



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL

Associação ampla UFSJ / CEFET-MG

Análise de Estabilidade e Controle de Sistemas Chaveados de Tempo Discreto por meio de Funções de Lyapunov Estruturadas

Thales da Silveira Gomide

Orientador: Márcio Júnior Lacerda

São João del-Rei, Agosto de 2019.



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL

Associação ampla UFSJ / CEFET-MG

Análise de Estabilidade e Controle de Sistemas Chaveados de Tempo Discreto por meio de Funções de Lyapunov Estruturadas

Thales da Silveira Gomide

Dissertação apresentada à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Márcio Júnior Lacerda

São João del-Rei, Agosto de 2019.

*Dedico este trabalho aos meus avós
Lucy e Gomide (in memoriam) e à minha avó Aparecida.*

Agradecimentos

Inspirado nas palavras de Newton em uma carta para Robert Hooke "Se cheguei até aqui, foi por que me apoiei nos ombros de gigantes", hoje gostaria de agradecer àqueles que contribuíram para esta grande vitória. Primeiramente, agradeço a Deus pelas maravilhosas oportunidades que recebi durante esta vida. Aos meus pais Denise e Miguel, por toda dedicação e esforço para me fornecer uma boa educação, formação e por todo o carinho e comprometimento. À minha irmã Mayna, pelo seu companheirismo e por todas as conversas sobre eletrônica digital aplicada a estudos genéticos. À minha noiva, Isabella, por ser esta pessoa maravilhosa, (quase sempre) paciente e por me acompanhar nos momentos alegres e também nos difíceis. Agradeço a toda minha família, primos, tios pelo apoio e pelos momentos juntos, minha avó Cidinha, meu avô Gomide (*in memoriam*) e minha avó Lucy, que nos deixou durante o mestrado.

Também agradeço aos meus professores com os quais aprendi tanto, sobretudo meu orientador, Márcio, por aceitar me orientar e pela paciência que precisou ter comigo. Também agradeço à UFSJ, ao GCOM, à CAPES pelo financiamento e a todos os meus colegas, principalmente os que compartilharam comigo tantos momentos juntos no laboratório, que foram tão importantes durante o mestrado e especialmente aos meus colegas do controle robusto, Natália, Paulo e Márcia, pelos momentos de risada e alegria, pelas discussões técnicas que rendiam boas ideias.

Quero agradecer a todos os amigos do IF Muriaé, que me acompanharam no início dessa jornada, sobretudo à Renata e à Gabriela, por me incentivarem a entrar no programa de mestrado da UFSJ, e ao Marcus, que acompanhou passo a passo todo o percurso. Agradeço também aos amigos da Nova Acrópole, sobretudo meus professores Hinaldo, Giliane e Ana Paula pela grande dedicação e por ajudarem a me tornar um ser humano melhor, e também a Mayara, por todos os *happy hours* e por suas revisões e ajudas com o português e inglês. Por fim, quero agradecer aos colegas da Embraer, que acompanharam mais de perto o final dessa jornada e sempre me incentivaram a conclusão do mestrado. A todos vocês, muito obrigado!

"O trabalho é o Amor tornado visível."

Khalil Gibran

Resumo

Esta dissertação tem seu foco nos problemas de estabilidade e estabilização para sistemas chaveados discretos no tempo sob chaveamento arbitrário, utilizando funções de Lyapunov estruturadas. As principais contribuições são: i) o desenvolvimento de novas condições necessárias e suficientes para o problema de estabilidade em termos de Desigualdade Matriciais Lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities*, LMIs) que podem fornecer certificado de estabilidade necessitando de um número menor de variáveis escalares de decisão e linhas de LMI do que as abordagens existentes; ii) uma nova condição LMI derivada em função dos modos dos sistemas chaveados para lidar com o problema de estabilização considerando ganhos de realimentação de estados. O problema de estabilização faz uso de uma função de Lyapunov estruturada para fornecer resultados menos conservadores. Exemplos de referência da literatura são apresentados para ilustrar a eficácia da abordagem proposta.

Palavras-chave: Controle Robusto, Realimentação de Estados, Sistemas Chaveados, Função de Lyapunov, Estabilidade, Estabilização.

Abstract

This dissertation addresses the stability and the stabilization problem for discrete-time switched systems under arbitrary switching, by employing structured Lyapunov functions. The main contributions are: i) the development of new necessary and sufficient conditions for the stability problem in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs) that can provide stability certificates requiring a smaller number of decision variables and LMI rows than the existing approaches; ii) a new LMI condition derived in terms of the modes of the switched system to deal with the stabilization problem considering switching state-feedback gains. The stabilization problem makes use of the structured Lyapunov function to provide less conservative results. Benchmark examples from the literature are presented to illustrate the efficacy of the proposed approach.

Keywords: Robust Control, State Feedback, Switched Systems, Lyapunov Function, Stability, Stabilizability.

Lista de Figuras

2.1	Sistema híbrido.	5
2.2	Conversor Buck.	7
2.3	Tensão de chaveamento aplicada no interruptor.	8
2.4	Análise com o interruptor fechado.	8
2.5	Análise com o interruptor aberto.	9
2.6	Diagrama de fase para o sistema instável	12
2.7	Diagrama de fase para o sistema estável	13
3.1	Trajectoria da Função de Lyapunov obtida pelo Teorema 3	34
3.2	Trajectoria da Função de Lyapunov obtida pelo Teorema 2	35
4.1	Trajectoria dos estados para o exemplo 3 usando o Teorema 6	45
4.2	Conversor Boost.	46

Lista de Tabelas

2.1	Efeito da marcha sob a aceleração de um veículo.	6
3.1	Comparação entre Teoremas para o Exemplo 2	36
3.2	Número de variáveis e número de linhas para o Exemplo 2	38
4.1	Número de variáveis e número de linhas para o Exemplo 1	44

Lista de Símbolos

α : Lei de chaveamento.

v : Número de modos.

\mathcal{P} : Conjunto dos modos.

A : Matriz de estado.

B : Matriz de entrada.

C : Matriz de saída.

D : Matriz de transmissão.

$He(A) = A + A^T$: Matriz Hermitiana

λ : Autovalor.

$\xi(k)$: Função indicador.

N : Ordem da matriz aumentada.

n : Número de estados.

n_u : Número de entradas.

n_y : Número de saídas.

\mathbb{R} : Conjunto dos números Reais.

V : Função de Lyapunov.

x : Vetor de estados.

$X > 0$: Matriz definida positiva.

$X < 0$: Matriz definida negativa.

\mathbb{Z}^+ : Conjunto dos números Inteiros não negativos.

$T = blktriag(B^T, A, B)$: Matriz simétrica bloco triangular.

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_1^T & A_2 & B_2 & \dots & 0 \\ 0 & B_2^T & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & B_{n-1}^T & A_n \end{bmatrix}$$

Lista de Abreviações

CEFET-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

CQFL: *Common Quadratic Lyapunov Function*

GCOM: Grupo de Controle e Modelagem.

IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers.

IGBT: *Insulated gate bipolar transistor*.

LIT: Linear Invariante no Tempo.

LMI: *Linear Matrix Inequality*.

MOSFET: *Metal oxide semiconductor field effect transistor*.

PPGEL: Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica.

UFSJ: Universidade Federal de São João del-Rei.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Organização do trabalho	3
2	Conceitos Preliminares	5
2.1	Sistemas híbridos	5
2.2	Sistemas chaveados	6
2.2.1	Modelagem de um sistema chaveado	7
2.3	Estabilidade	10
2.3.1	Teoria de Lyapunov - sistemas contínuos	13
2.3.2	Teoria de Lyapunov - sistemas discretos	14
3	Estabilidade de Sistemas Chaveados	17
3.1	Sistemas chaveados no tempo discreto com chaveamento aleatório	17
3.2	Contribuições	22
3.3	Exemplos numéricos	31
3.3.1	Exemplo 1	32
3.3.2	Exemplo 2	33
3.3.3	Exemplo 3	37
4	Controle por Realimentação de Estados	39
4.1	Conceitos	39
4.2	Controle por realimentação de estados	40
4.3	Contribuições	41

4.4	Resultados numéricos	43
4.4.1	Exemplo 1	44
4.4.2	Exemplo 2	45
5	Conclusões	49
5.1	Artigos aceitos	49
5.2	Trabalhos futuros	50
	Referências Bibliográficas	51

Introdução

Os sistemas híbridos são uma classe de sistemas dinâmicos que integram a natureza contínua e discreta. Eles são usados em um extenso número de aplicações, tais como, em circuitos eletrônicos [1], em sistemas de potência [2] e em sistemas mecânicos [3]. Os sistemas chaveados podem ser vistos como um caso particular dos sistemas híbridos. Eles são formados por um número finito de subsistemas (normalmente chamados de modos) e uma lei de chaveamento que define qual sistema está individualmente ativo. Além disso, os sistemas chaveados podem ser classificados de acordo com as características dos seus modos: contínuo no tempo ou discreto no tempo, linear ou não linear. Eles também podem ser classificados de acordo com a lei de chaveamento, sendo que esta pode depender apenas do tempo (ou seja, controlados pelo tempo) [4]. Ela também pode depender do estado atual (dependente de estado) [5] e pode depender do histórico de chaveamento dos modos ativos (chaveamento com memória) [6].

A estabilidade é um assunto essencial quando sistemas chaveados são investigados. Eles podem possuir todos os seus modos estáveis, e no entanto, serem instáveis. Por outro lado, eles podem ter modos instáveis chaveando cuidadosamente para manter a dinâmica geral do sistema estável [7]. Neste sentido, a Teoria de Lyapunov é uma ferramenta poderosa para verificar a estabilidade de sistemas chaveados, tanto contínuos quanto discretos no tempo [8]. Ela permite escrever as condições de estabilidade e de estabilização na forma de LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*, ou Desigualdade de Matrizes Lineares). As LMIs podem ser resolvidas eficazmente por algoritmos de otimização baseados em programação semidefinida.

Muitos autores tem estudado sistemas lineares sob chaveamento arbitrário, ou seja, quando a sequência de chaveamento é desconhecida *a priori*. A abordagem clássica para certificar a estabilidade de sistemas lineares sob chaveamento arbitrário é conhecida como estabilidade

quadrática. Esta, por sua vez, faz uso de funções de Lyapunov quadráticas para testar a estabilidade assintótica do sistema. Neste caso, uma única matriz de Lyapunov precisa garantir a estabilidade de todos os modos do sistema, ao mesmo tempo. Esse fato traz certo conservadorismo à análise do problema. Em [9], foi introduzida uma função de Lyapunov chaveada que levou a condições LMI para verificar a estabilidade dos sistemas. Estas condições foram capazes de fornecer resultados menos conservadores que a estabilidade quadrática. Entretanto, as condições eram apenas suficientes. Em [10], foram apresentadas condições necessárias e suficientes que consideram instantes múltiplos do vetor de estados para lidar com o problema de estabilidade e estabilização. Em [11], o método da sequência de M passos foi empregado para calcular o ganho ℓ_2 para sistemas chaveados incertos discretos no tempo, fornecendo condições necessárias e suficientes para a estabilidade sob chaveamento arbitrário. Também é importante mencionar a abordagem gráfica de caminhos completos proposta em [12] que também introduz condições necessárias e suficientes para certificar a estabilidade do sistema chaveado. Condições necessárias para o controle de sistemas chaveados contínuos foram propostas em [13] e o problema de estabilização para um sistema de redes incertas é apresentado em [14] via *average dwell time*.

Esta dissertação apresenta duas condições necessárias e suficientes para certificar a estabilidade de sistemas chaveados discretos no tempo sob chaveamento arbitrário. A primeira condição é baseada no uso de funções de Lyapunov que consideram termos não monotônicos na sua construção. Tais funções também foram usadas em [15] para certificar a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) incertos que foram apresentadas originalmente em [16] para sistemas polinomiais não lineares. A segunda condição de estabilidade é baseada na existência de uma função de Lyapunov com um vetor de estados aumentados. Funções de Lyapunov estruturadas desta maneira também foram discutidas em [17–20] no que diz respeito a robustez do desempenho para sistemas de tempo discreto LIT incertos e em [21, 22] para sistemas chaveados. Apesar de já existirem condições necessárias e suficientes para lidar com o problema de estabilidade, para sistemas discretos no tempo sob chaveamento arbitrário, acredita-se existir espaço para métodos mais eficientes. Além disso, o problema de estabilização considerado neste trabalho tem recebido menos atenção na literatura que trata de funções de Lyapunov estruturadas. As condições de estabilização propostas nesta dissertação exploram a estrutura da função de Lyapunov para fornecer ganhos para a realimentação de estados que po-

dem estabilizar o sistema chaveado. As condições propostas nesta dissertação também contém os resultados clássicos da literatura como casos particulares. Experimentos numéricos foram utilizados para explorar o potencial da abordagem proposta. Exemplos mostram que o método apresentado é capaz de fornecer um certificado de estabilidade para sistemas chaveados discretos no tempo empregando um número menor de linhas de LMI e variáveis escalares de decisão do que os métodos existentes. Além disso, a condição de estabilização prova-se eficiente, encontrando ganhos chaveados na realimentação de estados empregando matrizes de Lyapunov chaveadas e também matrizes constantes.

1.1 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada em capítulos. No capítulo 2, são apresentados os conceitos preliminares. No capítulo 3, é apresentado o tema da estabilidade. Em seguida, o tema da estabilização através da realimentação de estados é apresentada no capítulo 4. Finalmente, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões.

Conceitos Preliminares

2.1 Sistemas híbridos

Sistemas híbridos são uma classe especial de sistemas em que existe uma interação entre uma dinâmica contínua e uma dinâmica discreta, situação ilustrada na Figura 2.1. A variável u representa a entrada de controle para a dinâmica contínua, sendo função dos estados discretos q . De maneira similar, v representa a entrada para a dinâmica discreta, que é determinada pelo estado contínuo x . Um exemplo é um sistema com vários relés, possuindo diversas combinações de chaves fechadas e abertas.

Um outro exemplo que pode ser considerado é o sistema de movimento de um carro [8], governado pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(a, q)\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que x_1 representa posição, x_2 a velocidade, f a aceleração do veículo, $a \geq 0$ a entrada do acelerador e $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 0\}$ as posições da marcha. Para $q = -1$, o carro encontra-se em ré, $q = 0$ representa o ponto morto e os valores de $q > 0$ representam as marchas de 1 a 5.

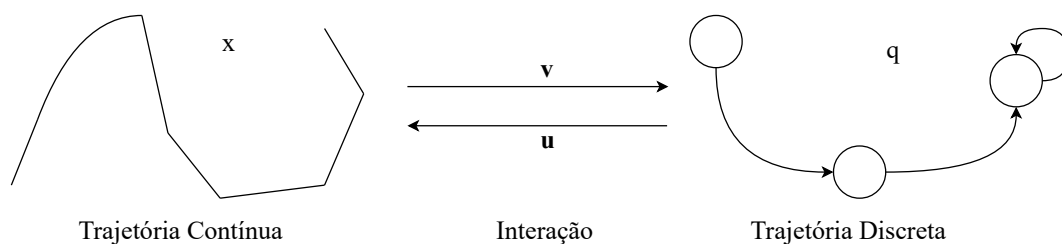


Figura 2.1: Sistema híbrido.

Tabela 2.1: Efeito da marcha sob a aceleração de um veículo.

q	Descrição	Efeito
-1	Ré	f é negativa e decrescente em a
0	Ponto morto	f é negativa e independente de a
1 a 5	1ª a 5ª Marcha	f cresce e é positiva em a , f diminui em q

A Tabela 2.1 indica os efeitos da marcha sob a aceleração do carro, evidenciando que os efeitos de transições discretas afetam a trajetória contínua.

2.2 Sistemas chaveados

Um sistema chaveado é uma classe dentro dos sistemas híbridos. Eles são formados por um número finito de subsistemas que são ativados individualmente de acordo com uma lei de chaveamento. A modelagem dos sistemas chaveados normalmente é feita no espaço de estados e pode ser realizada tanto para tempo contínuo quanto para tempo discreto. Portanto, considere para tempo contínuo o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\alpha x(t) + B_\alpha u(t) \\ y(t) &= C_\alpha x(t) + D_\alpha u(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

e para o tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_\alpha x(k) + B_\alpha u(k) \\ y(k) &= C_\alpha x(k) + D_\alpha u(k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. O índice α representa a lei de chaveamento, sendo $\alpha \in \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, v\}$. Isso significa que o sistema possui v modos e pode variar entre eles de acordo com a lei de chaveamento α .

Ao se classificar os sistemas chaveados, pode-se levar em conta a característica dos seus subsistemas. A primeira classificação apresentada consiste nos subsistemas serem discretos ou contínuos no tempo. Além disso, eles podem ser divididos em lineares ou não lineares. É importante destacar que, mesmo quando os subsistemas são lineares, o sistema como um todo não o é, salvo alguns casos particulares, entre eles: a matriz A_i sendo comutativa ($A_i A_j =$

$A_j A_i$, para todo $i, j \in \mathcal{P}$) [23], A_i simétrica ($A_i = A_i^T$ para todo $i \in \mathcal{P}$) [24] e A_i normal ($A_i A_i^T = A_i^T A_i$ para todo $i \in \mathcal{P}$) [25].

Conforme apresentado em [26], sistemas chaveados podem ser classificados de acordo com a sua lei de chaveamento. Uma lei de chaveamento baseada apenas no tempo t ou amostra k é chamada de controlada pelo tempo. Quando ela também depende do vetor x , é chamada de dependente dos estados. Existe também o chaveamento arbitrário, em que não há uma definição para o chaveamento entre os modos. Por fim, a lei de chaveamento pode depender do histórico dos modos ativos durante a operação do sistema, sendo esta chamada com memória.

2.2.1 Modelagem de um sistema chaveado

Uma das possíveis aplicações para sistemas chaveados é a modelagem de conversores de potência CC/CC. Um desses circuitos é o conversor Buck, também chamado de conversor abaixador. Ele converte a tensão de uma fonte contínua para uma tensão menor, sendo composto por uma chave controlada (geralmente um IGBT ou um MOSFET), uma chave não controlada (diodo) e dois elementos armazenadores de energia: um capacitor e um indutor. Neste exemplo, a chave controlada será chamada apenas de interruptor. A Figura 2.2 apresenta um exemplo da topologia em que o circuito do conversor Buck está conectado a uma carga resistiva.

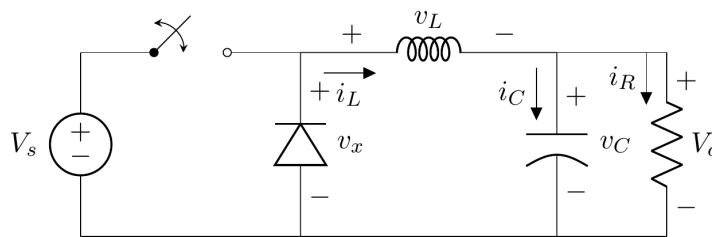


Figura 2.2: Conversor Buck.

V_s , v_x , v_L , v_C e V_o representam respectivamente, as tensões da fonte CC, diodo, indutor, capacitor e resistor. i_L é a corrente do indutor, i_C a corrente do capacitor e i_R a corrente do resistor. Todas essas grandezas são dependentes do tempo. No entanto, para simplificar a notação, foi omitida a dependência do tempo.

Para a modelagem desse circuito, algumas considerações precisam ser feitas:

- O indutor opera no modo de condução contínua. Ou seja, sua corrente i_L é sempre positiva.

- O período de chaveamento é T e o interruptor fica fechado durante o tempo DT . Logo, ele fica aberto pelo tempo $(1 - D)T$. D é chamado de taxa de trabalho ou *duty cycle*. A Figura 2.3 mostra um exemplo da função de chaveamento para um valor constante de $D = 0.5$ e $T = 20\mu s$. O valor da taxa de trabalho é limitada no intervalo de $0 < D < 1$.
- Todos os elementos são considerados ideais.

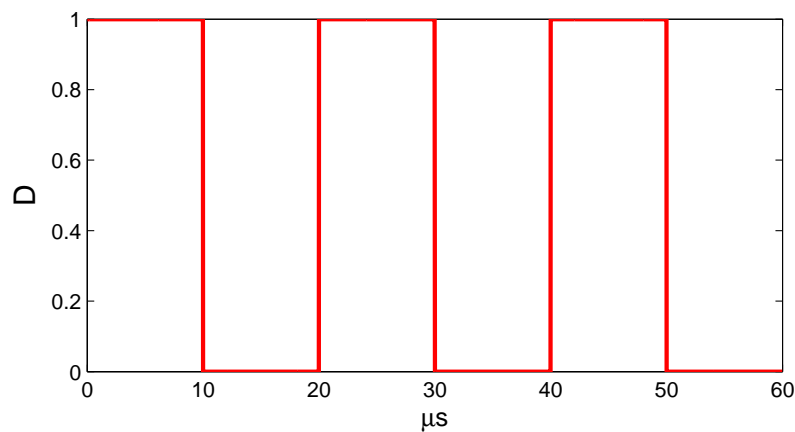


Figura 2.3: Tensão de chaveamento aplicada no interruptor.

Quando o interruptor está fechado, a tensão no indutor é $v_L = V_s - v_C$. A tensão no diodo é V_s e ele encontra-se inversamente polarizado, bloqueando a passagem da corrente. Assim, o circuito apresenta-se de acordo com a Figura 2.4.

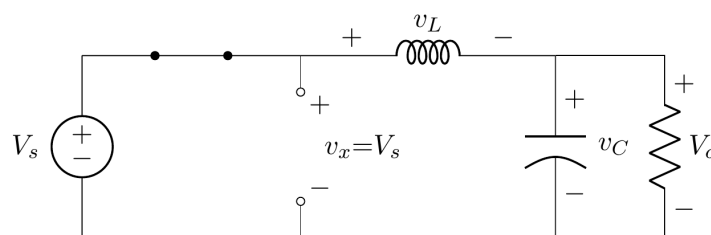


Figura 2.4: Análise com o interruptor fechado.

Quando o interruptor está aberto, a tensão v_x sob o diodo é zero e ele encontra-se em condução. A tensão sob o indutor é $v_L = -v_C$. A Figura 2.5 ilustra o interruptor aberto.

Para a modelagem no espaço de estados, as variáveis de estado escolhidas estão diretamente relacionadas com os elementos armazenadores de energia. Elas são a corrente no indutor e a tensão no capacitor. Assim, modela-se o circuito em dois modos: o primeiro quando o interruptor está fechado e o segundo quando está aberto.

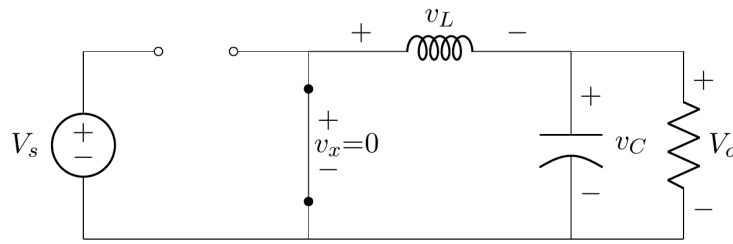


Figura 2.5: Análise com o interruptor aberto.

Como dito anteriormente, $v_L = V_s - v_C$. Porém, $v_L = L \frac{di_L}{dt}$, substituindo, obtém-se

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}(V_s - v_C) \quad (2.4)$$

Aplicando a Lei de Kirchhoff para correntes no circuito da Figura 2.4, tem-se que $i_C = i_L - i_R$. Como $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ e $i_R = \frac{v_C}{R}$, é possível unir as três equações e obter

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \left(i_L - \frac{1}{R} v_C \right) \quad (2.5)$$

Renomeando então as variáveis i_L e v_C em (2.4) e (2.5), bem como suas respectivas derivadas, tem-se

$$i_L \rightarrow x_1 \quad v_C \rightarrow x_2 \quad \frac{di_L}{dt} \rightarrow \dot{x}_1 \quad \frac{dv_C}{dt} \rightarrow \dot{x}_2$$

Considera-se ainda que $y = V_o = x_2$ é a saída e $u = V_s$ é a entrada. Executando as mudanças de variáveis, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

De maneira análoga, considere agora o circuito da Figura 2.5. Pode-se observar que $v_L = -v_C$. No entanto, $v_L = L \frac{di_L}{dt}$. Assim, tem-se que:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_C \quad (2.7)$$

A Lei de Kirchhoff para as correntes é a mesma nas Figuras 2.4 e 2.5. Assim, considerando (2.4), (2.5) e (2.7) a modelagem no espaço de estados para o circuito com a chave aberta é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Portanto, as matrizes apresentadas em (2.6) representam o sistema no modo em que a chave está fechada, e (2.8) representa o modo com a chave aberta. Como o chaveamento do circuito depende da variável D , pode-se afirmar que o chaveamento deste circuito é controlado pelo tempo.

2.3 Estabilidade

O problema de estabilidade para sistemas chaveados tem sido muito abordado nos últimos anos, destacando-se a análise de estabilidade para sistemas chaveados lineares. Para a análise da estabilidade interna, considere o sistema autônomo no tempo contínuo é definido como

$$\dot{x}(t) = A_\alpha x(t) \quad (2.9)$$

em que $A_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. O parâmetro α se refere a lei de chaveamento e este só pode assumir valores no conjunto finito $\mathcal{P} = \{1, \dots, v\}$. Isto significa que a matriz A_α só pode receber valores no conjunto

$$\{A_1, A_2, \dots, A_v\}. \quad (2.10)$$

Considere que A_α possa ter valores apenas no conjunto (2.10). Também é importante destacar que apenas um modo do sistema chaveado está ativo em cada momento, enquanto todos os outros não têm influência no sistema. Esta situação pode ser representada definindo a função indicador

$$\xi(t) = \left[\xi_1(t) \quad \dots \quad \xi_v(t) \right]^T \quad (2.11)$$

onde

$$\xi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } A_i \text{ (o } i\text{-ésimo modo ativo)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, v$$

Portanto, o sistema (2.9) pode ser escrito como

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^v \xi_i(t) A_i x(t) \quad (2.12)$$

Ou ainda

$$\dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t)$$

Dentro da análise de estabilidade, pode-se ressaltar o problema quando todos os modos do sistema são estáveis individualmente. Esta é uma condição necessária para a estabilidade sob chaveamento arbitrário. É possível ilustrar bem esta situação com o caso em que o sistema se mantém com um único modo ativo durante todo o tempo, pois é necessário que este modo seja estável. Porém, esta é uma condição necessária, mas não suficiente, como ilustrado a seguir.

Considere o sistema (2.9) em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -3 \\ \frac{1}{3} & -0.1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Neste caso, temos $v = 2$. As matrizes A_1, A_2 possuem autovalores $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = -0.1 \pm j$, isto é, os autovalores dos modos têm parte real negativa. A lei de chaveamento é dada por

$$\alpha = \begin{cases} 2, & x_1(t)x_2(t) < 0 \\ 1, & x_1(t)x_2(t) \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

O diagrama de fase do sistema é apresentado na Figura 2.6. As condições iniciais consideradas foram $x_1(0) = -0.1$ e $x_2(0) = 1$. Pode-se notar uma trajetória completamente divergente. Ou seja, o sistema é instável.

Outro problema que merece destaque é quando os modos do sistema são instáveis e mesmo assim o sistema chaveado é estável. Isto pode ser feito, por exemplo, por meio de uma lei de

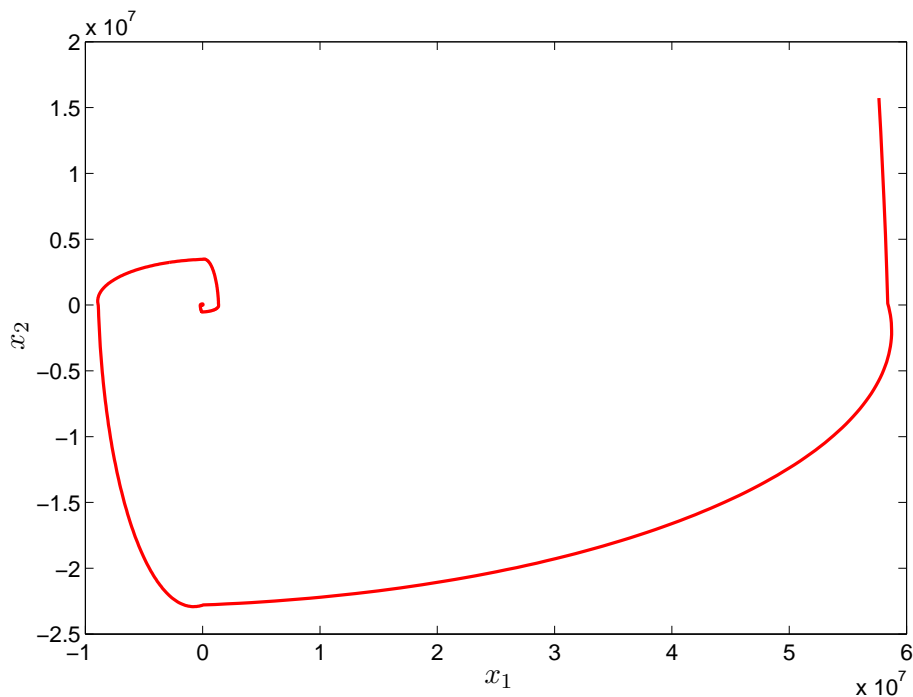


Figura 2.6: Diagrama de fase para o sistema (2.9) com matrizes (2.13) e chaveamento dado como em (2.14).

chaveamento projetada para garantir a estabilidade do sistema. O exemplo a seguir ilustra este caso.

Considere agora o sistema (2.9) com matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -3 \\ \frac{1}{3} & 0.1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

As matrizes A_1, A_2 possuem autovalores $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = 0.1 \pm j$, ou seja, autovalores com parte real positiva. A seguinte lei de chaveamento é aplicada:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & x_1(t)x_2(t) < 0 \\ 2 & x_1(t)x_2(t) \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

As condições iniciais consideradas foram $x_1(0) = -0.1$ e $x_2(0) = 1$ e seu diagrama de fase é mostrado na Figura 2.7. Neste caso, os modos são instáveis pois possuem autovalores com parte real positiva, porém a lei de chaveamento é capaz de tornar o sistema geral estável.

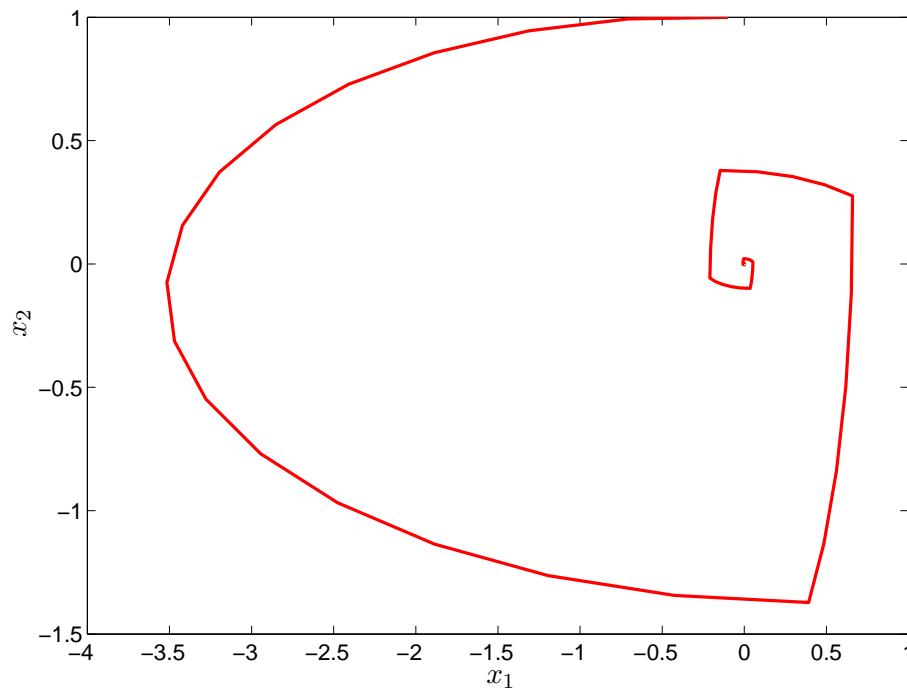


Figura 2.7: Diagrama de fase para o sistema (2.9) com matrizes (2.15) e chaveamento dado como em (2.16).

2.3.1 Teoria de Lyapunov - sistemas contínuos

A teoria de Lyapunov está diretamente relacionada com o ponto de equilíbrio do sistema. Existe uma função, chamada aqui de função de Lyapunov, que se relaciona diretamente com a energia do sistema. Quando esta energia, representada pela função de Lyapunov, decai de forma assintótica então é possível dizer que o sistema é estável.

Assim, a função de Lyapunov $V(t, x(t))$ para sistemas em tempo contínuo precisa cumprir três critérios:

1. $V(t, x(t)) > 0$
2. $\dot{V}(t, x(t)) < 0$
3. $V(t, 0) = 0$

para garantir que o sistema seja globalmente assintoticamente estável.

Uma função muito encontrada na literatura para se verificar a estabilidade do sistema de acordo com esses critérios é a chamada Função de Lyapunov quadrática comum, ou CQLF (do inglês *Common Quadratic Lyapunov Function* [8, 27]. Ela é definida como $V(t, x(t)) =$

$x(t)^T P x(t)$, e possui esse nome por ser a mesma para todos os modos do sistema. A partir dela, é possível enunciar o Lema a seguir, chamado de estabilidade quadrática para sistemas contínuos.

Lema 1. *Se existir uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que*

$$P > 0 \quad (2.17)$$

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \quad (2.18)$$

Então o sistema (2.9) é assintoticamente estável.

Demonstração. A condição (2.17) garante que a função de Lyapunov $V(t, x(t)) = x(t)^T P x(t)$ seja definida positiva. Para a desigualdade (2.18), multiplica-se à esquerda por $x^T(t)$ e à direita por $x(t)$ para todos os valores de $i = 1, \dots, N$. Em seguida, soma-se as desigualdades. De acordo com a lei de chaveamento, apenas uma das matrizes está ativa por vez, como representado em (2.12). Desta forma, obtém-se

$$x(t)^T \left(A(\xi(t))^T P + P A(\xi(t)) \right) x(t) = x(t)^T A(\xi(t))^T P x(t) + x(t)^T P A(\xi(t)) x(t) < 0$$

Substituindo (2.9) na desigualdade anterior, tem-se

$$\dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0$$

Isto equivale à derivada da função de Lyapunov considerada, ou seja

$$\dot{V}(t, x(t)) < 0$$

□

2.3.2 Teoria de Lyapunov - sistemas discretos

Considere agora o sistema autônomo no tempo discreto, que é descrito como

$$x(k+1) = A_\alpha x(k) \quad (2.19)$$

A função indicador para o sistema no tempo discreto é dada por

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \xi_1(k) & \dots & \xi_v(k) \end{bmatrix}^T \quad (2.20)$$

onde

$$\xi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } A_i \text{ (o } i\text{-ésimo modo ativo)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, v$$

Portanto, o sistema (2.19) pode ser escrito como

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^v \xi_i(k) A_i x(k) \quad (2.21)$$

Ou ainda

$$x(k+1) = A(\xi(k))x(k) \quad (2.22)$$

No caso dos sistemas discretos no tempo, a função de Lyapunov precisa satisfazer os seguintes critérios:

1. $V(k, x(k)) > 0$
2. $\Delta V(k, x(k)) < 0$
3. $V(k, 0) = 0$

para garantir que o sistema seja globalmente assintoticamente estável.

Portanto, seja a CQLF para o sistema no tempo discreto definida como $V(k, x(k)) = x(k)^T P x(k)$. Assim, é possível enunciar o Lema da estabilidade quadrática para sistemas discretos no tempo [8].

Lema 2. *Se existir uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que*

$$P > 0 \quad (2.23)$$

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \quad (2.24)$$

Então o sistema (2.19) é assintoticamente estável.

Demonstração. A condição (2.23) garante que a função de Lyapunov $V(k, x(k)) = x(k)^T P x(k)$ seja definida positiva. Para a desigualdade (2.24), multiplica-se à esquerda por $x^T(k)$ e à direita

por $x(k)$ para todos os valores de $i = 1, \dots, N$. Em seguida, soma-se as desigualdades. De acordo com a lei de chaveamento, apenas uma das matrizes está ativa por vez, como representado em (2.21). Desta forma, obtém-se

$$x^T(k)A(\xi(k))^T PA(\xi(k))x(k) - x^T(k)Px(k) < 0$$

Substituindo (2.19) na desigualdade anterior, tem-se

$$x(k+1)^T Px(k+1) - x^T(k)Px(k) < 0$$

que equivale a $V(k+1) - V(k) < 0$, ou seja

$$\Delta V < 0$$

□

Estabilidade de Sistemas Chaveados

Neste capítulo, são apresentados os principais resultados da dissertação no que diz respeito à estabilidade de sistemas chaveados discretos no tempo sob chaveamento arbitrário. Primeiramente, é feito um breve histórico das técnicas e proposições nas quais este trabalho se baseou. Posteriormente, é apresentado o principal teorema para a verificação da estabilidade do sistema de maneira mais eficiente. Por fim, apresentam-se exemplos numéricos para ilustrar a eficiência do método proposto, em comparação com outros métodos encontrados na literatura.

3.1 Sistemas chaveados no tempo discreto com chaveamento aleatório

O teorema a seguir introduz as condições para certificar a estabilidade do sistema na origem, considerando a Teoria de Lyapunov.

Teorema 1 ([28]). *O equilíbrio 0 de*

$$x(k+1) = f_k(x(k)) \tag{3.1}$$

é globalmente, uniformemente, assintoticamente estável se existir uma função $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- *V é definida positiva, decrescente e radialmente ilimitada;*
- *$\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$ é definida negativa com as trajetórias de (3.1).*

É possível dizer que a função de Lyapunov é definida positiva, decrescente e radialmente limitada se $V(k,0) = 0, \forall k \geq 0$ e

$$\beta_1 \|x(k)\|^2 \leq V(k,x(k)) \leq \beta_2 \|x(k)\|^2$$

para todo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ e $k \geq 0$ com β_1 e β_2 escalares positivos.

Para certificar a estabilidade de (2.9) sob chaveamento arbitrário, os autores de [9] introduziram o conceito de função de Lyapunov chaveada, que consiste em uma função de Lyapunov com valores que mudam de acordo com o chaveamento. Este resultado levou a duas condições LMI para certificar a estabilidade de (2.9). Assim o Lema a seguir apresenta as condições e a forma da função de Lyapunov utilizada.

Lema 3 ([9]). *As afirmações a seguir são equivalentes:*

1. *Existe uma função de Lyapunov na forma de*

$$V(k,x(k)) = x(k)^T P(\xi(k))x(k) = x(k)^T \left(\sum_{i=1}^v \xi_i(k) P_i \right) x(k)$$

cuja diferença é definida negativa, provando a estabilidade assintótica de (2.19).

2. *Se existirem matrizes P_1, \dots, P_v tais que*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \quad (3.2)$$

então a função de Lyapunov é dada por

$$V(k,x(k)) = x(k)^T \left(\sum_{i=1}^v \xi_i(k) P_i \right) x(k) \quad (3.3)$$

3. *Se existirem matrizes simétricas S_1, \dots, S_v e matrizes G_1, \dots, G_v tais que*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \quad (3.4)$$

então a função de Lyapunov é dada por

$$V(k, x(k)) = x(k)^T \left(\sum_{i=1}^v \xi_i(k) S_i^{-1} \right) x(k)$$

Demonstração. Para provar de 1 para 2, assume-se que existe uma função de Lyapunov da forma de (3.3) cuja diferença é definida negativa. Portanto

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \\ &= x^T(k+1)P(\xi(k+1))x(k+1) - x^T(k)P(\xi(k))x(k) \\ &= x^T(k) \left(A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))A(\xi(k)) - P(\xi(k)) \right) x(k) \end{aligned}$$

Sob chaveamento arbitrários, existem valores independentes de $\xi(k)$ e $\xi(k+1)$. Assim, chega-se em

$$P_i + A_i^T P_j A_i > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \quad (3.5)$$

A condição 2 é encontrada aplicando o Complemento de Schur em (3.5).

Para provar de 2 para 1, assume-se que (3.3) é satisfeita para todos os valores de $i = 1, 2, \dots, v$ e $j = 1, 2, \dots, v$. Para cada i , multiplique as $j = 1, 2, \dots, v$ desigualdades por $\xi_j(k+1)$ e some. Multiplique as $i = 1, 2, \dots, v$ e $j = 1, 2, \dots, v$ desigualdades resultantes por $\xi_i(k)$ e some. Como $\sum_{i=1}^v \xi_i(k) = \sum_{j=1}^v \xi_j(k+1) = 1$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} P(\xi(k)) & A^T(\xi(k))P(\xi(k+1)) \\ P(\xi(k+1))A(\xi(k)) & P(\xi(k+1)) \end{bmatrix} > 0$$

O que é equivalente, pelo complemento de Schur, a

$$\left(P(\xi(k)) - A(\xi(k))^T P(\xi(k+1)) A(\xi(k)) \right) > 0$$

Assim

$$\Delta V = -x(k)^T \left(P(\xi(k)) - A(\xi(k))^T P(\xi(k+1)) A(\xi(k)) \right) x(k)$$

leva a $\Delta V \leq -\gamma(\|x\|)$ com

$$\gamma(\|x\|) = \min_{(i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}} \lambda_{\min}(P_i - A_i^T P_j A_i) \|x\|^2$$

Com isso, a continuação da prova acontece pelo Teorema 1.

Para provar de 3 para 2, assume-se que (3.4) é factível. Logo

$$G_i + G_i^T + S_i < 0 \quad \forall i \in \mathcal{P}$$

Isto significa que G_i possui posto cheio. Além disso, como S_i é estritamente definida positiva, tem-se

$$(S_i - G_i)^T S_i^{-1} (S_i - G_i) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{P}$$

O que é equivalente a

$$G_i^T S_i^{-1} G_i \geq G_i^T + G_i - S_i \quad \forall i \in \mathcal{P}$$

Assim, se (3.4) é verdadeiro, segue-se que

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

O que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} G_i^T & 0 \\ 0 & S_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i^{-1} & A_i^T S_j^{-1} \\ S_j^{-1} & S_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

Fazendo $P_i = S_i^{-1}$ e $P_j = S_j^{-1}$, (3.6) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

que equivale a condição 2.

Para provar de 2 para 3, assume-se que (3.2) é satisfeita e seu equivalente, através do complemento de Schur, é igual a

$$P_i - A_i^T P_j A_i > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

Fazendo $S_i = P_i^{-1}$ e $S_j = P_j^{-1}$ e usando o complemento de Schur, chega-se em

$$S_j - A_i S_i A_i^T = T_{ij} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

Seja $G_i = S_i + g_i I$ onde g_i é um número escalar positivo. Existe um g_i suficientemente pequeno tal que

$$g_i^{-2}(S_i + 2g_i I) > A_i^T T_{ij}^{-1} A_i \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

O que é equivalente, pelo complemento de Schur a

$$\begin{bmatrix} S_i + 2g_i I & -g_i A_i^T \\ -A_i g_i & T_{ij} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

O que é o mesmo que

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & S_i A_i^T - G_i A_i \\ A_i S_i - A_i G_i & S_j - A_i S_i A_i^T \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

sendo esta LMI equivalente a

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_i & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_i^T \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

□

Como discutido anteriormente, as condições apresentadas no Lema 3, são apenas suficientes. A seguir, é apresentado outro método para provar a estabilidade do sistema mostrado em [10, Teorema 9], sendo esta condição necessária e suficiente.

Lema 4. *O sistema (2.19) é exponencialmente estável se, e somente se, existe um inteiro M e uma matriz definida positiva $X(j_1, \dots, j_M) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(j_1, \dots, j_M) \in \{1, \dots, v\}$ tal que*

$$A_{i_M}^T X_{i_1 \dots i_M} A_{i_M} - X_{i_0 \dots i_{M-1}} < 0 \quad (3.7)$$

em que $(i_0, \dots, i_M) \in \{1, \dots, v\}^{M+1}$ representa um caminho de chaveamento admissível de comprimento M .

Ambos os Lemas 3 e 4 propõem condições que se baseiam na existência de matrizes que, de alguma maneira, copiam o comportamento do sistema chaveado. Por exemplo no Teorema 3, a função de Lyapunov tem a mesma representação da matriz dinâmica de (2.19). No Lema 4, a função de Lyapunov é ainda mais complexa pois depende dos múltiplos índices que decorrem do tamanho do caminho M escolhido para testar a estabilidade do sistema.

A próxima seção apresenta a função de Lyapunov proposta neste trabalho e os decorrentes teoremas para verificar a estabilidade do sistema.

3.2 Contribuições

Baseado nos recentes avanços no problema de estabilidade para sistemas com incertezas politópicas apresentado em [29], a ideia proposta aqui leva em consideração uma nova classe de funções de Lyapunov que dependem da dinâmica do sistema chaveado. Portanto, a próxima proposição apresenta uma nova função de Lyapunov baseada em estruturas não monotônicas presentes em seus termos.

Lema 5. *O sistema (2.19) é globalmente uniformemente e assintoticamente estável, se, e somente se, existirem matrizes simétricas $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de forma que as seguintes LMIs sejam satisfeitas*

$$P_2 > 0, \quad P_1 + P_2 > 0 \quad (3.8)$$

$$A_{i_1}^T P_1 A_{i_1} + A_{i_1}^T A_{i_2}^T P_2 A_{i_2} A_{i_1} - P_1 - P_2 < 0 \quad (3.9)$$

$$\forall (i_1, i_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

Demonstração. Multiplicando (3.9) por $x(k)^T$ do lado esquerdo e por $x(k)$ do lado direito, pode-se escrever

$$\begin{aligned} x(k)^T A_{i_1}^T P_1 A_{i_1} x(k) + x(k)^T A_{i_1}^T A_{i_2}^T P_2 A_{i_2} A_{i_1} x(k) \\ - x(k)^T P_1 x(k) - x(k)^T P_2 x(k) < 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Definindo $V_i(x(k)) = x(k)^T P_i x(k)$, $i = 1, 2$ para escrever

$$V_1(x(k+1)) + V_2(x(k+2)) < V_1(x(k)) + V_2(x(k))$$

Adicionando mais um termo em ambos lados da desigualdade, tem-se

$$V_1(x(k+1)) + V_2(x(k+2)) + S < V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + S$$

com

$$S = V_2(x(k+1))$$

chega-se em

$$V_1(x(k+1)) + V_2(x(k+1)) + V_2(x(k+2)) < V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + V_2(x(k+1)) \quad (3.11)$$

Considerando $W(k) = V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + V_2(x(k+1))$ é possível escrever (3.11) como $W(k+1) - W(k) < 0$. Note que todos os estados podem ser escritos em função de $x(k)$ utilizando $x(k+1) = A(\xi(k))x(k)$. Portanto, $W(k)$ pode ser escrita apenas em função de $x(k)$, se desejado.

Se a condição (3.8) é verdadeira, $W(k)$ é definida positiva e se a condição (3.9) é verdadeira, garante-se $W(k+1) - W(k) < 0$. Desta forma, $W(k)$ é uma função de Lyapunov que comprova a estabilidade assintótica do sistema chaveado discreto no tempo (2.19). \square

Tomando como base o Lema 5, o Teorema a seguir estende a abordagem e considera uma função de Lyapunov que leva em consideração de maneira genérica e aumentada o vetor de estados. Além disso, este Teorema também considera a função de Lyapunov com matrizes $P(\xi(k))$ que são dependentes do chaveamento do sistema.

Teorema 2. *O sistema (2.19) é globalmente uniformemente e assintoticamente estável, se, e somente se, existirem matrizes simétricas $P_j(\xi(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, como em (2.21), de forma que as seguintes LMIs sejam satisfeitas*

$$\sum_{m=j}^N P_{m,i_1} > 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad \forall i_1 \in \mathcal{P} \quad (3.12)$$

$$\sum_{m=1}^N \Psi_m^T P_{m,i_{m+1}} \Psi_m - P_{m,i_1} < 0 \quad (3.13)$$

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_{N+1}) \in \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{N+1 \text{ vezes}}$$

em que

$$\Psi_m = A_{i_m} A_{i_{m-1}} \dots A_{i_1}. \quad (3.14)$$

Demonstração. Suficiência: Assumindo (3.13) como verdadeira, multiplica-se (3.13) por $x(k)^T$ do lado esquerdo e por $x(k)$ do lado direito. Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} & x(k)^T \Psi_1^T P_1(\xi(k+1)) \Psi_1 x(k) - x(k)^T P_1(\xi(k)) x(k) \\ & + x(k)^T \Psi_2^T P_2(\xi(k+2)) \Psi_2 x(k) - x(k)^T P_2(\xi(k)) x(k) \dots \\ & + x(k)^T \Psi_N^T P_N(\xi(k+N)) \Psi_N x(k) - x(k)^T P_N(\xi(k)) x(k) < 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Definindo $V_i(x(k)) = x(k)^T P_i(\xi(k)) x(k)$, $i = 1, \dots, N$ para escrever

$$V_1(x(k+1)) + V_2(x(k+2)) + \dots + V_N(x(k+N)) < V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + \dots + V_N(x(k))$$

Adicionando o termo S em ambos os lados com

$$S = \sum_{j=2}^N \sum_{i=j}^N V_i(x(k+j-1))$$

tem-se

$$\begin{aligned} & V_1(x(k+1)) + V_2(x(k+2)) + \dots + V_N(x(k+N)) + S \\ & < V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + \dots + V_N(x(k)) + S. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considerando $W(k) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N V_i(x(k+j-1))$ é possível escrever (3.16) como $W(k+1) - W(k) < 0$. Note que todos os estados podem ser escritos em função de $x(k)$ utilizando $x(k+1) = A(\xi(k))x(k)$. Portanto, $W(k)$ pode ser escrita apenas em função de $x(k)$, com

$W(k) = x(k)^T R(k)x(k)$ sendo

$$R(k) = \sum_{i=1}^N P_i(\xi(k)) + A(\xi(k))^T \left(\sum_{i=2}^N P_i(\xi(k+1)) \right) A(\xi(k)) + \dots \\ + \Psi_{N-2}^T \left(\sum_{i=N-1}^N P_i(\xi(k+N-2)) \right) \Psi_{N-2} + \Psi_{N-1}^T P_N(\xi(k+N-1)) \Psi_{N-1}, \quad (3.17)$$

e Ψ como em (3.14). Se a condição (3.12) é verdadeira, então $R(k)$ como em (3.17) é definida positiva, implicando que $W(k) = x(k)^T R(k)x(k)$ é a função de Lyapunov que garante a estabilidade assintótica do sistema chaveado discreto no tempo (2.19).

Necessidade: Assumindo que o sistema (2.19) é assintoticamente estável, pode-se dizer que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$. Será mostrado, a seguir, que as condições propostas em (2) são satisfeitas sempre que o sistema (2.19) é assintoticamente estável. Para isto, considere N grande o suficiente, uma matriz constante $P_N = P$ e matrizes $P_j = 0, j = 1, \dots, N-1$. As condições (3.12) e (3.13) levam a $P > 0$ e

$$(A_{i_N} A_{i_{N-1}} \dots A_{i_1})^T P (A_{i_N} A_{i_{N-1}} \dots A_{i_1}) - P < 0. \quad (3.18)$$

Pré multiplicando e pós multiplicando por $x(k)^T$ e $x(k)$, respectivamente:

$$x(k)^T (A_{i_N} A_{i_{N-1}} \dots A_{i_1})^T P (A_{i_N} A_{i_{N-1}} \dots A_{i_1}) x(k) - x(k)^T P x(k) < 0,$$

ou

$$x(k+N+1)^T P x(k+N+1) - x(k)^T P x(k) < 0.$$

Como, por premissa, o sistema (2.19) é assintoticamente estável, existe um valor grande o suficiente para n tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} x(k+N+1) = 0$. Assim, tem-se que $-x(k)^T P x(k) < 0$, que é satisfeito pela matriz definida positiva P . Além disso, a condição (3.18) é equivalente a [30, Teorema 2], uma condição necessária e suficiente para certificar a estabilidade de (2.19). \square

Comentário. Se existe uma solução para N , então uma pequena perturbação pode ser adicionada para mostrar que existe solução para o termo $N+1$. Por exemplo, considere o Teorema 2 com $N = 2$. Assim, temos $W_N(k) = V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + V_2(x(k+1))$. Se esta função de Lyapunov garante a estabilidade do sistema, então existe um ϵ suficientemente pequeno tal que $W_{N+1}(k) = V_1(x(k)) + V_2(x(k)) + \epsilon V_3(x(k)) + V_2(x(k+1)) + \epsilon V_3(x(k+1)) + \epsilon V_3(x(k+2))$

também é uma função de Lyapunov capaz de certificar a estabilidade do sistema.

A ideia proposta no Teorema a seguir apresenta um novo método para verificar a estabilidade do sistema baseada no vetor de estados para construir uma função de Lyapunov, resultado que foi publicado em [21]. Primeiramente, considere a função de Lyapunov

$$V(k, x(k)) = \begin{bmatrix} x(k)^T & x(k+1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde P_1 e P_2 são matrizes simétricas. As condições do Teorema 1 precisam ser atendidas para garantir que (3.19) é uma função de Lyapunov. Não é necessário que P_1 ou P_2 sejam definidas positivas e, na sequência, ficará claro que (3.19) pode ser escrita de forma a evitar a imposição de restrições às matrizes P_1 e P_2 . O lema a seguir apresenta o resultado para esse caso.

Lema 6. *As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. *Existe uma função de Lyapunov na forma de (3.19) que garante a estabilidade assintótica de (2.19)*
2. *Existem as matrizes simétricas P_1 e P_2 que satisfazem*

$$P_1 + A_{i_1}^T P_2 A_{i_1} > 0 \quad \forall i_1 \in \mathcal{P} \quad (3.20)$$

$$A_{i_1}^T P_1 A_{i_1} + A_{i_1}^T A_{i_2}^T P_2 A_{i_2} A_{i_1} - (P_1 + A_{i_1}^T P_2 A_{i_1}) < 0 \quad (3.21)$$

$$\forall (i_1, i_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

Demonstração. Note que (3.19) pode ser escrita como

$$V(k, x(k)) = x(k)^T P_1 x(k) + x(k+1)^T P_2 x(k+1) \quad (3.22)$$

Além disso, baseado em (2.21), chega-se a equação (2.22), representada a seguir

$$x(k+1) = A(\xi(k))x(k) \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.22) tem-se

$$V(k, x(k)) = x(k)^T P_1 x(k) + x(k)^T A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k)) x(k)$$

o que leva a

$$V(k, x(k)) = x(k)^T \left[P_1 + A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k)) \right] x(k) \quad (3.24)$$

Claramente $V(k, 0) = 0, \forall k \geq 0$. O Teorema 1 afirma que $V(k, x(k))$ deve ser definida positiva para ser uma função de Lyapunov. Portanto,

$$P_1 + A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k)) > 0$$

que pode ser verificado por (3.20).

Neste ponto, é necessário provar que $V(k, x(k))$ é decrescente para as trajetórias do sistema (2.19). A partir de (3.19), pode-se dizer que

$$V(k+1, x(k+1)) = x(k+1)^T P_1 x(k+1) + x(k+2)^T P_2 x(k+2) \quad (3.25)$$

Usando (3.23) é possível escrever

$$x(k+2) = A(\xi(k+1))x(k+1) \quad (3.26)$$

ou

$$x(k+2) = A(\xi(k+1))A(\xi(k))x(k) \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) e (3.23) em (3.25) e usando (3.24) para escrever $\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$ como

$$\begin{aligned} \Delta V(k, x(k)) = & x(k)^T [A(\xi(k))^T P_1 A(\xi(k)) + A(\xi(k))^T A(\xi(k+1))^T P_2 A(\xi(k+1)) A(\xi(k)) \\ & - (P_1 + A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k)))] x(k) \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 1, $\Delta V(k, x(k))$ precisa ser uma função definida negativa, então

pode-se escrever

$$A(\xi(k))^T P_1 A(\xi(k)) + A(\xi(k))^T A(\xi(k+1))^T P_2 A(\xi(k+1)) A(\xi(k)) - (P_1 + A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k))) < 0$$

o que é verificado de acordo com as LMIs em (3.21). Além disso,

$$\Delta V(k, x(k)) \leq -\gamma(\|x(k)\|)$$

onde

$$\gamma = \min_{(i_1, i_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}} \lambda_{\min}(A_{i_1}^T P_1 A_{i_1} + A_{i_1}^T A_{i_2}^T P_2 A_{i_2} A_{i_1} - (P_1 + A_{i_1}^T P_2 A_{i_1}))$$

o que conclui a prova. \square

Baseado na ideia principal proposta no Lema 6, o objetivo aqui é estender a abordagem e considerar uma função de Lyapunov que leva em consideração de maneira genérica e aumentada o vetor de estados, na seguinte forma.

$$V(k, x(k)) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \vdots \\ x(k+(N-1)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & P_2 & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \vdots \\ x(k+(N-1)) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde N depende do tamanho do vetor de estados aumentado. Além disso, $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representam matrizes simétricas e \star representa elementos simétricos. Desta maneira, o Teorema a seguir generaliza o resultado apresentado no Lema 6.

Teorema 3. *O sistema (2.19) é globalmente uniformemente e assintoticamente estável, se, e somente se, existirem matrizes simétricas $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de forma que as seguintes desigualdades existam*

$$\sum_{m=1}^N \left[\left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A_{i_\beta}^T \right) P_m \left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A_{i_{m-\beta-1}} \right) \right] > 0 \quad (3.29)$$

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_{N-1}) \in \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{N-1 \text{ vezes}}$$

$$\sum_{m=1}^N \left[\left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A_{i_1+\beta}^T \right) P_m \left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A_{i_m-\beta} \right) \right] - \sum_{m=1}^N \left[\left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A_{i_\beta}^T \right) P_m \left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A_{i_{m-\beta-1}} \right) \right] < 0 \quad (3.30)$$

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{N \text{ vezes}}$$

com $A_{i_0} = I$.

Demonstração. Como foi enunciado no Teorema 1 a função de Lyapunov (3.28) precisa ser definida positiva

$$V(k, x(k)) > 0$$

então, pode-se escrever

$$V(k, x(k)) = x(k)^T P_1 x(k) + x(k+1)^T P_2 x(k+1) \\ + \dots + x(k+N-1)^T P_N x(k+N-1) > 0 \quad (3.31)$$

De acordo com (3.23) temos

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\xi(k))x(k) \\ x(k+2) &= A(\xi(k+1))A(\xi(k))x(k) \\ &\vdots \\ x(k+N-1) &= A(\xi(k+N-1)) \dots A(\xi(k))x(k) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) em (3.31) tem-se a condição que precisa ser satisfeita para garantir uma função de Lyapunov definida positiva

$$P_1 + A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k)) + \dots \\ + \prod_{\beta=0}^{N-1} \left(A(\xi(k+\beta-1))^T \right) P_N \prod_{\beta=0}^{N-1} \left(A(\xi(k+N-\beta-2)) \right) > 0 \quad (3.33)$$

com $A(\xi(k-1)) = I$. A condição (3.33) pode ser escrita de uma forma compacta como uma soma de termos, de P_1 a P_N , o que leva a

$$\sum_{m=1}^N \left[\left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A(\xi(k+\beta-1))^T \right) P_m \left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A(\xi(k+m-\beta-2)) \right) \right] > 0 \quad (3.34)$$

A condição (3.34) pode ser numericamente verificada usando as LMIs de (3.29). A partir do

Teorema 1, obtém-se a segunda desigualdade

$$\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) < 0 \quad (3.35)$$

Considerando $V(k, x(k))$ em (3.28) e seguindo os mesmos passos do Lema 6, temos

$$\begin{aligned} V(k+1, x(k+1)) &= x(k+1)^T P_1 x(k+1) \\ &+ x(k+2)^T P_2 x(k+2) + \dots + x(k+N)^T P_N x(k+N) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando (3.28), (3.32) e (3.36), a condição (3.35), depois de algumas manipulações algébricas, pode ser satisfeita através da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} &A(\xi(k))^T P_1 A(\xi(k)) + A(\xi(k))^T A(\xi(k+1))^T P_2 A(\xi(k+1)) A(\xi(k)) \dots \\ &+ \prod_{\beta=0}^{N-1} \left(A(\xi(k+\beta))^T \right) P_N \prod_{\beta=0}^{N-1} (A\xi(k+N-\beta-1)) - \left(P_1 + A(\xi(k))^T P_2 A(\xi(k)) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \prod_{\beta=0}^{N-1} \left(A(\xi(k+\beta-1))^T \right) P_N \prod_{\beta=0}^{N-1} (A(\xi(k+N-2-\beta))) \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Os termos de (3.37) podem ser expressos como em (3.38)

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^N \left[\left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A(\xi(k+\beta))^T \right) P_m \left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A(\xi(k+m-\beta-1)) \right) \right] \\ &- \sum_{m=1}^N \left[\left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A(\xi(k+\beta-1))^T \right) P_m \left(\prod_{\beta=0}^{m-1} A\xi(k+m-\beta-2) \right) \right] < 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

A desigualdade (3.38) pode ser numericamente verificada baseada nas LMIs de (3.30). \square

É importante destacar que o Teorema 3 com $N = 1$ equivale a uma forma reduzida da condição clássica da estabilidade quadrática apresentada no Lema 2. De outra forma, considere $P_2 = 0$ no Lema 6 para obter as restrições da estabilidade quadrática.

Se existe uma solução para N , então pode-se adicionar uma pequena perturbação aos argumentos da função para mostrar que também existe uma solução para $N + 1$. Por exemplo, considere o Lema 6 onde $V_N(x(k)) = x(k)^T P_1 x(k) + x(k+1)^T P_2 x(k+1)$. Se essa função de Lyapunov garante a estabilidade do sistema, então existe um ϵ suficientemente pequeno tal que $V_{N+1}(x(k)) = x(k)^T P_1 x(k) + x(k+1)^T P_2 x(k+1) + x(k+2)^T (\epsilon P_3) x(k+2)$ também é uma

função de Lyapunov capaz de certificar a estabilidade do sistema.

A partir do que foi apresentado no Teorema 3, é possível fazer uma extensão desse resultado e fazer uso de matrizes de Lyapunov chaveadas que possuem a mesma estrutura apresentada em (2.21). Este método para certificar a estabilidade do sistema é apresentado no seguinte Teorema.

Teorema 4. *O sistema (2.19) é globalmente uniformemente e assintoticamente estável, se, e somente se, existirem matrizes simétricas $P_j(\xi(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, como em (2.21), de forma que as seguintes desigualdades existam*

$$\sum_{m=1}^N \left(\Theta_m^T P_{m,i_m} \Theta_m \right) > 0 \quad (3.39)$$

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{N \text{ vezes}}$$

$$\sum_{m=1}^N \left(\Theta_{m+1}^T P_{m,i_{m+1}} \Theta_{m+1} \right) - \sum_{m=1}^N \left(\Theta_m^T P_{m,i_m} \Theta_m \right) < 0 \quad (3.40)$$

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_{N+1}) \in \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{N+1 \text{ vezes}}$$

com

$$\Theta_{m+r}^T = \prod_{k=r}^{m-1+r} A_{i_k}^T$$

e $A_{i_0} = I$.

Demonstração. A prova segue os mesmos passos do Teorema 3. □

Aqui também é possível mostrar que há uma solução para $N + 1$ quando a solução para N existe. Considere o Lema 4 com $N = 2$. Assim, a função de Lyapunov pode ser escrita como $V_N(x(k)) = x(k)^T P_1(\xi(k))x(k) + x(k+1)^T P_2(\xi(k+1))x(k+1)$. Se tal função de Lyapunov garante a estabilidade do sistema então existe um ϵ suficientemente pequeno tal que $V_{N+1} = x(k)^T P_1(\xi(k))x(k) + x(k+1)^T P_2(\xi(k+1))x(k+1) + (x(k+2)^T \epsilon P_3(\xi(k+2))x(k+2))$ que também é uma função de Lyapunov capaz de certificar a estabilidade do sistema.

3.3 Exemplos numéricos

Serão apresentados exemplos numéricos a fim de ilustrar o potencial das técnicas propostas nesta dissertação. As rotinas foram implementadas usando MATLAB, version 8.3.03532

(R14a), usando Yalmip [31] e MOSEK [32]. O computador utilizado foi um Intel Quad Core (2.4GHz), 8GB RAM, Windows 10.

3.3.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo foi retirado de [11]. Considere o sistema (2.19) com matrizes $A_i = e^{0.1B_i}$ onde

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, o Teorema 3 foi utilizado para certificar estabilidade. Iniciando o teste com $N = 1$, aumentando gradativamente o valor de N até o momento em que o Teorema 3 foi capaz de certificar a estabilidade, o que aconteceu com $N = 3$, i.e., considerando três matrizes constantes:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 146.56 & 7.38 \\ 7.38 & 0.68 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2.39 & 14.74 \\ 14.74 & 0.09 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} -144.24 & 7.58 \\ 7.58 & -0.15 \end{bmatrix}.$$

Como pode ser observado, é importante destacar que o Teorema 3 gastou apenas 9 variáveis escalares de decisão para verificar a estabilidade do sistema, enquanto o método proposto por [11] utilizou 12 variáveis escalares de decisão para averiguar a estabilidade do sistema. O método proposto em [9] não foi capaz de certificar a estabilidade. A função de Lyapunov resultante desta aplicação do Teorema 3 com $N = 3$ é dada por

$$V(k, x(k)) = x(k)^T P_1 x(k) + x(k)^T A_{i_1}^T P_2 A_{i_1} x(k) + x(k)^T A_{i_1}^T A_{i_2}^T P_3 A_{i_2} A_{i_1} x(k), \quad (3.41)$$

$\forall (i_1, i_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. A função de Lyapunov pode ser reescrita como

$$V(k, x(k)) = V_1 + V_2 + V_3$$

com

$$\begin{aligned} V_1 &= x(k)^T P_1 x(k) \\ V_2 &= x(k)^T A_{i_1}^T P_2 A_{i_1} x(k) \\ V_3 &= x(k)^T A_{i_1}^T A_{i_2}^T P_3 A_{i_2} A_{i_1} x(k) \end{aligned} \quad (3.42)$$

A Figura 3.1 (a) mostra a evolução dos termos de (3.42) ao longo das trajetórias dos sistemas. O vetor de estados inicial foi $x(0)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ com a lei de chaveamento apresentada na Figura 3.1 (c) (o cenário de pior caso é aquele em que acontece chaveamento em cada instante de tempo). Pode-se perceber que os termos V_1 , V_2 e V_3 não são monotonicamente decrescentes individualmente. No entanto, a função de Lyapunov $V(k, x(k))$ mostrada na Figura 3.1 (b) é monotonicamente decrescente como esperado.

O Teorema 2 também foi utilizado para verificar a estabilidade sob chaveamento arbitrário. Foi encontrado $N = 4$ como valor mínimo (ou seja, quatro matrizes constantes foram usadas para certificar a estabilidade do sistema) com 12 variáveis escalares de decisão. Entretanto, com $N = 4$ e considerando $P_1 = P_2 = 0_{n \times n}$, o Teorema 2 foi capaz de verificar a estabilidade do sistema com somente 6 variáveis escalares de decisão. Este resultado foi encontrado fazendo gradativamente cada matriz P igual a $0_{n \times n}$. A Figura 3.2 mostra a função de Lyapunov obtida com o Teorema 2 utilizando $N = 4$ e a mesma regra de chaveamento presente na Figura 3.1 (c).

3.3.2 Exemplo 2

Considere o seguinte sistema chaveado discreto no tempo retirado de [10], que é dependente do parâmetro θ

$$x(k+1) = A_\alpha x(k) \quad (3.43)$$

A matriz A_α pode assumir valores no conjunto finito $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ com

$$A_1 = \begin{bmatrix} \theta & \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\theta & 0 \\ \theta & -\theta \end{bmatrix}$$

O [10, Teorema 9], o Teorema 2 e o Teorema 3 foram considerados para certificar a estabilidade de (3.43) sob chaveamento arbitrário. O objetivo é encontrar o limite superior de θ tal que o sistema (3.43) permaneça estável.

A Tabela 3.1 mostra o resultado em função do número de variáveis escalares de decisão (N_V)

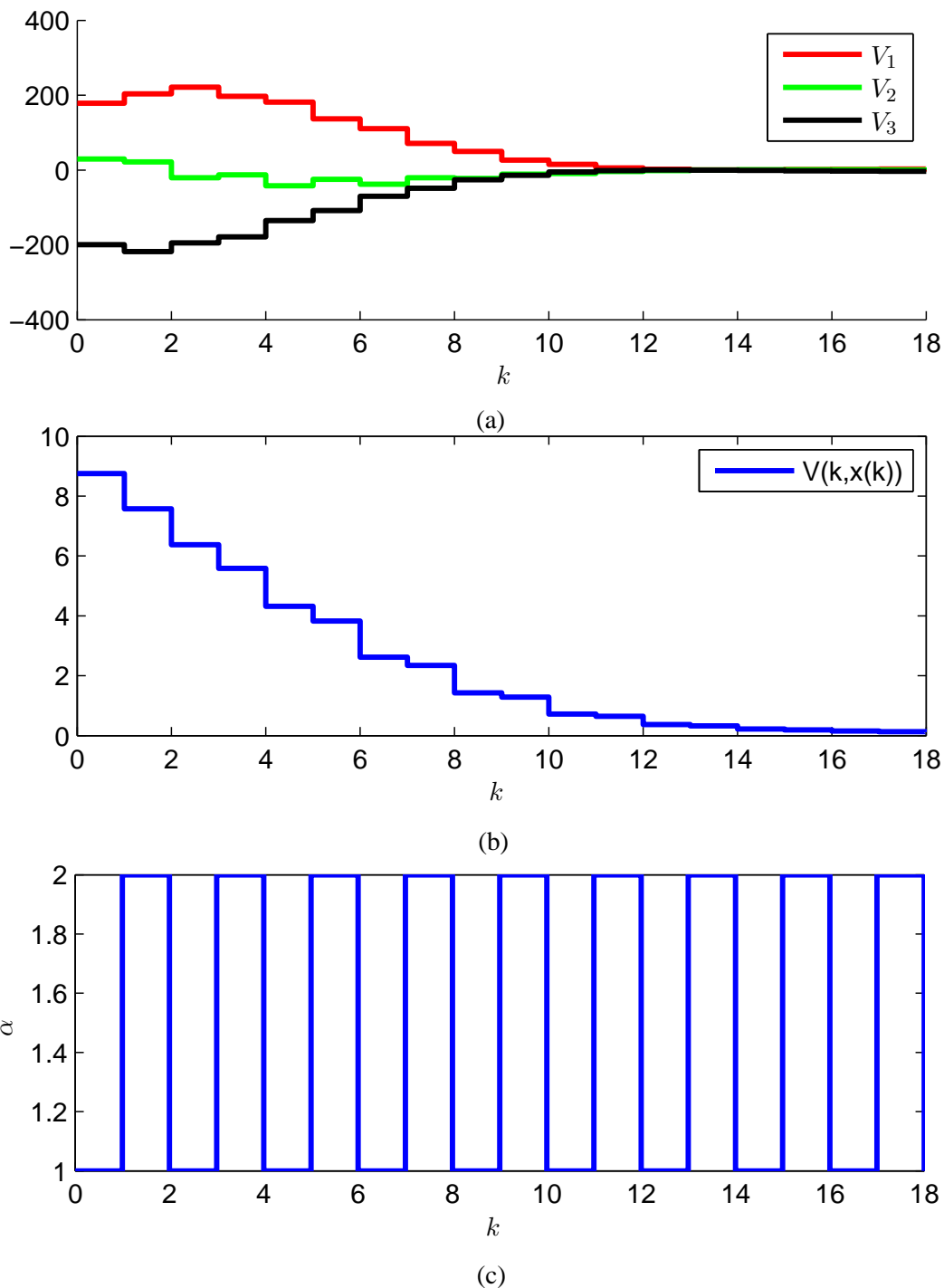


Figura 3.1: Trajetória da Função de Lyapunov obtida pelo Teorema 3 com $N = 3$ para o Exemplo 1. A condição inicial é $x(0)^T = [1 \quad 2]$. **(a)**: trajetórias de V_1 , V_2 e V_3 como em (3.42) **(b)**: trajetória da Função de Lyapunov (3.41). **(c)** Lei de Chaveamento.

e linhas de LMI (N_R) para cada método. Pode-se observar que todas as condições são capazes de atingir os mesmo resultado em termos de θ . No entanto, os métodos apresentam diferentes

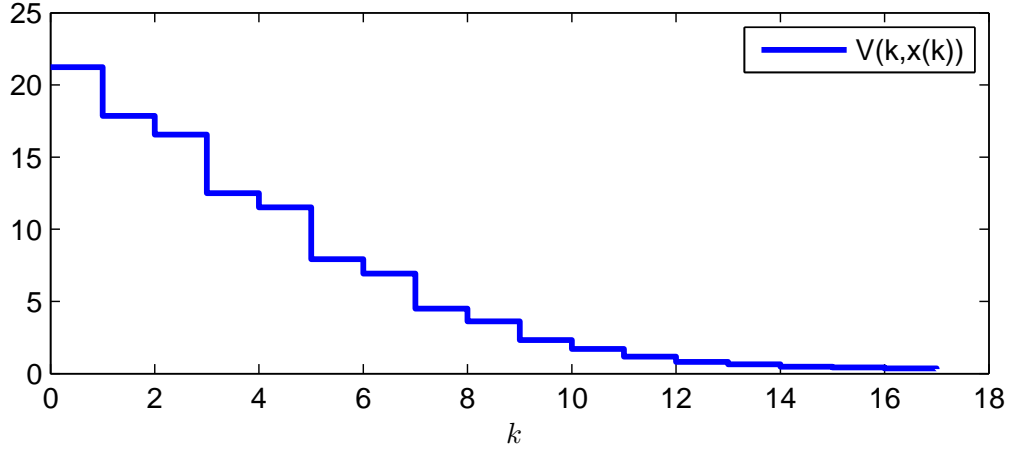


Figura 3.2: Trajetória da Função de Lyapunov obtida pelo Teorema 2 com $N = 4$ e $P_1 = P_2 = 0_n$, para o Exemplo 1. O vetor de estados inicial é $x(0)^T = [1 \ 2]$ e a lei de chaveamento é igual a da Figura 3.1 (c).

valores de N_v e N_R . O Teorema 3 utiliza a mesma quantidade de linhas de LMI que [10], porém possui resultados expressivamente melhores para N_v . Quando $N = 7$, este valor chega a ser 89% menor que [10]. O Teorema 2 não somente apresentou o mesmo resultado que o Teorema 3 em termos de N_v , mas também apresentou um resultado mais eficiente em termos de N_R . Note que, para $N = 7$, O Teorema 2 requer 42% menos linhas de LMI que os métodos [10] e o Teorema 3.

É possível calcular analiticamente o número de linhas de LMI para cada método. No [10, Teorema 9] as linhas podem ser calculadas como

$$N_{RL} = n \left(v^M + v^{M+1} \right) \quad (3.44)$$

O número de linhas de LMI do Teorema 3 é dado por

$$N_{R3} = n \left(v^{N-1} + v^N \right) \quad (3.45)$$

Pode-se observar que, para $M = N - 1$, ambas as condições fazem uso do mesmo número de linhas de LMI. Para o Teorema 2, considerando as matrizes P_m constantes, N_R é dado por

$$N_{R2} = n \left(N + v^N \right) \quad (3.46)$$

Observa-se que um dos termos de (3.46) não cresce exponencialmente com N , o que tem

Tabela 3.1: Limites Superiores para θ , número de variáveis escalares de decisão e número de linhas de LMI obtidas empregando os métodos de [10], Teorema 3 e com o Teorema 2.

[10, Teorema 9]							
M	0	1	2	3	4	5	6
θ	0.68125	0.75487	0.77943	0.78954	0.79296	0.79339	0.79370
N_V	3	6	12	24	48	96	192
N_R	6	12	24	48	96	192	384
Teorema 3							
N	1	2	3	4	5	6	7
θ	0.68125	0.75487	0.77943	0.78954	0.79296	0.79339	0.79370
N_V	3	6	9	12	15	18	21
N_R	6	12	24	48	96	192	384
Teorema 2							
N	1	2	3	4	5	6	7
θ	0.68125	0.75487	0.77943	0.78954	0.79296	0.79339	0.79370
N_V	3	6	9	12	15	18	21
N_R	6	12	22	40	74	140	270

como consequência um número de linhas menor. Também é possível demonstrar analiticamente o número de variáveis escalares de decisão usadas nos problemas de otimização. Elas dependem dos mesmos parâmetros de (3.44), (3.45) e (3.46). Para o [10, Teorema 9], tem-se que

$$N_{V_L} = \frac{n(n+1)v^M}{2} \tag{3.47}$$

enquanto, para o Teorema 2 e Teorema 3 tem-se

$$N_{V_{23}} = \frac{n(n+1)N}{2} \tag{3.48}$$

É importante observar que o número de variáveis nos Teorema 2 e Teorema 3 não cresce geo-

metricamente com N . Portanto, estas variáveis não aparecem no expoente de (3.48).

3.3.3 Exemplo 3

Este exemplo foi retirado de [12, Exemplo 5.3]. Considere o sistema chaveado (2.19) com matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -6 \\ 2 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ -1 & -5 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -5 & -8 & 6 \\ -4 & -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Este exemplo também foi utilizado em [22, Exemplo 2] onde a comparação entre os métodos [33–35] é fornecida. Ele é um sistema chaveado com $v = 3$ modos e ordem $n = 5$. O objetivo é obter o maior ρ tal que $\rho \{A_1, A_2, A_3\}$ continue estável. O Teorema 2 com $N = 3$ atingiu o valor máximo de $\rho = 0.0847$ com $N_V = 45$ e $N_R = 150$. A Tabela 3.2 fornece a comparação dos diferentes métodos (os dados são de [22]). Note que a abordagem proposta fornece os melhores resultados em termos de variáveis escalares de decisão das LMIs e também fornece resultados melhores em termos de linhas de LMI.

Tabela 3.2: Número de variáveis escalares de decisão N_V e Número de linhas de LMI N_R para o Exemplo 2 obtidas com diferentes métodos para $\rho = 0.0847$.

Método	N_V	N_R
[Teorema 9][10] ($M = 2$)	135	180
[34, Teorema 1] ($p = 2$)	45	270
[22, Teorema 4-i)] ($\kappa = 3$)	120	180
[22, Teorema 4-ii)] ($\kappa = 3$)	45	180
Teorema 2 $N = 3$	45	150

Controle por Realimentação de Estados

4.1 Conceitos

Neste capítulo, apresentam-se as condições para estabilização de sistemas chaveados com chaveamento arbitrário por meio de realimentação de estados. Considere o sistema dado por

$$x(k+1) = A_\alpha x(k) + B_\alpha u(k)$$

em que $A_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada. A lei de chaveamento α é desconhecida *a priori*, mas é considerada disponível em tempo real. A lei de realimentação de estados é dada por

$$u(k) = K_\alpha x(k)$$

em que $K_\alpha \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ são os ganhos a serem encontrados que estabilizam o seguinte sistema em malha fechada,

$$x(k+1) = (A_\alpha + B_\alpha K_\alpha)x(k).$$

Utilizando a função indicador definida anteriormente em (2.11), podemos escrever

$$x(k+1) = \left(A(\xi(k)) + B(\xi(k))K(\xi(k)) \right) x(k). \quad (4.1)$$

4.2 Controle por realimentação de estados

Antes de apresentar as contribuições desta dissertação, é mostrado a seguir um Lema que introduz as condições necessárias para controlar o sistema por realimentação de estados. Ele baseia-se na condição de estabilidade apresentada no Lema 3, sendo desenvolvido posteriormente em [36].

Lema 7 ([36] Lemma 3). *O sistema (2.19) é globalmente uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existirem matrizes simétricas $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $i = 1, \dots, v$ tal que as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} S_i & S_i A_i^T + Z_i^T B_i^T \\ A_i S_i + B_i Z_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$$

sejam satisfeitas.

Demonstração. Considerando a desigualdade apresentada em (3.4), pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} G(\xi(k)) + G(\xi(k))^T - S(\xi(k)) & G(\xi(k))^T A(\xi(k))^T \\ A(\xi(k))G(\xi(k)) & S(\xi(k+1)) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.2)$$

Substituindo $A(\xi(k)) = A(\xi(k)) + B(\xi(k))K(\xi(k))$, tem-se

$$\begin{bmatrix} G(\xi(k)) + G(\xi(k))^T - S(\xi(k)) & G(\xi(k))^T (K(\xi(k))^T B(\xi(k))^T + A(\xi(k))^T) \\ (A(\xi(k)) + B(\xi(k))K(\xi(k)))G(\xi(k)) & S(\xi(k+1)) \end{bmatrix} > 0$$

Substituindo $Z(\xi(k)) = K(\xi(k))G(\xi(k))$ e fazendo $G(\xi(k)) = G(\xi(k))^T = S(\xi(k))$, chega-se em

$$\begin{bmatrix} S(\xi(k)) & Z(\xi(k))^T B(\xi(k))^T + S(\xi(k))^T A(\xi(k))^T \\ A(\xi(k))S(\xi(k)) + B(\xi(k))Z(\xi(k)) & S(\xi(k+1)) \end{bmatrix} > 0$$

que pode ser verificada numericamente de acordo com as LMIs em (4.2).

□

4.3 Contribuições

Primeiramente, é apresentada uma condição baseada no uso de variáveis de folga, introduzidas para lidar com o prolema de estabilidade. Esta condição será utilizada para derivar as condições de estabilização.

Teorema 5. *O sistema (2.19) é globalmente uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existirem matrizes simétricas $P_j(\xi(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, como em (2.21) e uma matriz $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times Nn}$ tal que as desigualdades (3.12) e*

$$Q + He \left[Y(\cdot) \left(\begin{bmatrix} M_A & 0 \\ 0 & I_N \otimes -I \end{bmatrix} \right) \right] < 0 \quad (4.3)$$

com

$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{m=1}^N P_{m,i_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & P_{1,i_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P_{N,i_{N+1}} \end{bmatrix}$$

$$\forall (i_1, i_2, \dots, i_{N+1}) \in \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_{N+1 \text{ vezes}}$$

e

$$M_A = \begin{bmatrix} A_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & A_{i_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_{i_N} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

sejam satisfeitas.

Demonstração. Multiplicando (4.3) por R do lado esquerdo e por R^T do lado direito, em que

$$R = x(k)^T \begin{bmatrix} I_n & \Psi_1^T & \Psi_2^T & \dots & \Psi_N^T \end{bmatrix}$$

com Ψ_i definida como em (3.14) tem-se as mesmas condições que em (3.15). Note que

$$\begin{bmatrix} M_A & 0 \\ 0 & I_N \otimes -I \end{bmatrix} R^T$$

Pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} A(\xi(k)) & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(\xi(k+1)) & -I & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(\xi(k)) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{bmatrix} x(k).$$

Como $A(\xi(k)) - \Psi_1 = 0$ e $A(\xi(k+i))\Psi_i - \Psi_{i+1} = 0$, $i = 1, \dots, N-1$, é possível verificar que

$$RHe \left[Y(\cdot) \left(\begin{bmatrix} M_A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_N \otimes -I \end{bmatrix} \right) \right] R^T = 0$$

Além disso, RQR^T é dado como em (3.15). Portanto, a continuação da prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 2. \square

Note que, até aqui, nenhuma estrutura em particular foi imposta à variável de folga $Y(\cdot)$. Uma discussão sobre a influência da variável de folga na análise do problema pode ser encontrada em [37]. Foi mostrado que, no problema de análise, a presença de variáveis extras não fornecem condições menos conservadoras. No entanto, neste trabalho, a condição será utilizada para chegar ao problema de estabilização sem impor estruturas específicas às matrizes P_j .

O Teorema a seguir introduz um método para calcular a lei de controle por realimentação de estados que estabiliza o sistema (4.1). Diferente da análise de estabilidade, a condição proposta aqui é apenas suficiente. Este resultado se baseia numa especialização do Teorema 5, como apresentado na sequência.

Teorema 6. *Se existem matrizes simétricas $P_j(\xi(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, como em (2.21) e matrizes $X_j(\xi(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z_j(\xi(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, também definidas como em (2.21), de forma que as desigualdades a seguir sejam satisfeitas*

$$\sum_{m=j}^N P_{m,i_1} > 0, \quad j = 2, \dots, N \quad \forall i_1 \in \mathcal{P} \quad (4.5)$$

$$\text{blktriag}(S^T, L, S) < 0 \quad (4.6)$$

$$L = \left(- \sum_{m=1}^N P_{m,i_m}, T_1, T_2, \dots, T_N \right)$$

$$T_m = P_{m,i_{m+1}} - X_{i_m} - X_{i_m}^T$$

$$S_j = A_{i_j}X_{i_j} + B_{i_j}Z_{i_j}, \quad j = 1, \dots, N$$

então, $K_{i_m} = Z_{i_m}X_{i_m}^{-1}$ são os ganhos de realimentação de estados que garantem que o sistema (4.1) é assintoticamente estável.

Demonstração. Considere a versão transposta do Teorema 5, ou seja, transpondo A e Y em (4.3), a estrutura da matriz Y é dada por

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & \text{blkdiag}(X(\xi(k)), \dots, X(\xi(k+N-1))) \end{bmatrix}$$

e a mudança de variáveis $Z(\xi(k)) = K(\xi(k))X(\xi(k))$. Observe que a escolha da matriz Y faz com que o primeiro bloco de (4.6) garanta $\sum_{m=1}^N P_{m,i_1} > 0$. É por isso que (4.5) começa de $j = 2$. Além disso, o último bloco de (4.6) garante que $X(\xi(k+N-1)) + X(\xi(k+N-1))^T > P_m(\xi(k+N))$, garantindo a existência da inversa da matriz X , já que $P_N(\xi(k)) > 0$ é imposto em (4.5) quando $j = N$.

□

Comentário. Se for desejado, o controlador robusto pode ser projetado considerando as matrizes Z e X constantes no Teorema 6. Neste caso, um ganho único de realimentação de estados $K = ZX^{-1}$ é recuperado e estabiliza todos os modos do sistema.

4.4 Resultados numéricos

O principal objetivo dos resultados numéricos é comparar os métodos apresentados com os presentes na literatura para colocar em evidência o seu potencial. Foram utilizados os mesmos pacotes computacionais apresentados na seção 3.3.

4.4.1 Exemplo 1

O exemplo a seguir foi retirado de [38]. Considere o seguinte sistema chaveado discreto no tempo com dois modos

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.198 & -0.593 & -0.395 \\ -11.96 & 13.85 & 19.82 \\ -5.880 & 6.134 & 9.515 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 23.13 & -27.90 & -39.05 \\ -16.46 & 19.98 & 29.93 \\ -9.808 & 9.60 & 15.36 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

O Teorema 6 foi utilizado com matrizes $P_j(\xi(k))$, $j = 1, \dots, N$, como em (2.21) e também na forma simplificada com matrizes constantes P_j , $j = 1, \dots, N$. A Tabela 4.1 mostra os valores de N para cada caso assim como o número de variáveis escalares de decisão N_V e o número de linhas de LMI N_R que foram utilizadas. O método proposto em [36] não foi capaz de estabilizar o sistema.

Tabela 4.1: Número de variáveis escalares de decisão e número de linhas de LMI obtidas quando utilizado o Teorema 6 com $P_j(\xi(k))$, $j = 1, \dots, N$, e o Teorema 6 com matrizes constantes P_j , $j = 1, \dots, N$.

Método	N	N_V	N_R
Teorema 6 com $P_j(\xi(k))$	3	60	204
Teorema 6 com P_j	5	54	588

Para $N = 3$ e matrizes de Lyapunov $P_j(\xi(k))$, $j = 1, 2, 3$, as seguintes matrizes de realimentação de estados foram obtidas

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.9427 & 3.5298 & 5.0101 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.8424 & 3.4027 & 4.9400 \end{bmatrix}$$

A Figura 4.1 (a) mostra a evolução dos três estados para o sistemas em malha fechada (4.1), considerando o Teorema 2 com $N = 3$. O sistema iniciou com $x(0)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e a lei

de chaveamento é mostrada na Figura 4.1 (b).

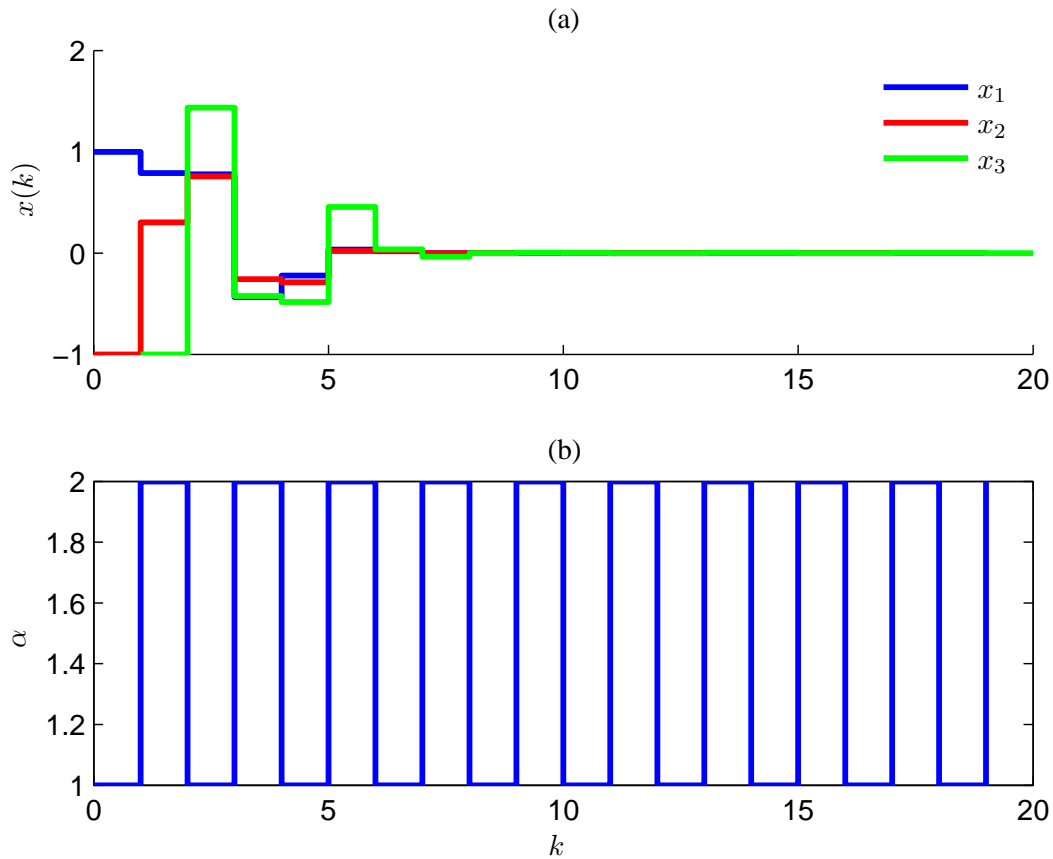


Figura 4.1: Trajetória dos estados para o exemplo 3 usando o Teorema 6 e $N = 3$ para o sistema (2.19) com ganhos de realimentação de estados K_i como em (4.7).

Para garantir que os tanhos K_1 e K_2 estabilizem o sistema, o Teorema 2 e o Teorema 3 foram utilizados com as matrizes do sistema em malha fechada (4.1). Ambos os Teoremas garantiram a estabilidade com $N = 4$.

4.4.2 Exemplo 2

O exemplo a seguir mostra a técnica de controle desenvolvida neste capítulo aplicada a um circuito eletrônico. Considere o conversor CC/CC Boost com carga resistiva, retirado de [39], como mostrado na Figura 4.2. Este circuito pode ser modelado como um sistemas chaveado no tempo contínuo, de acordo com as matrizes

$$A_1 = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{LDC}} \end{bmatrix} \quad A_2 = k \begin{bmatrix} -\frac{R_C}{L} & -\frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{1}{\sqrt{LC}} & -\frac{1}{R_{LDC}} \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

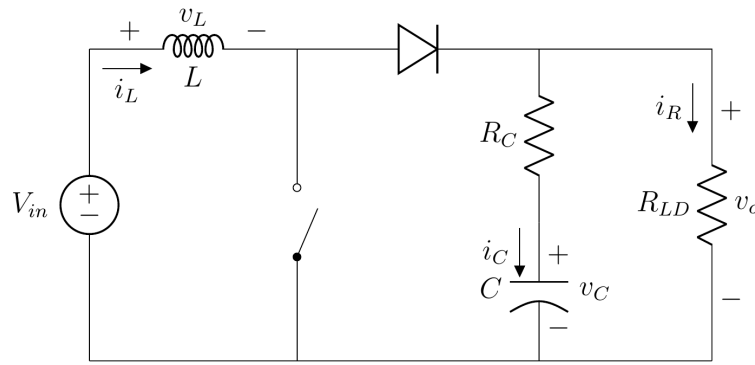


Figura 4.2: Conversor Boost.

em que

$$k = \frac{R_C}{R_C + R_{LD}}$$

A corrente no indutor i_L e a tensão no capacitor v_C formam as variáveis de estado. O vetor de estados é formado por $x(t) = [\sqrt{L}i_L \quad \sqrt{C}v_C]^T$. A tensão v_o na resistência de carga R_{LD} forma a saída e a tensão na fonte V_{in} é a entrada.

Tendo como objetivo aplicar a técnica de controle no tempo discreto, o modelo do circuito foi discretizado a partir do método de Euler. A aproximação de Euler é feita por

$$\dot{x} = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

em que T é o período de amostragem. Assim, as matrizes que representam o circuito no tempo discreto são

$$A_1 = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{T}{R_{LD}C} \end{bmatrix} \quad A_2 = k \begin{bmatrix} 1 - \frac{R_C T}{L} & -\frac{T}{\sqrt{LC}} \\ \frac{T}{\sqrt{LC}} & 1 - \frac{T}{R_{LD}C} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\sqrt{L}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Foi utilizado o Teorema 6 para estabilizar o sistema no tempo discreto considerando o chaveamento arbitrário. Os valores usados foram adaptados de [39]. Eles são: $L = 95\mu H$, $R_C = 0.1$, $C = 300\mu F$, $R_{LD} = 1$, e $T = 2ms$.

O Teorema 6 foi capaz de estabilizar o sistema considerando as matrizes P na forma constante e com $N = 1$. Os ganhos encontrados foram

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.44 & 0.08 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0.33 & 5.24 \end{bmatrix}$$

A matriz de Lyapunov P encontrada foi

$$P = \begin{bmatrix} 0.5861 & -0.0441 \\ -0.0441 & 1.4606 \end{bmatrix}$$

É importante ressaltar que os autovalores das matrizes (4.8) são $\lambda_1 = -0.515$, $\lambda_2 = 0.090$ e $\lambda_{1,2} = -0.0100 \pm j1.0732$, ou seja, encontram-se fora do círculo de raio unitário. Portanto, o sistema é instável sem a aplicação do controle.

Conclusões

Esta dissertação apresentou novas condições LMI necessárias e suficientes para certificar a estabilidade de sistemas chaveados discretos no tempo sob chaveamento arbitrário. A Teoria de Lyapunov foi empregada para derivar condições descritas em termos dos modos dos sistemas chaveados. A estrutura proposta para a função de Lyapunov pode conter termos não monotônicos que são capazes de fornecer graus extras de liberdade. Uma nova condição para fornecer ganhos chaveados de realimentação de estados foi introduzida baseada nas funções de Lyapunov. Foram apresentados experimentos numéricos com exemplos de referência da literatura para ilustrar o fato que a abordagem proposta pode fornecer um certificado de estabilidade necessitando de um número menor de variáveis escalares de decisão e linhas de LMI que os métodos existentes. Além disso, as condições de estabilização foram capazes de encontrar ganhos de realimentação de estados para diferentes valores de N , considerando matrizes de Lyapunov constantes de matrizes de Lyapunov chaveadas

5.1 Artigos aceitos

Os seguintes artigos foram aceitos durante o desenvolvimento desta dissertação:

- T. S. Gomide e M. J. Lacerda, “Stability analysis of discrete-time switched systems under arbitrary switching,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 25, pp. 371 – 376, 2018, 9th IFAC Symposium on Robust Control Design ROCOND 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.135> [21].
- M. J. Lacerda e T. S. Gomide, “Stability and stabilisability of switched discrete-time systems based on structured Lyapunov functions,” *IET Control Theory & Applications*, 2019,

doi: 10.1049/iet-cta.2019.0485.

5.2 Trabalhos futuros

Os trabalhos futuros terão o foco de expandir a análise de estabilidade para sistemas chaveados com incertezas. Além disso, será investigado o controle por realimentação da saída e o uso da soma de quadrados no Teorema 6 para lidar com sistemas chaveados não lineares discretos no tempo. Também serão aprofundadas as condições de estabilização para o cenário de alocação de polos.

Referências Bibliográficas

- [1] T. A. F. Theunisse, J. Chai, R. G. Sanfelice, e W. P. M. H. Heemels, “Robust global stabilization of the DC-DC boost converter via hybrid control,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 62, no. 4, pp. 1052–1061, April 2015.
- [2] I. A. Hiskens e M. A. Pai, “Trajectory sensitivity analysis of hybrid systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 2, pp. 204–220, Feb 2000.
- [3] F. Zhu e P. J. Antsaklis, “Optimal control of hybrid switched systems: A brief survey,” *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 345–364, 2015.
- [4] W. Xiang, “On equivalence of two stability criteria for continuous-time switched systems with dwell time constraint,” *Automatica*, vol. 54, pp. 36 – 40, 2015.
- [5] X. Zhao, Y. Yin, e X. Zheng, “State-dependent switching control of switched positive fractional-order systems,” *ISA Transactions*, vol. 62, pp. 103 – 108, 2016, sI: Control of Renewable Energy Systems.
- [6] J. Liu e A. R. Teel, “Lyapunov-based sufficient conditions for stability of hybrid systems with memory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 4, pp. 1057–1062, April 2016.
- [7] M. S. Branicky, “Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems,” vol. 43, no. 4, pp. 475–482, April 1998.
- [8] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, ser. Systems and Control: Foundations and Applications. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.

-
- [9] J. Daafouz, P. Riedinger, e C. Iung, “Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 47, no. 11, pp. 1883–1887, 2002.
- [10] J.-W. Lee e G. E. Dullerud, “Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems,” *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 205–218, 2006.
- [11] W. Xiang, H.-D. Tran, e T. T. Johnson, “Robust exponential stability and disturbance attenuation for discrete-time switched systems under arbitrary switching,” vol. 63, no. 5, pp. 1450–1456, 2018.
- [12] A. A. Ahmadi, R. M. Jungers, P. A. Parrilo, e M. Roozbehani, “Joint spectral radius and path-complete graph Lyapunov functions,” vol. 52, no. 1, pp. 687–717, 2014.
- [13] W. Xiang e T. T. Johnson, “Event-triggered control for continuous-time switched linear systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 11, pp. 1694–1703, 2017.
- [14] Y. Wu e Y. Wu, “Mode-dependent robust stability and stabilisation of uncertain networked control systems via an average dwell time switching approach,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 11, pp. 1726–1735, 2017.
- [15] M. J. Lacerda e P. Seiler, “Automatica stability of uncertain systems using Lyapunov functions with non-monotonic terms,” *Automatica*, vol. 82, pp. 187–193, 2017.
- [16] A. A. Ahmadi e P. A. Parrilo, “Non-monotonic Lyapunov functions for stability of discrete time nonlinear and switched systems,” in *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2008, pp. 614–621.
- [17] Y. Ebihara, D. Peaucelle, D. Arzelier, e T. Hagiwara, “Robust H2 performance analysis of uncertain LTI systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 9, pp. 435–440, 2006.
- [18] R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, e P. L. D. Peres, “Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions,” vol. 57, no. 8, pp. 680–689, August 2008.
- [19] P. S. P. Pessim, M. J. Lacerda, e C. M. Agulhari, “Parameter-dependent Lyapunov functions for robust performance of uncertain systems,” in *Joint 9th IFAC Symposium on Robust*

- Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, Florianópolis, SC, Brazil, 2018, pp. 441–446.
- [20] P. S. P. Pessim, V. J. S. Leite, e M. J. Lacerda, “Robust performance for uncertain systems via Lyapunov functions with higher order terms,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, no. 5, pp. 3072–3089, 2019.
- [21] T. S. Gomide e M. J. Lacerda, “Stability analysis of discrete-time switched systems under arbitrary switching,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 25, pp. 371 – 376, 2018, 9th IFAC Symposium on Robust Control Design ROCOND 2018.
- [22] A. L. J. Bertolin, R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, e P. L. D. Peres, “LMI-based stability tests for LPV and switched discrete-time linear systems through redundant equations,” Florianópolis, Brazil, September 2018, to appear.
- [23] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, e A. N. Michel, “Qualitative analysis of discrete-time switched systems,” in *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, vol. 3, May 2002, pp. 1880–1885 vol.3.
- [24] G. Zhai e H. Lin, “Controller failure time analysis for symmetric control systems,” *International Journal of Control*, vol. 77, no. 6, pp. 598–605, 2004.
- [25] G. Zhai, X. Xu, H. Lin, e A. N. Michel, “Analysis and design of switched normal systems,” vol. 65, pp. 2248–2259, 2006.
- [26] H. Lin e P. J. Antsaklis, “Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 54, no. 2, pp. 308–322, 2009.
- [27] D. Liberzon e A. S. Morse, “Basic problems in stability and design of switched systems,” vol. 19, no. 5, pp. 59–70, oct 1999.
- [28] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, ser. Jossey-Bass Management. Prentice Hall, 1993.
- [29] M. J. Lacerda e P. Seiler, “Stability of uncertain systems using Lyapunov functions with non-monotonic terms.”

- [30] P.-A. Bliman e G. Ferrari-Trecate, “Stability analysis of discrete-time switched systems through Lyapunov functions with nonminimal state,” in *Proceedings of the IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS’03)*, Saint-Malo, Brittany, France, June 2003, pp. 325–329.
- [31] J. Löfberg, “YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” Taipei, Taiwan, September 2004, pp. 284–289.
- [32] E. D. Andersen e K. D. Andersen, “The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm,” in *High Performance Optimization*, ser. Applied Optimization, H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, e S. Zhang, Eds. Springer US, 2000, vol. 33, pp. 197–232.
- [33] J.-W. Lee, “On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 10, pp. 1714–1721, 2006.
- [34] A. Kruszewski, R. Wang, e T.-M. Guerra, “Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time ts fuzzy models: A new approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 2, pp. 606–611, 2008.
- [35] V. Balakrishnan e L. Vandenberghe, “Semidefinite programming duality and linear time-invariant systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 1, pp. 30–41, 2003.
- [36] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, e P. L. D. Peres, “Robust control of discrete time switched systems with pole location and structural constraints,” Maui, HI, USA, December 2003, pp. 6242–6247.
- [37] D. Peaucelle e Y. Ebihara, “Robust stability analysis of discrete-time systems with parametric and switching uncertainties,” Cape Town, South Africa, August 2014, pp. 724–729.
- [38] C. F. Morais, M. F. Braga, A. S. Linguanotto, R. Oliveira, e P. L. Peres, “Controle robusto por realimentação de estados para sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs com parâmetros escalares,” *XIX CBA, Campina Grande, PB, Brasil*, pp. 1664–1671, 2012.

- [39] X. Li, X. Ruan, Q. Jin, M. Sha, e C. K. Tse, “Approximate discrete-time modeling of DC–DC converters with consideration of the effects of pulse width modulation,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 33, no. 8, pp. 7071–7082, Aug 2018.