 4 37

5.5 Resultados e Análises do Conjunto de Dados 39

5.6 Resultados e Análises Gerais 42

6 Conclusão **43**

6.1 Trabalhos Futuros 44

Referências Bibliográficas **45**

A Rotinas Computacionais **51**

A.1 Algoritmo Desenvolvido 51

CAPÍTULO 1

Introdução

A Transformada de Fourier é uma importante ferramenta matemática para analisar, projetar e entender sinais e sistemas inicialmente desenvolvida por Jean Baptiste Joseph Fourier. Por volta de 1807, Fourier finalizou uma de suas obras a respeito do assunto, motivado pelo fenômeno da propagação e difusão de calor, em que observou que as séries senoidais podem representar um sinal periódico. Embora o assunto fosse significativo na época, os argumentos dados por Fourier eram imprecisos. Porém, seus estudos e suas afirmações impulsionaram diversos outros trabalhos e pesquisas subsequentes sobre a transformada de Fourier. E, na engenharia elétrica, tais estudos são essenciais para as áreas de comunicação, processamento de sinais e em diversas outras áreas, incluindo antenas (Oppenheim e Willsky, 2010; Lathi, 2007).

Os cálculos numéricos da Transformada de Fourier realizados pelos computadores, utilizam valores amostrados de $x(t)$ para entender e representar um sinal. A ferramenta que realiza tais cálculos é a Transformada Discreta de Fourier (DFT - *Discrete Fourier Transform*), em que uma sequência finita de amostras igualmente espaçadas é convertida em uma sequência equivalente de amostras em tempo discreto, contendo um valor complexo de frequências. A DFT é amplamente utilizada em muitas aplicações práticas como no processamento de sinais digitais, processamentos de imagem, para resolver equações diferenciais, convoluções e muitos outros processos. Porém, a Transformada Discreta exige N^2 termos para realizar seus cálculos e cada termo envolve a avaliação de uma exponencial complexa ou uma função trigonométrica. Isto é computacionalmente complexo para grandes conjuntos de dados (Lathi, 2007; Kankelborg, 2014; Oppenheim e Willsky, 2010).

Assim, em busca da otimização dos cálculos da DFT, criou-se a Transformada Rápida de Fourier ou *Fast Fourier Transform* (FFT), que é um algoritmo eficiente para calcular os coe-

ficientes discretos de Fourier porém com uma economia significativa de tempo em relação a outros métodos. A FFT é bastante útil na análise de sistemas lineares, onde, em certos casos, a análise no domínio da frequência é mais fácil do que no domínio do tempo (Kaneko e Liu, 1970; Schatzman, 1996; Lyons, 2004; Lathi, 2007; Liu e Kreinovich, 2010). Porém, existem diversas versões deste algoritmo e alguns desenvolvedores e estudiosos se destacam no assunto:

- Cooley e Tukey (1965) que são responsáveis pelo mais famoso dos algoritmos da FFT. O seu tempo de computação é reduzido de N^2 para $N \log_2(N)$.
- Good (1958) e Thomas (1963) desenvolveram o PFA - *Prime-factor Algorithm* ou Algoritmo do Fator Primário, de tamanho $N = N_1 N_2$, em que N_1 e N_2 são primos.
- Rader (1968) desenvolveu e deu nome a seu algoritmo da Transformada Rápida de Fourier e reescreveu os cálculos da DFT como uma convolução.
- Bluestein (1970) também reescreve a DFT como uma convolução.
- Bruun (1978) que propõem em seu algoritmo que N seja uma potência de dois.

A preocupação dedicada aos erros encontrados ou propagados durante os cálculos da Transformada Rápida de Fourier é motivo de pesquisas desde os anos 70, quando Kaneko e Liu realizaram a análise da FFT conforme os padrões de Cooley e Tukey (Cooley e Tukey, 1965) utilizando vários tipos de sequências de dados de entradas e analisaram os erros no cálculo dos coeficientes de Fourier provenientes das limitações computacionais da aritmética de ponto flutuante (Schatzman, 1996; Kaneko e Liu, 1970). Outros estudos que consideram erros de arredondamento e truncamento gerados em diferentes cálculos das Engenharias ganham força e fundamento com a aplicação da aritmética de ponto flutuante descrita pelo Instituto de Engenheiros, Eletricistas e Eletrônicos (Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2008). Alguns exemplos destes estudos podem ser vistos nos artigos de (Ramos, 1971; Liu e Kaneko, 1975; Tran Thong e Liu, 1977; Tsao, 1987; Calvetti, 1991, 1992; Schatzman, 1996; Palfi e Kollar, 2009). E, novos trabalhos comprovam que os erros provenientes de arredondamento e truncamento, para diferentes funções, processos e condições iniciais, são significativos como é o caso dos artigos (Galias, 2013; Nepomuceno, 2014; Paiva et al., 2015; Rodrigues Júnior e Nepomuceno, 2015; Nepomuceno e Martins, 2016; Rodrigues et al., 2016).

Além dos erros citados e estudados nas pesquisas anteriores, existem outros tipos de erros que, em um grande número de casos, não são levados em conta nos cálculos da Transformada de Fourier e em outros processos. Estes erros são provenientes das limitações técnicas de diferentes aparelhos e instrumentos eletrônicos, que geralmente possuem uma quantidade de bits inferior aos computadores que processarão as informações coletadas. Estes dados também podem sofrer interferências e não serem tratadas pelo aparelho que as detecta. Assim, gerando mais erros que devem ser considerados e tratados antes da aplicação de qualquer análise ou cálculo.

O estudo realizado por Liu e Kreinovich (2010) leva em consideração um erro fixo e invariante no tempo para todo sinal antes dos cálculos da FFT e da convolução. Este erro fixo representa, por exemplo, a variação de um aparelho no momento de sua coleta de dados. Esta variação pode ser o percentual de desvio padrão do aparelho coletor ou até mesmo uma distração ou sinal inesperado coletado pelo usuário. Em resumo, o trabalho substitui os passos da FFT convencional por operações correspondentes da aritmética intervalar e demonstra como fazer os cálculos da convolução e da Transformada Rápida de Fourier em busca dos intervalos que representam o sinal de saída $y(t)$. Erros de arredondamento e truncamento não são considerados pelos autores (Liu e Kreinovich, 2010).

Embora tais estudos sejam importantes, os erros de quantização e os erros paramétricos, comumente, não são levados em conta. Tais erros são considerados erros relativos pois são apresentados em percentagem (%) ou partes por milhão (ppm) e são erros resultantes da divisão entre o erro da medição e o valor verdadeiro mensurado. E, ao calcular seu impacto em um processo é possível diminuir as aproximações que podem gerar erros maiores (Cabral, 2004). Esta indiferença com tais tipos de erros é a lacuna estudada neste trabalho e pode gerar resultados inconsistentes com o processo real e, mesmo usando supercomputadores, é preciso considerar e implementar esses erros relativos antes de qualquer estimativa ou análise computacional.

Portanto, mesmo com o uso de supercomputadores, processadores altamente rápidos e eficientes, mesmo com uso de máquinas cada vez mais precisas, se os dados de entrada possuem erros e limitações, é preciso considerá-los antes de aplicar qualquer operação. Diante deste problema, o intuito deste trabalho é demonstrar, de maneira similar, como considerar e tratar erros antes dos cálculos de uma FFT objetivando encontrar os limites do espectro de Fourier de um sinal e demonstrar o quão importante este processo é na busca de melhores resultados ou em busca de respostas que contemplem a solução verdadeira.

1.1 Objetivos

O principal objetivo do trabalho é demonstrar como encontrar os limites para o espectro de Fourier de um sinal, considerando a existência de um erro relativo $p\%$, ou seja, considerando, por exemplo, que o equipamento utilizado na captura do sinal tenha um percentual de erro de $\pm p\%$ nas medições. Para as análises estatísticas do estudo, os conceitos da Avaliação Finita juntamente com o método de Monte Carlo (Robert, 2004) foram usados.

1.2 Contribuições da Dissertação

O trabalho disponibiliza partes do código-fonte para testes, simulações e possíveis reproduções do que foi proposto e desenvolvido. E, o principal trabalho publicado em congresso durante o desenvolvimento desta dissertação é apresentado a seguir:

- Arcanjo, E. A. M., Nepomucen, E. G., Felix, L. B. (2016). Estimated FFT Interval. *Conference of the Computational Interdisciplinary Science, CCIS 2016*. (Arcanjo et al., 2016).

Neste artigo são apresentados os primeiros estudos e resultados obtidos considerando os conceitos da aritmética intervalar aplicados aos cálculos da Transformada Rápida de Fourier (FFT). O objetivo é demonstrar que os erros provenientes de equipamentos e de medições de um sinal devem ser levados em conta antes do cálculo da FFT. O percentual referente aos erros serve para definir os limites superior e inferior do sinal no domínio do tempo. E, como resultado, a variação média do sinal após a FFT possui um comportamento assintótico em relação ao número de eventos realizados.

1.3 Organização do Trabalho

Esta dissertação está organizada em capítulos. No capítulo 2, são levantados aspectos de revisão de literatura. No capítulo 3, é realizada a fundamentação teórica quanto ao tema do trabalho e os conceitos da Avaliação Finita e o método de Monte Carlo são detalhados. Em seguida, a metodologia proposta é apresentada no capítulo 4. O capítulo 5, por sua vez, apresenta a análise dos resultados. Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões.

CAPÍTULO 2

Revisão de Literatura

Desde que a FFT ou *Fast Fourier Transform* foi mostrada ao mundo científico em meados dos anos 60, ela vem sendo amplamente utilizada em diferentes áreas, casos e problemas. Porém, muitos estudos observam o impacto dos erros de arredondamento e truncamento nos cálculos desta incrível ferramenta e até onde eles são aceitáveis e não modificam o resultado final esperado (Kaneko e Liu, 1970; Ramos, 1971; Calvetti, 1991). Assim, neste capítulo serão abordados trabalhos e aspectos relacionados a esses erros durante cálculos da FFT.

Já nos anos 70, pouco tempo depois que a FFT foi lançada, os artigos de Kaneko e Liu (1970) e Liu e Kaneko (1975) questionavam a influência das limitações do computador em representar um número real de forma finita nos cálculos dos coeficientes de Fourier. Primeiramente, os autores apresentam alguns conceitos e equações a respeito da lógica de ponto flutuante utilizada por máquinas binárias aplicados aos cálculos da DFT (*Discrete Fourier Transform*) e as definições matemáticas dos erros de arredondamento e corte. E, ao final das simulações e gráficos observados, os resultados teóricos estão em concordância com o erro real observado ao se calcular a FFT da sequência de dados.

O trabalho de Ramos (1971) aprofundou os estudos realizados por Kaneko e Liu (1970) e outros, entretanto de forma mais generalizada e focando no algoritmo de Cooley e Tukey (1965). Gentleman e Sande (1966), autores descritos no artigo de Ramos, mostram que o erro de arredondamento acumulado é bem menor quando se usa a FFT do que quando se calcula diretamente. Ramos também descreve quais programas (ambos em linguagem de programação FORTRAN) foram utilizados para as simulações e quais configurações feitas. A conclusão do estudo é que o erro de arredondamento nos cálculos de senos e cossenos não é desprezível e também aplicável nos casos de adição e multiplicação, considerando que tanto os dados de

entrada quanto a precisão da máquina sejam de mesma representação em ponto flutuante. E, ao final do documento, descreve-se como proceder diante da diferença na representação das entradas e da máquina.

Outro trabalho em que o foco é a acumulação dos erros de arredondamento em uma FFT de ponto flutuante é o de Tran Thong e Liu (1977), onde um modelo estatístico é usado para prever o ruído de saída de um sinal considerando dois algoritmos comuns da FFT: o algoritmo Cooley-Tukey ou decimação no tempo (DIT) e o algoritmo Sande-Tukey ou decimação em frequência (DIF). Outro artigo similar é o de Tsao (1987) que também realiza a análise dos dados e dos erros dos dois tipos de algoritmos da FFT e mostra como resultado que o algoritmo de decimação no tempo é equivalente ao algoritmo de decimação na frequência.

Calvetti (1991) realiza a análise comparativa da FFT Cooley-Tukey e a DFT com os trabalhos realizados por Kaneko e Liu (1970) e Henrici (1986). Os resultados obtidos por Calvetti são essencialmente os mesmos de Kanelo e Liu e de mesma ordem daqueles encontrados por Henrici. E, as conclusões encontradas neste artigo verificam que, para um erro relativamente pequeno esperado para adição e multiplicação, a FFT tradicional produzirá resultados mais precisos. Já em Calvetti (1992), ocorre a comparação dos cálculos da convolução utilizando a FFT com dois algoritmos que calculam a convolução diretamente (algoritmo de Horner (Reimer, 1968) e somas em cascata) e novamente a FFT é destaque.

Na pesquisa realizada por Schatzman (1996), alguns trabalhos aqui citados são questionados como de Gentleman e Sande (1966), Kaneko e Liu (1970) e Calvetti (1991). Algumas conclusões de Schatzman reforçam os estudos de que a FFT é notavelmente estável, mais rápida e muito mais precisa do que a DFT. Porém, a Transformada Rápida de Fourier é bastante sensível à precisão da tabela seno/cosseno (fatores *twiddle*[1]).

Em Palfi e Kollar (2009) é investigado o erro de arredondamento da FFT de ponto fixo (ou FFT de bloco) reproduzindo o trabalho realizado por Welch (1969) com o uso de novas ferramentas como Matlab. Em seu artigo, Welch estudou o efeito do arredondamento na saída em cada estágio da FFT. Porém, os resultados obtidos em 2009 foram diferentes dos resultados de 1969. Provavelmente, algumas condições essenciais para réplica e comparação dos trabalhos foram ocultadas ou não documentadas por Welch.

Um trabalho diferente dos descritos anteriormente e que despertou grande interesse foi o ar-

[1] Fatores *twiddle* refere-se a qualquer um dos coeficientes de constante trigonométrica que são multiplicados pelos dados no decorrer do algoritmo rápido da transformada de Fourier (Gentleman e Sande, 1966).

tigo de Liu e Kreinovich (2010) em que, eles propuseram um novo algoritmo para o cálculo da FFT considerando um erro fixo para toda a faixa de operação de um sinal. Os passos da FFT foram substituídos por operações correspondentes na aritmética intervalar, com intuito de obter os intervalos representantes do sinal de saída $y(t)$ no tempo de $N \log_2(N)$. A conversão analógico para digital, as funções e as equações que representam um fenômeno físico real podem conter erros. Conforme visto nos estudos anteriores e descrito aqui por Liu e Kreinovich, os erros de arredondamento e truncamento são pequenos e não são levados em conta quando comparados aos erros de medição, parametrização e dados. Ao decorrer do artigo, os autores mostram como calcular os intervalos para as partes real e imaginária da Transformada de Fourier e realizam comparações entre os cálculos da FFT com a convolução.

CAPÍTULO 3

Fundamentação Teórica

Nas últimas décadas, grande parte dos sistemas baseados em circuitos analógicos de tempo contínuo passaram a ser implementados através de sistemas digitais de tempo discreto. Tal mudança ocorre, em grande parte, à maior facilidade de acesso a placas dedicadas e computadores de uso geral. Com isso, cientistas e engenheiros procuram representar os fenômenos físicos em funções de variáveis contínuas e equações diferencias. Diferentes técnicas numéricas são usadas e desenvolvidas para resolver essas equações e funções, em destaque para as Transformadas de Laplace e Fourier. Porém, as conversões de sistemas analógicos para digitais podem conter erros nos dados e parâmetros iniciais, erros de arredondamento e o erros de truncamento (Senda, Alexandre; Melo, Mario; Silva, Magno; Eisencraft, Marcio; Melo, Marco, 2005; Liu e Kreinovich, 2010).

Assim, diante destes erros e dos estudos realizados, percebeu-se que, para os cálculos da FFT, os erros existentes nas medições e provenientes de limitações técnicas de equipamentos, podem ser significativos, comparados aos erros de arredondamento e truncamento (Liu e Kreinovich, 2010).

3.1 Análise no Domínio da Frequência

O uso da representação de sinais e sistemas no domínio da frequência é tão importante quanto no domínio do tempo, pois equações diferenciais e convoluções no domínio do tempo se tornam operações algébricas no domínio da frequência. Alguns conceitos como filtros também são visualizados e analisados de forma simples e imediata no domínio da frequência (Oppenheim e Willsky, 2010).

3.1.1 Transformada de Fourier

Os primeiros estudos realizados por Fourier informavam sobre a possibilidade de representar um sinal periódico por somas senoidais, também conhecidas como Série de Fourier. A evolução desta série resultou em outro tipo de representação, não só de sinais periódicos mas não periódicos também. Ele obteve, a partir de integrais, a Transformada de Fourier (Oppenheim e Willsky, 2010). Esta transformada demonstra que funções periódicas e não periódicas podem ser representadas por senoides de frequências diferentes (Schatzman, 1996; Reis, 2008; Oppenheim e Willsky, 2010).

A definição da Transformada de Fourier em tempo contínuo $X(f)$ e sua inversa $x(t)$ são dadas a seguir conforme Cáceres (2007) e Reis (2008).

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\theta f t} dt \tag{3.1}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j\theta f t} df, \tag{3.2}$$

Em que $e^{j\theta} = e^{j2\pi} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$, $j = \sqrt{-1}$, t é o tempo, f é a frequência, $x(t)$ é o sinal e $X(f)$ é a Transformada de Fourier.

A transformada de Fourier pode ser aplicada tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto (DFT - Transformada Discreta de Fourier), sendo semelhantes em muitas propriedades, porém diferentes em outras. Por exemplo, um sinal periódico em tempo discreto é representado por uma série finita, ao contrário da representação infinita dos sinais periódicos de tempo contínuo (Oppenheim e Willsky, 2010). Desta maneira, a fórmula que define a DFT é vista a seguir, conforme Lathi (2007).

$$X_r = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}, \tag{3.3}$$

Em que $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, $r = 0, 1, 2, ..., N_0 - 1$ e $N_0 =$ número de dados (ou comprimento do sinal).

Para realizar os cálculos da Transformada Discreta de Fourier (e também da FFT, detalhada no tópico seguinte) é preciso definir o período inicial de amostragem N_0, o tempo de amostragem T_0 e a frequência de amostragem f_s, que deve ser, no mínimo, duas vezes maior que a maior frequência do sinal. Esse valor mínimo para a taxa de amostragem f_s é importante para

recuperar $x(t)$ de suas amostras $\overline{x}(t)$ e é também chamada de *taxa de Nyquist* (Lathi, 2007).

Contudo, mesmo com tanta aplicabilidade, a Transformada Discreta de Fourier (DFT) é dispendiosa e lenta comparada a outra poderosa ferramenta: FFT (*Fast Fourier Transform*) (Reis, 2008; Lathi, 2007; Oppenheim e Willsky, 2010).

Assim, o tópico seguinte detalhará a importância e as características da Transformada Rápida de Fourier, a qual é o foco deste trabalho e principal ferramenta utilizada.

3.1.2 Transformada Rápida de Fourier

A Transformada Rápida de Fourier é um algoritmo eficaz no processamento de sinais desenvolvido para otimizar os cálculos da DFT feito por Cooley e Tukey (1965) (autores mais conhecidos). É importante reforçar que mesmo reduzindo o número de operações, tanto a FFT quanto a DFT geram as mesmas respostas e são consideradas estáveis. Este algoritmo reduz a necessidade de adições e multiplicações complexas de ordem de N^2 até $N\log_2(N)$ e o único requisito (não é obrigatório mas simplifica os cálculos) é que os dados ou o número de valores da série seja uma potência de 2, por exemplo, 32, 64, 512, 1024, etc (Gentleman e Sande, 1966; Schatzman, 1996; Lathi, 2007; Reis, 2008; Palfi e Kollar, 2009).

Devido a grande economia de tempo em relação a outros métodos convencionais, a FFT encontrou aplicação em diversos campos como medição de espectros de potência, processamentos de sinais de voz, filtros digitais e processamento de sinais ópticos (Kaneko e Liu, 1970).

Existem várias versões do algoritmo de Cooley-Tukey mas eles podem ser agrupados em dois tipos: *decimação no tempo* e *decimação na frequência*. Essas duas formas são similares, porém a única diferença é que, ao invés de dividir x_n em duas sequências de amostras de números par e ímpar como é feito na decimação no tempo, x_n é dividido em duas sequências formadas pelos primeiros $\frac{N_0}{2}$ e os últimos $\frac{N_0}{2}$ dígitos (Lathi, 2007; Reis, 2008). Estas operações consistem em uma multiplicação complexa e duas somas complexas aplicadas a dois pontos da série de cada vez (Reis, 2008).

Neste trabalho, a função responsável pelo cálculo da FFT é a *fftn* do Matlab e esta função retorna a transformada de Fourier multidimensional usando um algoritmo rápido. A transformada multidimensional é equivalente a calcular a transformada unidimensional ao longo de cada dimensão do sinal de entrada e a saída é do mesmo tamanho que a entrada (MATLAB, 2013). Existem diversas outras funções no Matlab que também calculam a FFT e todas elas

baseadas na biblioteca FFT*W* (Frigo e Johnson, 2005). E, conforme Johnson e Frigo (2008), as funções para FFT são derivadas do algoritmo de Cooley-Tukey e parte do código fonte usado para desenvolvimento destas ferramentas pode ser visto a seguir.

Algoritmo 1: Parte do Código de Cooley-Tukey

1: **Entradas:** X, n, l;
2: **Saida:** Y[0,...,n-1];
3: *Y[0,...,n-1]* $\leftarrow$ **fft**(X, n, l);
4: **if** $n = 1$
5: *Y[0]* $\leftarrow$ X[0];
6: **else**
7: *Y[0,..,n/2-1]* $\leftarrow$ **fft**$(X, n/2, 2l)$;
8: *Y[n/2,..,n-1]* $\leftarrow$ **fft**$(X + l, n/2, 2l)$;
9: **for** $k \leftarrow 0$ *to* $(n/2) - 1$
10: $t \leftarrow$ Y[k];
11: *Y[k]* $\leftarrow t + w_n^k.Y[k + n/2]$;
12: *Y[k + n/2]* $\leftarrow t - w_n^k.Y[k + n/2]$;
13: **endFor**
14: **endIf**

Deste modo, o tópico seguinte falará sobre o Espectro de Fourier, também importante para o assunto e para as análises e conclusões sobre um sinal.

3.1.3 Espectro de Fourier

O espectro de frequência ou espectro de Fourier mostra o conteúdo de frequências do sinal com as amplitudes e fases das componentes senoidais. A partir deste espectro é possível entender e reconstruir um sinal conforme a equação da série de Fourier trigonométrica compacta (Eq. (3.4)) ou na forma exponencial (Eq. (3.5)) ou ainda na forma polar (magnitude e fase) (Eq. (3.6)). As três formas são correspondentes e descrita a seguir conforme Lathi (2007) e Oppenheim e Willsky (2010):

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \tag{3.4}$$

Onde $C_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ em que a_n e b_n são reais para todo n quando $x(t)$ é real.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \tag{3.5}$$

Onde $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_o} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$.

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j<X(j\omega)} \tag{3.6}$$

Assim, o espectro de Fourier é uma forma alternativa e totalmente equivalente de escrever um sinal. Tal representação também é conhecida como o domínio da frequência de um sinal $x(t)$, em contraste com a descrição domínio do tempo. Ambas as descrições são importantes e fornecem informações complementares sobre um sinal (Lathi, 2007).

3.2 Aritmética Intervalar

Na década de 60, a computação por intervalos foi proposta por Moore como uma ferramenta para diminuir os erros de arredondamento e truncamento na computação numérica de ponto flutuante (Goldberg, 1991; Moore, 1979a).

Computadores pessoais e supercomputadores possuem compiladores que são chamados para compilar algoritmos de ponto flutuante. E, todos os sistemas operacionais devem reconhecer e tratar as exceções de ponto flutuante como, por exemplo, *overflow* [1] e *underflow* [2] (Goldberg, 1991). Assim, entre as décadas de 70 e 80, um padrão para representação e operações com ponto flutuante foi desenvolvido: o padrão IEEE 754-2008 (Overton, 2001; Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2008; Rodrigues Júnior e Nepomuceno, 2015).

As técnicas intervalares são uma alternativa para alcançar os limites que asseguram que o resultado esteja dentro de uma faixa de valores (limites inferior e superior), controlando rigorosamente o erro do resultado. Dados e parâmetros iniciais são tratados como intervalos e a propagação do erro destes dados e dos erros de arredondamento e truncamento são tratados simplesmente pela utilização da aritmética de máquina (Overton, 2001; Mesquita, 2002).

As operações matemáticas básicas também sofrem alterações, pois não utilizam mais valores pontuais em suas entradas e, sim, intervalos e devem também retornar um intervalo solução. Desta forma, sejam os intervalos reais $[x]$, $[y] \in \mathbb{R}$ e $\underline{x}$ e $\underline{y}$ limites inferiores e $\overline{x}$ e $\overline{y}$ limites superiores dos intervalos. As operações intervalares da soma, subtração, multiplicação e divisão definidas por Moore (1979b) são descritas a seguir.

[1] *Overflow* ocorre quando o computador executa uma operação e o resultado não pode ser representado, por ser maior do que o valor máximo permitido.

[2] *Underflow* ocorre quando um cálculo matemático produz um resultado tão próximo de zero que não pode ser representado pela faixa de dígitos binários disponíveis no computador.

- Adição

$$[x] + [y] = [\overline{x} + \overline{y}, \underline{x} + \underline{y}]; \tag{3.7}$$

- Subtração

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]; \tag{3.8}$$

- Multiplicação

$$[x] \times [y] = [\min(\underline{xy}, \overline{xy}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}), \max(\underline{xy}, \overline{xy}, \overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y})] \tag{3.9}$$

- Divisão ($0 \notin [y]$)

$$[x] \div [y] = [x] \times \frac{1}{[y]} \tag{3.10}$$

3.2.1 Teorema da Avaliação Finita

Existem diferentes formas de analisar e aplicar os conceitos intervalares em diversos problemas em busca de melhores soluções. Assim, a principal forma de análise deste trabalho foi baseada no Teorema da Avaliação Finita ou *Finite Evaluation* conforme Moore (1979a) e sua definição é descrita a seguir.

Definição 1. *Seja M_1 e M_2 conjuntos arbitrários e seja $g : M_1 \to M_2$ um mapeamento arbitrário (função) de M_1 em M_2. Denote por $S(M_1)$ e $S(M_2)$ as famílias de subconjuntos de M_1 e M_2, respectivamente. Segundo W. Strother (1953) é chamado o mapeamento do conjunto-valores, $\overline{g} : S(M_1) \to S(M_2)$,*

$$\overline{g}(X) = \{g(x) : x \in X, X \in S(M_1)\} \tag{3.11}$$

a extensão unida de g. Também é possível escrever $\overline{g}(X) = \cup_{x \in X}\{g(x)\}$.

Assim, $\overline{g}(X)$ é a união em M_2 de todos os conjuntos contidos em um único elemento $g(x)$ para alguns x em X. Algumas vezes, $\overline{g}(X)$ é simplesmente denotado como a imagem do mapeamento g do conjunto X (Moore, 1979a). Ou seja, mesmo que $g(x)$ e X possam ser representados de forma finita, como um polinômio e um intervalo, respectivamente, no geral, ainda não se tem a representação finita para $\overline{g}(X)$. Isto significa que somente é possível encontrar uma

estimativa do intervalo de $\overline{g}(X)$ (Moore, 1979a). E, para estimar a extensão unida de g, neste trabalho, aplicou-se o método de Monte Carlo, descrito no tópico a seguir.

3.3 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo, desenvolvido pelo matemático Stanislaw Ulam, é um método de simulação estatística que utiliza sequência de dados aleatórios para desenvolver simulações. É utilizado em diferentes campos como em simulações complexas de fenômenos físicos, econômicos, financeiros, na computação, na geologia e em jogos (Neumann e Ulam, 1951; Robert, 2004; Yoriyaz, 2009).

A simulação de Monte Carlo realiza amostragens aleatórias repetidas vezes e o resultado desejado é obtido por meio de técnicas estatísticas (média, desvio padrão) sobre um determinado número de amostra que podem chegar a milhões (Neumann e Ulam, 1951; Yoriyaz, 2009). Para este método, espera-se uma boa estimativa do valor exato a medida que a quantidade de amostras processadas é suficientemente grande para o processo de interesse e a única exigência é que o sistema físico ou matemático seja modelado em termos de funções de densidade de distribuição de probabilidade (PDF - *Probability Distribution Function*), também chamada função de distribuição. A PDF é a probabilidade de uma variável aleatória X assumir valores menores ou iguais a t, onde t é um número real. E é representada pela função $F(t)$ descrita a seguir (Neumann e Ulam, 1951; Yoriyaz, 2009; Portnoi, 2005).

$$F(t) = P(X \leqslant t) \tag{3.12}$$

As propriedades de $F(t)$, conforme Portnoi (2005), são:

- $F(t)$ é uma função não-decrescente.
- $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$.
- $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.

A Figura 3.1 representa o processo de simulação utilizando o Método de Monte Carlo, em que seu primeiro componente é o gerador de números aleatórios que são repassados aos processos de interesse através das funções de distribuição (ou funções de densidade de distribuição

de probabilidade - PDF) e por fim, geram os resultados desta amostragem, ou seja, geram valores médios que são acumulados e manipulados para produzir o resultado desejado (Neumann e Ulam, 1951; Yoriyaz, 2009).

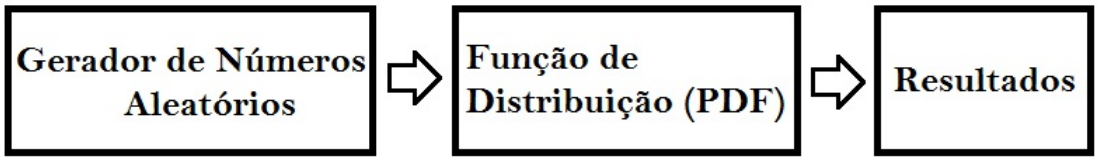

Figura 3.1: Representação do Método de Monte Carlo.

3.4 Planejamento Experimental e Tamanho da Amostra

O planejamento do experimento e a determinação do tamanho da amostra são tópicos importantes para validação de um trabalho. Assim, alguns conceitos estudados a respeito dos assuntos serão detalhados nos itens a seguir.

3.4.1 Planejamento Experimental

O planejamento experimental tem o objetivo de determinar a influência de diversas variáveis nos resultados de um dado sistema ou processo utilizando critérios científicos e estatísticos. A utilização de técnicas estatísticas do planejamento traz alguns benefícios ao pesquisador e aos seus estudos como redução do número de ensaios sem prejuízo na qualidade da informação, confiabilidade nos resultados, pesquisa em etapas, representação dos processos através de expressões matemáticas e elaboração de conclusões a partir de resultados qualitativos (Button, 2005).

Existem três técnicas para definição dos ensaios no planejamento experimental: uso de réplicas, uso de blocos e uso da aleatorização. A réplica consiste na repetição de um ensaio em condições preestabelecidas. O uso de blocos envolve comparações entre as condições de interesse na experimentação dentro de cada bloco, maior precisão e mais homogeneidade pois não utiliza o conjunto total de ensaios. E, por último, a aleatorização, onde a sequência dos ensaios e a escolha dos materiais são aleatórias (Shayib, 2013; Button, 2005).

Todos os métodos citados podem gerar uma amostra representativa da população sob condições adequadas do processo. A amostragem aleatória seleciona amostras de tamanho n e cada

unidade tem a mesma chance de ser selecionada na amostra. Diferentes amostras podem ser extraídas da mesma população e cada uma dessas amostras gera um resultado diferente para a média e a variação (ou desvio padrão) da amostra (Shayib, 2013).

Assim, neste trabalho, a técnica utilizada para definir os conjuntos de dados foi a aleatorização considerando uma margem de erro ou tolerância definida a partir do erro relativo $p\%$, detalhado na Metodologia. O uso da estimativa por intervalos é calculado com base nas informações da amostra e os parâmetros de estudo da população estão dentro de uma faixa com algum grau de confiança (Shayib, 2013). Para a seleção aleatória das amostras utilizou-se a função *rand* do MATLAB que, sendo utilizada sem nenhum parâmetro, realiza a escolha de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1. Porém, conforme a proposta deste trabalho, a escolha arbitrária dos dados deve ser feita dentro de um intervalo e para tal, a fórmula utilizada que seleciona um único número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $[a,b]$ é descrita na Eq. (3.13). O intervalo é definido a partir da tolerância $p\%$, que, aplicada ao sinal, determina os limites a e b utilizados na equação (MATLAB, 2013).

$$r = a + (b - a).rand(1), \tag{3.13}$$

em que a e b são os limites do intervalo $[a,b]$.

3.4.2 Determinação do Tamanho da Amostra

A determinação do tamanho da amostra também é importante para a validação de um trabalho e, antes de qualquer análise, aquisição e processamento de dados, é preciso determinar o número de amostras para o experimento e isto implica que o pesquisador assuma um valor de incerteza relacionado à estimativa dos parâmetros populacionais de cada variável (Miot, 2011; Eloi e Felix, 2017; Weyne, 2004).

O primeiro passo é a escolha da fórmula conforme o tipo de estudo e da variável analisada. A estimativa populacional representada por uma variável *quantitativa* deve dispor do desvio padrão da variável, selecionar o nível de significância da estimativa e o erro amostral máximo tolerado (em unidades de médias). A estimativa representada por uma variável *qualitativa* deve dispor da frequência populacional de resultados da variável, selecionar o nível de significância da estimativa e o erro amostral máximo tolerado (em percentual) (Miot, 2011; Eloi e Felix,

2017). Para este estudo e considerando os resultados descritos em Arcanjo et al. (2016), a variável é quantitativa pois pode assumir diferentes valores dentro de intervalo médio. Assim, a fórmula para definir o tamanho das amostras quando o desvio padrão ou as frequências populacionais são conhecidas é descrita a seguir conforme Miot (2011); Shayib (2013); Eloi e Felix (2017).

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta}{E} \right)^2, \tag{3.14}$$

Em que n é o tamanho da amostra, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ é o valor crítico para o grau de confiança desejado, usualmente: $1{,}96$ (95%), δ é o desvio padrão populacional da variável e E é o erro, usualmente: $\pm 5\%$ da proporção dos casos (precisão absoluta) ou $\pm 5\%$ da média ($1{,}05\times$ média) (Miot, 2011). A condição para que o erro padrão (ou tamanho da amostra) seja $\pm 5\%$ da população é importante para que o resultado obtido de um indivíduo seja independente de qualquer outro indivíduo da amostra (Shayib, 2013).

Porém, quando o desvio padrão ou as frequências populacionais da variável não são conhecidos ou não existem dados semelhantes na literatura, é preciso considerar outra fórmula, descrita na Eq. (3.15) . E, quando o tamanho n da amostra aleatória aumenta, a média da amostra torna-se muito próxima da média da população, e o desvio padrão da distribuição amostral diminui à medida que n aumenta (Miot, 2011; Shayib, 2013).

$$n = 0{,}25 \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 \tag{3.15}$$

CAPÍTULO 4

Metodologia

Neste capítulo são expostas as etapas, os sinais testados, as justificativas do trabalho com base nos estudos descritos na Fundamentação Teórica e o código fonte também é disponibilizado para futuras réplicas ou testes do que foi realizado. Assim, a primeira etapa é a determinação do número de amostras para que o estudo seja validado e que o esforço computacional seja o menor possível diante do planejado. A segunda etapa descrita é a escolha dos sinais onde os testes consideraram quatro sinais teóricos diferentes e um conjunto de dados disponível por Silva (2016). E, por último, o desenvolvimento do algoritmo que realiza a estimativa de $\overline{g}(X)$, ou seja, a estimativa intervalar da FFT.

4.1 Tamanho da Amostra

Conforme visto na Fundamentação Teórica, quando o desvio padrão ou as frequências populacionais não são conhecidas, é preciso adotar a Eq. (3.15). Então, considerando $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, o erro $E = 2\%$ (conforme Shayib (2013)) e aplicando tais valores na equação, obtêm-se o tamanho da amostra $n = 2401$, conforme mostrado pela Eq. (4.1). Portanto, esse número de amostras n encontrado também é justificado no trabalho de Arcanjo et al. (2016), em que os testes foram aplicados em 1000 amostras e já com esta quantidade de amostras é possível perceber o comportamento assintótico das médias.

$$n = 0{,}25 \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 = 0{,}25 \left(\frac{1{,}96}{0{,}02} \right)^2 = 2401. \tag{4.1}$$

4.2 Sinais

Os sinais simulados foram construídos a partir da função trigonométrica de Fourier na forma compacta (Lathi, 2007) e são descritos a seguir.

- Sinal 1

$$x(t) = X_0 + X_1 \cos(2\pi f_1 t + \pi/2) + X_2 \cos(2\pi f_2 t + \pi/6); \tag{4.2}$$

  onde as amplitudes do sinal são $X_0 = X_1 = X_2 = 20$; as frequências do sinal são $f_1 = 50$ Hz e $f_2 = 100$ Hz e a frequência de amostragem $F_s = 8(f_2) = 800$ Hz.

- Sinal 2

  A função que representa o Sinal 2 é a mesma da Eq. (4.2) porém as amplitudes e as frequências do sinal foram modificadas, sendo, $X_0 = 13$, $X_1 = 17$, $X_2 = 21$ e $f_1 = 41$ Hz e $f_2 = 89$ Hz. A frequência de amostragem $F_s = 8(f_2) = 712$ Hz.

- Sinal 3

$$x(t) = X_1 \cos(2\pi f_1 t); \tag{4.3}$$

  onde a amplitude do sinal $X_1 = 20$; a frequência significativa do sinal $f_1 = 50$ Hz e a frequência de amostragem $F_s = 8(f_1) = 400$ Hz.

- Sinal 4

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi f_1 t); \tag{4.4}$$

  onde a amplitude do sinal $X_1 = 20$; a frequência significativa do sinal $f_1 = 50$ Hz e a frequência de amostragem $F_s = 8(f_1) = 400$ Hz.

Todos os sinais possuem o mesmo tamanho $L = 1024$, sendo este valor potência de 2, critério importante e necessário para sucesso e otimização dos cálculos das FFTs. E, para estes sinais analisados, considera-se que o sinal não possui ruídos.

A representação dos sinais no domínio do tempo e no domínio da frequência (espectro de Fourier) são vistos a seguir, respectivamente, nas figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

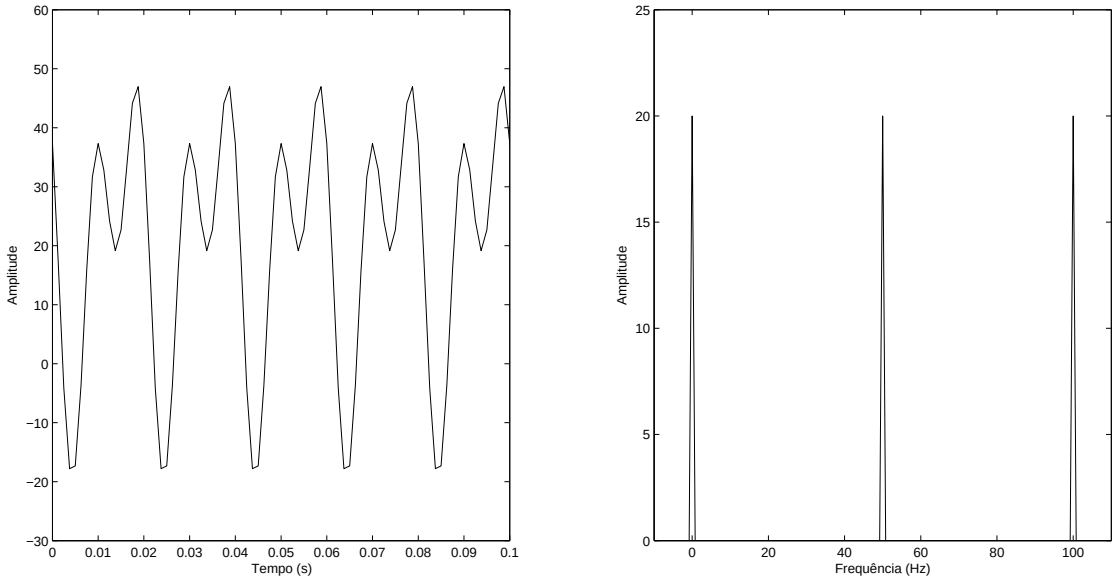

Figura 4.1: Sinal 1 e seu Espectro de Fourier

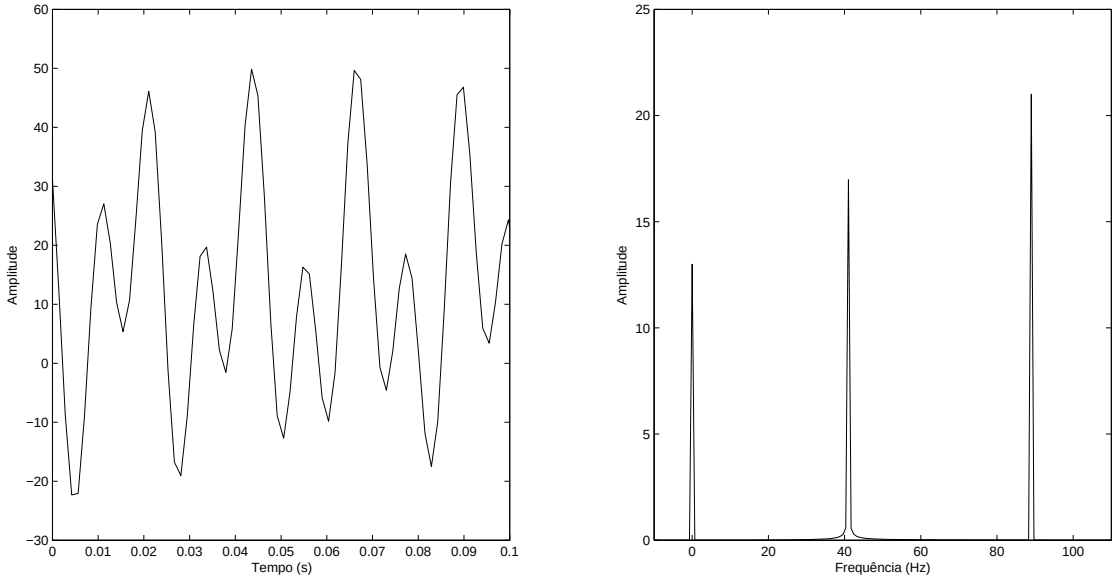

Figura 4.2: Sinal 2 e seu Espectro de Fourier

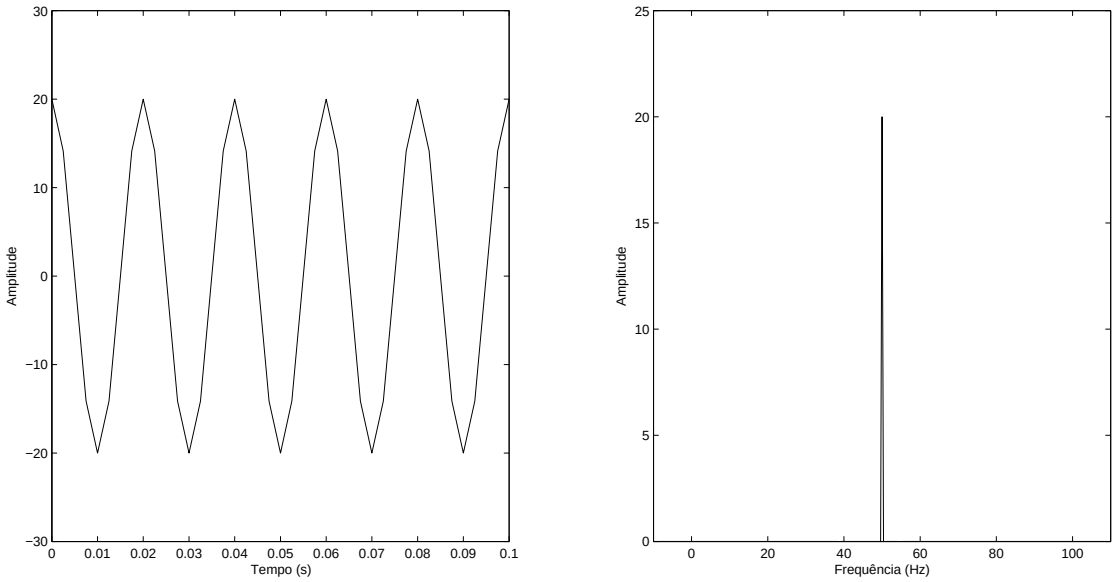

Figura 4.3: Sinal 3 e seu Espectro de Fourier

O valor que corresponde ao erro relativo utilizado para definir os limites do sinal no domínio do tempo foi de 10%. Este valor é baseado nos percentuais de erros encontrados em capacitores, resistores e outros equipamentos elétricos. Porém, este erro pode variar ao decorrer do tempo, mas para este trabalho considere o erro invariante durante todo o tempo do sinal. Assim, aplicando o erro aos sinais, os limites inferior e superior, também chamados de intervalos do sinal, são encontrados e mostrados a seguir nas figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8. Para encontrar os limites é preciso multiplicar o erro ao sinal e depois subtrair este valor do valor original do sinal, encontrando assim o limite inferior. E, multiplicando o erro ao sinal e adicionando este valor ao valor original do sinal, encontra-se o limite superior.

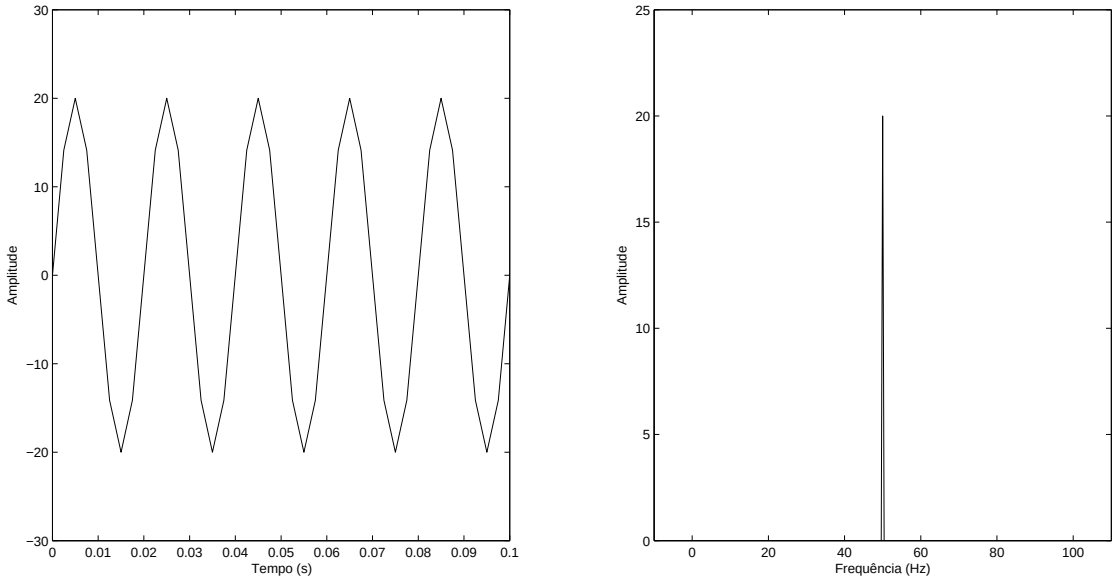

Figura 4.4: Sinal 4 e seu Espectro de Fourier

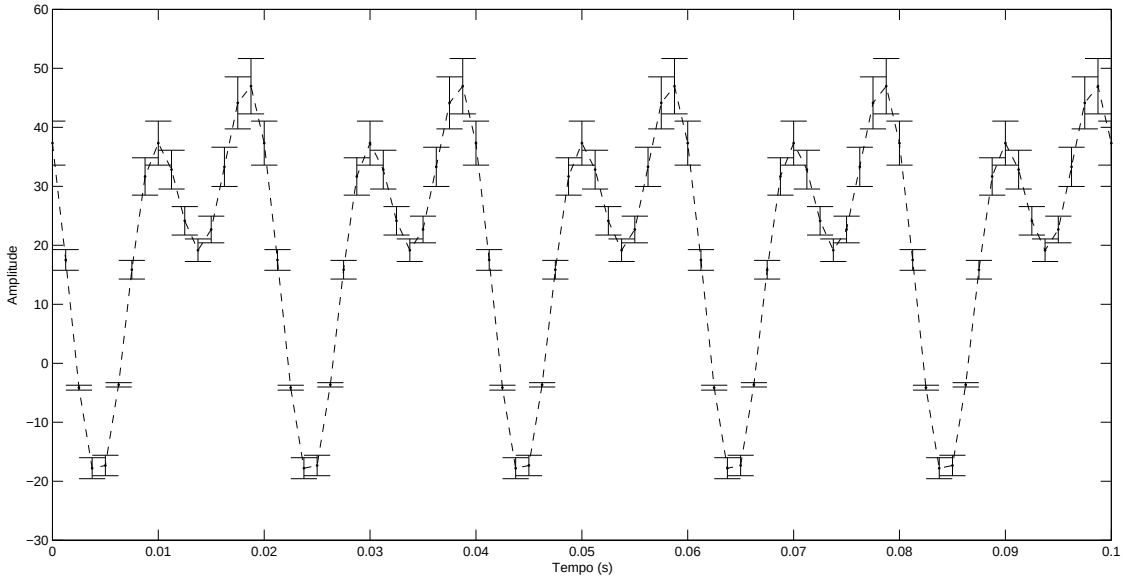

Figura 4.5: Sinal 1 e Seus Limites

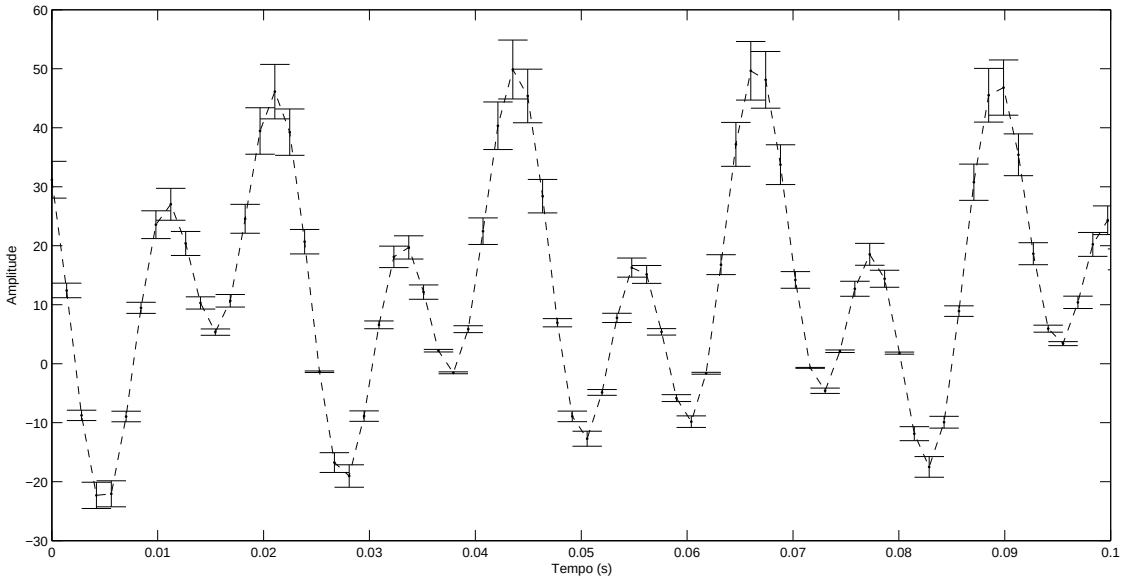

Figura 4.6: Sinal 2 e Seus Limites

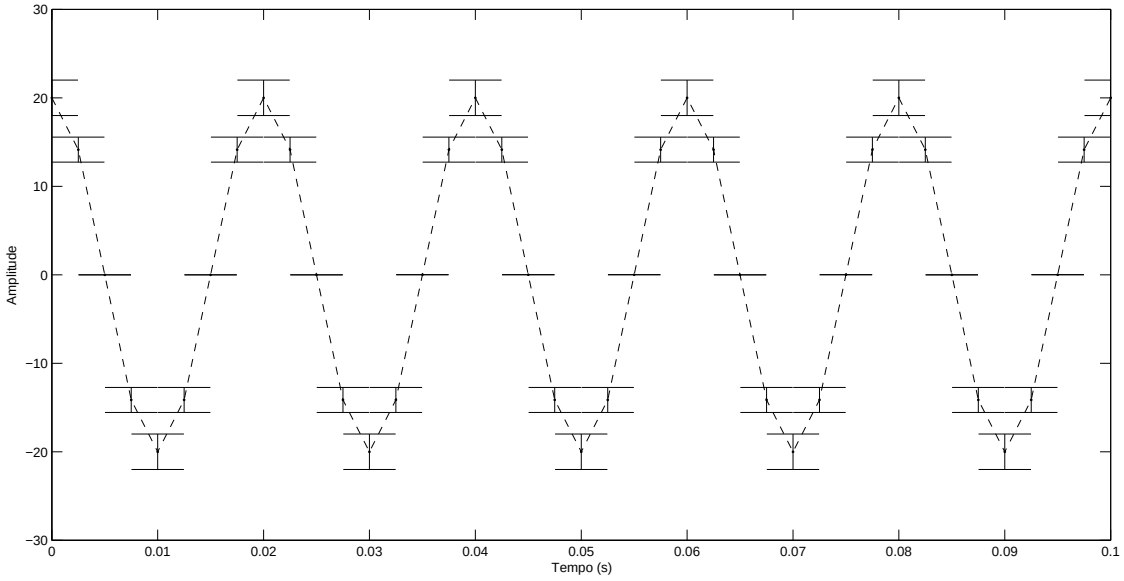

Figura 4.7: Sinal 3 e Seus Limites

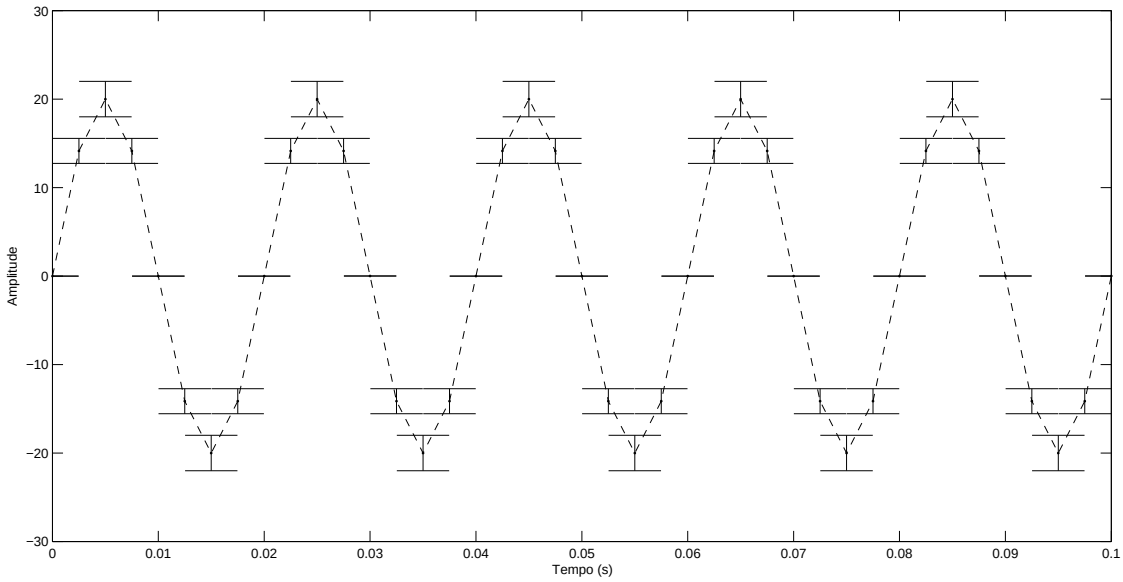

Figura 4.8: Sinal 4 e Seus Limites.

4.3 Conjunto de Dados Testado

As simulações também foram aplicadas em um conjunto de dados disponibilizados pelos autores do trabalho Silva (2016). Nele, os autores buscam os limiares auditivos de sinais coletados em eletroencefalográficos utilizando a Magnitude Quadrática da Coerência Múltipla (MMSC) empregada na detecção de Respostas Auditivas em Regime Permanente (ASSR) evocadas por tons modulados em amplitude na faixa de 40 Hz (Silva, 2016).

Foram coletados dados de 10 voluntários, estimulados de forma monaural, nas intensidades de 15, 20, 25, 30, 40 e 50 dB SPL (*Sound Pressure Level*), para frequências portadoras de $0{,}5$, 1, 2 e 4 kHz (Silva, 2016). Porém, para este trabalho, apenas dados de um dos voluntários, selecionado de forma aleatória, foram utilizados nas simulações. Para cada uma das intensidades de dB SPL existe um conjunto de dados. Neste, foram selecionadas as informações de 15 dB, coletadas e armazenadas em tabelas com 23 colunas e 1024 linhas. Cada uma das colunas representa um eletrodo e as linhas, parte do sinal coletado. A frequência de amostragem f_s para o conjunto de dados é $601{,}5$ Hz (Silva, 2016). A Figura 4.9 mostra o sinal coletado em Silva (2016) e o seu espectro de Fourier. Observe e considere nos resultados e nas conclusões referentes a este conjunto de dados a frequência próxima de 10 Hz mostrada no Espectro. Para esta frequência, o espectro não ultrapassa a amplitude 3, sendo aproximadamente $2{,}951$.

O valor para o erro relativo foi o mesmo aplicado aos sinais 1, 2, 3 e 4, ou seja, $p = 10\%$.

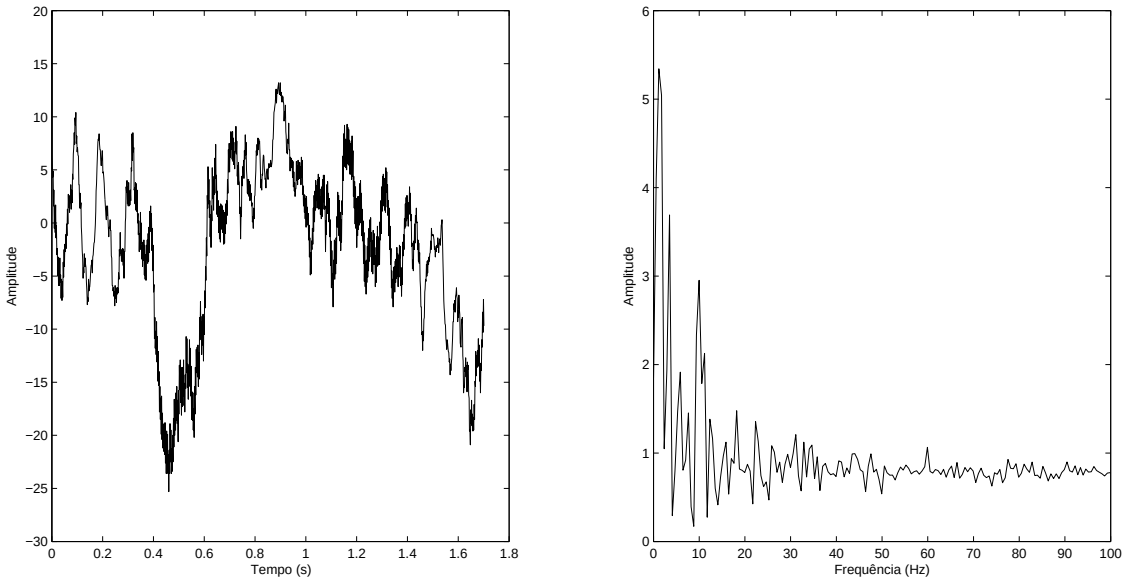

Figura 4.9: Sinal Coletado do Trabalho de Silva (2016) e Seu Espectro de Fourier.

Então, aplicando o erro ao sinal coletado, o limite inferior e superior, ou, os intervalos deste sinal são visualizados na Figura 4.10. O erro relativo indicado neste sinal pode representar os erros nos sensores, de quantização e condicionamento do sinal. Por outro lado, o valor de 10% é hipotético. A determinação deste valor requer um estudo minucioso do aparato experimental utilizado em Silva (2016) e foge ao escopo deste trabalho.

4.4 A Estimativa Intervalar da FFT

A estimativa da FFT intervalar foi baseada no teorema da Avaliação Finita e no método de Monte Carlo descritos na Fundamentação Teórica. O Algoritmo 2 representa o pseudocódigo dessa estimativa e o código fonte completo pode ser visualizado no Apêndice A.1.

A primeira linha do pseudocódigo 2 mostra os parâmetros iniciais ou as entradas do algoritmo. Estes dados são os mesmos durante toda a execução do código. A variável *parametrosFFT* representa os seguintes parâmetros: frequência de amostragem (8 vezes a maior frequência do sinal), tempo de amostragem e período de amostragem do sinal. A variável *p* representa o erro relativo de valor 10% e a variável n, o tamanho da amostra conforme planejamento experimental e cálculo feito no tópico 4.1, sendo $n = 2400$. E, por fim, a variável *sinal* que representa um dos sinais descritos na seção anterior.

Remetendo ao estudo realizado sobre a aritmética intervalar, o passo seguinte foi a aplicação

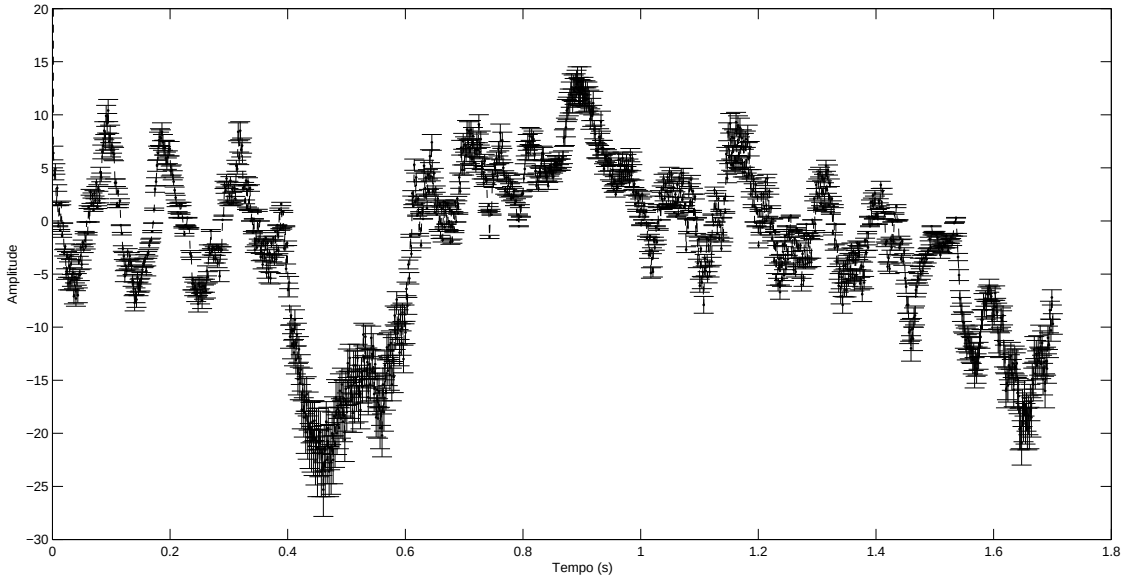

Figura 4.10: Sinal Coletado do Trabalho de Silva (2016) e Seus Limites.

do erro relativo ao sinal no domínio do tempo, determinando, assim, os limites ou intervalos $[a,b]$ de cada ponto do sinal. Este passo pode ser visto nas linhas 3 e 4 do Algoritmo 2.

A variável *tamanhoSinal* na linha 5 recebe o comprimento ou o tamanho do *sinal*, ou seja, os sinais simulados possuem o tamanho de 1024 pontos.

Para realizar as simulações de Monte Carlo, uma sequência de dados aleatórios é necessária e para tal seleção utilizou-se a função *rand* para intervalos. Como mostra o laço de repetição *for* da linha 8. Esta função é executada até chegar ao tamanho do sinal, ou seja, ela é executada para os 1024 limites do sinal gerando assim um sinal aproximado do sinal original considerando a intervenção do erro p.

Após a escolha aleatória dos dados, a próxima ação foi realizar o cálculo da FFT com estes dados utilizando a função *fftn* descrita na linha 10. Esta função recebe os dados do sinal no domínio do tempo e os parâmetros referentes aos cálculos da FFT. Retorna dados do sinal no domínio da frequência. Esse cálculo da FFT repete diversas vezes, iniciando com 10 FFTs e, em seguida, realizando a média e o desvio padrão desses 10 cálculos, aumentando de 10 em 10 até chegar a 2400 FFTs conforme o cálculo de determinação do número de amostras descrito na seção 4.1.

E, por fim, considerando as médias encontradas para cada grupo de FFTs, calcula-se a média das médias dos desvios padrões para definir então a variação ou os limites das frequências do

Algoritmo 2: Estimativa Intervalar da FFT

1: **Entradas:** sinal, n, p, parametrosFFT;
2: **Saida:** FFTintervalar;

3: *SinalInf* ← sinal - (p.sinal);
4: *SinalSup* ← sinal + (p.sinal);
5: *tamanhoSinal* ← **length**$(sinal)$;
6: $t \leftarrow 10$;

7: **while** $t < n$
8: **for** $j \leftarrow 0$ *to* $tamanhoSinal$
SinalLimitado ← SinalInf + (SinalSup - SinalInf).**rand**(1);
9: **endfor**
10: *FFTSinalLimitado* ← **fftn**(SinalLimitado,parametrosFFT);
11: *media* ← **mean**(FFTSinalLimitado);
12: *desvio* ← **std**(FFTSinalLimitado);
13: $t \leftarrow$ t + 10;
14: **endwhile**

Espectro de Fourier, ou seja, os limites do sinal no domínio da frequência.

Todos estes passos foram realizados para os sinais 1, 2, 3, 4 e para parte do conjunto de dados de Silva (2016) descritos na seção 4.2 e seus resultados e análises serão detalhados no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5

Resultados

Os resultados obtidos foram possíveis após os cálculos de diversos conjuntos de FFTs, aplicação de métodos estatísticos como Monte Carlo e funções de distribuição conhecidas. As seções seguintes mostram os resultados e análises de cada sinal.

5.1 Resultados e Análises do Sinal 1

Os resultados encontrados para o Sinal 1 conforme Eq. (4.2) podem ser vistos nesta seção. A Figura 5.1 mostra o conjunto de 10 FFTs, ou seja, os espectro de Fourier para 10 conjuntos de dados aleatórios intervalares. E, na Figura 5.2, após o aumento da imagem 5.1, é possível ver claramente diversos pontos próximos e concentrados entre as amplitudes $19{,}92$ e $20{,}07$. Lembrando que as frequências deste sinal são 50 e 100 Hz e todas suas amplitudes são 20. Assim, considerando um grupo pequeno de amostras já é possível perceber que ocorre uma pequena variação ou interferência nos cálculos da FFT de um sinal quando consideramos um erro relativo impactando no domínio do tempo.

Porém, considerando o número de amostras determinado no tópico 4.1, as Figuras 5.3 e 5.4 mostram os testes realizados com 2400 conjuntos de dados aleatórios intervalares e os resultados ficam entre $19{,}8$ e $20{,}2$, sendo uma variação pequena entre as amostras.

Assim, após todos os cálculos das FFTs e as médias encontradas, os resultados obtidos das estatísticas foram: a média das médias do desvio padrão, igual $0{,}047337$, e, multiplicando este valor por 3, considere a variação do espectro igual a $0{,}142010$, para este sinal nas condições descritas durante todo o processo.

Outro principal resultado obtido para cada sinal é o gráfico das médias dos desvios padrões

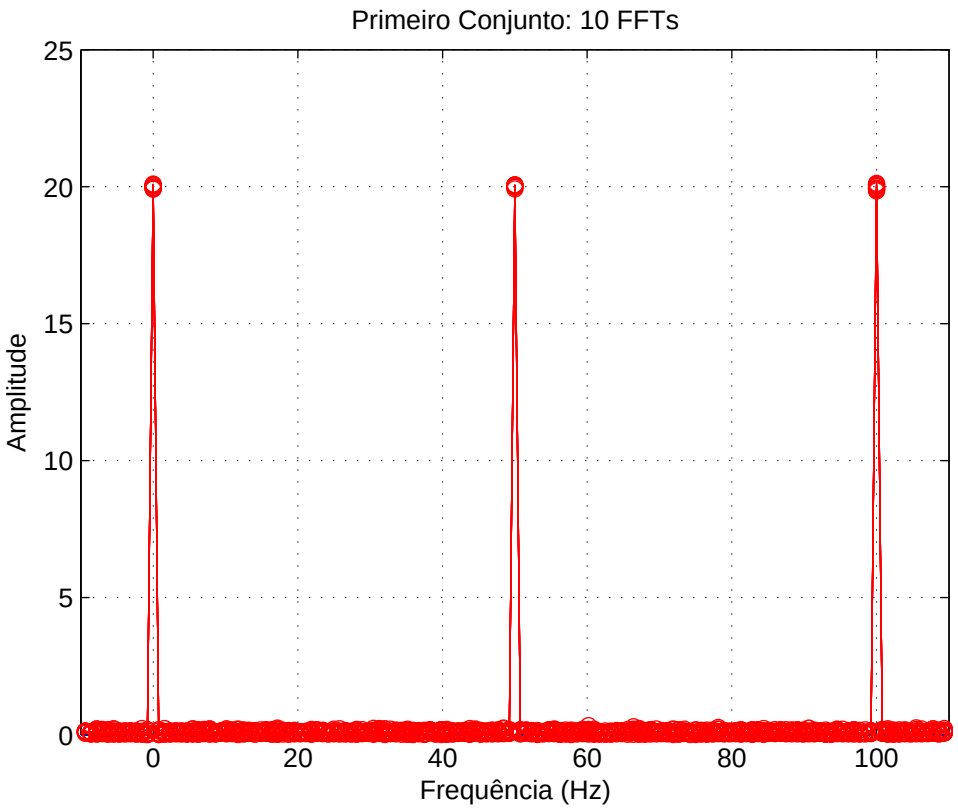

Figura 5.1: Espectros de Fourier do Sinal 1 considerando 10 conjuntos de dados aleatórios intervalares

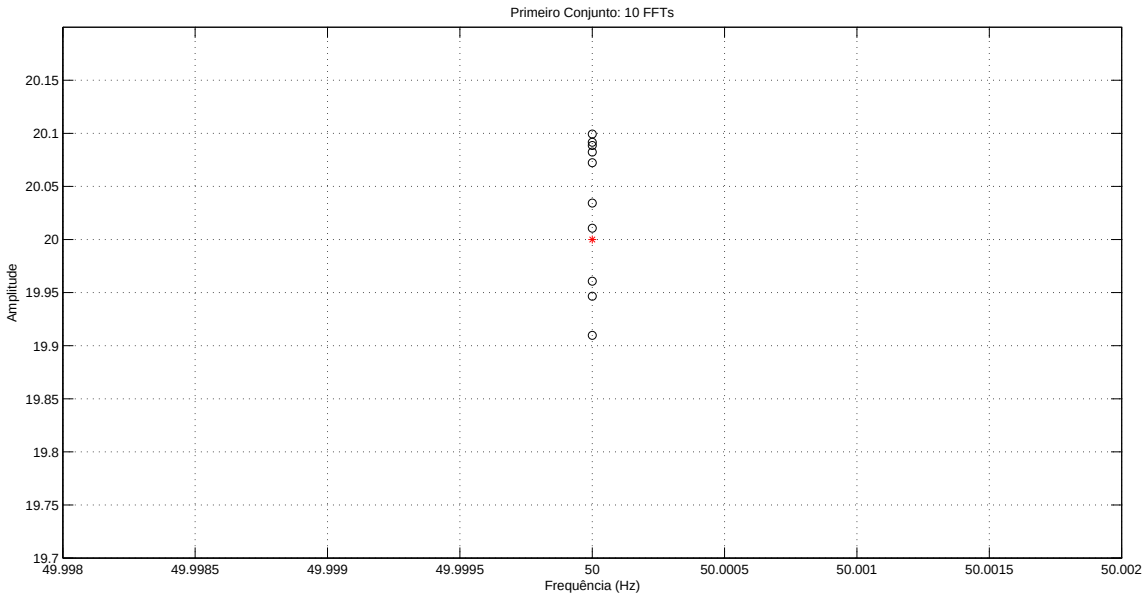

Figura 5.2: Espectros de Fourier do Sinal 1 Considerando 10 Conjuntos de Dados Aleatórios Intervalares - Imagem Ampliada na Frequência de 50 Hz e Amplitude 20.

das FFTs, mostrado na Figura 5.5. Nesta Figura é possível observar, no eixo x, as quantidade de FFTs e, no eixo y, as médias dos desvios de cada conjunto. Percebe-se um comportamento

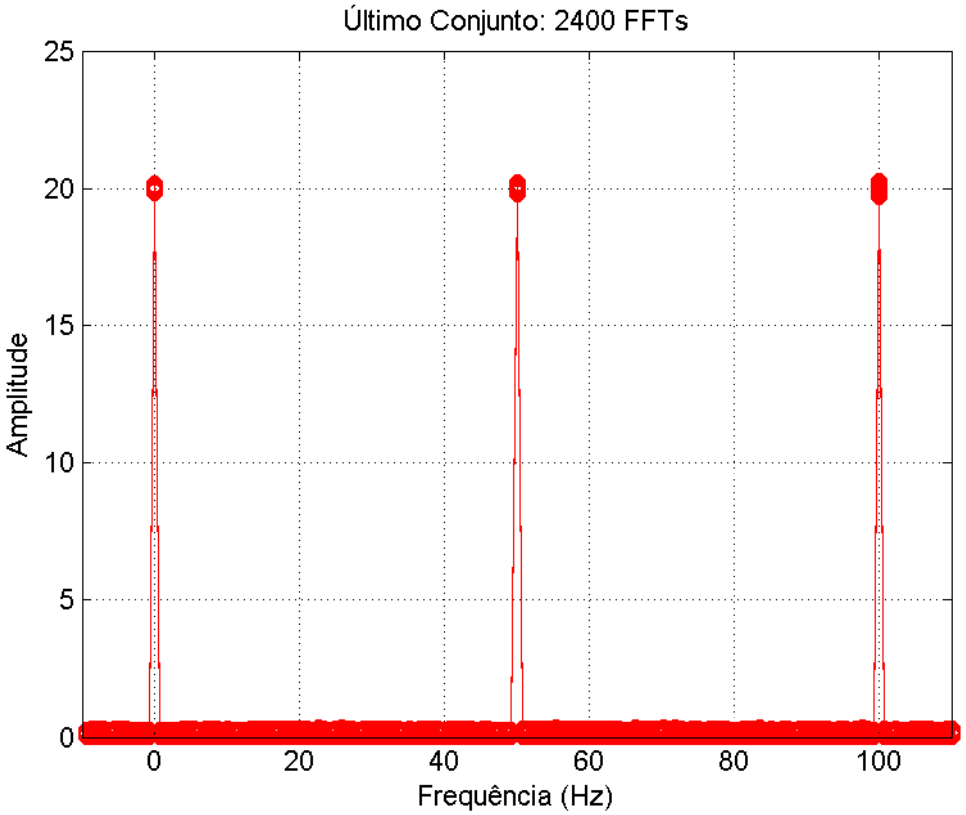

Figura 5.3: Espectros de Fourier do Sinal 1 considerando 2400 conjuntos de dados aleatórios intervalares

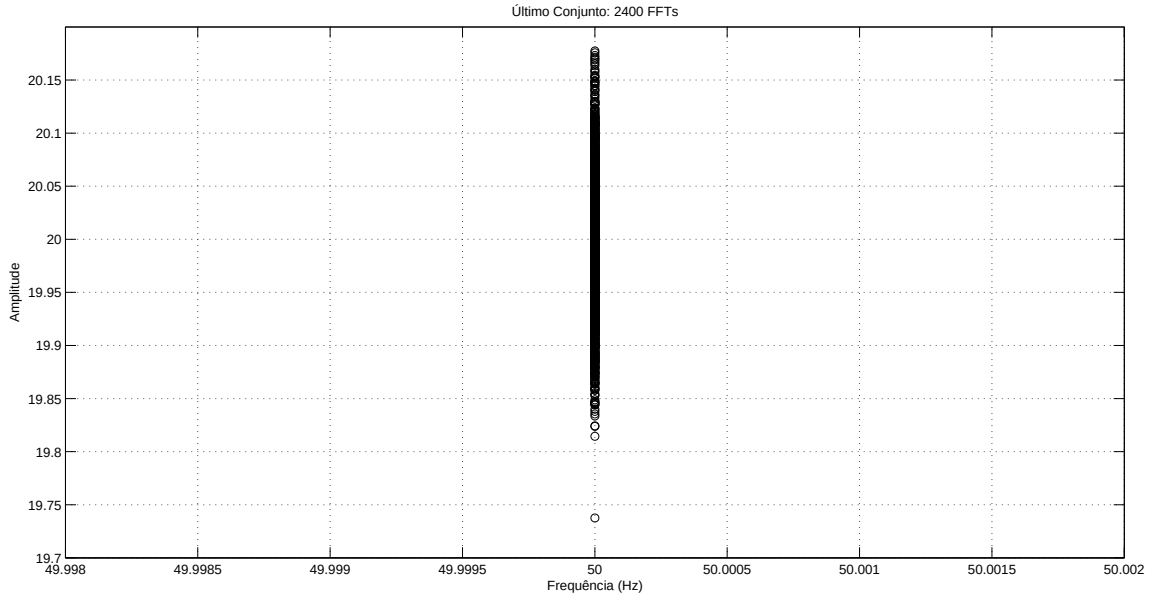

Figura 5.4: Espectros de Fourier do Sinal 1 Considerando 2400 Conjuntos de Dados Aleatórios Intervalares - Imagem Ampliada na Frequência de 50 Hz e Amplitude 20.

assintótico da variação das médias em relação ao número de eventos (FFTs), pois, para o sinal em questão, a maioria das médias se encontram entre os valores $0{,}0458$ e $0{,}0476$.

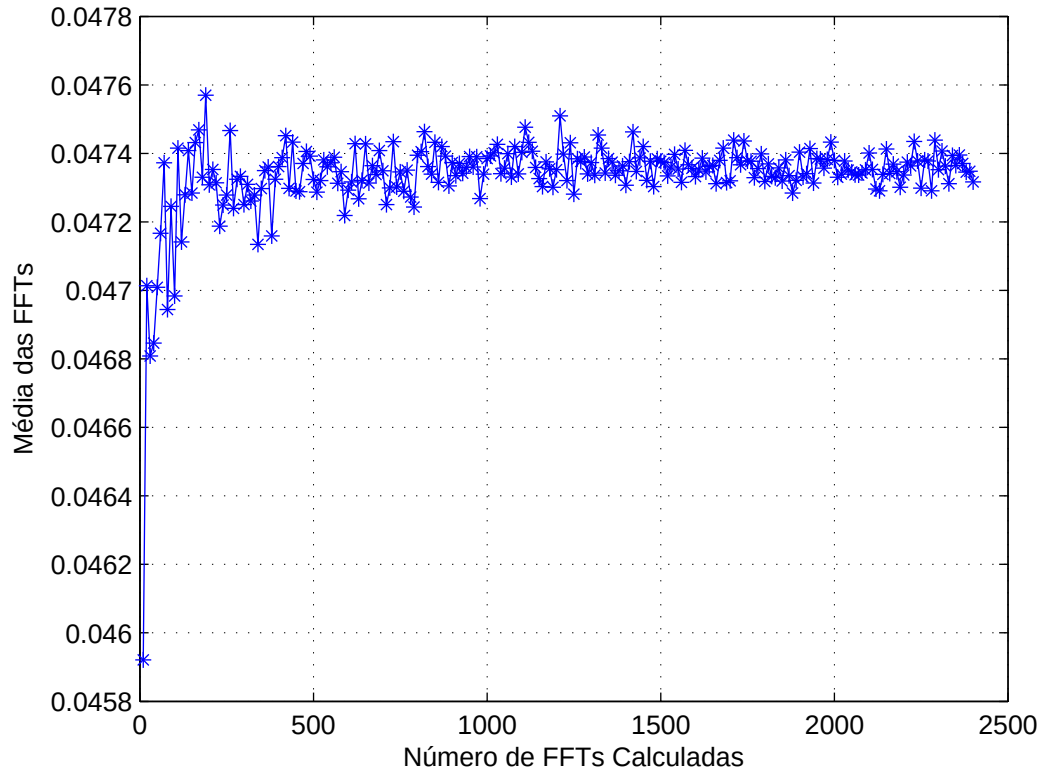

Figura 5.5: Médias das FFTs do Sinal 1

Desta maneira, considerando esta pequena faixa de variação, o erro relativo considerado e aplicado ao sinal no domínio da frequência, multiplicado por 3, é $0{,}142010$. A Figura 5.6 mostra o espectro de Fourier do sinal 1 (em barras) aplicando o erro relativo final calculado e, definindo, enfim, os limites do sinal no domínio da frequência, representados pelos intervalos no topo das barras. Os intervalos obtidos para cada amplitude do sinal 1 podem ser vistos na tabela 5.1.

	Frequência 0 Hz	Frequência 50 Hz	Frequência100 Hz
Amplitude do Sinal	20	20	20
Amplitude Inferior	19,858	19,858	19,858
Amplitude Superior	20,142	20,142	20,142

Tabela 5.1: Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 1.

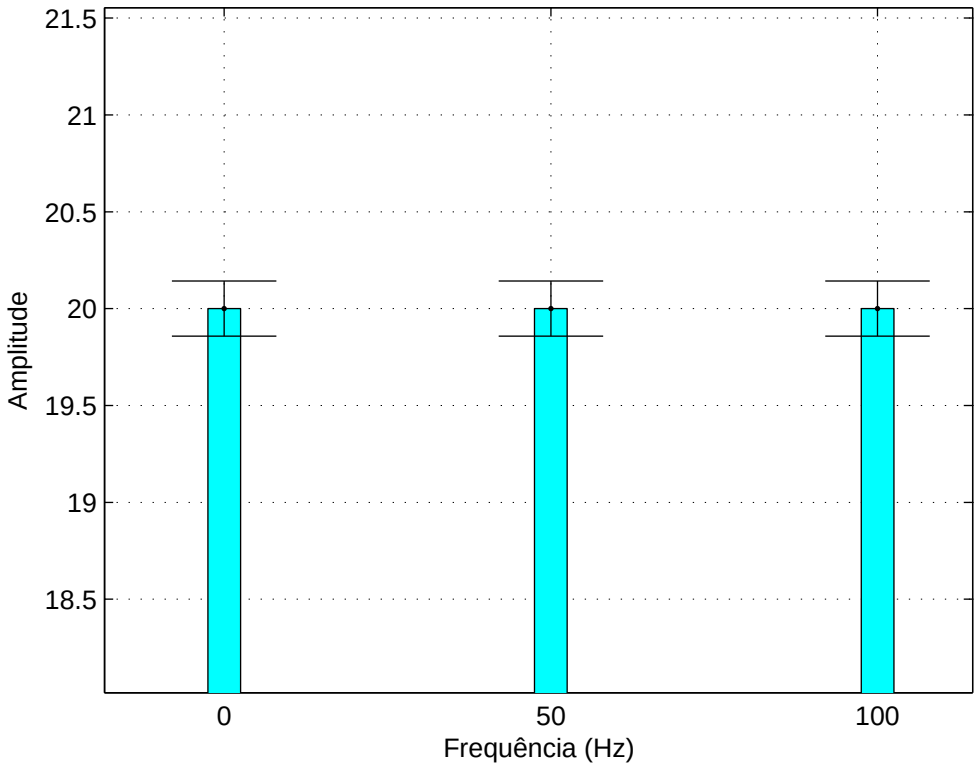

Figura 5.6: Limites do Sinal 1 no Domínio da Frequência.

5.2 Resultados e Análises do Sinal 2

Os mesmos passos e gráficos foram gerados para o Sinal 2, o qual a equação é a mesma representada pela Eq. (4.2), porém considerando diferentes amplitudes e frequências de valores primos, conforme descrito na Metodologia, seção 4.2. Assim, o primeiro resultado mostrado para o Sinal 2 é a Figura 5.7, onde são visualizados os 2400 espectros de Fourier ampliados em 41 Hz e amplitude 17. É possível ver que os espectros variam pouco de uma amostra para outra, porém, é importante reforçar que um erro relativo de 10% aplicado a um sinal no domínio do tempo também implicará em um erro no domínio da frequência.

A Figura 5.8 mostra o gráfico das médias dos desvios padrões das FFTs para o sinal 2. É possível notar novamente o comportamento assintótico da variação das médias em relação ao número de eventos, pois a maioria das médias se encontram entre os valores $0{,}0383$ e $0{,}0398$.

Assim, considerando esta pequena faixa de variação dos espectros, o erro relativo considerado e aplicado ao sinal 2 no domínio da frequência, multiplicado por 3, é $0{,}118571$. A Figura 5.9 mostra o espectro de Fourier do sinal 2 (em barras) aplicando o erro relativo final calculado e, definindo, enfim, os limites do sinal no domínio da frequência, representados pelos intervalos

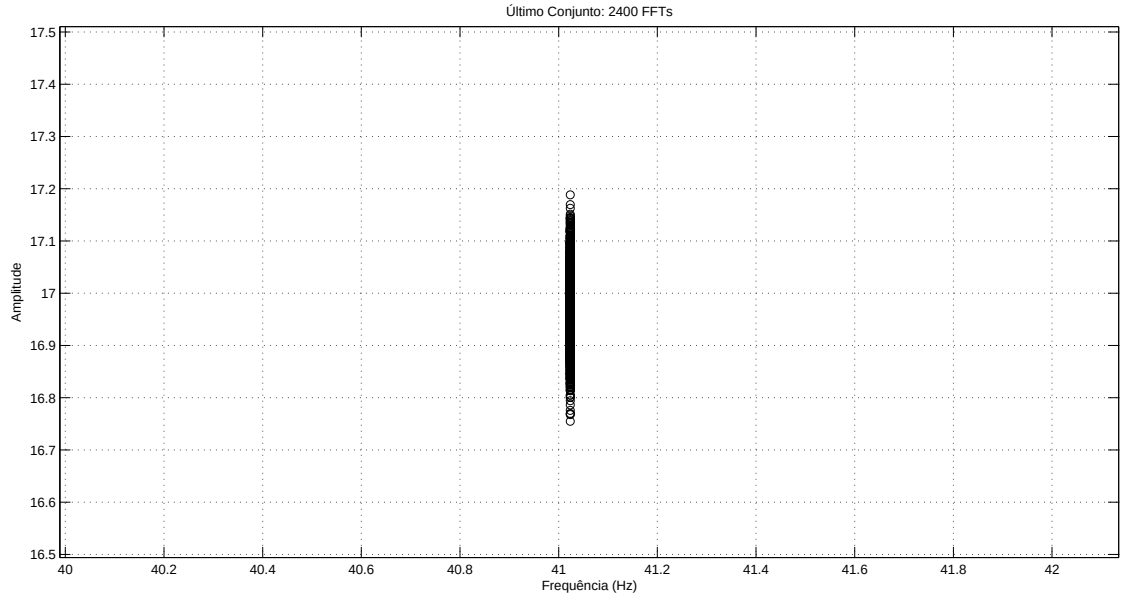

Figura 5.7: Espectros de Fourier do Sinal 2 Considerando 2400 Conjuntos de Dados Aleatórios Intervalares - Imagem Ampliada na Frequência de 41 Hz e Amplitude 17.

no topo das barras. Os valores obtidos para os intervalos para cada amplitude do sinal 2 podem ser visualizados na tabela 5.2.

	Frequência 0 Hz	Frequência 41 Hz	Frequência 89 Hz
Amplitude do Sinal	13	17	21
Amplitude Inferior	12,878	16,854	20,884
Amplitude Superior	13,115	17,091	21,121

Tabela 5.2: Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 2

.

5.3 Resultados e Análises do Sinal 3

O primeiro gráfico gerado para o Sinal 3, de Eq. (4.3), é mostrado na Figura 5.10. Nesta imagem são visualizados os 2400 espectros de Fourier ampliados em 50 Hz e amplitude 20 e nota-se novamente uma pequena variação de uma amostra para outra, mas o erro relativo de 10% aplicado ao sinal no domínio do tempo também impacta no domínio da frequência.

A Figura 5.11 mostra o gráfico das médias dos desvios padrões das FFTs para o sinal 3. É possível notar, assim como nos sinais anteriores, o comportamento assintótico da variação das médias em relação ao número de eventos. As médias das FFTs estão concentradas entre os valores $0{,}0233$ e $0{,}0238$.

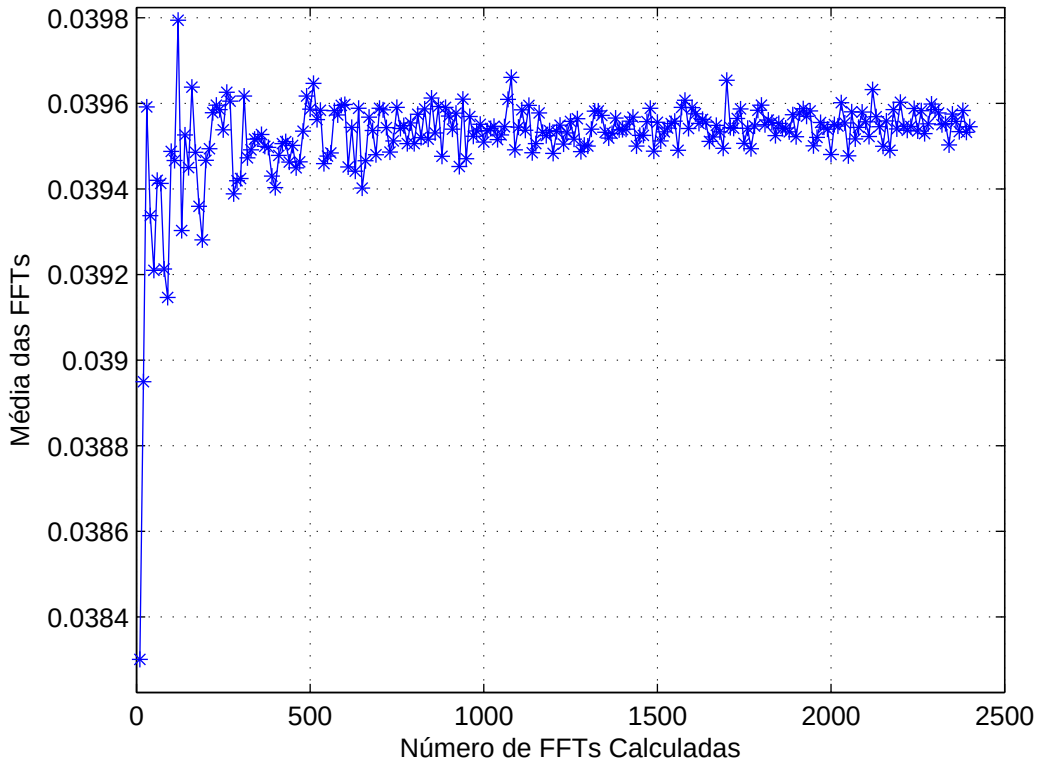

Figura 5.8: Médias das FFTs do Sinal 2

Assim, considerando esta pequena variação entre os espectros, o erro relativo considerado e aplicado ao sinal 3 no domínio da frequência, multiplicado por 3, é $0{,}070975$. A Figura 5.12 mostra o espectro de Fourier do sinal 3 (em barras) aplicando o erro relativo final calculado e, definindo, enfim, os limites do sinal no domínio da frequência, representados pelos intervalos no topo das barras. E, os valores obtidos para os intervalos para cada amplitude do sinal 3 podem ser visualizados na tabela 5.3.

	Frequência 50 Hz
Amplitude do Sinal	20
Amplitude Inferior	19,929
Amplitude Superior	20,071

Tabela 5.3: Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 3

.

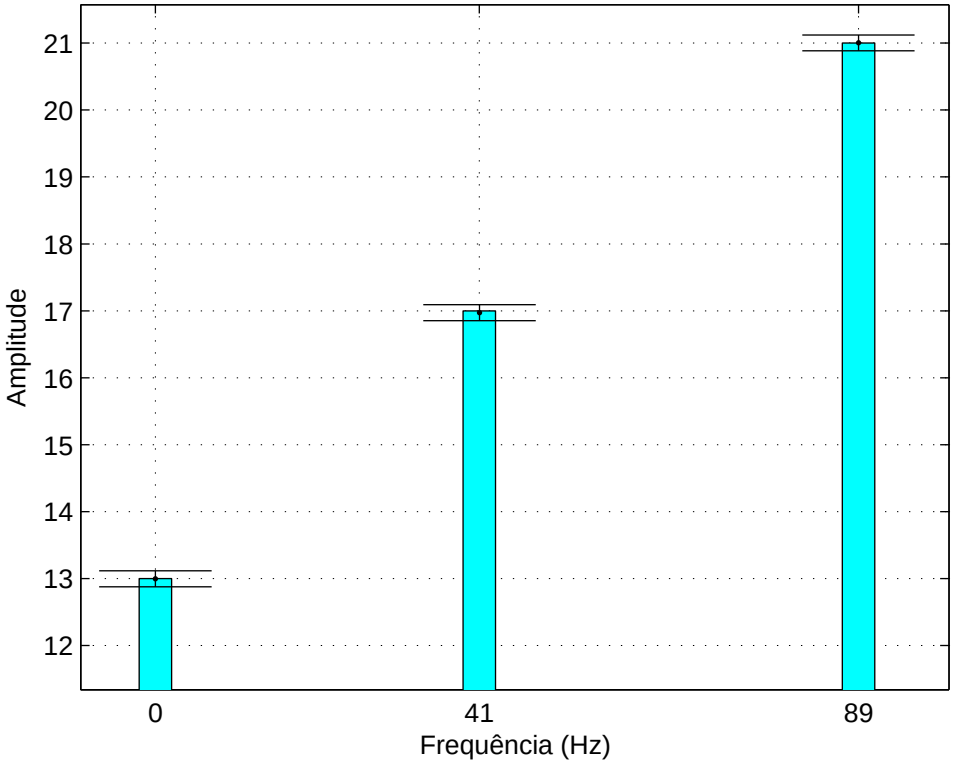

Figura 5.9: Limites do Sinal 2 no Domínio da Frequência.

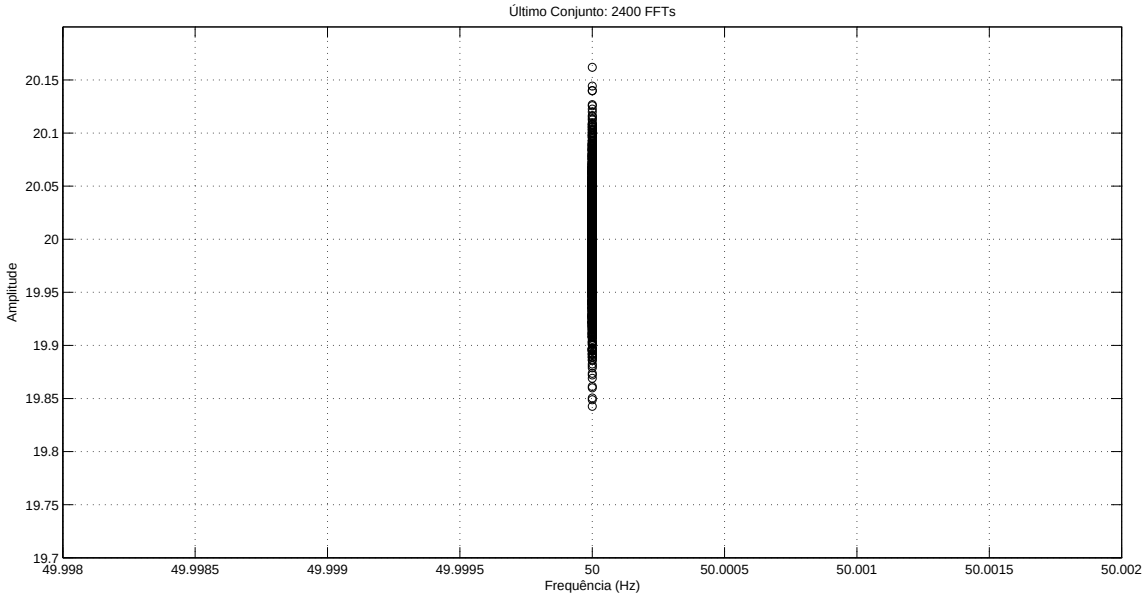

Figura 5.10: Espectros de Fourier do Sinal 3 Considerando 2400 Conjuntos de Dados Aleatórios Intervalares - Imagem Ampliada na Frequência de 50 Hz e Amplitude 20.

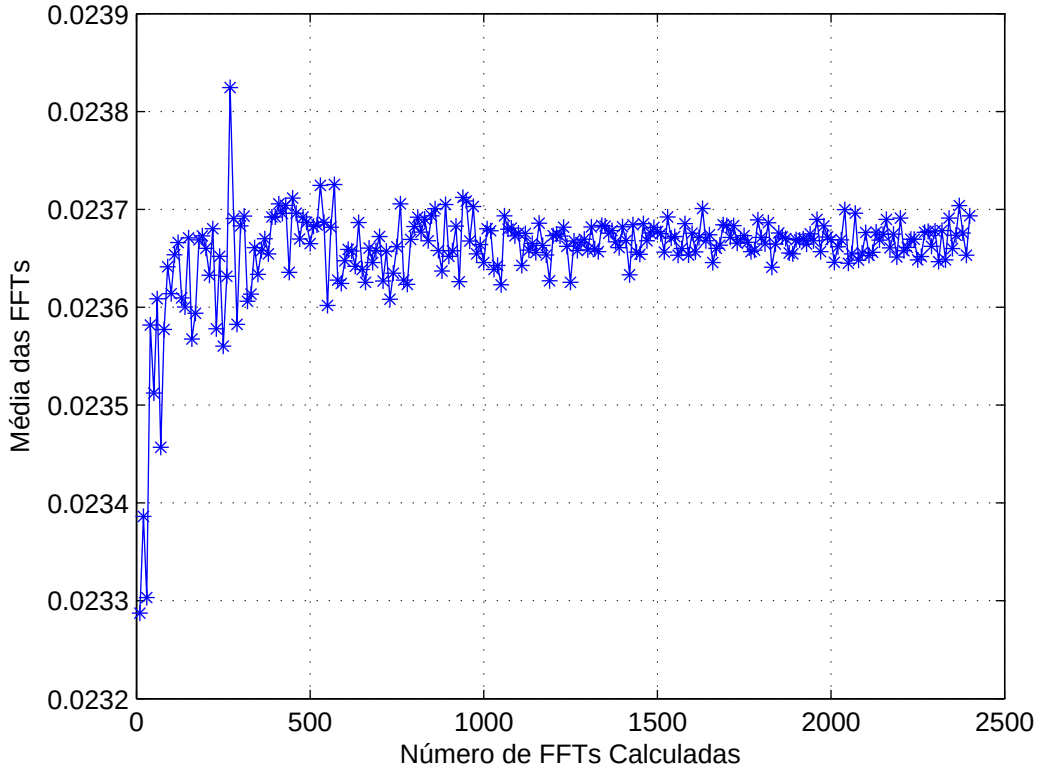

Figura 5.11: Médias das FFTs do Sinal 3

5.4 Resultados e Análises do Sinal 4

O primeiro resultado para o Sinal 4, cuja Eq. (4.4), é mostrado na Figura 5.13. Pode-se visualizar os 2400 espectros de Fourier ampliados em 50 Hz e amplitude 20 e, novamente ocorre uma pequena variação de uma amostra para outra. Mais uma vez, o erro relativo de 10% aplicado ao sinal no domínio do tempo impacta no domínio da frequência.

A Figura 5.14 mostra o gráfico das médias dos desvios padrões das FFTs para o sinal 4. Nota-se o comportamento assintótico da variação das médias em relação ao número de eventos e as médias estão concentradas entre os valores $0{,}0228$ e $0{,}0237$.

Portanto, levando em conta esta pequena variação entre os espectros, o erro relativo calculado e aplicado ao sinal 4 no domínio da frequência, multiplicado por 3, é $0{,}070953$. A Figura 5.15 mostra o espectro de Fourier do sinal 4 (em barras) aplicando o erro relativo final calculado e, definindo, enfim, os limites do sinal no domínio da frequência, representados pelos intervalos no topo das barras. E, os valores obtidos para os intervalos para cada amplitude do sinal 4 podem ser visualizados na tabela 5.4. Percebe-se que os limites são os mesmos gerados para o sinal 3.

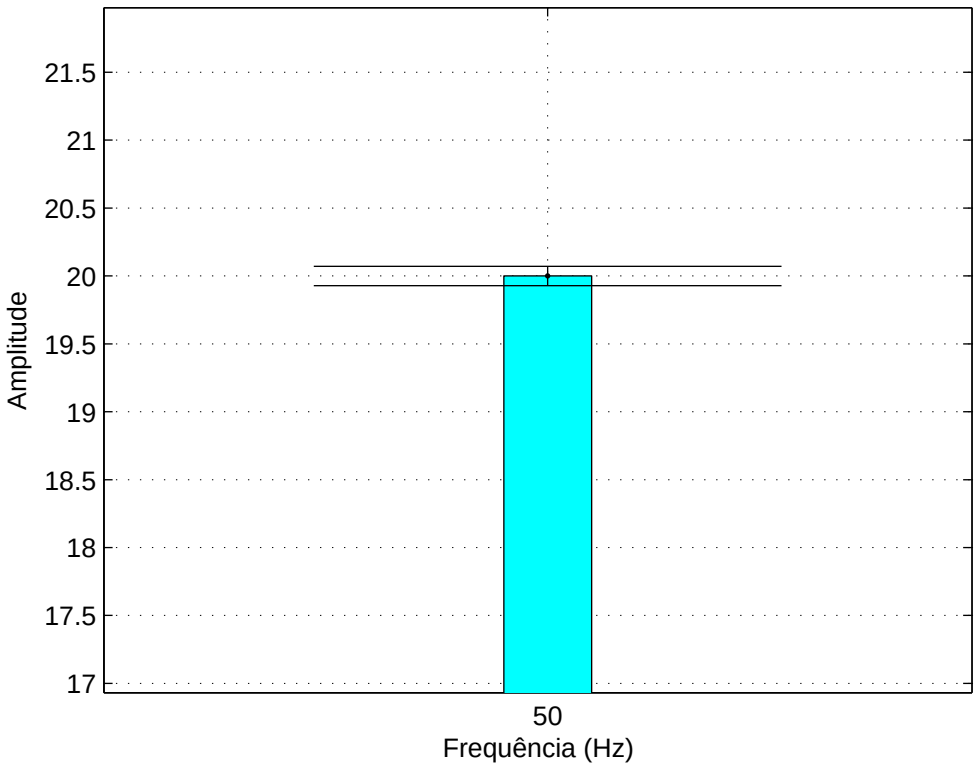

Figura 5.12: Limites do Sinal 3 no Domínio da Frequência.

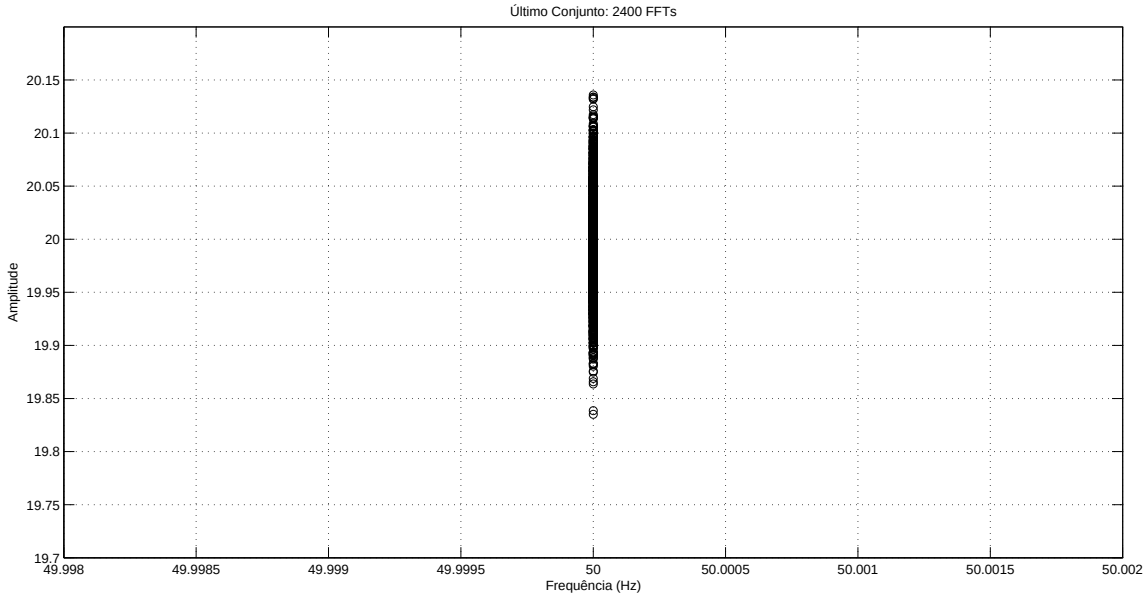

Figura 5.13: Espectros de Fourier do Sinal 4 Considerando 2400 Conjuntos de Dados Aleatórios Intervalares - Imagem Ampliada na Frequência de 50 Hz e Amplitude 20.

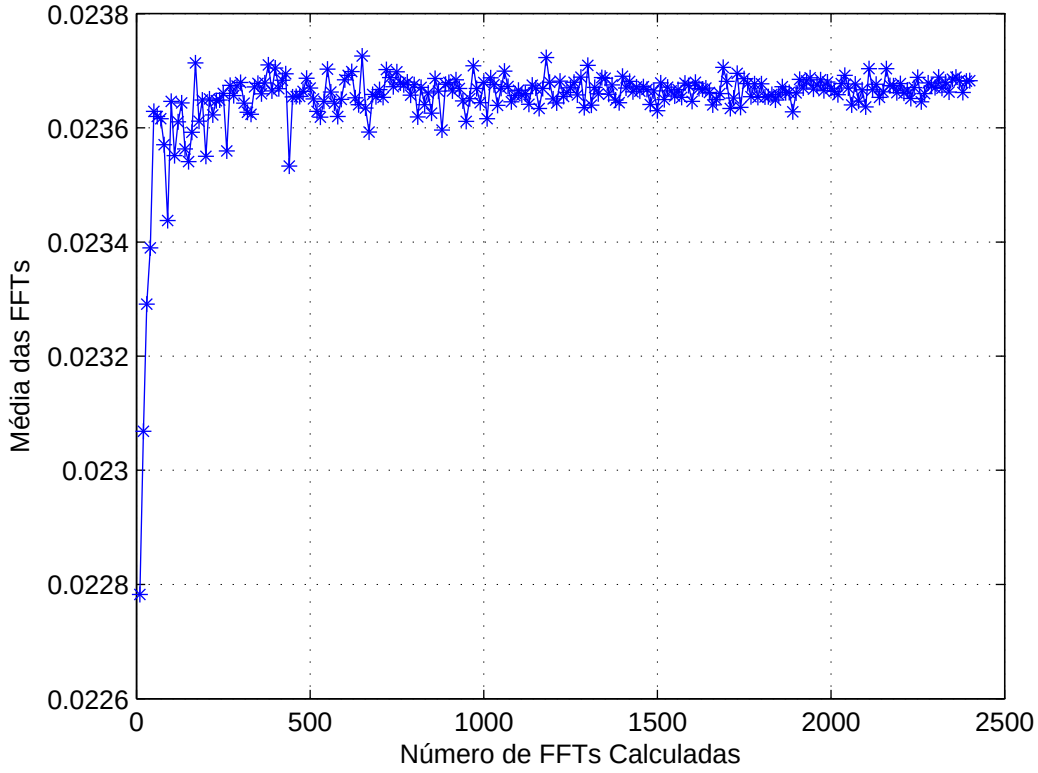

Figura 5.14: Médias das FFTs do Sinal 4

	Frequência 50 Hz
Amplitude do Sinal	20
Amplitude Inferior	19,929
Amplitude Superior	20,071

Tabela 5.4: Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal 4

.

5.5 Resultados e Análises do Conjunto de Dados

O primeiro resultado para o sinal do Conjunto de Dados disponibilizados por Silva (2016), é mostrado na Figura 5.16. Pode-se visualizar as 2400 FFTs calculadas, considerando o erro relativo de 10% aplicado ao sinal no domínio do tempo, o qual também impacta no domínio da frequência. Observe na Figura 5.17 que, para a frequência próxima de 10 Hz (aproximadamente $9{,}985$ Hz), após a aplicação do erro, a amplitude ultrapassa o valor 3 e, comparando com o espectro da Figura 4.9, o valor desta amplitude é de $2{,}951$.

A Figura 5.18 mostra o gráfico das médias dos desvios padrões das FFTs para o sinal coletado. Nota-se o comportamento assintótico da variação das médias em relação ao número de eventos, novamente.

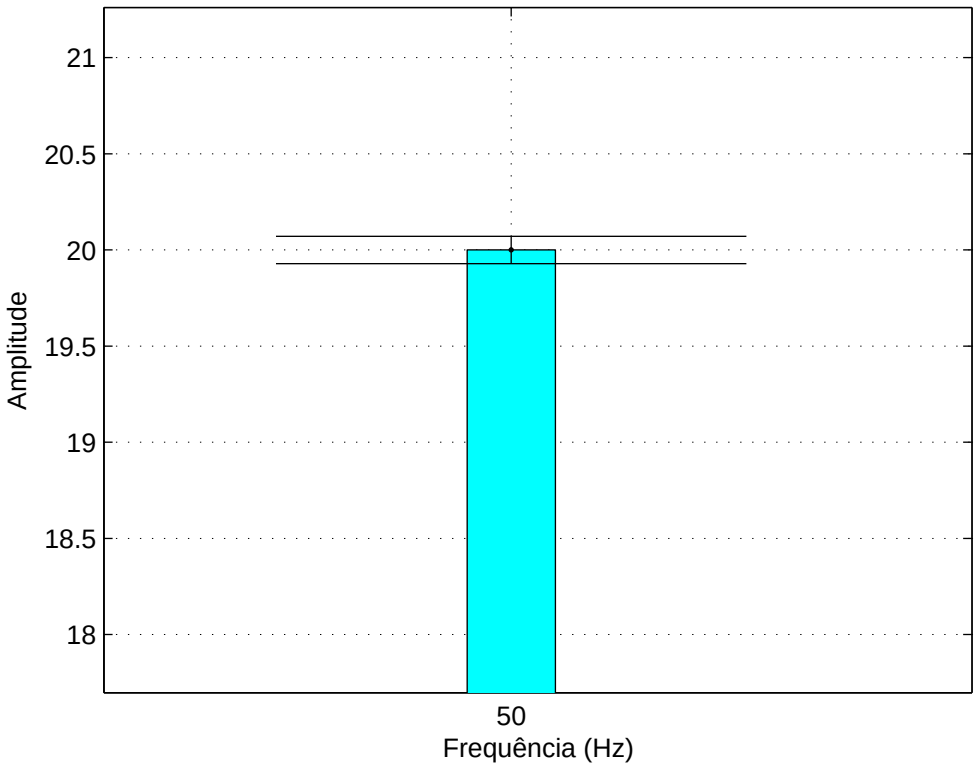

Figura 5.15: Limites do Sinal 4 no Domínio da Frequência.

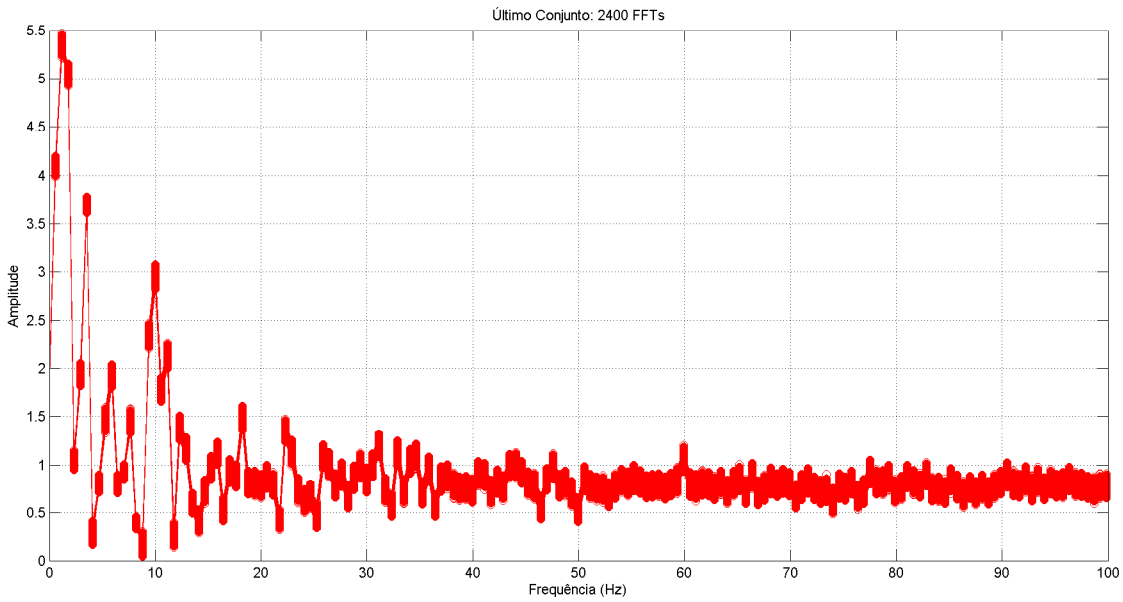

Figura 5.16: 2400 FFTs do Sinal Coletado em Silva (2016).

Portanto, aplicando a pequena variação calculada para este conjunto de dados, o erro relativo calculado e aplicado ao sinal no domínio da frequência, multiplicado por 3, é $0{,}146912$. E, os valores obtidos para os intervalos da frequência de 9.985 Hz podem ser visualizados na tabela

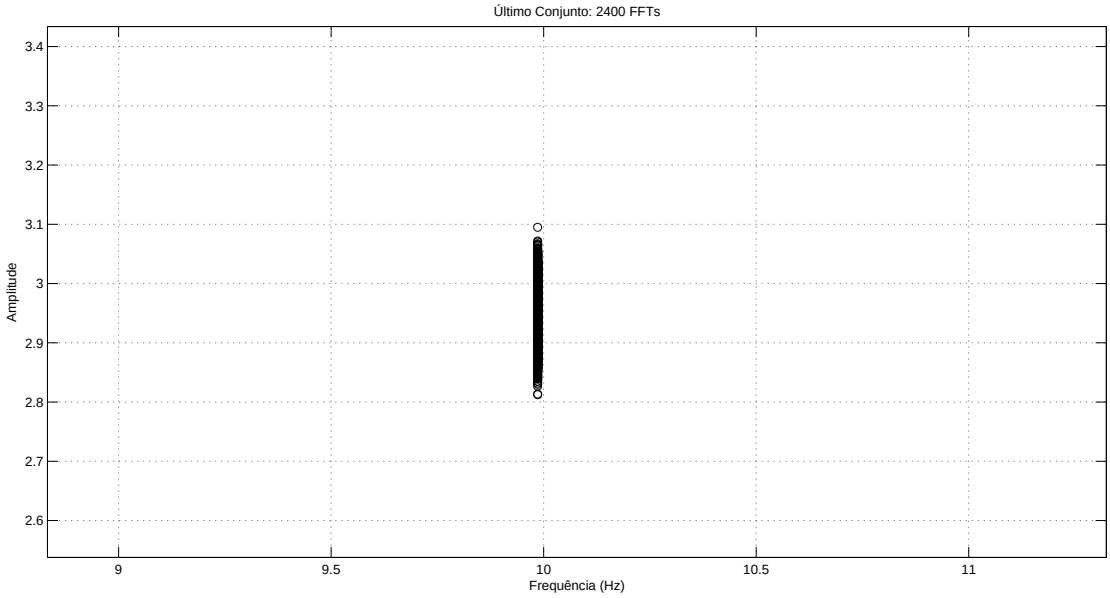

Figura 5.17: 2400 FFTs do Sinal Coletado em Silva (2016) - Imagem Ampliada em 10 Hz.

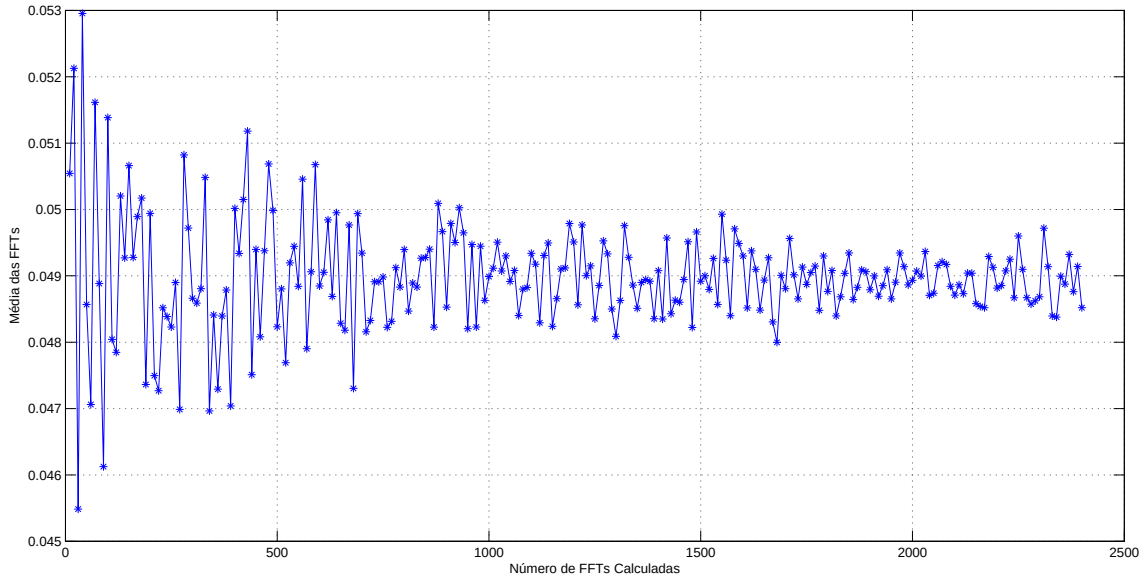

Figura 5.18: Médias das FFTs do Sinal Coletado em Silva (2016).

5.5.

	Frequência 9,985 Hz
Amplitude do Sinal	2,951
Amplitude Inferior	2,804
Amplitude Superior	3.098

Tabela 5.5: Intervalos Para Cada Amplitude do Sinal Coletado em Silva (2016) na Frequência 9,985 Hz

.

5.6 Resultados e Análises Gerais

Após realizar os testes e análises dos sinais e do conjunto de dados, foi possível perceber que todos sofreram impacto do erro relativo no domínio da frequência. E todos sinais, mesmo alguns sendo de amplitudes e frequências diferentes, tiveram um comportamento assintótico da variação das médias em relação ao número de evento (FFTs calculadas).

Porém, cada sinal terá sua análise particular e um erro relativo específico para o sinal e para seu espectro. Mas com este trabalho é possível calcular e definir os limites do espectro de cada sinal.

CAPÍTULO 6

Conclusão

Conforme estudos realizados neste trabalho foi possível perceber que, considerando um percentual de erro relativo de apenas 10% aplicado a um sinal no domínio do tempo e realizando uma estimativa de valores para sua FFT baseada em intervalos, ocorre uma pequena variação no domínio da frequência. Porém, a margem dos limites no Espectro de Fourier verificada para os sinais simulados e no conjunto de dados testado, é pequena e pode não fazer diferença para certas aplicações. Assim, é necessário analisar caso a caso quando o assunto envolve erros relativos e a Transformada Rápida de Fourier.

Mesmo assim, este trabalho demonstra e exemplifica a influência que um erro relativo no domínio do tempo causa no domínio da frequência. Para isto foi necessária a utilização de limites ou intervalos para seleção dos dados aleatórios e, logo depois, a aplicação dos cálculos da FFT e estimativas como média e desvio padrão. Os resultados finais de cada sinal mostram que é possível delimitar os valores máximo e mínimo das frequências do sinal no Espectro de Fourier. Estes resultados podem ser visualizados nas Figuras 5.6, 5.9, 5.12, 5.15.

Outro ponto importante conquistado neste trabalho é referente ao planejamento do experimento, em que, determinando o tamanho da amostra, é possível reduzir o esforço computacional de todo o processo. Isto pode ser verificado a partir do comportamento assintótico comprovado nos cálculos das médias das FFTs mostrados nas Figuras 5.5, 5.8, 5.11, 5.14 e 5.18.

Lembrando que todos os testes foram feitos considerando o erro relativo de 10% durante todo o processo. Porém, este erro poderá ser maior ou menor de acordo com o caso analisado e as condições que se deseja apurar ou chegar. Além disto, todo o trabalho realizado pode ser aplicado a diversos tipos de sinais, basta ter em mãos a função trigonométrica do sinal ou os dados do sinal coletados no domínio do tempo.

A utilização do conjunto de dados disponibilizados por Silva (2016) também enriqueceu e deu força ao trabalho. Isto permitiu verificar o impacto dos estudos em uma aplicação real e em constante evolução. Porém, é preciso aprofundar mais sobre o estudo e a base de dados, pois apenas parte dela foi considerada nos testes. E, somente depois deste entendimento que será viável confirmar se as simulações são ou não de contribuição para o trabalho citado.

Portanto, mesmo diante dos resultados e das pequenas variações sofridas pelos espectros, este trabalho pode ser um avanço se comparado aos outros trabalhos em que o erro relativo é questionado, pois parte de dados reais foram testados e analisados. E, a aplicação do planejamento experimental garantiu validação e aceitação do estudo realizado.

6.1 Trabalhos Futuros

Uma sugestão para trabalhos futuros seria realizar análises em que os erros sejam variantes no tempo, pois, na realidade, os sinais e processos do dia a dia variam de acordo com o tempo.

Outra sugestão é aplicar o uso de filtros durante o processo da estimativa e considerar sinais com ruídos. Pois, os filtros auxiliam no tratamento e análise de sinais e sistemas.

Aprofundar o estudo considerando a base de dados completa de Silva (2016) ou realizar novas análises em um estudo ou processo de uma aplicação significativa na área.

Outros métodos estatísticos também podem ser aplicados para realizar a estimativa intervalar mostrada no trabalho. E também é possível expandir o trabalho para a Transformada de Laplace.

E, por fim, analisar os sinais testados ou outros sinais variando a frequência de amostragem e verificando o comportamento do espectro limitado e observando a melhor resolução da FFT.

Referências Bibliográficas

Arcanjo, E. A. M., Nepomuceno, E. G., e Felix L. B. (2016). Estimated FFT Interval. *Conference of Computational Interdisciplinary Science*, pp. 1–10.

Bluestein, L. (1970). A linear filtering approach to the computation of discrete fourier transform. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 18(4):451–455.

Bruun, G. (1978). z-Transform DFT Filters and FFT's. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 26(1):56–63.

Button, S. T. (2005). Metodologia Para Planejamento Experimental e Análise de Resultados. *São Paulo*.

Cabral, P. (2004). Erros e incertezas nas medições. *ISEP - Instituto Superior de Engenharia do Porto - Departamento de Física*.

Cáceres, J. P. (2007). Transformada de Fourier. *Stanford University - CCRMA*.

Calvetti, D. (1991). A stochastic roundoff error analysis for the fast fourier transform. *Mathematics of computation*, 56(194):755–774.

Calvetti, D. (1992). A Stochastic Roundoff Error Analysis for the Convolution. *Mathematics of Computation*, 59(200):569.

Cooley, J. W. e Tukey, J. W. (1965). An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 19(90):297–301.

Eloi, B. F. S. e Felix, L. B. (2017). Melhoria na detecção de respostas auditivas em regime permanente na faixa de 80 Hz usando magnitude quadrática da coerência múltipla e eletro-

encefalograma multicanal (Dissertação de Mestrado). *Universidade Federal de São João del-Rei*.

Frigo, M. e Johnson, S. G. (2005). The design and implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, 93(2):216–231. Special issue on "Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation".

Galias, Z. (2013). The Dangers of Rounding Errors for Simulations and Analysis of Nonlinear Circuits and Systems and How to Avoid Them. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 13(3):35–52.

Gentleman, W. e Sande, G. (1966). Fast Fourier Transforms: for fun and profit. *Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conf.*, 29:563–578.

Goldberg, D. (1991). What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23(1):5–48.

Good, I. J. (1958). The interaction algorithm and practical fourier analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 361–372.

Henrici, P. (1986). *Applied and computational complex analysis*, volume 3. Wiley.

Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) (2008). *754-2008 – IEEE standard for floating-point arithmetic*. IEEE.

Johnson, S. G. e Frigo, M. (2008). Implementing FFTs in practice. In Burrus, C. S., editor, *Fast Fourier Transforms*, captulo 11. Connexions, Rice University, Houston TX.

Kaneko, T. e Liu, B. (1970). Accumulation of Round-Off Error in Fast Fourier Transforms. *Journal of the ACM*, 17(4):637–654.

Kankelborg, C. (2014). DFT and FFT. *Montana State University - Department of Physics*.

Lathi, B. P. (2007). *Sinais e Sistemas Lineares*. Bookman - 2007.

Liu, B. e Kaneko, T. (1975). Roundoff error in fast Fourier transforms. *Proceedings of the IEEE*, 63(6):991–992.

Liu, G. e Kreinovich, V. (2010). Fast convolution and Fast Fourier Transform under interval and fuzzy uncertainty. *Journal of Computer and System Sciences*, 76(1):63–76.

Lyons, R. G. (2004). *Understanding Digital Signal Processing*, volume 40. Prentice Hall PTR.

MATLAB (2013). The MathWorks Inc. *Inc., Natick, Massachusetts, United States*.

Mesquita, M. P. d. (2002). Matemática intervalar: princípios e a ferramenta C-XSC. *Universidade Federal de Lavras - MG*.

Miot, H. A. (2011). Tamanho da amostra em estudos clínicos e experimentais. *Jornal Vascular Brasileiro*, 10(4):275–278.

Moore, R. E. (1979a). Chapter 3 Finite Evaluation. In *Methods and applications of interval analysis*, pp. 19–31. SIAM.

Moore, R. E. (1979b). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM.

Nepomuceno, E. G. (2014). Convergence of recursive functions on computers. *The Journal of Engineering*, pp. 1–3.

Nepomuceno, E. G. e Martins, S. A. M. (2016). A lower bound error for free-run simulation of the polynomial narmax. *Systems Science & Control Engineering*, 4(1):50–58.

Neumann, J. V. e Ulam, S. (1951). Monte carlo method. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, 12:36.

Oppenheim, A. V. e Willsky, A. S. (2010). *Sinais e sistemas*. Pearson Prentice Hall - São Paulo.

Overton, M. L. (2001). *Numerical computing with IEEE floating point arithmetic*. SIAM.

Paiva, B. P. O., Nepomuceno, E. G., e Amaral, G. F. V. (2015). Considerações sobre a condição inicial na construção do diagrama de bifurcação para o mapa logístico. In *Anais do DINCON 2015 - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*.

Palfi, V. e Kollar, I. (2009). *Roundoff errors in fixed-point FFT*. IEEE2009.

Portnoi, M. (2005). Probabilidade, Variáveis Aleatórias, Distribuição de Probabilidades e Geração Aleatória - Conceitos sob a ótica de Avaliação de Desempenho de Sistemas. *Universidade Salvador - UNIFACS*.

Rader, C. M. (1968). Discrete fourier transforms when the number of data samples is prime. *Proceedings of the IEEE*, 56(6):1107–1108.

Ramos, G. U. (1971). Roundoff Error Analysis of the Fast Fourier Transform. *Mathematics of Computation*, 25(116):757.

Reimer, M. (1968). Bounds for the Horner Sums. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3):461–469.

Reis, T. A. (2008). *Implementação de uma Transfromada Rápida de Fourier para Computação Reconfigurável de Alto Desempenho*. Tese, Universidade Federal de Santa Maria - RS.

Robert, C. P. (2004). *Monte carlo methods*. Wiley Online Library.

Rodrigues, M. S., Nepomuceno, E. G., Amaral, G. F. V., e Silva, V. V. R. (2016). Simulation of Chua'a Circuit by means of Interval Analysis. *Anals of 6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity*, pp. 1–4.

Rodrigues Júnior, H. M. e Nepomuceno, E. G. (2015). Uso da computação por intervalos para cálculo de ponto fixo de um mapa discreto. In *Anais do DINCON 2015 - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*.

Schatzman, J. C. (1996). Accuracy of the Discrete Fourier Transform and the Fast Fourier Transform. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(5):1150–1166.

Senda, Alexandre; Melo, Mario; Silva, Magno; Eisencraft, Marcio; Melo, Marco (2005). Aplicações de processamento digital de sinais em engenharia elétrica. *XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*.

Shayib, M. A. (2013). *Applied Statistics - eBooks and textbooks from bookboon.com*. bookboon.com.

Silva, G. D. M. (2016). Estimação do audiograma usando a Magnitude Quadrática da Coerência Múltipla e estimulação monaural de tons modulados em amplitude na faixa de 40 Hz (Dissertação de Mestrado). *Universidade Federal de São João del-Rei*.

Strother, W. L. (1953). On an Open Question Concerning Fixed Points. *American Mathematical Society*, 4(6):988–993.

Thomas, L. (1963). Using a computer to solve problems in physics. *Applications of digital computers*, pp. 44–45.

Tran Thong e Liu, B. (1977). Accumulation of roundoff errors in floating point FFT. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 24(3):132–143.

Tsao, N.-K. (1987). The equivalence of decimation in time and decimation in frequency in FFT computations. *Journal of the Franklin Institute*, 324(1):43–63.

Welch, P. (1969). A fixed-point fast Fourier transform error analysis. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-17(2):151–157.

Weyne, G. R. d. S. (2004). Determinação do tamanho da amostra em pesquisas experimentais na área de saúde. *Medicina do ABC*, 29:87–90.

Yoriyaz, H. (2009). Monte Carlo Method : principles and applications in Medical Physics. *Revista Brasileira de Física Médica*, 3(1):141–149.

APÊNDICE A

Rotinas Computacionais

A.1 Algoritmo Desenvolvido

```
%Parametros Iniciais
tipoSinal = 1;    % Sinais 1, 2, 3 ou 4
Fs = 8*f_max;     % Frequencia de Amostragem (8x a maior frequencia do sinal)
T = 1/Fs;         % Tempo de Amostragem
L = 1024;         % Tamanho do Sinal (potencia de 2)
t = (0:(L-1))*T; % Periodo de Amostragem
erro = 0.1;       % erro = 10%

% Implementar a funcao trigonometrica de cada sinal na funcao_sinal
% Passar qual sinal foi selecionado para teste
SinalX = @(t)(funcao_sinal(tipoSinal));

% Aplicando o erro ao sinal (definindo limites no dominio do tempo)
SinalInf = SinalX(t) - (abs(SinalX(t))*erro);
SinalSup = SinalX(t) + (abs(SinalX(t))*erro);

N = length(SinalX); % Tamanho do Sinal
tam = N;

% Transformada Rapida de Fourier do Sinal Original
FFTSinal = abs(fftshift(fftn(SinalX)/N));

% Aplicando Monte Carlo e o Teorema da Avaliacao Finita

```

```
25 % vetLoops responsavel por contar quantas FFTs serao calculadas
26 % Tambem armazena a media das FFTs por processo.
27 ini = 10;
28 cont = 10;
29 fin = 2400; % Tamanho da Amostra
30 % Criacao do vetLoops
31 for i=ini:cont:fin
32 if(i == ini)
33 vetLoops = [i 0];
34 else
35 vetLoops = [vetLoops; [i 0]];
36 end;
37 end
38
39 % Quantas vezes o mesmo processo acontecera porem aumentando a quantidade de FFTs
40 vet = length(vetLoops);
41 % Laco responsavel por calcular as FFTs de cada processo
42 for t=1:vet
43 qtdLoops = vetLoops(t,1); %Total de vezes que a FFT sera calculada.
44 % Matriz A para salvar as FFTs de cada laco (while)
45 %Dimensoes: qtdLoops(linhas) x tam(tamanho do sinal)
46 A = zeros(qtdLoops,tam);
47 n=1; % Contador para o while da FFT.
48
49 while n < qtdLoops
50 % Laco para definicao dos sinais conforme os Limites inferior e superior
51 for j=0:(tam-1)
52 % Formula para randomico entre intevalo[a,b]
53 % Selecionando os valores entre os limites do sinal
54 SinalLim(j+1) = SinalInf(j+1)+(SinalSup(j+1)-SinalInf(j+1)).*rand(1);
55 end;
56
57 % Calcula a FFT novamente considerando os valores aleatorios selecionados entre os
      limites
58 FFTSinalLimitado = abs(fftshift(fftn(SinalLim)/N));
59
60 % Salvando em A os valores encontrados de cada FFT do processo executado
61 % A(n,valores)
62 % n = a quantidade de FFTs calculadas
```

```
% valores = valores encontrados apos calcular a FFT.
A(n,:) = FFT;
n=n+1; % Contador do while
end;

% CALCULO DA MEDIA E DESVIO PADRAO DAS FFTs
media = mean(A,1); % Media das colunas (ou seja, a media dos valores de cada ponto a
    cada FFT calculada)
desvio = std(A,0,1); % Desvio das colunas (ou seja, desvio dos valores de cada ponto
    a cada FFT calculada)

medMed = mean(media); % MEDIA DA MEDIA DAS COLUNAS
medDesvio = mean(desvio); % MEDIA DO DESVIO PADRAO %

% Salvando a media do desvio padrao do processo
vetLoops(t,2) = medDesvio;
t=t+1; % Proximo processo
end;


maximu = mean(vetLoops(:,2)); % Media da media dos desvios padroes das FFTs
variacaoFFT = abs(maximu)*3;

% GRAFICO DO ESPECTRO COM VARIACAO
figure;
axis([-10 110 0 30]);
%errorbar(f, FFTSinalSemRuido, variacaoFFT*ones(size(f)), 'k.');
%xlabel('Frequency (Hz)');
%ylabel('Amplitude');
end
```