

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Michelle Ferreira de Faria Castro

ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS E VARIANTES
NO TEMPO SUJEITOS A ATRASO NOS ESTADOS E ENTRADAS
SATURANTES.

Belo Horizonte
2019

Michelle Ferreira de Faria Castro

ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS E VARIANTES
NO TEMPO SUJEITOS A ATRASO NOS ESTADOS E ENTRADAS
SATURANTES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite
Coorientador: Prof. Dr. Luís F. P. da Silva
Supervisor: Dr. Alexandre Seuret

Belo Horizonte
2019

(Catalogação - Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

C355e Castro, Michelle Ferreira de Faria.

Estabilização de sistemas incertos discretos e variantes no tempo sujeitos a atrasos nos estados e entradas saturantes. / Michelle Ferreira de Faria Castro. – Divinópolis, 2019.

93f. ; il.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.

Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Pereira da Silva.

Supervisor: Dr. Alexandre Seuret.

Área de Concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.

Linha de Pesquisa: Sistema de Controle.

Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Modelagem. 2. Controle de Sistemas. 3. Sistemas Incertos Discretos. 4. Atrasos - Estados. 5. Entradas Saturantes. 6. Controles Robustos. 7. Região – Atração. I. Leite, Valter Júnior de Souza. II. Silva, Luís Filipe Pereira da. III. Seuret, Alexandre IV. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. V. Universidade Federal de São João del-Rei. VI. Título.

CDU: 004.75: 004.414.23

Bibliotecária Maria Inês Passos Pereira Bueno CRB-6/2805

Michelle Ferreira de Faria Castro

ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS E VARIANTES
NO TEMPO SUJEITOS A ATRASO NOS ESTADOS E ENTRADAS
SATURANTES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Comissão Avaliadora:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
UFSJ

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto
UFSC

Dr. Alexandre Seuret
LAAS - Toulouse - França

Belo Horizonte
2019

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Dissertação intitulada “*Estabilização de sistemas incertos discretos e variantes no tempo sujeitos a atraso nos estados e entradas saturantes*”, de autoria da aluna Michelle Ferreira de Faria Castro, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite - CEFET-MG / *Campus* Divinópolis - PPGEL
CEFET-MG / UFSJ

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda - Universidade Federal de São João Del-Rei - PPGEL
CEFET-MG / UFSJ

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto - Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Alexandre Seuret - LAAS / Toulouse - França

DEDICO ESTE TRABALHO À MINHA
MÃE CIDA, QUE SEMPRE FOI O MEU
PORTO SEGURO.

Agradecimentos

Agradeço,

Primeiramente a Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de concluir o mestrado.

À minha mãe Cida, pelo amor incondicional, apoio, incentivo e por sempre me dar força para seguir em frente.

A todos meus familiares, pela torcida, em especial ao meu irmão Bruno pela força mesmo que distante, à minha avó Iracema e à minha madrinha Celinha pelas orações diárias.

A todas minhas amigas que estiveram comigo nessa caminhada. Em especial à Ariany, Ester, Ju e Karol por sempre escutarem os meus desabafos (que não foram poucos) durante este percurso, e à Tábita por me encorajar a aceitar a oportunidade de estágio do outro lado do Oceano Atlântico.

Aos meus colegas de mestrado, pela convivência diária no laboratório, especialmente ao Álan, à Larissa e à Mariella, que fizeram a caminhada menos árdua.

À minha professora de inglês e francês, Priscila, pela paciência e incentivo.

A todos os colegas do departamento, pelos momentos de descontração durante nossas resenhas do café, especialmente ao Lucas pela preocupação comigo e ao Adriano por estar sempre disposto a ajudar.

Aos meus professores de mestrado, pelos conhecimentos compartilhados, especialmente ao Ignácio pela paciência.

Ao meu co-orientador Luís, pelos ensinamentos e pela disponibilidade de sempre ajudar no que fosse necessário.

Ao meu orientador Valter, por toda confiança, paciência, amizade, ensinamentos e pela oportunidade de trabalhar no LAAS.

Aos colegas do LAAS, pela ajuda e pelas experiências vividas.

À mon superviseur Alex, pour l'opportunité, la patience et pour le partage des connaissances.

Enfim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram para a concretização desse trabalho.

Obstáculos são aquelas coisas terríveis que você vê quando desvia seus olhos de sua meta.

Henry Ford

Resumo

Neste trabalho são propostas condições de síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e entradas saturantes. A saturação do atuador é representada em termos de uma não-linearidade do tipo zona-morta, com a consequente aplicação da condição generalizada de setor. Devido a saturação é necessário estimar uma região de atração dentro da qual todas as trajetórias iniciadas em seu interior permaneçam nessa região e convirjam para a origem. Assim, o objetivo é determinar condições para síntese de controladores do tipo realimentação de estados, que garantam para um conjunto de condições iniciais admissíveis a estabilidade assintótica de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores. Para isso, são propostas duas abordagens: a primeira utilizando uma função de Lyapunov-Krasovskii adequada que trata os estados atrasados e a segunda reescrevendo o sistema com atraso como um sistema incerto aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso. Dessa forma, as principais contribuições desse trabalho são três. A primeira é propor uma desigualdade de somatórios responsável por atrasos variáveis no tempo em que é fornecido um método para deduzir uma condição de estabilização menos conservadora. A segunda é propor uma nova caracterização do conjunto admissível de sequências iniciais que consiste na definição de três conjuntos, produzindo sequências iniciais com maior norma do que abordagens semelhantes na literatura. E por último foi verificado que a inclusão na composição do sinal extra da condição generalizada de setor, pode aumentar o tamanho da estimativa da região de atração. Por fim, são apresentados exemplos numéricos para demonstrar a eficiência dos métodos propostos e comparar com outros existentes na literatura.

Palavras-chave: Sistemas incertos discretos no tempo. Atraso nos estados. Entradas saturantes. Controle Robusto, Região de atração.

Abstract

In this work, state feedback controller synthesis conditions are proposed for discrete-time uncertain systems with delayed states and saturating inputs. Actuator saturation is represented in terms of a nonlinearity of the dead zone type, with the consequent application of the generalized sector condition. Due to saturation it is necessary to estimate a region of attraction within which all trajectories initiated within it remain in that region and converge to the origin. Thus, the objective is to determine conditions for the synthesis of state feedback controllers that guarantee for a set of allowable initial conditions the asymptotic stability of discrete time uncertain systems with state delay and actuator saturation. To this end, two approaches are proposed: the first using a suitable Lyapunov-Krasovskii function that treats delayed states and the second rewriting the delay as an augmented system free of delay and switched by the delay value. Thus, the main contributions of this work are three. The first is to propose a sum inequality responsible for varying delays in the time when a method is provided to deduce a less conservative stabilization condition. The second is to propose a new characterization of the allowable set of initial sequences that consists of the definition of three sets, producing larger initial sequences than similar approaches in the literature. Lastly, it was verified that the inclusion of the extra signal composition of the generalized sector condition can increase the size of the region of attraction estimate. And finally, numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed methods and to compare with others in the literature.

Key-words: Discrete-time system. State-delays. Saturating input. Robust control. Region of attraction.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Acrônimos e Notação	xiv
1 Introdução	1
1.1 Atuadores Saturantes	1
1.2 Revisão Bibliográfica	5
1.3 Objetivo	9
1.4 Organização do Texto	10
2 Fundamentos	11
2.1 Definições	11
2.1.1 Sistemas com Incertezas	11
2.1.2 Conjuntos Contrativos	11
2.1.3 LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares)	12
2.1.4 Estabilidade no Sentido de Lyapunov	12
2.1.5 Estabilidade de Sistemas com Atraso nos Estados	14
2.2 Síntese de Controladores Saturantes	16
2.3 Desigualdades Auxiliares	20
2.4 Considerações Finais	21
3 Abordagem Baseada em Função de Lyapunov-Krasovskii	22
3.1 Resultados Preliminares	23
3.1.1 Função de Lyapunov-Krasovskii	23
3.1.2 Caracterização da Região de Atração	28
3.1.3 Estrutura Geral para ω_k	30
3.2 Condição - I	30
3.2.1 Procedimento de Otimização	35
3.2.2 Exemplos Numérico	36
3.3 Condição - II	37
3.3.1 Procedimento de Otimização	42
3.3.2 Exemplos Numérico	43
3.4 Condição - III	44
3.4.1 Procedimento de Otimização	48

3.4.2	Exemplos Numérico	49
3.5	Considerações Finais	52
4	Abordagem por Sistema Aumentado	54
4.1	Definição do Sistema Aumentado	54
4.2	Caracterização da Região de Atração	56
4.3	Formulação sem Uso de Lema de Finsler	57
4.3.1	Procedimento de Otimização	59
4.3.2	Exemplos Numérico	60
4.4	Formulação Utilizando Lema de Finsler	60
4.4.1	Procedimento de Otimização	63
4.4.2	Estruturas de $\tilde{\mathbb{P}}$	64
4.4.3	Exemplos Numérico	66
4.5	Complexidade das LMIs	68
4.6	Considerações Finais	70
5	Conclusões	72
5.1	Considerações Finais	72
5.2	Trabalhos Futuros	74
A	Ferramentas Matemáticas	75
A.1	Lema de Finsler	75
A.2	Complemento de Schur	75
A.3	Procedimento S	76
	Referências	77

Lista de Figuras

1.1	Evolução dos Estados e do Controlador para Diferentes Condições Iniciais.	3
2.1	Função Saturação.	17
2.2	Função Zona Morta.	19
3.1	Região de Atração.	51
3.2	Área de \mathcal{C} , $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$	52
4.1	Raios para Cada Estrutura - Exemplo 1.	66
4.2	Raios para Cada Estrutura - Exemplo 2.	67

Lista de Tabelas

3.1	Raio da Região de Atração - Condição I - Exemplo 1.	37
3.2	Raio da Região de Atração - Condição I - Exemplo 2.	37
3.3	Raio da Região de Atração - Condição II - Exemplo 1.	44
3.4	Raio da Região de Atração - Condição II - Exemplo 2.	44
3.5	Raio da Região de Atração - Condição III - Exemplo 1.	49
3.6	Raio da Região de Atração - Condição III - Exemplo 2.	50
3.7	Variação do Raio em Função do Atraso Máximo.	52
3.8	Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 1.	53
3.9	Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 2.	53
4.1	Dimensões das LMIs - Geral	68
4.2	Dimensões das LMIs - Exemplo 1	68
4.3	Dimensões das LMIs - Exemplo 2	69
4.4	Número de Variáveis de Decisão - Exemplo 1.	69
4.5	Número de Variáveis de Decisão - Exemplo 2.	70
4.6	Comparação da Complexidade das LMIs.	70
4.7	Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 1.	71
4.8	Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 2.	71

Lista de Acrônimos e Notação

LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade Matricial Linear)
L-K	Lyapunov-Krasovskii
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i> (Variação de Parâmetro Linear)
★	denota os elementos simétricos em relação à diagonal nas LMIs
$P \succ 0$	indica que a matriz P é simétrica definida positiva
$P \succeq 0$	indica que a matriz P é simétrica semi-definida positiva
A^T	transposta da matriz A
$\text{He}(A)$	denota $A + A^T$ para qualquer matriz quadrada A
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	conjunto dos vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
I_n	representa a matriz identidade de dimensão n
0_n	representa a matriz nula de dimensão n
\otimes	representa o produto de Kronecker
$\text{diag}(A,B)$	denota uma matriz bloco diagonal $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ para matrizes A e B
$G^{(\ell)}$	denota a ℓ -ésima linha do vetor G
φ_k	é a sequência dos estados x_{k-j} , $j = \bar{d}, \dots, 0$, isto é $\{x_{k-\bar{d}}, x_{k-(\bar{d}-1)}, \dots, x_k\}$
$\bar{\varphi}_k$	é a sequência dos estados x_{k-j} , $j = \bar{d}, \dots, 1$, isto é $\{x_{k-\bar{d}}, x_{k-(\bar{d}-1)}, \dots, x_{k-1}\}$
$\ \varphi_0\ $	representa a norma da sequência
$\ x_{-j}\ $	representa a norma do vetor
\underline{d}	é o atraso mínimo
\bar{d}	é o atraso máximo
d_k	é o atraso no instante k
l_2	é o espaço dos sinais limitados em energia
\mathcal{R}_A	é a região de atração
$\mathcal{R}_\mathcal{E}$	é a estimativa da região de atração
\mathbb{Z}^+	é o conjunto dos números inteiros não negativos
N	é o número de vértices do sistema incerto
$[a,b]$	é o intervalo dos números inteiros de a até b , com $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e $a < b$

Introdução

Nesta dissertação são investigados métodos para a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas incertos discretos no tempo e sujeitos a atraso nos estados e saturação de atuadores. Devido à saturação do atuador, a estabilidade assintótica depende do estado inicial do sistema. Por isso, é necessário estimar a região de condições iniciais para as quais as trajetórias do sistema em malha fechada convirjam para a origem.

Neste capítulo é feita uma revisão bibliográfica do tema abordado nesta dissertação, comentando os trabalhos encontrados na literatura, os quais foram base para desenvolvimento deste. Aqui também é apresentado o objetivo principal e a organização do texto.

1.1 Atuadores Saturantes

Para ilustrar a influência da saturação no sistema, é mostrado a seguir, um exemplo em que primeiro é considerado o caso sem saturação e em seguida considerada a saturação do atuador.

Exemplo: Considere o seguinte sistema discreto no tempo dado por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1.1)$$

em que

$$u_k = Kx_k, \quad (1.2)$$

e as matrizes A e B são dadas em (Tarbouriech *et al.*, 2011) e discretizadas com período de amostragem $T = 0.01s$ adaptado em (Lopes, 2017), resultando em:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0001 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0100 \end{bmatrix}.$$

Esse sistema é instável em malha aberta, pois os autovalores da matriz A são 0.9900 e 1.0101, ou seja, possui um autovalor com módulo maior que um.

O sistema em malha fechada é dado por

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k. \quad (1.3)$$

Nesse caso, considerando que não há restrições no sinal de controle, a estabilidade do sistema em malha fechada é definida pelos autovalores de $(A + BK)$. Dessa forma, a matriz K deve ser escolhida de modo que esses autovalores estejam dentro do círculo unitário. Assim a estabilidade é garantida em sentido global. Usando

$$K = [13 \quad 7],$$

os autovalores do sistema em (1.3) são 0.9704 e 0.9608, que estão dentro do círculo unitário, e assim, o sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável. Portanto independente das condições iniciais, as trajetórias convergem assintoticamente para a origem.

Entretanto, se é considerada uma limitação em amplitude do sinal de controle em que o sistema é dado por

$$x_{k+1} = Ax_k + B\text{sat}(u_k), \quad (1.4)$$

em que

$$-5 \leq u_k \leq 5,$$

o sistema em malha fechada torna-se não linear. Na Figura 1.1 são apresentados os estados e o sinal de controle para o sistema (1.4) para três diferentes condições iniciais: $x_0 = [-1 \quad -3]$, $x_0 = [-2 \quad -3]$, e $x_0 = [-3 \quad -3]$.

Pela Figura 1.1, é possível perceber que a estabilidade do sistema linear com atuadores saturantes depende também das condições iniciais, pois para a condição inicial $x_0 = [-1 \quad -3]$ o sistema é assintoticamente estável (converge para a origem), para $x_0 = [-2 \quad -3]$ o sistema é estável mas não converge para a origem, e para $x_0 = [-3 \quad -3]$ o sistema é instável. Por isso, é importante caracterizar a região de atração, garantindo assim a estabilidade local assintótica, ou seja, o sistema é localmente assintoticamente estável para condições iniciais pertencentes a essa região, que é chamada de região de atração (\mathcal{R}_A).

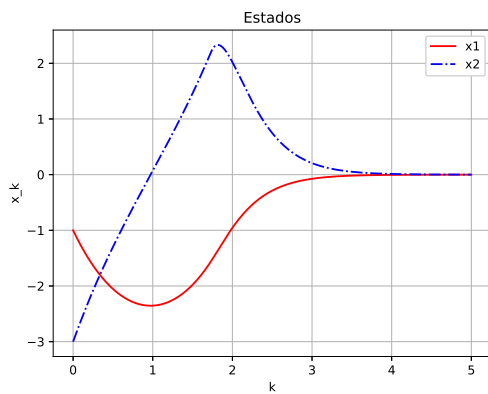
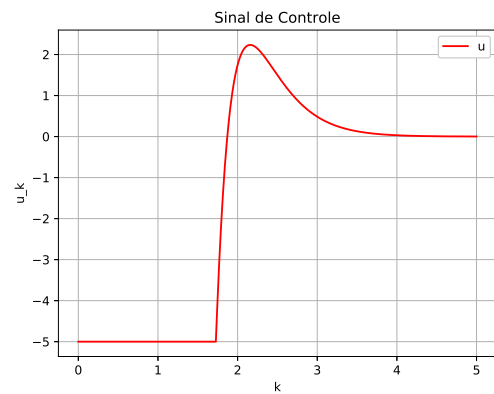
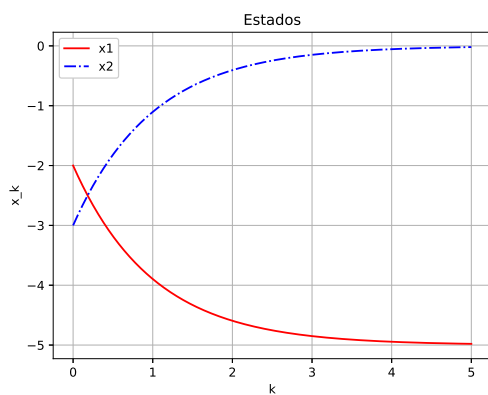
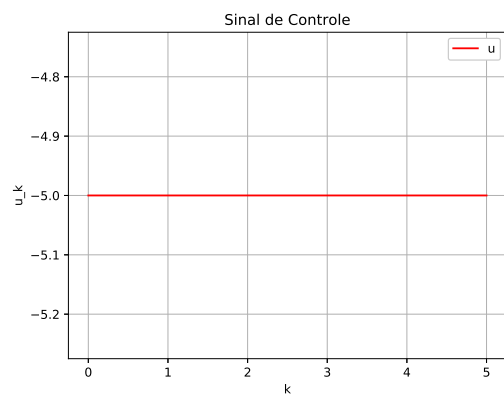
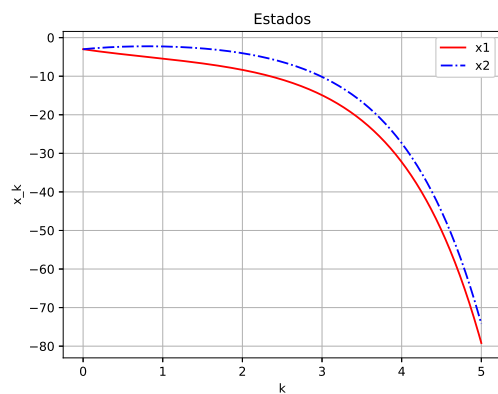
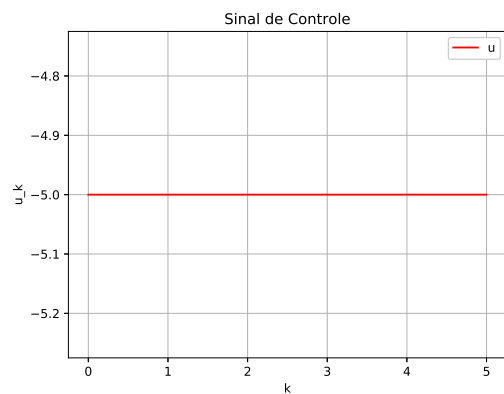
(a) $x_0 = [-1 \ -3]$ (b) $x_0 = [-1 \ -3]$ (c) $x_0 = [-2 \ -3]$ (d) $x_0 = [-2 \ -3]$ (e) $x_0 = [-3 \ -3]$ (f) $x_0 = [-3 \ -3]$

Figura 1.1: Evolução dos Estados e do Controlador para Diferentes Condições Iniciais.

Outro aspecto importante é o atraso, que pode ser constante ou variante no tempo. Os estados atrasados devem ser considerados para caracterizar a região de atração. Além disso, o sistema pode ser precisamente conhecido ou incerto. Neste trabalho é considerado sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e entrada saturante como descrito a seguir:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\mathbf{sat}(u_k), \\ \quad \forall k \geq 0 \\ x_k = \varphi_0(k), \quad \forall k \in [-\bar{d}, 0]. \end{cases}$$

em que α_k é um parâmetro variante, e a lei de controle por realimentação de estados é dada por

$$u_k = Kx_k,$$

de forma a assegurar à malha fechada a estabilidade assintótica para um conjunto admissível de condições iniciais. As matrizes $A(\alpha_k)$ e $A_d(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ pertencem ao politopo dado pela combinação convexa dos N vértices conhecidos, tais que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) & B(\alpha_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \end{bmatrix},$$

em que α_k pertence ao simplex unitário Γ :

$$\Gamma = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} = 1, \alpha_{k,(i)} \geq 0, i \in [1, N] \right\}.$$

A saturação é representada por uma função do tipo zona morta

$$\phi(u_k) = \mathbf{sat}(u_k) - u_k,$$

a qual pertence a um setor. Dessa forma, o sistema em malha fechada é dado por

$$x_{k+1} = A_{cl}(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\phi(u_k),$$

em que $A_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K$.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é desenvolver condições de síntese de controladores do tipo realimentação de estados, que garantam para um conjunto de condições iniciais admissíveis a estabilidade assintótica local de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores.

São formuladas condições baseadas na abordagem de funções de Lyapunov-Krasovskii, e outras usando um sistema aumentado (Hetel *et al.*, 2008), sempre buscando formulações menos conservadoras do que as já existentes na literatura. Além disso, para determinar a região de atração é proposta uma nova caracterização da região de condições iniciais para as quais o sistema é assintoticamente localmente estável. Com o intuito de aumentar essa região, são propostas inclusões de termos na condição generalizada de setor. Por último, as condições aqui obtidas são comparadas com algumas da literatura.

1.2 Revisão Bibliográfica

Sistemas com atraso são muito comuns em processos reais. O atraso no tempo é uma característica muito encontrada em processos biológicos, econômicos, físicos, químicos, fisiológicos, de dinâmicas populacionais e ainda em diversos sistemas de engenharia, tais como sistemas mecânicos, sistemas elétricos de potência, sistemas de telecomunicações, redes de comunicação de dados, etc. A origem do atraso no tempo nesses sistemas pode ser intencional, quando é introduzido de maneira a melhorar o desempenho do sistema, ou não intencional, quando o atraso tem origem em uma característica intrínseca do sistema (Gu *et al.*, 2003). É bastante conhecido que, a presença de atraso no tempo em sistemas de controle frequentemente causa um desempenho indesejado ou instabilidade (Fridman, 2014).

Além do atraso, outros fatores também podem resultar nesse tipo de comportamento. Um desses fatores é a limitação de energia que pode ser injetada no sistema. Nesse caso tem-se a saturação em amplitude (ou mesmo em variação) do atuador. A saturação está presente em sistemas de controle industriais tais como em válvulas proporcionais, atuadores de aquecimento e/ou resfriamento, amplificadores eletrônicos e circuitos de acionamento de motores (Ghiggi, 2008). A saturação de atuadores é uma restrição relacionada em geral, aos limites físicos ou de segurança impostas pelos atuadores. Dessa forma, a aplicação de um sinal de controle fica limitado em amplitude entre um valor mínimo e um valor máximo. Quando o sinal de controle linear ultrapassa esses limites ocorre a saturação, que pode alterar o desempenho ou até mesmo causar a instabilidade do sistema.

A estabilidade do sistema pode ser global, quando garante-se que as trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem, para toda condição inicial, ou ser local, quando garante-se que as trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem, apenas para condições iniciais pertencentes a um determinado conjunto. Para sistemas com saturação, utiliza-se a estabilidade local devido à sequência inicial de estados que pode levar a diferentes pontos de equilíbrio ou comportamento instável. Isso pode ocorrer pois, o comportamento do sistema controlado não é mais linear. Nessa situação é necessário analisar e projetar controladores levando-se em conta os efeitos da não linearidade no sistema. No caso da saturação em sistemas que são instáveis em malha aberta, a presença de saturação no atuador faz com que o sinal de controle não seja suficiente para forçar a trajetória do sistema controlado em direção à origem. Assim, é preciso, por exemplo, determinar um conjunto de estados iniciais tais que as trajetórias da malha fechada que emanam dele convirjam assintoticamente para a origem mesmo sob saturação do atuador

(Tarbouriech *et al.*, 2011). Esse conjunto de estados iniciais é chamado de estimativa da região de atração $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ e neste trabalho é caracterizada de uma nova maneira, sendo definida por três subconjuntos que produzem uma região maior do que as encontradas na literatura. Por isso, o estudo da estabilidade de sistemas de controle apresentando atrasos e sujeitos à saturação nos atuadores tornou-se tão importante.

Na literatura são encontrados vários trabalhos abordando sistemas com atraso nos estados. Pode-se citar (Fridman, 2014), que trata sistemas contínuos e discretos no tempo e apresenta algumas abordagens para tratar o problema como por exemplo utilizando Lyapunov-Krasovskii, Lyapunov-Razumikhin e sistema aumentado. A abordagem que utiliza funções de Lyapunov-Krasovskii, é uma das mais comuns. Neste caso é proposta uma função de Lyapunov-Krasovskii que depende do estado atual e de estados atrasados. Essas funções são construídas de forma a obter medidas generalizadas de energia dos estados passados ($x_{k-j}^T R x_{k-j}$, com $R \succ 0, j \in [1, \bar{d}]$). Uma dificuldade fundamental surge ao calcular a variação temporal da candidata a função de Lyapunov-Krasovskii, $\Delta V(k)$. O resultado dessa expressão, que precisa ter um valor suficientemente negativo para assegurar estabilidade, costuma ser formado por termos que dependem de somatórios envolvendo o estado em vários instantes. Isso torna difícil a obtenção de condições numericamente viáveis para análise de estabilidade e para síntese de controladores. Por essa razão, há vários trabalhos na literatura cujo objetivo é a obtenção de majorações cada vez menos conservadoras desses somatórios em ΔV , gerando melhores condições de análise e síntese de estabilidade. Um dos focos de pesquisa atualmente está na busca de majorantes para os termos de soma que aparecem ao calcular ΔV na Lyapunov-Krasovskii, veja por exemplo, (Liu *et al.*, 2017; Nam *et al.*, 2015; Seuret *et al.*, 2016; Xiao *et al.*, 2018; Lee *et al.*, 2019). Neste trabalho é apresentado uma desigualdade de somatórios responsável por atrasos variáveis no tempo, de maneira similar a proposta por (Seuret *et al.*, 2016) para o caso contínuo no tempo. Assim, é fornecido um método para deduzir uma condição de estabilização com um número menor de variáveis de decisão e menos linhas de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para resolver, já que não há variáveis de folga adicionais e nenhuma restrição é necessária. Outro desafio nessa área está relacionado ao projeto do controlador por realimentação estática de estados, que é reconhecido por ser um problema complexo para sistemas com atraso. De fato, o processo de deduzir condições de estabilização a partir de condições de estabilidade geralmente é realizado às custas de eliminação de variáveis, introdução de parâmetros não-convexos e introdução de conservadorismo.

Alguns trabalhos tratando análise de estabilidade de sistemas discreto no tempo são citados a seguir. Em (Seuret *et al.*, 2015) é proposto uma nova desigualdade escolhendo

uma função de Lyapunov-Krasovskii baseado em dois ou três somatórios para reduzir o conservadorismo da desigualdade de Jensen (Jensen, 1905), garantindo a estabilidade assintótica de sistemas lineares discreto com atraso variante no tempo. Essa abordagem é equivalente à desigualdade de Wirtinger utilizada em (Seuret & Gouaisbaut, 2014) para sistemas contínuos no tempo, e em (Seuret *et al.*, 2015) para sistemas discretos no tempo. Combinado com o lema da reciprocidade convexa (veja em (Park *et al.*, 2011)) são fornecidos dois teoremas de estabilidade que são menos conservadores ou com custo computacional menor do que o habitual Lyapunov-Krasovskii abordado junto com a desigualdade de Jensen.

Além disso, sistemas com atrasos nos estados e não-linearidades têm atraído atenção de pesquisadores nos últimos anos. A não-linearidade também pode causar instabilidade. Essa classe de sistemas é tratada em (Silva *et al.*, 2018b) que propõe condições convexas para estabilização de sistemas não lineares discretos com atraso variante no tempo utilizando modelo do tipo Fuzzy Takagi-Sugeno. Essas condições são desenvolvidas a partir de uma função Lyapunov-Krasovskii e são formuladas em termos de LMIs e tratam de uma região específica chamada região de validade. Para isso é necessário estabelecer um conjunto de condições iniciais chamadas de estimativa da região de atração que garante que as trajetórias em malha fechada que comecem nesse conjunto permaneçam na região de validade e convirjam assintoticamente para a origem. A estimativa da região de atração é feita com a ajuda de dois conjuntos: um que trata o estado atual e o outro em relação aos estados atrasados. É demonstrado que essa lei de controle pode estabilizar localmente o sistema não-linear discreto no tempo. Também são desenvolvidos procedimentos de otimização convexa que maximizam as estimativas da região de atração.

Dentre as não-linearidades, a saturação de atuadores atrai atenção dos pesquisadores devido à presença em sistemas reais. Em (Lopes *et al.*, 2018) é feito um estudo para estabilização local de um sistema não linear discreto no tempo sujeito a saturação de atuador. É adotada a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno para obter uma síntese de ganhos via otimização convexa que visa maximizar a região de atração na presença de sinais exógenos limitados em amplitude. A não linearidade da saturação do sinal de controle é tratada separadamente gerando modelos fuzzy Takagi-Sugeno locais que possuem saturação de controle. É utilizado seguimento de referência através da inclusão de um integrador para assegurar a convergência da variável controlada para o valor desejado. Em (Tarbouriech *et al.*, 2011) são abordados problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores em contextos local e global de sistemas lineares contínuos no tempo sujeitos a atuadores saturantes. São explorados diferentes caminhos de modelagem do termo da saturação, e diferentes tipos de funções de Lyapunov tais como a poliedral, quadrática e de

Lur'e. São propostos métodos e algoritmos para calcular estimativas da região de atração e para projetar controladores considerando a saturação. Esses algoritmos baseiam-se principalmente no uso de programação linear e problemas de otimização convexa. Em (Corso, 2009) são propostos problemas de otimização convexa com restrições do tipo LMI para o projeto de controladores, com o objetivo de maximizar a região de atração ou melhorar o desempenho com a garantia de estabilidade de sistemas não lineares em tempo contínuo e discreto, sujeitos à saturação de atuadores. Para modelar o sistema saturado não-linear, utiliza-se uma não-linearidade do tipo zona-morta satisfazendo uma condição de setor modificada. O problema é abordado via uma lei de controle dependente de parâmetros e uma lei de controle a ganhos fixos, ambas sob a forma de uma realimentação de estados mais uma realimentação da não-linearidade.

Na literatura há várias técnicas que tratam essas duas características (saturação no sinal de controle e atraso nos estados) isoladas em sistemas discretos no tempo, entretanto, o número de trabalhos que abordam as duas simultaneamente é reduzido. Pode-se citar como por exemplo (Silva *et al.*, 2018a), em que é proposto uma condição de síntese para sistemas com atraso nos estados e saturação em amplitude do atuador que permite que o sinal do atuador sature sem, no entanto, instabilizar o sistema. A proposta principal é obter uma condição de estabilização local para síntese de um ganho estático K que assegure, para um conjunto de condições iniciais admissíveis, a estabilidade assintótica local em malha fechada de sistemas discretos no tempo com saturação de atuadores e atraso nos estados. Além disso, é estabelecido um problema de otimização que maximiza o conjunto de condições iniciais admissíveis que asseguram a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada para a origem. É feito também, pela primeira vez na literatura, uma tentativa da limitação das taxas de variação do atraso. Vale ressaltar que essa abordagem de reescrever o sistema com atraso variante no tempo como um sistema aumentado livre de atraso e chaveados pelo valor do atraso, foi proposta inicialmente em (Hetel *et al.*, 2008) inovando na representação matemática desses modelos. Em processos físicos não é, em geral, razoável assumir que o atraso possa variar de seu valor mínimo ao seu valor máximo em apenas uma iteração. Sistemas com atraso sujeitos a saturação no atuador também são abordados em (De Souza, 2017), que trata o problema de estabilização robusta entrada-estado de sistemas incertos discretos no tempo com atraso variante nos estados e sujeitos a perturbações limitadas em energia. O sistema com atraso e incertezas politópicas é reescrito como um sistema incerto aumentado livre de atraso e a saturação é representada em termos de uma não linearidade do tipo zona morta com a aplicação da condição generalizada de setor. A síntese de controladores com ação *anti-windup* é dependente do atraso e são estabelecidos um conjunto de condições iniciais e um

conjunto de sinais de perturbação admissível que garantem a estabilidade entrada-estado. São formulados problemas de otimização convexa que podem por exemplo maximizar o conjunto de condições iniciais admissíveis ou maximizar o limite superior da norma l_2 das perturbações admissíveis.

Em (Ghiggi, 2008) é apresentado um estudo sobre o problema de controle de sistemas com atraso e saturação, e o desenvolvimento de novos métodos que possibilitam a determinação de estimativas da região de atração, a síntese de leis de controle estabilizantes, assim como a síntese de malhas com ação *anti-windup* para sistemas com atrasos e saturação. São utilizadas técnicas de LMIs, condição de setor generalizada e funções de Lyapunov-Krasovskii, na busca de condições teóricas menos conservadoras. Em (Xu *et al.*, 2012) é feita uma relaxação com algoritmo iterativo para tratar sistemas incertos discretos no tempo. A condição é independente do atraso e é utilizado um modelo politópico para representar a saturação. A abordagem garante estabilidade exponencialmente convergente para uma bola com uma certa taxa de decaimento exponencial para condições iniciais pertencentes a um domínio admissível caracterizado através do raio encontrado. Em (Zhang *et al.*, 2011) são abordados sistemas chaveados incertos discreto no tempo com atraso nos estados e entrada saturante. É utilizado o ganho l_2 como índice de desempenho para avaliar a capacidade de rejeição à perturbação. Em (Chen *et al.*, 2014) também são tratados sistemas chaveados contínuo e discreto no tempo com atraso nos estados e entrada saturante. É utilizada uma condição dependente do atraso. Para obter regiões de atração maiores, o problema de factibilidade é resolvido com um problema de otimização em termos de LMIs. Já em (Chen *et al.*, 2019), é feito uma abordagem através de uma função de Lyapunov aumentada, e uma aproximação de um modelo politópico dependente do atraso é usada para diminuir o conservadorismo. Também são estudados sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e saturação no atuador.

Assim, neste trabalho são investigadas condições de síntese de controladores para sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e entrada saturante utilizando abordagens por uma função de Lyapunov-Krasovskii em que são usadas desigualdades que levam a condições menos conservadoras e outras utilizando sistema aumentado para representar o atraso. Em todas as abordagens a saturação é representada por uma condição generalizada de setor do tipo zona morta.

1.3 Objetivo

Determinar condições para síntese de controladores do tipo realimentação de estados, que garantam para um conjunto de condições iniciais admissíveis a estabilidade assintótica

de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores. Para isso, deseja-se formular abordagens usando uma função Lyapunov-Krasovskii, e outra usando sistema aumentado, buscando condições menos conservadoras do que as já existentes na literatura. Além disso, pretende-se determinar a região de atração por meio de uma nova caracterização da região de condições iniciais para as quais o sistema é assintoticamente localmente estável de modo que essa região seja a maior possível.

1.4 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 1 é feita uma introdução do assunto e uma revisão bibliográfica apresentando os trabalhos já existentes na literatura.

No Capítulo 2 é apresentado o problema, bem como algumas definições e ferramentas matemáticas necessárias para desenvolvê-lo.

No Capítulo 3 primeiramente é definida a função de Lyapunov-Krasovskii $V(\varphi_k)$ usada, e mostrado o desenvolvimento de $\Delta V(\varphi_k)$. Em seguida são apresentadas três abordagens para resolver o problema proposto. É apresentada a metodologia usada para desenvolver as condições obtidas nesta pesquisa. A última dessas três abordagens, é a principal contribuição deste trabalho.

No Capítulo 4 são apresentadas duas abordagens usando um sistema aumentado livre de atraso: a primeira usando o Lema de Finsler, e a outra obtida de forma direta.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas algumas considerações finais sobre o trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Fundamentos

Neste capítulo é apresentado o problema de projeto de controlador robusto para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos nos estados e saturação de atuadores, bem como algumas definições e ferramentas matemáticas utilizadas.

2.1 Definições

A seguir são apresentadas algumas definições necessárias para um maior entendimento deste trabalho.

2.1.1 Sistemas com Incertezas

Quando se modela um sistema físico, muitos dos parâmetros não são conhecidas de maneira exata ou então não são fixos durante todo o período de funcionamento do sistema. Assim, faz-se necessário utilizar técnicas de controle robusto, ou seja, tratar as incertezas do modelo relacionado ao sistema real. Há várias maneiras de representar a incerteza dos parâmetros (ou o valor real dos parâmetros em relação aos parâmetros nominais do modelo). Por exemplo, as representações de incertezas por uma limitação em norma ou por um polítopo convexo no espaço dos parâmetros são bastante comuns na literatura. Neste trabalho, será utilizada a representação de incertezas baseada em polítopos, devido à sua generalidade e facilidade na obtenção de condições convexas para a síntese de controladores. Um polítopo é uma interseção de subespaços, formando um conjunto convexo que pode ser completamente caracterizado por seus vértices.

2.1.2 Conjuntos Contrativos

O conjunto não nulo e fechado \mathbb{D} é um conjunto contrativo do sistema

$$x_{k+1} = h(x_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

se $\forall x_k \in \lambda_k \partial \mathbb{D}$, com $\lambda_k \in \mathbb{R}$ e $\lambda_k \in]0, 1[$, existe λ_{k+1} , $\lambda_{k+1} \in]0, \lambda_k[$, tal que $x_{k+1} \in \lambda_{k+1} \partial \mathbb{D}$. Se um conjunto é contrativo relativamente a um sistema dinâmico, então ele também é positivamente invariante. A recíproca nem sempre é verdadeira.

2.1.3 LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares)

Vários problemas de controle podem ser descritos no formato de LMIs (do inglês, Linear Matrix Inequality). Essas desigualdades matriciais possuem uma relação afim com um conjunto de variáveis matriciais. O uso de LMIs logo se tornou uma ferramenta poderosa em controle de sistemas com incertezas, atraso, saturação do atuador, dentre outros. Há vários *solvers* que fornecem implementação e solução para LMIs usando otimização convexa como por exemplo SeDuMi e LMI Lab. As LMIs podem ser usadas para resolver problemas que envolvem várias variáveis matriciais. A sua manipulação é flexível, pois pode ser usada em diversos problemas de uma maneira muito direta. Na subseção a seguir é mostrado um exemplo de LMI, obtida por meio de uma função de Lyapunov, que é utilizada para testar a estabilidade de sistemas discreto no tempo.

2.1.4 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

A estabilidade de um sistema pode ser caracterizada por sua energia interna. Se a energia do sistema tende a zero à medida que o tempo tende ao infinito, então o sistema é dito assintoticamente estável. O método de Lyapunov utiliza uma função escalar que representa a quantidade de energia do sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio. Se esta função for positiva e decrescente, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável, sendo chamada de Função de Lyapunov (Chen, 1999). Nesse sentido, é importante ressaltar a diferença entre estabilidade de Lyapunov na qual a derivada ou variação da função de Lyapunov pode ser nula, e estabilidade assintótica de Lyapunov em que a derivada ou variação da função de Lyapunov precisa ser estritamente negativa. O interesse deste trabalho está na estabilidade assintótica. As condições de Lyapunov para a análise de estabilidade assintótica de um sistema linear discreto no tempo é ilustrada na sequência. Para isso, considere o caso linear discreto no tempo (De Souza, 2017).

Considere o seguinte sistema incerto discreto no tempo:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k, \quad (2.1)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante $k \in \mathbb{Z}^+$ e $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pertence ao politopo dado pela combinação convexa dos N vértices conhecidos, tal que

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} A_i,$$

em que α_k pertence ao simplex unitário Γ :

$$\Gamma = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} = 1, \alpha_{k,(i)} \geq 0, i \in [1, N] \right\}.$$

A estabilidade desse sistema pode ser avaliada com o auxílio da versão especializada do Teorema de Lyapunov enunciado a seguir.

Teorema 2.1. Estabilidade Global de Lyapunov *Se existir uma função $V(x_k)$, denominada função de Lyapunov, tal que:*

1. $V(x_k) > 0 \quad \forall x_k \neq 0 \quad e \quad V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0,$
2. $\|x_k\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x_k) \rightarrow \infty,$
3. $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall x_k \neq 0 \quad e \quad \Delta V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$

então o sistema (2.1) é dito globalmente assintoticamente estável.

Formalmente diz-se que a origem do espaço R^n a que pertence o vetor de estados x_k é globalmente assintoticamente estável. Por extensão, diz-se que o sistema possui essa propriedade. Dessa forma, é necessário buscar uma função candidata que satisfaça as 3 condições do Teorema 2.1. Uma das funções candidatas a função de Lyapunov mais utilizadas é a função quadrática definida como

$$V(x_k) = x_k^T P x_k, \quad (2.2)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e definida positiva. Essa função é necessária e suficiente para avaliar a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo (Chen, 1999).

Para que $V(x_k)$ seja positiva, é necessário que a matriz P seja simétrica e definida positiva ($P = P^T \succ 0$), ou seja, todos os autovalores de P devem ser reais e maiores que zero. Já para $V(x_k)$ ser decrescente, sua variação temporal, representada por $\Delta V(x_k)$, deve ser negativa ao longo das trajetórias do sistema.

A variação temporal de $V(x_k)$ ao longo das trajetórias do sistema (2.1) é dada por:

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0. \quad (2.3)$$

Substituindo-se (2.2) em (2.3) tem-se

$$\Delta V(x_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k < 0. \quad (2.4)$$

Substituindo-se (2.1) em (2.4) encontra-se

$$V(x_k) = (A(\alpha_k)x_k)^T P(A(\alpha_k)x_k) - x_k^T P x_k < 0,$$

$$V(x_k) = x_k^T (A(\alpha_k)^T P A(\alpha_k) - P) x_k < 0.$$

Portanto, para garantir a estabilidade do sistema, é necessário que:

$$A(\alpha_k)^T P A(\alpha_k) - P \prec 0 \quad P \succ 0.$$

Aplicando o complemento de Schur (veja Apêndice A.2) e usando da convexidade para a descrição de $A(\alpha_k)$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} P & A_i^T P \\ \star & P \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.5)$$

Assim, o sistema discreto no tempo (2.1) é dito globalmente assintoticamente estável se a LMI (2.5) for satisfeita.

2.1.5 Estabilidade de Sistemas com Atraso nos Estados

Como visto anteriormente, a análise de estabilidade de sistemas sem a presença do atraso pode ser realizada de forma eficiente utilizando o método de Lyapunov. Este se resume em buscar uma função de Lyapunov $V(x_k)$, que pode ser uma medida generalizada de energia do desvio dos estados em relação ao ponto de equilíbrio $x_k = 0$. Para sistemas com a presença do atraso nos estados, a análise de estabilidade segue o mesmo princípio, porém o conceito de estado inicial é caracterizado por uma sequência inicial φ_0 no intervalo $\bar{d} \in [0, \bar{d}]$, sendo \bar{d} o atraso máximo. Essa sequência é a condição necessária e suficiente para assegurar unicidade da solução da equação que descreve o comportamento dinâmico dos estados de um sistema com atrasos nos estados. Logo, para sistemas com atraso, busca-se uma função $V(\varphi_0)$ considerando assim o desvio dos estados em relação ao ponto de equilíbrio $\varphi_0 = \{0, 0, \dots, 0\}$. Essa dependência dos estados passados é denominada função candidata de Lyapunov-Krasovskii (Fridman, 2014). O termo funcional é usado quando se tem uma função cujo argumento depende de uma ou mais funções. Assim, no caso discreto no tempo ao utilizar a abordagem baseada em Lyapunov-Krasovskii, pode-se chamar as candidatas a funções de energia como funcionais (pensando que são funções de uma função dos estados) ou como função. Este último caso é razoável quando, por exemplo, usa-se abordagem por vetor aumentado de estados. Assim, buscando uma uniformidade na nomenclatura, será chamado sempre de função de Lyapunov-Krasovskii. Portanto, o método de Lyapunov-Krasovskii pode ser usado para investigar a estabilidade assintótica de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados dados por:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k}, \quad (2.6)$$

em que x_{k-d_k} é o vetor de estados atrasados do sistema, $A_d(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a parte da dinâmica do sistema que é afetada pelo estado atrasado, d_k é um número inteiro positivo representando o atraso variante no tempo tal que $d_k \in [0, \bar{d}]$, sendo \bar{d} o atraso máximo.

A seguir é apresentado o Teorema de Lyapunov-Krasovskii, que foi adaptado de (Gu *et al.*, 2003).

Teorema 2.2. Estabilidade Global de Lyapunov-Krasovskii *Se existir uma função $V(\varphi_{d_k, k})$, denominada função de Lyapunov-Krasovskii, e funções κ_1, κ_2 , e $\kappa_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\kappa_1(r) > 0$, $\kappa_2(r) > 0$, e $\kappa_3(r) > 0$, $\forall r > 0$, tais que:*

1. $\kappa_1 \|x_k\|^2 \leq V(\varphi_k) \leq \kappa_2 \|\varphi_k\|_d^2$,
2. $\Delta V(\varphi_k) \leq -\kappa_3 \|x_k\|^2$,

em que

$$\Delta V(\varphi_k) = V(\varphi_{k+1}) - V(\varphi_k)$$

então, o sistema (2.6) é globalmente assintoticamente estável.

Para exemplificar o Teorema 2.2, é mostrado a seguir o desenvolvimento utilizando uma função de Lyapunov-Krasovskii com dependência dos estados atrasados dada por:

$$V(\varphi_k) = x_k^T P x_k + \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} x_j^T Q x_j > 0, \quad (2.7)$$

em que a variação da energia é dada por:

$$\Delta V(\varphi_k) = V(\varphi_{k+1}) - V(\varphi_k) < 0, \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) em (2.8) obtém-se:

$$\Delta V(\varphi_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} + \sum_{j=k-\bar{d}+1}^k x_j^T Q x_j - x_k^T P x_k - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} x_j^T Q x_j < 0. \quad (2.9)$$

que pode ser reescrita como:

$$\Delta V(\varphi_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T (Q - P) x_k - x_{k-\bar{d}}^T Q x_{k-\bar{d}} < 0. \quad (2.10)$$

É possível escolher diferentes funções de Lyapunov-Krasovskii. Para uma escolha adequada, é necessário considerar a dependência dos estados atrasados que se julgue necessário de modo a reduzir o conservadorismo da condição.

Observação 2.1. A análise de estabilidade feita vale globalmente no \mathbb{R}^n . Porém, se houver alguma não-linearidade como é o caso da saturação de atuadores, é necessária a análise de estabilidade local, pois podem haver estados suficientemente distantes da origem, para os quais o atuador não tenha energia suficiente para atrair a respectiva trajetória para a origem. Neste caso, torna-se relevante estimar o conjunto de condições iniciais para os quais as trajetórias são atraídas para a origem. Essas questões são discutidas mais adiante, na Seção 3.1.2.

2.2 Síntese de Controladores Saturantes

Considere o sistema incerto discreto no tempo com atraso no estados e saturação no atuador dado por

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\mathbf{sat}(u_k), \\ &\forall k \geq 0 \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad \forall k \in [-\bar{d}, 0]. \end{cases} \quad (2.11)$$

em que φ_0 denota a sequência de condições iniciais e α_k é um parâmetro variante no tempo. Essa notação é um tanto abusiva, mas será mantida para não carregar demais a notação. Assim, $x_k = \varphi_0(k)$ significa o $(k+1)$ -ésimo elemento da sequência φ_0 . Assim, x_0 é o primeiro elemento da sequência φ_k , enquanto $x_{\bar{d}}$ é o último. Mais precisamente, φ_0 é um elemento do conjunto denotado por \mathbb{E} , isto é, o conjunto de sequências de $(\bar{d}+1)$ elementos de \mathbb{R}^n : $\varphi_k = \{x_{k-\bar{d}}, x_{k-(\bar{d}-1)}, \dots, x_k\}$; d_k é o atraso limitado variante no tempo, tal que $d_k \in [\underline{d}, \bar{d}]$ com $\underline{d} > 1$. As matrizes $A(\alpha_k)$ e $A_d(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ pertencem ao politopo dado pela combinação convexa dos N vértices conhecidos, tais que

$$[A(\alpha_k) \quad A_d(\alpha_k) \quad B(\alpha_k)] = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} [A_i \quad A_{di} \quad B_i],$$

em que α_k pertence ao simplex unitário Γ :

$$\Gamma = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} = 1, \alpha_{k,(i)} \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Observação 2.2. Se α_k é conhecido, então o sistema é LPV (Linear Parameter-Varying Systems). Sistemas LPV são uma subclasse de sistemas lineares variantes no tempo em que a dependência temporal do modelo pode ser descrita na forma de uma relação linear de coeficientes matriciais fixos e funções escalares no tempo (Souza & Palhares, 2008). Nesse caso, é adequado buscar técnicas de projeto para ganhos $K(\alpha_k)$, porém essa condição não é tratada neste trabalho.

A função saturação $\mathbf{sat}(u_k)_{(\ell)}$ é mostrada na Figura 2.1 e é dada por

$$\text{sat}(u_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \bar{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} > \bar{u}_{(\ell)} \\ u_{k(\ell)}, & \text{se } \underline{u}_{(\ell)} \leq u_{k(\ell)} \leq \bar{u}_{(\ell)} \\ \underline{u}_{(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} < \underline{u}_{(\ell)} \end{cases} \quad (2.12)$$

para todo $\ell \in [1, m]$, em que $u_{k(\ell)} > 0$ refere ao ℓ -ésimo componente da entrada de controle e $\bar{u}_{(\ell)}$ é a ℓ -ésima entrada do vetor $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ que contém o máximo valor permitido para cada sinal de controle.

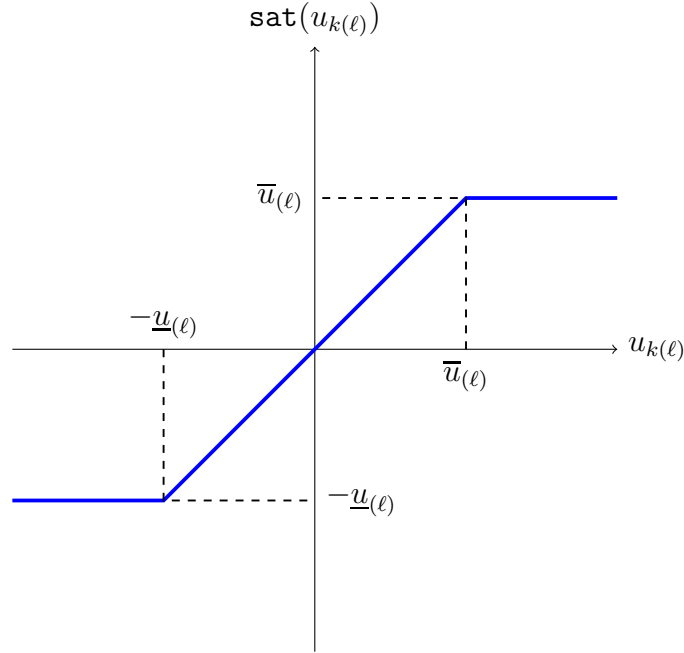


Figura 2.1: Função Saturação.

A seguinte lei de controle por realimentação de estados é usada para estabilizar localmente o sistema (2.11):

$$u_k = Kx_k, \quad (2.13)$$

em que $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é o ganho de controle a ser definido.

Note que neste trabalho é estudado o controle robusto do sistema (2.11), portanto o ganho K independe de α_k . No caso de α_k ser conhecido em tempo real, as condições estudadas nesta dissertação podem ser adaptadas para o projeto de um ganho $K(\alpha_k)$.

Devido à saturação, a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada (2.11)-(2.13) depende do estado inicial dado por pela sequência $\varphi_0 = \{x_{-\bar{d}}, x_{-(\bar{d}-1)}, \dots, x_0\}$, com x_j sendo o vetor de estado no instante j em que \bar{d} é o limite superior do atraso. Portanto, é necessário investigar a estabilidade local de sistemas com atuadores saturantes em malha fechada. Assim, é chamada de região de atração, \mathcal{R}_A , o conjunto de todas as sequências

de condições iniciais do sistema (2.11)-(2.13) tais que as respectivas trajetórias convirjam para a origem. Devido à dificuldade matemática e ao alto custo computacional, determinar o conjunto \mathcal{R}_A é uma tarefa desafiadora mesmo para sistemas de baixa ordem e livres de atraso (Tarbouriech *et al.*, 2011). Assim, geralmente é calculada uma estimativa \mathcal{R}_ε da região de atração em que $\mathcal{R}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_A$.

Diferentes possibilidades para caracterizar a região de condições iniciais são tratadas por (Xu *et al.*, 2012; Zhang *et al.*, 2011; Chen *et al.*, 2014; Silva *et al.*, 2018a; Chen *et al.*, 2019; De Souza *et al.*, 2018). Por exemplo, em (Xu *et al.*, 2012), a região de atração é aproximada pelo conjunto x_j , com $j \in [0, -\bar{d}]$, tal que uma norma apropriada de φ_0 é limitada por um parâmetro r_1 a ser definido, levando a uma bola dentro de \mathbb{R}^n com raio r_1 e centro na origem. Uma caracterização menos conservadora é usada em (Chen *et al.*, 2019) em que duas bolas são caracterizadas por dois parâmetros: r_1 associado a norma de φ_0 , e r_2 a norma da variação de φ_0 , isto é $\Delta\varphi_0$.

Em (Silva *et al.*, 2018a) e (De Souza *et al.*, 2018) uma caracterização mais geral foi introduzida usando um conjunto elipsoidal em um espaço aumentado com dimensão $n\bar{d}$, mas tal solução tem um custo computacional maior. Uma caracterização intermediária foi proposta em (Silva *et al.*, 2018b) em que a caracterização é dividida em duas partes: uma para os estados atuais, x_0 , e outra para os estados atrasados, a sequência φ_0 removendo x_0 : $\bar{\varphi}_0 \equiv \varphi_0 \setminus \{x_0\}$. Um elipsóide em \mathbb{R}^n , \mathcal{C} , é usado para caracterizar x_0 admissível e os estados atrasados são supostos pertencer a bola, $\mathcal{B}(r_1, r_2)$, tal que dependem dos parâmetros r_1 e r_2 definidos anteriormente. Como a função candidata Lyapunov-Krasovskii usada em (Silva *et al.*, 2018b) não considera o acoplamento entre o estado atual x_0 e o estado atrasado x_{-1} , a estimativa de \mathcal{C} e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ é independente.

Devido a saturação do atuador em (2.11) a estabilidade local é necessária para lidar com o projeto do controlador K por realimentação de estado em (2.13). Embora pareça simples, o tratamento matemático da saturação é muito complicado. Para tratá-lo, foi usada a modelagem de não linearidade de setor presente em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech, 2005). Assim, escreve-se o problema usando a função zona morta mostrada na Figura 2.2 e dada por:

$$\phi(u_k) = \text{sat}(u_k) - u_k, \quad (2.14)$$

ou seja,

$$\phi(u_k) = [\phi(u_{k(1)}) \dots \phi(u_{k(m)})]^T,$$

em que

$$\phi(u_{k(\ell)}) = \begin{cases} \bar{u}(\ell) - u_{k(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} > \bar{u}(\ell) \\ 0, & \text{se } -\underline{u}(\ell) \leq u_{k(\ell)} \leq \bar{u}(\ell) \\ -\underline{u}(\ell) - u_{k(\ell)}, & \text{se } u_{k(\ell)} < -\underline{u}(\ell) \end{cases} \quad (2.15)$$

para todo $\ell \in [1, m]$.

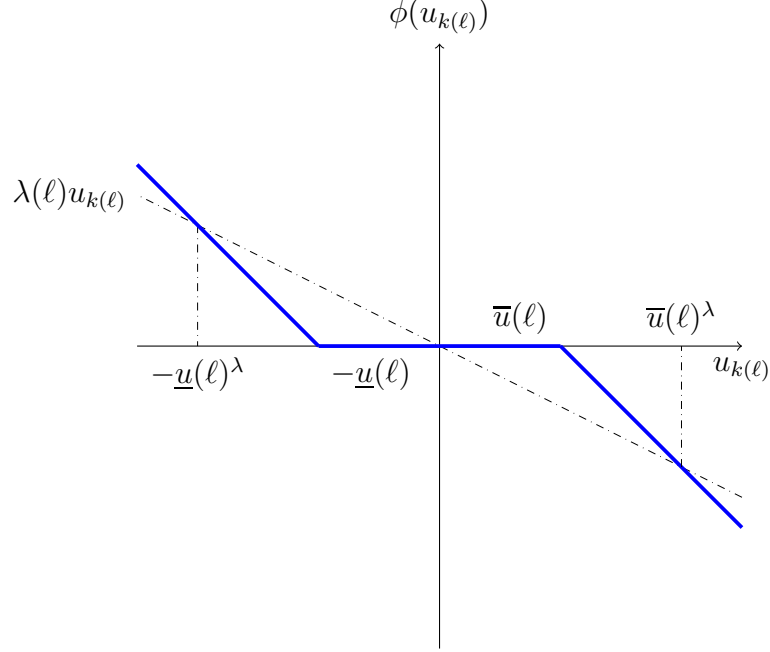


Figura 2.2: Função Zona Morta.

Reescrevendo o sistema (2.11) - (2.12) com a lei de controle (2.13) e a zona morta dada por (2.14) obtém-se o seguinte sistema em malha fechada

$$x_{k+1} = A_{cl}(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\phi(u_k), \quad (2.16)$$

em que $A_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K$, e $\phi(u_k)$ é a função zona morta.

Seguindo (Tarbouriech *et al.*, 2011), um conjunto poliedral auxiliar é definido para lidar com a saturação presente em (2.11):

$$\mathbb{S} = \{x_k \in \mathbb{R}^n : |u_k - \omega_k| \leq \bar{u}\}, \quad (2.17)$$

em que $\omega_k \in \mathbb{R}^m$ é um sinal instrumental a ser projetado. O conjunto \mathbb{S} determina portanto os estados x_k tais que o sinal $u_k - \omega_k$ não ultrapassa os limite de saturação dados por $\pm\bar{u}$.

Quanto maior for o λ mostrado na Figura 2.2, mais larga será a faixa de valores $u_{k(\ell)}$ admissíveis. Esse comportamento é generalizado pelo uso do ω_k na equação 2.17.

Portanto, para um sinal adequado ω_k , a condição generalizada de setor definida pelo seguinte lema dado em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech, 2005), pode ser usada.

Lema 2.1. Condição Generalizada de Setor: *Considere a função $\phi(u_k)$, definida em (2.14). Se $x_k \in \mathbb{S}$, então a relação*

$$\phi(u_k)^T \mathcal{T} [\phi(u_k) + \omega_k] \leq 0, \quad (2.18)$$

é válida para qualquer matriz $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonal definida positiva.

Uma das contribuições deste trabalho, é a proposição de estruturas mais gerais para ω_k , que será visto na seção 3.1.3.

2.3 Desigualdades Auxiliares

Para as deduções dos teoremas deste trabalho, são usadas as desigualdades dadas nos lemas a seguir para majorar termos associados aos somatórios de produtos ponderados de vetores de estados.

Lema 2.2. Desigualdade de Jensen

Seja $Z = Z^T$ uma matriz definida positiva em $\mathbb{R}^{n \times n}$ e $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, a seguinte desigualdade pode ser considerada (Jensen, 1905).

$$\sum_{j=a}^b y_j^T Z y_j \geq \frac{1}{b-a+1} \left(\sum_{j=a}^b y_j^T \right) Z \left(\sum_{j=a}^b y_j \right) \quad (2.19)$$

Lema 2.3. *Seja $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva. Se existe uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} R & X \\ \star & R \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (2.20)$$

então a seguinte desigualdade é válida

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} R & 0 \\ \star & \frac{1}{1-\alpha} R \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} R & X \\ \star & R \end{bmatrix}, \quad \forall \alpha \in]0, 1[.$$

Prova: Seguindo (Park *et al.*, 2011), a prova consiste em notar que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} R & 0 \\ \star & \frac{1}{1-\alpha} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & X \\ \star & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha} R & -X \\ \star & \frac{\alpha}{1-\alpha} R \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

Para concluir, precisa-se mostrar que

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha} R & -X \\ \star & \frac{\alpha}{1-\alpha} R \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (2.22)$$

Por complemento de Schur, a desigualdade (2.22) é equivalente a

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}(R - X^T R^{-1} X) \succeq 0.$$

Como $\alpha \in]0, 1[$, $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ é positivo. Por outro lado, novamente pela aplicação do Complemento de Schur, a desigualdade $R - X^T R^{-1} X \succ 0$ é equivalente a (2.20), que conclui a prova. \blacksquare

Definição 2.1. Combinação Reciprocamente Convexa Seja $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ um conjunto finito de funções tais que elas possuam valores positivos no subconjunto aberto \mathbb{D} de \mathbb{R}^m . Então, a combinação reciprocamente convexa dessas funções em \mathbb{D} é uma função da forma

$$\frac{1}{\alpha_1}\phi_1 + \frac{1}{\alpha_2}\phi_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_N}\phi_N : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

em que os números reais α_i satisfazem $\alpha_i > 0$ e $\sum_i \alpha_i = 1$ (Park et al. , 2011).

Teorema 2.3. Teorema dos Limites Inferiores Seja $f_1, f_2, \dots, f_N : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, com valores positivos no subconjunto \mathbb{D} de \mathbb{R}^m . Então, a combinação reciprocamente convexa de f_i em \mathbb{D} satisfazem

$$\min_{\{\alpha_i | \alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i = 1\}} \sum_i \frac{1}{\alpha_i} f_i(t) = \sum_i f_i(t) + \max_{g_{i,j}(t)} \sum_{i \neq j} g_{i,j}(t)$$

sujeito a

$$\left\{ g_{i,j} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g_{j,i}(t) \triangleq g_{i,j}(t), \begin{bmatrix} f_i(t) & g_{i,j}(t) \\ g_{i,j}(t) & f_j(t) \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}.$$

A prova do Teorema 2.3 pode ser vista em (Park et al. , 2011).

2.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi abordada a fundamentação teórica básica necessária para o desenvolvimento deste trabalho como por exemplo: estabilidade no sentido de Lyapunov, estabilidade quadrática, estabilidade de sistemas com atraso nos estados, função de Lyapunov-Krasovskii, incertezas politópicas, saturação de atuadores, condição generalizada de setor, e Desigualdade de Jensen. Além disso, foi feita a descrição do problema tratado neste trabalho. No Capítulo 3, são mostradas condições que projetam um ganho que garante a estabilidade assintótica local de sistemas dados por (2.16), através da escolha adequada de uma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii e utilização das desigualdades auxiliares citadas neste capítulo, e algumas ferramentas matemáticas mencionadas no Apêndice A.

Abordagem Baseada em Função de Lyapunov-Krasovskii

Neste capítulo, primeiramente é escolhida uma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii, $V(\varphi_k)$, para investigar a estabilização de sistemas discretos variantes no tempo com atrasos nos estados e entradas saturantes. Em seguida é caracterizada a região de atração e apresentada uma estimativa para essa caracterização. Para isso, são formuladas três condições: a primeira, usando o Lema de Finsler, e as outras duas sem utilizá-lo, sendo uma acrescentando variável de folga e a última sem acréscimo de variáveis de folga. Uma vantagem dessa última abordagem, é que não são perdidos graus de liberdade ao obter a condição de síntese em relação às condições de análise, isso porque não são anuladas nenhuma das variáveis. Por isso, a última abordagem mostra-se como principal contribuição deste capítulo devido a ausência de ajuste de parâmetros. As abordagens são testadas em dois exemplos para fins de comparações com métodos recentes encontrados na literatura.

Dessa forma, as contribuições desse capítulo são três. A primeira é apresentar uma desigualdade de somatórios responsável por atrasos variáveis no tempo de maneira similar a proposta por (Seuret *et al.*, 2016) para o caso contínuo no tempo, em que é fornecido um método para deduzir uma condição de estabilização menos conservadora. A segunda é propor uma nova caracterização do conjunto admissível de sequências iniciais que consiste na definição de três conjuntos, produzindo sequências iniciais maiores do que abordagens semelhantes na literatura. E por último a inclusão dos termos $G_{\underline{d}}$, G_{d_k} , e $G_{\bar{d}}$, no sinal ω_k para representar a condição generalizada de setor, no intuito de aumentar a estimativa da região de atração.

3.1 Resultados Preliminares

Para facilitar a leitura do capítulo, são apresentadas novamente as principais equações relativas ao problema de estabilização da classe de sistemas tratadas no capítulo anterior.

Como mencionado anteriormente, considera-se o sistema linear discreto e variante no tempo, com atraso nos estados e atuadores saturantes dado por

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\mathbf{sat}(u_k), \\ &\forall k \geq 0 \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad \forall k \in [-\bar{d}, 0]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Deseja-se projetar o ganho K da lei de controle

$$u_k = Kx_k, \quad (3.2)$$

de forma a assegurar à malha fechada a estabilidade assintótica para um conjunto admissível de condições iniciais.

A saturação é representada por uma função do tipo zona morta

$$\phi(u_k) = \mathbf{sat}(u_k) - u_k, \quad (3.3)$$

a qual será associada a uma condição generalizada de setor. Obtém-se assim o sistema em malha fechada dado por

$$x_{k+1} = A_{cl}(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\phi(u_k), \quad (3.4)$$

em que $A_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K$, e $\phi(u_k)$ é a função zona morta.

Devido a saturação é necessário estimar uma região de atração dentro da qual todas as trajetórias iniciadas em seu interior permaneçam nessa região e convirjam para a origem. Para isso, é necessário escolher uma função de Lyapunov-Krasovskii adequada que trata os estados atrasados. Além disso, é preciso caracterizar a região de atração, e com o intuito de aumentá-la, são introduzidos termos, que dependem dos estados atrasados, para representar a condição de setor generalizada. A função Lyapunov-Krasovskii escolhida, juntamente com a caracterização da região de atração e a inclusão de termos para aumentá-la, são mostradas nas seções seguintes, e são as principais contribuições deste trabalho.

3.1.1 Função de Lyapunov-Krasovskii

A estabilidade local robusta do sistema com atraso de estado variável no tempo (3.4) é investigada por meio da função de Lyapunov-Krasovskii dada por $V(\varphi_k)$. Então, para

todas as trajetórias confinadas em \mathbb{S} , é necessário que $V(\varphi_k)$ atenda, para todos os valores de $\alpha_k \in \Gamma$, as restrições: $\kappa_1(\|x_k\|) \leq V(\varphi_k) \leq \kappa_2(\|\varphi_k\|)$ e $\Delta V(\varphi_k) \leq -\kappa_3(\|x_k\|)$, em que $\Delta V(\varphi_k) = V(\varphi_{k+1}) - V(\varphi_k)$ e κ_i , $i \in [1,3]$, são funções que pertencem à classe- \mathcal{K} (Vidyasagar, 1993). Portanto, por meio do Procedimento S (veja Apêndice A.3), essas restrições são satisfeitas se

$$\Delta V(\varphi_k) - 2\phi(u_k)^T \mathcal{T}[\phi(u_k) + \omega_k] < 0, \quad (3.5)$$

com funções adequadamente calculadas κ_i . Neste trabalho é proposta a função candidata a função de Lyapunov-Krasovskii mostrada a seguir. A fim de facilitar o desenvolvimento de ΔV mostrado mais adiante, as matrizes da função de Lyapunov-Krasovskii não são dependentes de parâmetros.

$$V(\varphi_k) = V_1(\varphi_k) + V_2(\varphi_k) + V_3(\varphi_k) > 0, \quad (3.6)$$

em que

$$V_1(\varphi_k) = x_k^T P x_k, \quad (3.7)$$

$$V_2(\varphi_k) = \sum_{i=k-\underline{d}}^{k-1} x_i^T Q_1 x_i + \sum_{i=k-\bar{d}}^{k-\underline{d}-1} x_i^T Q_2 x_i, \quad (3.8)$$

$$V_3(\varphi_k) = \underline{d} \sum_{i=-\underline{d}+1}^0 \sum_{j=k+i}^k y_j^T Z_1 y_j + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=-\bar{d}+1}^{-\underline{d}} \sum_{j=k+i}^k y_j^T Z_2 y_j, \quad (3.9)$$

e y_j calculado como

$$y_j = x_j - x_{j-1}. \quad (3.10)$$

Para calcular a variação da função de Lyapunov-Krasovskii entre dois instantes, computa-se a variação de cada um dos termos como:

$$\Delta V_1(\varphi_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k, \quad (3.11)$$

$$\Delta V_2(\varphi_k) = x_k^T Q_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^T (Q_1 - Q_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^T Q_2 x_{k-\bar{d}}, \quad (3.12)$$

$$\Delta V_3(\varphi_k) = \underbrace{y_{k+1}^T (\underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) y_{k+1}}_{S_1} - \underline{d} \underbrace{\sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_i^T Z_1 y_i}_{S_1} - (\bar{d} - \underline{d}) \underbrace{\sum_{i=k-\bar{d}+1}^{k-\underline{d}} y_i^T Z_2 y_i}_{S_2}. \quad (3.13)$$

Observe que (3.11) e (3.12) dependem apenas dos vetores de estados x_{k+1} , x_k , $x_{k-\underline{d}}$, e $x_{k-\bar{d}}$, enquanto $\Delta V_3(\varphi_k)$ deve ser manipulado para evitar a dependência em todos os estados atrasados. Para isso, é proposto a utilização da desigualdade de Jensen, que é aplicada nos dois termos com somatório de (3.13): no primeiro, S_1 , diretamente, e no segundo,

S_2 , depois de dividir o somatório em duas partes para explicitar o termo dependente de x_{k-d_k} . Aplicando a desigualdade de Jensen em S_1 tem-se

$$S_1 = \underline{d} \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^T Z_1 y_j \geq \left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^T \right) Z_1 \left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j \right). \quad (3.14)$$

Usando-se (3.10) pode-se reescrever o lado direito da equação (3.14) como

$$\left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j^T - \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_{j-1}^T \right) Z_1 \left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j - \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_{j-1} \right). \quad (3.15)$$

Escrevendo-se os índices em termos de x_j obtém-se

$$\left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j^T - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j^T \right) Z_1 \left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^k x_j - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j \right), \quad (3.16)$$

que, reescrevendo ambos os somatórios com os mesmos limites para possibilitar a simplificação, resulta em

$$(x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}). \quad (3.17)$$

Dessa forma, pode-se encontrar um majorante para S_1 como segue:

$$S_1 = \underline{d} \sum_{j=k-\underline{d}+1}^k y_j^T Z_1 y_j \geq (x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}). \quad (3.18)$$

O mesmo desenvolvimento é feito para S_2 , mas esse primeiramente foi dividido em dois somatórios para o aparecimento do termo dependente de $k - d_k$ como mostrado a seguir:

$$S_2 = (\bar{d} - \underline{d}) \left[\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j^T Z_2 y_j + \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j^T Z_2 y_j \right]. \quad (3.19)$$

Em seguida, aplica-se a desigualdade de Jensen em S_2 , obtendo-se

$$(\bar{d} - \underline{d}) \left[\frac{1}{\bar{d} - d_k} \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j^T \right) Z_2 \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j \right) + \frac{1}{d_k - \underline{d}} \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j^T \right) Z_2 \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j \right) \right]. \quad (3.20)$$

Usando-se (3.10), pode-se reescrever (3.20) como

$$\begin{aligned}
 & (\bar{d} - \underline{d}) \left[\frac{1}{\bar{d} - d_k} \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j^T - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_{j-1}^T \right) Z_2 \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_{j-1} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{d_k - \underline{d}} \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j^T - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_{j-1}^T \right) Z_2 \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_{j-1} \right) \right]. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Escrevendo-se os índices em termos de x_j , obtém-se

$$\begin{aligned}
 S_2 \leq & (\bar{d} - \underline{d}) \left[\frac{1}{\bar{d} - d_k} \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j^T - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k-1} x_j^T \right) Z_2 \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k-1} x_j \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{d_k - \underline{d}} \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j^T - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}-1} x_j^T \right) Z_2 \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}-1} x_j \right) \right], \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

que reescrevendo os somatórios com os mesmos limites para possibilitar a simplificação resulta em

$$\begin{aligned}
 & (\bar{d} - \underline{d}) \left[\frac{1}{\bar{d} - d_k} (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{d_k - \underline{d}} (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k}) \right]. \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Definindo-se $\alpha = \frac{d_k - \underline{d}}{\bar{d} - \underline{d}}$, então $\frac{1}{1-\alpha} = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{\bar{d} - d_k}$ e $\frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{d_k - \underline{d}}$, pode-se reescrever (3.23) como

$$\frac{1}{1-\alpha} (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}) + \frac{1}{\alpha} (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k}), \quad (3.24)$$

e definindo $\Omega_0 = \begin{bmatrix} x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k} \\ x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}$, (3.24) pode ser expressa como

$$\Omega_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} Z_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} Z_2 \end{bmatrix} \Omega_0. \quad (3.25)$$

Usando-se o Lema 2.3, (3.25) é reescrita como

$$\Omega_0^T \begin{bmatrix} Z_2 & X \\ \star & Z_2 \end{bmatrix} \Omega_0, \quad (3.26)$$

em que é escolhido $X = -Z_2$, para obter

$$\Omega_0^T \begin{bmatrix} Z_2 & -Z_2 \\ \star & Z_2 \end{bmatrix} \Omega_0, \quad (3.27)$$

que substituindo-se Ω_0 , resulta em

$$(x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}). \quad (3.28)$$

Assim é possível encontrar um majorante para S_2 como segue:

$$S_2 = (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\bar{d}+1}^{k-\underline{d}} y_i^T Z_2 y_i \geq (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}). \quad (3.29)$$

Utilizando (3.29) e (3.18), a equação (3.13) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Delta V_3 \leq & y_{k+1}^T (\underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) y_{k+1} - (x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) \\ & - (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

O procedimento usado na derivação dos majorantes para os termos S_1 e S_2 pode ser generalizada com auxílio do lema a seguir. Esse lema é uma contribuição deste trabalho, tratando-se de uma versão discreta no tempo da versão contínua publicada em (Seuret *et al.*, 2016).

Lema 3.1. *Seja $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva e uma sequência de vetores $\{x_j\}_{j \in [-\bar{d}, -\underline{d}]} \in \mathbb{R}^n$. Para algum inteiro $c \in [-\bar{d}, -\underline{d}]$, a desigualdade*

$$(\bar{d} - \underline{d}) \sum_{j=-\bar{d}}^{-\underline{d}-1} y_j^T R y_j \geq \Omega_c^T R \Omega_c \quad (3.31)$$

em que y_j é dado em (3.10) e $\Omega_c = x_{-\underline{d}} - 2x_c + x_{-\bar{d}}$.

Prova: A prova é baseada na desigualdade de Jensen, que é aplicada nos dois termos com somatório de (3.13): no primeiro diretamente, e no segundo depois de dividir o somatório em duas partes para fazer aparecer o termo d_k . Mais precisamente, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J} & := (\bar{d} - \underline{d}) \left[\sum_{j=-c}^{-\underline{d}-1} y_j^T R y_j + \sum_{j=-\bar{d}}^{c-1} y_j^T R y_j \right] \\ & \geq \frac{1}{\alpha} \Omega_+^T R \Omega_+ + \frac{1}{1-\alpha} \Omega_-^T R \Omega_- \end{aligned}$$

em que $\alpha = \frac{d_k - \underline{d}}{d - \underline{d}}$, $\Omega_+ = x_{-\underline{d}} - x_c$, e $\Omega_- = x_c - x_{-\bar{d}}$. Seguindo o princípio do Teorema 2.3, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\mathcal{J} \geq \begin{bmatrix} \Omega_+ \\ \Omega_- \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha} R & R \\ R & \frac{\alpha}{1-\alpha} R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & -R \\ -R & R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Omega_+ \\ \Omega_- \end{bmatrix}$$

Note que o primeiro termo é semidefinido positivo uma vez que a desigualdade $\begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha}R & R \\ R & \frac{1-\alpha}{1-\alpha}R \end{bmatrix} \succeq 0$ é equivalente por Complemento de Schur $\frac{1-\alpha}{\alpha}(R - R) = 0$. O resultado é então deduzido de

$$\begin{bmatrix} \Omega_+ \\ \Omega_- \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & -R \\ -R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_+ \\ \Omega_- \end{bmatrix} = (\Omega_+ - \Omega_-)^T R (\Omega_+ - \Omega_-),$$

que permite concluir a prova. \blacksquare

Observação 3.1. Note que, fazendo $c = -\bar{d}$ em (3.31) é possível recuperar a usual desigualdade de Jensen para sistemas discreto com atraso.

O benefício da desigualdade no Lema 3.1 sobre o Teorema da Combinação Reciprocamente Convexa apresentado em (Park *et al.*, 2011) está no menor número de variáveis de decisão e menos LMIs para resolver, já que não há variáveis de folga adicionais e nenhuma restrição é necessária. Além disso, foi mostrado em (Seuret & Gouaisbaut, 2014), que o mesmo nível de conservadorismo como em (Park *et al.*, 2011) foi obtido para sistemas de atraso variável, no caso das condições de estabilidade baseadas em Jensen. É mostrado em (Seuret & Gouaisbaut, 2014) que esta desigualdade não é eficiente quando se emprega somatório mais avançados ou desigualdades integrais.

3.1.2 Caracterização da Região de Atração

Devido à saturação, é necessário fazer a caracterização da região de atração. Inspirado na abordagem de (Silva *et al.*, 2018b), é proposto uma caracterização da estimativa da região de atração tendo em consideração os acoplamentos entre x_0 e x_{-1} , isto é $y_0 = x_0 - x_{-1}$. Nesta abordagem, as sequências admissíveis das condições iniciais φ_0 são tais que:

$$\varphi_0 : \begin{cases} x_0 \in \mathcal{C}, \\ y_0 \in \mathcal{V}, \\ \bar{\varphi}_0 \in \mathcal{B}(r_1, r_2), \end{cases} \quad (3.32)$$

em que \mathcal{C} e \mathcal{V} são conjuntos elipsoidais limitados pelos valores admissíveis de x_0 e y_0 , respectivamente, $\bar{\varphi}_0$ representa os estados atrasados, ou seja, não contém x_0 , tais que eles pertencem a $\mathcal{B}(r_1, r_2)$, garantindo assim $\|\bar{\varphi}_0\| \leq r_1$ e $\|\Delta\bar{\varphi}_0\| \leq r_2$. Portanto, os conjuntos \mathcal{C} , \mathcal{V} , e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ juntos geram uma representação possível de \mathcal{R}_E .

Por isso, é estabelecido o lema a seguir, que é usado para definir os conjuntos $\mathcal{B}(r_1, r_2)$, \mathcal{C} , e \mathcal{V} mencionado em (3.32) que juntos caracterizam as condições iniciais admissíveis para o sistema em malha fechada (3.4). O Lema 3.2 é uma contribuição desse trabalho pois essa nova caracterização da região de condições iniciais permite obter uma estimativa da região de atração maior.

Lema 3.2. *Considere que (3.6) é uma função de Lyapunov-Krasovskii assegurando a estabilidade robusta local de (3.4), e que a sequência inicial φ_0 verifica (3.32) com*

$$\mathcal{C} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : V_1(x_0) \leq 1 - \gamma\}, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{V} = \{y_0 \in \mathbb{R}^n : y_0^T J y_0 < 1\}, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{B}(r_1, r_2) = \{\bar{\varphi}_0 \in \mathbb{E} : \|\bar{\varphi}_0\| \leq r_1, \|\Delta\bar{\varphi}_0\| \leq r_2\}, \quad (3.35)$$

$$\gamma = \rho_1 \|\bar{\varphi}_0\|^2 + \rho_2 \|\Delta\bar{\varphi}_0\|^2 + y_0^T J y_0, \quad (3.36)$$

em que r_1 e r_2 são escolhidos tais que

$$\rho_1 r_1^2 + \rho_2 r_2^2 + y_0^T J y_0 < 1, \quad (3.37)$$

$$J = \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2, \quad (3.38)$$

$$\rho_1 = \underline{d} \eta_1 + (\bar{d} - \underline{d}) \eta_2, \quad (3.39)$$

$$\rho_2 = \frac{\underline{d}^2 (\underline{d} - 1) \eta_3 + (\bar{d} - \underline{d})^2 (\bar{d} + \underline{d} - 1) \eta_4}{2}, \quad (3.40)$$

em que $\eta_1 = \lambda_{\max}(Q_1)$, $\eta_2 = \lambda_{\max}(Q_2)$, $\eta_3 = \lambda_{\max}(Z_1)$, $\eta_4 = \lambda_{\max}(Z_2)$. Então a trajetória respectiva não deixa a região de atração estimada e converge para a origem, $\lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_k]_j = 0$, para $j \in [0, \bar{d}]$.

Prova: Por hipótese, (3.6) é uma função de Lyapunov-Krasovskii para o sistema em malha fechada. Consequentemente, pode-se definir um conjunto de nível dado por $\mathcal{C} \equiv \mathcal{L}_{V_1}(1 - \gamma) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : x_k^T P x_k \leq 1 - \gamma\}$, com γ dado em (3.36). Usando $V_2(\varphi_0)$ e $V_3(\varphi_0)$ dado em (3.8)-(3.9), obtém-se

$$\begin{aligned} V_2 + V_3 &= \sum_{i=-\underline{d}}^{-1} x_i^T Q_1 x_i + \sum_{i=-\bar{d}}^{-\underline{d}-1} x_i^T Q_2 x_i + \underline{d} \left(\underline{d} y_0^T Z_1 y_0 + \sum_{i=-\underline{d}+1}^0 \sum_{j=i}^{-1} y_j^T Z_1 y_j \right) \\ &\quad + (\bar{d} - \underline{d})^2 y_0^T Z_2 y_0 + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=-\bar{d}+1}^{-\underline{d}} \sum_{j=i}^{-1} y_j^T Z_2 y_j, \\ &\leq \underline{d} \lambda_{\max}(Q_1) \|\bar{\varphi}_0\|^2 + (\bar{d} - \underline{d}) \lambda_{\max}(Q_2) \|\bar{\varphi}_0\|^2 + \frac{\underline{d}^2 (\underline{d} - 1)}{2} \lambda_{\max}(Z_1) \|\Delta\bar{\varphi}_0\|^2 \\ &\quad + \frac{(\bar{d} - \underline{d})^2 (\bar{d} + \underline{d} - 1)}{2} \lambda_{\max}(Z_2) \|\Delta\bar{\varphi}_0\|^2 + y_0^T J y_0 \\ &= \rho_1 \|\bar{\varphi}_0\|_{\bar{d}}^2 + \rho_2 \|\Delta\bar{\varphi}_0\|_{\bar{d}}^2 + y_0^T J y_0, \end{aligned}$$

com J , ρ_1 , e ρ_2 dado por (3.38)-(3.40). Para garantir $0 \leq \gamma < 1$, é necessário que (3.37) seja satisfeita. \blacksquare

Observe que, o conjunto \mathcal{V} no Lema 3.2 lida com a transição entre o estado atual e o anterior, o que permite obter uma estimativa menos conservadora para a bola $\mathcal{B}(r_1, r_2)$.

Portanto, para cada escolha de y_0 verificando (3.34) tem-se uma estimativa para \mathcal{C} e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$. Como deseja-se o maior y_0 admissível, então precisa-se estimá-lo através do conjunto \mathcal{V} . Nesse caso, tem-se $|y_0| \leq 1/\sqrt{\rho_3}$ com

$$\rho_3 = \underline{d}^2 \eta_3 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \eta_4. \quad (3.41)$$

Além disso, a região de atração pode ser moldada em uma bola pertencente a \mathbb{R}^n com raio r (veja (Wei *et al.*, 2015), (Pal & Negi, 2018), (Chen *et al.*, 2019)) fazendo $r_1 = r$, $r_2 = 2r$, e de (3.33) tem-se $V_1(x_0) \leq 1 - \gamma$, que resulta em

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(P) + \rho_1 + 4(\rho_2 + \rho_3)}}. \quad (3.42)$$

3.1.3 Estrutura Geral para ω_k

Outro aspecto importante proposto neste trabalho, é a inclusão de termos correspondentes aos estados atrasados na proposição do sinal ω_k que está presente na condição generalizada de setor. Em geral o termo ω_k é escolhido como $\omega_k = Gx_k$. Neste trabalho é proposta uma escolha mais geral dada por:

$$\omega_k = Gx_k + G_{\underline{d}}x_{k-\underline{d}} + G_{d_k}x_{k-d_k} + G_{\bar{d}}x_{k-\bar{d}}. \quad (3.43)$$

Essa escolha é interessante pois os estados usados em (3.43) são os empregados para majorar a variação da função Lyapunov-Krasovskii, e com isso é possível obter estimativas maiores para a região de atração.

A seguir são propostas três condições para projetar o ganho K que garante a estabilidade local do sistema 3.1. Os exemplos foram programados no Matlab usando YALMIP e o solver LMI Lab.

3.2 Condição - I

A primeira condição é desenvolvida utilizando as contribuições preliminares e o Lema de Finsler (veja Apêndice A.1) estabelecendo-se o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Considere o sistema 3.1 e suponha que existem matrizes simétricas $\bar{P} \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{Z}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\underline{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{d_k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal $\bar{T} \succ 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e escalares $\varepsilon_1 \geq 0$ e $\varepsilon_2 \geq 0$ tais que as LMIs*

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \text{He}(\bar{F}_{0i}E) \prec 0, \quad \forall i \in [1, N], \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & 0 & 0 & 0 & \bar{K}_{(\ell)}^T - \bar{G}_{(\ell)}^T \\ \star & \bar{Q}_1 & 0 & 0 & -\bar{G}_{\underline{d}(\ell)}^T \\ \star & \star & \bar{Q}_2 & 0 & -\bar{G}_{d_k(\ell)}^T \\ \star & \star & \star & \bar{Q}_2 & -\bar{G}_{\bar{d}(\ell)}^T \\ \star & \star & \star & \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall \ell \in [1, m], \quad (3.45)$$

são verificadas, em que

$$\Phi_1 = [(F_6 + F_1)^T \bar{P} (F_6 + F_1) - F_1^T \bar{P} F_1 + \bar{Q} + F_6^T (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) F_6 - \Pi^T \bar{Z} \Pi],$$

$$\Phi_2 = [\text{He}(F_5^T [\bar{\mathcal{T}} F_5 + \bar{G} F_1 + \bar{G}_{\underline{d}} F_2 + \bar{G}_{d_k} F_3 + \bar{G}_{\bar{d}} F_4])],$$

$$\bar{F}_{0i} = [A_i \bar{Y} + B_i \bar{K} - \bar{Y} \quad 0 \quad A_{di} \bar{Y} \quad 0 \quad B_i \bar{\mathcal{T}} \quad -\bar{Y}]^T,$$

$$\bar{Q} = \text{diag}(\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, 0, -\bar{Q}_2, 0, 0),$$

$$\bar{Z} = \text{diag}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2),$$

$$E = [\varepsilon_1 I \quad 0 \quad \varepsilon_2 I \quad 0 \quad 0 \quad I],$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -2I & I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$F_2 = [0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$F_3 = [0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$F_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad 0],$$

$$F_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I \quad 0],$$

$$F_6 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I].$$

Então o sistema em malha fechada (3.4), com o ganho de controle robusto dado por

$$K = \bar{K} \bar{Y}^{-1}, \quad (3.46)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais verificadas no conjunto \mathcal{C} dado em (3.33), \mathcal{V} dado em (3.34) e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ com (3.37)–(3.40).

Prova: Se a LMI (3.44) é verificada, então a positividade de (3.6) é garantida. Considerando $\bar{P} = \tilde{Y}^{-T} P \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{Q}_1 = \tilde{Y}^{-T} Q_1 \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{Q}_2 = \tilde{Y}^{-T} Q_2 \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{Z}_1 = \tilde{Y}^{-T} Z_1 \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{Z}_2 = \tilde{Y}^{-T} Z_2 \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{-1}$, $\bar{G} = G \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{G}_{\underline{d}} = G_{\underline{d}} \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{G}_{d_k} = G_{d_k} \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{G}_{\bar{d}} = G_{\bar{d}} \tilde{Y}^{-1}$, $\bar{K}^T = \tilde{Y}^{-1} K^T$, $\bar{Y} = \tilde{Y}^{-1}$, $Q = \text{diag}(\tilde{Y}^{-T} Q_1 \tilde{Y}^{-1}, -\tilde{Y}^{-T} Q_1 \tilde{Y}^{-1} + \tilde{Y}^{-T} Q_2 \tilde{Y}^{-1}, 0, -\tilde{Y}^{-T} Q_2 \tilde{Y}^{-1}, 0, 0)$ e $Z = \text{diag}(\tilde{Y}^{-T} Z_1 \tilde{Y}^{-1}, \tilde{Y}^{-T} Z_2 \tilde{Y}^{-1})$ conduz a

$$\begin{aligned}
 & (F_6 + F_1)^T \tilde{Y}^{-T} P \tilde{Y}^{-1} (F_6 + F_1) - F_1^T \tilde{Y}^{-T} P \tilde{Y}^{-1} F_1 + \tilde{Y}^{-T} Q \tilde{Y}^{-1} \\
 & \quad + F_6^T (\underline{d}^2 \tilde{Y}^{-T} Z_1 \tilde{Y}^{-1} + (\bar{d} - \underline{d})^2 \tilde{Y}^{-T} Z_2 \tilde{Y}^{-1}) F_6 - \Pi^T Z \Pi \\
 & \quad - \text{He}(F_5^T [\mathcal{T}^{-1} F_5 + G \tilde{Y}^{-1} F_1 + G_{\underline{d}} \tilde{Y}^{-1} F_2 + G_{d_k} \tilde{Y}^{-1} F_3 + G_{\bar{d}} \tilde{Y}^{-1} F_4]) \\
 & + \text{He} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \tilde{Y}^{-T} A(\alpha_k)^T + \tilde{Y}^{-T} K^T B(\alpha_k)^T - \tilde{Y}^{-T} \\ 0 \\ \tilde{Y}^{-T} A_d(\alpha_k)^T \\ 0 \\ \mathcal{T}^{-T} B(\alpha_k)^T \\ -\tilde{Y}^{-T} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccc} \varepsilon_1 I & 0 & \varepsilon_2 I & 0 & 0 & I \end{array} \right] \\ \end{array} \right) \prec 0. \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

Aplicando a transformação de congruência que consiste em pré- e pós-multiplicar cada termo da desigualdade (3.47) por Λ_1^T e Λ_1 respectivamente, em que

$$\Lambda_1 = \text{diag}(I_4 \otimes \tilde{Y}, \mathcal{T}, \tilde{Y}),$$

pode ser encontrado

$$\begin{aligned}
 \Theta &= (F_6 + F_1)^T P (F_6 + F_1) - F_1^T P F_1 + Q + F_6 (\underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) F_6 \\
 & \quad - \Pi^T Z \Pi - \text{He}(F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]) \\
 & \quad + \text{He}(F_0(\alpha_k)^T \left[\begin{array}{cccccc} \varepsilon_1 \tilde{Y} & 0 & \varepsilon_2 \tilde{Y} & 0 & 0 & \tilde{Y} \end{array} \right]) \prec 0, \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

em que $F_0(\alpha_k) = \left[\begin{array}{cccccc} A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K - I & 0 & A_d(\alpha_k) & 0 & B(\alpha_k) & -I \end{array} \right]$.

Define-se o vetor $\bar{\zeta}_k$ como:

$$\bar{\zeta}_k = [x_k^T \quad x_{k-\underline{d}}^T \quad x_{k-d_k}^T \quad x_{k-\bar{d}}^T \quad \phi(u_k)^T \quad y_{k+1}^T]^T, \tag{3.49}$$

em que y_{k+1} é dado por (3.10).

Então, pré- e pós-multiplica-se (3.48) por $\bar{\zeta}_k^T$ e $\bar{\zeta}_k$, respectivamente, para encontrar

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta}_k^T \Theta \bar{\zeta}_k &= \bar{\zeta}_k^T ((F_6 + F_1)^T P (F_6 + F_1) - F_1^T P F_1) \bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_k^T Q \bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_k^T (F_6 (\underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) F_6 \\
 & \quad - \Pi^T Z \Pi) \bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_k^T \text{He}(F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]) \bar{\zeta}_k \\
 & \quad + \bar{\zeta}_k^T \text{He}(F_0(\alpha_k)^T \left[\begin{array}{cccccc} \varepsilon_1 \tilde{Y} & 0 & \varepsilon_2 \tilde{Y} & 0 & 0 & \tilde{Y} \end{array} \right]) \bar{\zeta}_k < 0. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Percebe-se a partir da definição do sistema, (3.1), que $F_0 \bar{\zeta}_k = 0$. Então pode-se aplicar o Lema de Finsler para obter a seguinte condição:

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta}_k^T \Theta \bar{\zeta}_k &= \underbrace{\bar{\zeta}_k^T ((F_6 + F_1)^T P (F_6 + F_1) - F_1^T P F_1) \bar{\zeta}_k}_{\Delta V_1(\varphi_k)} + \underbrace{\bar{\zeta}_k^T Q \bar{\zeta}_k}_{\Delta V_2(\varphi_k)} \\
 &+ \underbrace{\bar{\zeta}_k^T (F_6^T (\underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) F_6 - \Pi^T \bar{Z} \Pi) \bar{\zeta}_k}_{\Gamma_3(\varphi_k)} \\
 &- \underbrace{(\bar{\zeta}_k^T \text{He}(F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]) \bar{\zeta}_k)}_{\leq 0 \text{ (assegurado pelo Lema 2.1)}} < 0. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo $\Gamma_3(\varphi_k)$ substituindo F_6 e Π_1 por suas definições, encontra-se:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_3(\varphi_k) &= \underbrace{\underline{d}^2 y_{k+1} Z_1 y_{k+1} - (x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}})}_{\Gamma_{31}} \\
 &+ \underbrace{(\bar{d} - \underline{d})^2 y_{k+1} Z_2 y_{k+1} - (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})}_{\Gamma_{32}}. \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Pode-se reescrever Γ_{31} somando e subtraindo o mesmo termo como mostrado a seguir:

$$\Gamma_{31} = \underbrace{\underline{d}^2 y_{k+1} Z_1 y_{k+1} - \underline{d} \sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_j^T Z_1 y_j}_{\Delta V_{31}(\varphi_k)} - \underbrace{(x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) + \underline{d} \sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_j^T Z_1 y_j}_{\hat{\Upsilon}_1}.$$

Assim, $\Gamma_{31} = \Delta V_{31}(\varphi_k) + \hat{\Upsilon}_1$.

Repetindo o mesmo procedimento para Γ_{32} , ou seja, também somando e subtraindo o mesmo termo, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{32} &= \underbrace{(\bar{d} - \underline{d})^2 y_{k+1} Z_2 y_{k+1} - (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\underline{d}+1}^{k-\underline{d}} y_j^T Z_2 y_j}_{\Delta V_{32}(\varphi_k)} \\
 &- \underbrace{(x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}) + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\underline{d}+1}^{k-\underline{d}} y_j^T Z_2 y_j}_{\hat{\Upsilon}_2}. \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Assim, $\Gamma_{32} = \Delta V_{32}(\varphi_k) + \hat{\Upsilon}_2$. Então, Γ_3 pode ser reescrito como:

$$\Gamma_3 = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} = \Delta_{31} + \Delta_{32} + \hat{\Upsilon}_1 + \hat{\Upsilon}_2$$

Aplicando as condições do Lema 3.1 e a Observação 3.1, tem-se que $\hat{\Upsilon}_1$ e $\hat{\Upsilon}_2$ são positivos. Então, usando o Lema 2.1 pode-se concluir que

$$\Delta V(\varphi_k) - 2(\phi(u_{u_k})^T \mathcal{T}[\phi(u_k + \omega_k)]) \leq \zeta_k^T \Theta \zeta_k < 0$$

em que $\omega_k = Gx_k + G_{\underline{d}}x_{k-\underline{d}} + G_{d_k}x_{k-d_k} + G_{\bar{d}}x_{k-\bar{d}}$.

Portanto, pode-se concluir que a factibilidade de (3.44) garante a estabilidade robusta local do sistema linear discreto no tempo com atraso variante nos estados e sob a lei de controle (3.2), para um conjunto inicial adequado de condições iniciais, e funções de classe \mathcal{K} dado por $\kappa_1(\|x_k\|) = \epsilon_1\|x_k\|$, com as seguintes variáveis pequenas o suficiente $\epsilon_1 > 0$, $\kappa_2(\|\varphi_k\|) = \lambda_{\max}(P)\|x_k\|^2 + \rho_1\|\varphi_k\|^2 + \rho_2\|\Delta\varphi_k\|^2$ e $\kappa_3(\|x_k\|) = \epsilon_3\|x_k\|^2$, para algum ϵ_3 real positivo.

Se a factibilidade de (3.45) também é verificada, pode-se pré- e pós-multiplicar a LMI (3.45) por $\text{diag}\{I_4 \otimes \tilde{Y}, 1\}$ e sua transposta respectivamente, e aplicar Complemento de Schur para obter

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ \star & Q_1 & 0 & 0 \\ \star & \star & Q_2 & 0 \\ \star & \star & \star & Q_2 \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} K_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ -G_{\underline{d}(\ell)} \\ -G_{d_k(\ell)} \\ -G_{\bar{d}(\ell)} \end{bmatrix} \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} \begin{bmatrix} K_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ -G_{\underline{d}(\ell)} \\ -G_{d_k(\ell)} \\ -G_{\bar{d}(\ell)} \end{bmatrix}^T.$$

Então, pré- e pós-multiplicando a desigualdade anterior por ζ e ζ^T respectivamente com $\zeta = [x_k^T \ x_{k-\underline{d}}^T \ x_{k-d_k}^T \ x_{k-\bar{d}}^T]$ e usando o Lema 3.2, obtém-se $1 \geq V(\varphi_k) \geq x_k^T P x_k + x_{k-\underline{d}}^T Q_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^T Q_2 x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^T Q_2 x_{k-\bar{d}} \geq |u_{k(\ell)} - \omega_{k(\ell)}|^2 / u_{0(\ell)}^2$, com $\omega_k = Gx_k + G_{\underline{d}}x_{k-\underline{d}} + G_{d_k}x_{k-d_k} + G_{\bar{d}}x_{k-\bar{d}}$. Portanto, é garantido que $x_k \in \mathbb{S}$ e assim o Lema 2.1 é verificado completando a prova. \blacksquare

Observe que, o Teorema 3.1 engloba o caso da incerteza e do atraso invariante no tempo, isto é, $\underline{d} = \bar{d}$. Nesse caso, as expressões em (3.39) e (3.40) são reescritas como $\rho_1 = \underline{d}\eta_1$ e $\rho_2 = \underline{d}^2(1 + \underline{d})\eta_3/2$, respectivamente.

Uma consideração importante que deve ser feita a respeito desta abordagem é a desvantagem da presença dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 , que aparecem devido a utilização do Lema de Finsler. Esses parâmetros devem ser ajustados, e essa tarefa nem sempre é fácil, pois a escolha inadequada desses valores influencia diretamente no resultado, podendo até gerar a infactibilidade da solução.

O Teorema 3.1 pode ser simplificado considerando $\omega_k = Gx_k$, em que é obtido o seguinte corolário que conduz a uma menor estimativa da região de atração.

Corolário 3.1. *Considere o sistema 3.1 e suponha que existem matrizes simétricas $\bar{P} \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{Z}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

matrizes $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal $\bar{\mathcal{T}} \succ 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e escalares $\varepsilon_1 \geq 0$ e $\varepsilon_2 \geq 0$ tais que as LMIs

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \text{He}(\bar{F}_{0i}E) \prec 0, \quad \forall i \in [1, N], \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{K}_{(\ell)}^T - \bar{G}_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall \ell \in [1, m], \quad (3.55)$$

são verificadas, em que

$$\Phi_1 = [(F_6 + F_1)^T \bar{P} (F_6 + F_1) - F_1^T \bar{P} F_1 + \bar{Q} + F_6^T (\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2) F_6 - \Pi^T \bar{Z} \Pi],$$

$$\Phi_2 = [\text{He}(F_5^T [\bar{\mathcal{T}} F_5 - \bar{G} F_1])],$$

$$\bar{F}_{0i} = [A_i \bar{Y} + B_i \bar{K} - \bar{Y} \quad 0 \quad A_{di} \bar{Y} \quad 0 \quad B_i \bar{\mathcal{T}} \quad -\bar{Y}]^T,$$

$$\bar{Q} = \text{diag}(\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, 0, -\bar{Q}_2, 0, 0),$$

$$\bar{Z} = \text{diag}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2),$$

$$E = [\varepsilon_1 I \quad 0 \quad \varepsilon_2 I \quad 0 \quad 0 \quad I],$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -2I & I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$F_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I \quad 0],$$

$$F_6 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I].$$

Então o sistema em malha fechada (3.4), com o ganho de controle robusto dado por

$$K = \bar{K} \bar{Y}^{-1}, \quad (3.56)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais verificadas no conjunto \mathcal{C} dado em (3.33), \mathcal{V} dado em (3.34) e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ com (3.37)–(3.40).

Prova: A prova do Corolário 3.1 segue a mesma ideia da prova do Teorema 3.1 substituindo (3.43) por $\omega = Gx_k$. ■

3.2.1 Procedimento de Otimização

Um procedimento de otimização pode ser associado ao Teorema 3.1 e ao Corolário 3.1, que tratam apenas o problema de factibilidade, para maximizar o tamanho dos conjuntos \mathcal{C} , \mathcal{V} e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$. Para isso, propõe-se o seguinte procedimento de otimização.

$$J_1 = \begin{cases} \min & \text{traço} \left(\sum_{j=1}^5 \beta_j H_j \right) \\ \text{sujeito a} & (3.44), (3.45), \text{ e} \\ & \begin{bmatrix} H_j & I \\ I & \bar{Y}^T + \bar{Y} - \bar{X}_j \end{bmatrix} \succeq 0, \end{cases} \quad (3.57)$$

em que $\beta_j \geq 0$ são ponderações, $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e \bar{X}_j corresponde a j -ésima matriz da lista $\{\bar{P}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2\}$.

Observe que, se (3.57) é factível, então tem-se $\bar{Y}^T + \bar{Y} - \bar{X}_j \preceq \bar{Y}^T \bar{X}_j \bar{Y}$ que é usado para substituir o bloco (2,2) de (3.57). Aplicando complemento de Schur, obtém-se $H_j \succeq \bar{Y}^{-T} \bar{X}_j \bar{Y}^{-1}$ em que $\bar{Y} = \tilde{Y}^{-1}$. Por causa de $\bar{X}_j = \bar{Y}^T X_j \bar{Y}$, com X_j sendo a j -ésima matriz na lista $\{P, Q_1, Q_2, Z_1, Z_2\}$, tem-se $H_j \succeq X_j$ e então a minimização de $\text{traço}(H_j)$ leva a minimização de $\text{traço}(X_j)$. Adicionalmente, β_j pode ser usado para ponderar os efeitos de cada matriz da função de Lyapunov-Krasovskii candidata. Note que para o Corolário 3.1, o procedimento de otimização é o mesmo, apenas substituindo (3.44) e (3.45) por (3.54) e (3.55) respectivamente.

3.2.2 Exemplos Numérico

Exemplo 1:

Considere o sistema discreto no tempo (3.1) com matrizes conhecidas dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.15 \\ 0.03 & 0.8 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

o atraso é constante $\underline{d} = \bar{d} = 5$, e a entrada saturante é limitada em $\bar{u} = 15$. O objetivo é projetar a lei de controle saturante (3.2) tal que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condições iniciais. Foram usados $\varepsilon_1 = 1.9$ e $\varepsilon_2 = 0.02$, (esses valores foram escolhidos através de testes que levassem a uma solução factível com um maior valor para o raio) e o procedimento de otimização J_1 , com $\beta_2 = 1$ e $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Foram testadas algumas combinações e verificado que, dentre as testadas, a ponderação não nula apenas de β_2 levou a estimativas maiores para as regiões. O Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 podem ser usados para estimar o conjunto de condições iniciais como uma bola de raio r no espaço \mathbb{R}^2 , isto é, todos os estados $x_j, j \in [0, -\bar{d}]$ possuem $\|x_j\| \leq r$. Foram testados o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 e os valores do raio r são mostrados na Tabela 3.1 juntamente com uma condição já existente na literatura.

Tabela 3.1: Raio da Região de Atração - Condição I - Exemplo 1.

Condição	Raio
Teorema 3.1	$r = 74.558$
Corolário 3.1	$r = 68.330$
(Chen <i>et al.</i> , 2019)	$r = 72.596$

Pode-se observar que o resultado obtido para o Teorema 3.1 é melhor (aproximadamente 9% maior) do que o obtido pelo Corolário 3.1, e que os resultados estão bem próximos do valor já encontrado por (Chen *et al.*, 2019), sendo que para o Teorema 3.1 foi obtido uma valor maior.

Exemplo 2: Considere o sistema variante no tempo (3.1) com dois vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.20 \\ 0.09 & 1.00 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.03 \\ 0.02 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 0.99 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0.20 \\ 0.11 & 1.00 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.09 \\ 0.04 & 0.06 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2.02 \\ 1.01 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

O atraso é $d_k \in [2,4]$, e o sinal de controle saturado é $\bar{u} = 10$. Como feito no Exemplo 1, foi usado o procedimento de otimização J_1 com $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_4 = \beta_5 = 1$. Foram testadas algumas combinações e verificado que, dentre as testadas, a ponderação não nula de β_4 e β_5 levou a estimativas maiores para as regiões. Além disso, foram usados $\varepsilon_1 = 1.7$ e $\varepsilon_2 = 0.005$ (esses valores foram escolhidos através de testes que levassem a uma solução factível com um maior valor para o raio). Foram testados o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 e os valores do raio r são mostrados na Tabela 3.2

Tabela 3.2: Raio da Região de Atração - Condição I - Exemplo 2.

Condição	Raio
Teorema 3.1	$r = 55.470$
Corolário 3.1	$r = 49.855$

Verifica-se que o resultado obtido para o Teorema 3.1 é melhor (aproximadamente 11% maior) do que o obtido pelo Corolário 3.1.

Baseado nos dois exemplos anteriores, percebe-se que a inclusão dos termos $G_{\bar{d}}$, G_{d_k} e $G_{\bar{d}}$ na proposição do sinal ω_k que está presente na condição generalizada de setor, aumenta o tamanho da estimativa da região de atração.

3.3 Condição - II

Buscando melhorar as condições obtidas, reduzindo o conservadorismo das mesmas, foi investigada uma outra formulação sem utilizar o Lema de Finsler, utilizando então

complemento de Schur e as contribuições preliminares estabelecendo-se o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Considere o sistema 3.1 e suponha que existem matrizes simétricas $W \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{Z}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\underline{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{d_k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uma matriz diagonal $\bar{\mathcal{T}} \succ 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e um escalar $\varepsilon \geq 0$ tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2(i) \\ \star & \Phi_3 \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i \in [1, N], \quad (3.61)$$

$$\begin{bmatrix} W & 0 & 0 & 0 & \bar{K}_{(\ell)}^T - \bar{G}_{(\ell)}^T \\ \star & \bar{Q}_1 & 0 & 0 & -\bar{G}_{\underline{d}(\ell)}^T \\ \star & \star & \bar{Q}_2 & 0 & -\bar{G}_{d_k(\ell)}^T \\ \star & \star & \star & \bar{Q}_2 & -\bar{G}_{\bar{d}(\ell)}^T \\ \star & \star & \star & \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall \ell \in [1, m], \quad (3.62)$$

são verificadas, em que

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= [-F_1^T W F_1 + \bar{Q} - \Pi^T \bar{Z} \Pi - \text{He}(F_5^T [\bar{\mathcal{T}} F_5 + \bar{G} F_1 + \bar{G}_{\underline{d}} F_2 + \bar{G}_{d_k} F_3 + \bar{G}_{\bar{d}} F_4])], \\ \Phi_2(i) &= [A_i W + B_i \bar{K} \quad 0 \quad A_{di} W \quad 0 \quad B_i \bar{\mathcal{T}}]^T, \\ \Phi_3 &= [-2\varepsilon W + \varepsilon^2 (W + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2)], \\ \bar{Q} &= \text{diag}(\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, 0, -\bar{Q}_2, 0), \\ \bar{Z} &= \text{diag}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2), \\ \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -2I & I & 0 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ F_2 &= [0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ F_3 &= [0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad 0], \\ F_4 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad I \quad 0], \\ F_5 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I]. \end{aligned}$$

Então o sistema em malha fechada (3.4), com ganho do controle robusto dado por

$$K = \bar{K} W^{-1}, \quad (3.63)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais verificadas no conjunto \mathcal{C} dado em (3.33), \mathcal{V} dado em (3.34) e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ com (3.37)–(3.40).

Prova: Se a LMI (3.61) é verificada, então a positividade de (3.6) é garantida. Considerando $W = P^{-1}$, $\bar{Q}_1 = WQ_1W$, $\bar{Q}_2 = WQ_2W$, $\bar{Z}_1 = WZ_1W$, $\bar{Z}_2 = WZ_2W$, $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{-1}$, $\bar{G} = GW$, $\bar{G}_{\underline{d}} = G_{\underline{d}}W$, $\bar{G}_{d_k} = G_{d_k}W$, $\bar{G}_{\bar{d}} = G_{\bar{d}}W$, $\bar{K}^T = WK^T$, $Q = \text{diag}(WQ_1W, -WQ_1W + WQ_2W, 0, -WQ_2W, 0)$ e $Z = \text{diag}(WZ_1W, WZ_2W)$ e usando o fato que $-W(W + \underline{d}^2\bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2\bar{Z}_2)^{-1}W \leq -2\varepsilon W + \varepsilon^2(W + \underline{d}^2\bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2\bar{Z}_2)$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 & \hat{\Phi}_2(\alpha_k) \\ \star & \hat{\Phi}_3 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.64)$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1 &= [-F_1^T P^{-1} F_1 + P^{-1} Q P^{-1} - \Pi^T P^{-1} Z P^{-1} \Pi \\ &\quad - \text{He}(F_5^T [\mathcal{T}^{-1} F_5 + G P^{-1} F_1 + G_{\underline{d}} P^{-1} F_2 + G_{d_k} P^{-1} F_3 + G_{\bar{d}} P^{-1} F_4])], \\ \hat{\Phi}_2 &= \begin{bmatrix} P^{-1} A(\alpha_k)^T + P^{-1} K^T B(\alpha_k)^T \\ 0 \\ P^{-1} A_d(\alpha_k)^T \\ 0 \\ \mathcal{T}^{-1} B(\alpha_k)^T \end{bmatrix}, \\ \hat{\Phi}_3 &= [-P^{-1} (P^{-1} + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2)^{-1} P^{-1}]. \end{aligned}$$

Pré- e pós-multiplicando cada termo da desigualdade (3.64) por Λ_2 , em que

$$\Lambda_2 = \text{diag}(I_4 \otimes P, \mathcal{T}, I),$$

e usando $F_0(\alpha_k) = [A(\alpha_k) + BK \quad 0 \quad A_d(\alpha_k) \quad 0 \quad B(\alpha_k)]^T$, pode-se encontrar

$$\begin{bmatrix} -F_1^T P F_1 + Q - \Pi^T \bar{Z} \Pi - \text{He}(\Xi) & F_0(\alpha_k)^T \\ \star & -(P + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2)^{-1} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.65)$$

em que $\Xi = F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]$.

Aplicando complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{aligned} \Theta &= F_0(\alpha_k)^T [P + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2] F_0(\alpha_k) - F_1^T P F_1 + Q - \Pi^T Z \Pi \\ &\quad - \text{He}(F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]) \prec 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Definindo o vetor de estados ζ_k como

$$\zeta_k = [x_k^T \quad x_{k-\underline{d}}^T \quad x_{k-d_k}^T \quad x_{k-\bar{d}}^T \quad \phi(u_k)^T]^T,$$

e pré- e pós-multiplicando Θ em (3.66) por ζ_k^T e ζ_k , respectivamente, recupera-se

$$\zeta_k^T \Theta \zeta_k = \Delta V_1(\varphi_k) + \Delta V_2(\varphi_k) + \Gamma_{31}(\zeta_k) + \Gamma_{32}(\zeta_k) - \Psi < 0, \quad (3.67)$$

em que

$$\Delta V_1(\varphi_k) = \zeta_k^T (F_0(\alpha_k)^T P F_0(\alpha_k) - F_1^T P F_1) \zeta_k,$$

$$\Delta V_2(\varphi_k) = \zeta_k^T Q \zeta_k,$$

$$\Gamma_{31}(\zeta_k) = \zeta_k^T (F_0(\alpha_k) \underline{d}^2 Z_1 F_0(\alpha_k) - \Pi_1^T Z_1 \Pi_1) \zeta_k,$$

$$\Gamma_{32}(\zeta_k) = \zeta_k^T (F_0(\alpha_k) (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2 F_0(\alpha_k) - \Pi_2^T Z_2 \Pi_2) \zeta_k,$$

$$\Psi = \zeta_k^T \text{He}(F_5^T \mathcal{T}[F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]) \zeta_k = 2(\phi(u_{u_k})^T \mathcal{T}[\phi(u_k + G x_k)]).$$

Adicionalmente pelo Lema 2.1, se $x_k \in \mathbb{S}$, então $\Psi \preceq 0$.

Percebe-se que $\Gamma_{31}(\zeta_k)$ e $\Gamma_{32}(\zeta_k)$ em (3.67) contém parte de (3.13). De fato, adicionando e subtraindo Υ_1 e Υ_2 em $\Gamma_{31}(\zeta_k)$ e $\Gamma_{32}(\zeta_k)$, com

$$\Upsilon_1 = (x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) + \underline{d} \sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_j^T Z_1 y_j, \text{ e}$$

$$\Upsilon_2 = (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^T Z_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}) + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\underline{d}+1}^{k-\underline{d}} y_j^T Z_2 y_j, \quad (3.68)$$

resulta em

$$\Gamma_{31}(\zeta_k) + \Upsilon_1 - \Upsilon_1 + \Gamma_{32}(\zeta_k) + \Upsilon_2 - \Upsilon_2 = \Delta V_3(\varphi_k) + \hat{\Upsilon}_1 + \hat{\Upsilon}_2 \quad (3.69)$$

em que

$$\hat{\Upsilon}_1 = -(x_k - x_{k-\underline{d}})^T Z_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) + \underline{d} \sum_{i=k-\underline{d}+1}^k y_j^T Z_1 y_j, \quad (3.70)$$

$$\hat{\Upsilon}_2 = -\Omega_{d_k}^T Z_2 \Omega_{d_k} + (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{i=k-\underline{d}+1}^{k-\underline{d}} y_j^T Z_2 y_j. \quad (3.71)$$

Aplicando-se as condições do Lema 3.1 e a Observação 3.1, tem-se que ambos os termos, $\hat{\Upsilon}_1$ e $\hat{\Upsilon}_2$, são positivos. Assim, substituindo o lado direito de (3.69) em (3.67) e usando o Lema 2.1 pode-se concluir que

$$\Delta V(\varphi_k) - 2(\phi(u_{u_k})^T \mathcal{T}[\phi(u_k + G x_k)]) \leq \zeta_k^T \Theta \zeta_k < 0. \quad (3.72)$$

Portanto, pode-se concluir que a factibilidade de (3.61) garante a estabilidade robusta local do sistema linear discreto no tempo com atraso variante nos estados sob a lei de

controle (3.2), para um conjunto inicial adequado de condições iniciais, e funções de classe \mathcal{K} dado por $\kappa_1(\|x_k\|) = \epsilon_1\|x_k\|$, com as seguintes variáveis pequenas o suficiente $\epsilon_1 > 0$, $\kappa_2(\|\varphi_k\|) = \lambda_{\max}(P)\|x_k\|^2 + \rho_1\|\varphi_k\|^2 + \rho_2\|\Delta\varphi_k\|^2$ e $\kappa_3(\|x_k\|) = \epsilon_3\|x_k\|^2$, para algum ϵ_3 real positivo.

Se a factibilidade de (3.62) também é verificada, pode-se pré- e pós-multiplicar a LMI (3.62) por $\text{diag}\{I_4 \otimes P, 1\}$ e sua transposta respectivamente, e aplicar Complemento de Schur para obter

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ \star & Q_1 & 0 & 0 \\ \star & \star & Q_2 & 0 \\ \star & \star & \star & Q_2 \end{bmatrix} \succcurlyeq \begin{bmatrix} K_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ -G_{\underline{d}(\ell)} \\ -G_{d_k(\ell)} \\ -G_{\bar{d}(\ell)} \end{bmatrix} \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} \begin{bmatrix} K_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ -G_{\underline{d}(\ell)} \\ -G_{d_k(\ell)} \\ -G_{\bar{d}(\ell)} \end{bmatrix}^T.$$

Então, pré- e pós-multiplicando a desigualdade anterior por ζ e ζ^T respectivamente com $\zeta = [x_k^T \ x_{k-\underline{d}}^T \ x_{k-d_k}^T \ x_{k-\bar{d}}^T]$ e usando o Lema 3.2, obtém-se $1 \geq V(\varphi_k) \geq x_k^T P x_k + x_{k-\underline{d}}^T Q_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^T Q_2 x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^T Q_2 x_{k-\bar{d}} \geq |u_{k(\ell)} - \omega_{k(\ell)}|^2 / u_{0(\ell)}^2$, com $\omega_k = G x_k + G_{\underline{d}} x_{k-\underline{d}} + G_{k-d_k} x_{k-d_k} + G_{\bar{d}} x_{k-\bar{d}}$. Portanto, é garantido que $x_k \in \mathbb{S}$ e assim o Lema 2.1 é verificado completando a prova. \blacksquare

Observe que, o Teorema 3.2 engloba o caso da incerteza e do atraso invariante no tempo, isto é. $\underline{d} = \bar{d}$. Nesse caso, as expressões em (3.39) e (3.40) são reescritas como $\rho_1 = \underline{d}\eta_1$ e $\rho_2 = \underline{d}^2(1 + \underline{d})\eta_3/2$, respectivamente.

Uma consideração importante que deve ser feita a respeito desta abordagem é que, assim como na condição anterior, ainda há necessidade de ajustar o parâmetro ϵ , mas agora, no Teorema 3.2, é apenas um parâmetro (no Teorema 3.1 são dois escalares: ϵ_1 e ϵ_2). Assim, essa formulação apresenta uma vantagem em relação à anterior. Porém, isso ainda é um inconveniente que torna o processo de síntese mais custoso computacionalmente, pois como já mencionado, essa tarefa de buscar o melhor valor para esse parâmetro nem sempre é fácil, pois a escolha inadequada desse valor influencia diretamente no resultado, podendo até gerar a infactibilidade da solução.

O Teorema 3.2 pode ser simplificado considerando $\omega_k = G x_k$, em que é obtido o seguinte corolário que conduz a uma menor estimativa da região de atração.

Corolário 3.2. *Considere o sistema 3.1 e suponha que existem matrizes simétricas $W \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_1 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{Z}_2 \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uma matriz diagonal $\bar{T} \succ 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e um escalar $\epsilon \geq 0$ tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2(i) \\ \star & \Phi_3 \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i \in [1, N], \quad (3.73)$$

$$\begin{bmatrix} W & \bar{K}_{(\ell)}^T - \bar{G}_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m], \quad (3.74)$$

são verificadas, em que

$$\Phi_1 = [-F_1^T W F_1 + \bar{Q} - \Pi^T \bar{Z} \Pi - \text{He}(F_5^T [\bar{T} F_5 - \bar{G} F_1])],$$

$$\Phi_2(i) = [A_i W + B_i \bar{K} \quad 0 \quad A_{di} W \quad 0 \quad B_i \bar{T}]^T,$$

$$\Phi_3 = [-2\varepsilon W + \varepsilon^2(W + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2),$$

$$\bar{Q} = \text{diag}(\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, 0, -\bar{Q}_2, 0),$$

$$\bar{Z} = \text{diag}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2),$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -2I & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$F_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I].$$

Então o sistema em malha fechada (3.4), com o ganho do controle robusto dado por

$$K = \bar{K} W^{-1}, \quad (3.75)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais verificadas no conjunto \mathcal{C} dado em (3.33), \mathcal{V} dado em (3.34) e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ com (3.37)–(3.40).

Prova: A prova do Corolário 3.2 segue a mesma ideia da prova do Teorema 3.2, substituindo (3.43) por $\omega = Gx_k$. ■

3.3.1 Procedimento de Otimização

Um procedimento de otimização pode ser associado ao Teorema 3.2 e ao Corolário 3.2, que tratam apenas o problema de factibilidade, para maximizar o tamanho dos conjuntos \mathcal{C} , \mathcal{V} e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$. Para isso, propõe-se o seguinte procedimento de otimização.

$$J_2 = \begin{cases} \min & \text{traço} \left(\sum_{j=1}^5 \beta_j H_j \right) \\ \text{sujeito a} & (3.61), (3.62), \\ & \begin{bmatrix} H_j & I \\ I & W \end{bmatrix} \succeq 0. \text{ e} \\ & \begin{bmatrix} H_j & I \\ I & W^T + W - \bar{X}_j \end{bmatrix} \succeq 0, \end{cases} \quad (3.76)$$

em que $\beta_j \geq 0$ são ponderações, $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e \bar{X}_j corresponde a j -ésima matriz da lista $\{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2\}$.

Observe que, se (3.76) é factível, então tem-se $W^T + W - \bar{X}_j \preceq W\bar{X}_jW$ que é usado para substituir o bloco (2,2) de (3.76). Aplicando complemento de Schur, obtém-se $H_j \succeq W^{-1}\bar{X}W^{-1}$. Por causa de $\bar{X}_j = WX_jW$, com X_j sendo a j -ésima matriz na lista $\{Q_1, Q_2, Z_1, Z_2\}$, tem-se $H_j \succeq X_j$ e então a minimização de $\text{traço}(H_j)$ leva a minimização de $\text{traço}(X_j)$. Adicionalmente, β_j pode ser usado para ponderar os efeitos de cada matriz da função de Lyapunov-Krasovskii candidata. Note que para o Corolário 3.2, o procedimento de otimização é o mesmo, apenas substituindo (3.61) e (3.62) por (3.73) e (3.74) respectivamente.

3.3.2 Exemplos Numérico

Exemplo 1:

Considere o sistema discreto no tempo (3.1) com matrizes conhecidas dadas por (3.58) mostradas no exemplo da condição anterior e sujeito as mesmas condições previamente mencionadas. O atraso é constante $\underline{d} = \bar{d} = 5$, e a entrada saturante é limitada em $\bar{u} = 15$. O objetivo é projetar a lei de controle saturante (3.2) tal que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condições iniciais. Foram utilizados $\varepsilon = 1$, (esse valor foi escolhido através de testes que levassem a uma solução factível com um maior valor para o raio) e o procedimento de otimização J_2 , com $\beta_2 = 1$ e $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Foram testadas algumas combinações e verificado que, dentre as testadas, a ponderação não nula apenas de β_2 levou a estimativas maiores para as regiões. O Teorema 3.2 e o Corolário 3.2 podem ser usados para estimar o conjunto de condições iniciais como uma bola de raio r no espaço \mathbb{R}^2 , isto é, todos os estados $x_j, j \in [0, -\bar{d}]$ possuem $\|x_j\| \leq r$. Foram testados o Teorema 3.2 e o Corolário 3.2 e os valores do raio r são mostrados na Tabela 3.3 juntamente com uma condição já existente na literatura.

Tabela 3.3: Raio da Região de Atração - Condição II - Exemplo 1.

Condição	Raio
Teorema 3.2	$r = 76.268$
Corolário 3.2	$r = 72.142$
(Chen <i>et al.</i> , 2019)	$r = 72.596$

Pode-se observar que o resultado obtido para o Teorema 3.2 é melhor (aproximadamente 6% maior) do que o obtido pelo Corolário 3.2 e que os resultados estão bem próximos do valor já encontrado por (Chen *et al.*, 2019), sendo que para o Teorema 3.2 foi obtido um valor maior.

Exemplo 2: Considere o sistema variante no tempo (3.1) com dois vértices dados por (3.59) e (3.60) mostradas no exemplo da condição anterior e sujeito as mesmas condições previamente mencionadas. O atraso é $d_k \in [2,4]$, e o sinal de controle saturado é $\bar{u} = 10$. Como feito no Exemplo 1, foi usado o procedimento de otimização J_2 com $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_4 = \beta_5 = 1$. Foram testadas algumas combinações e verificado que, dentre as testadas, a ponderação não nula de β_4 e β_5 levou a estimativas maiores para as regiões. Além disso, foi utilizado $\varepsilon = 1$ (esse valor foi escolhido através de testes que levassem a uma solução factível com um maior valor para o raio). Foram testados o Teorema 3.2 e o Corolário 3.2 e os valores do raio r são mostrados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Raio da Região de Atração - Condição II - Exemplo 2.

Condição	Raio
Teorema 3.2	$r = 47.599$
Corolário 3.2	$r = 39.369$

Mais uma vez, verifica-se que o resultado obtido para o Teorema 3.2 é bem melhor (aproximadamente 21% maior) do que o obtido pelo Corolário 3.2.

Baseado nos dois exemplos anteriores, percebe-se que a inclusão dos termos $G_{\underline{d}}$, G_{d_k} e $G_{\bar{d}}$ na proposição do sinal ω_k que está presente na condição generalizada de setor, aumenta o tamanho da estimativa da região de atração.

3.4 Condição - III

Foi investigada outra formulação sem utilizar o Lema de Finsler, utilizando novamente complemento de Schur e as contribuições preliminares. Essa nova condição tem a vantagem de não depender de nenhum ajuste de parâmetro sendo, por isso, considerada pela autora, o principal resultado deste trabalho, e mostrada no teorema a seguir.

Teorema 3.3. *Considere o sistema 3.1 e suponha que existem matrizes simétricas $\bar{P} = \bar{P}^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_1^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_2 = \bar{Q}_2^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_1^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_2 = \bar{Z}_2^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\underline{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{d_k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e uma matriz diagonal $\bar{\mathcal{T}} \succ 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_{2(i)} \\ \star & -Y \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i \in [1, N], \quad (3.77)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & 0 & 0 & 0 & \bar{K}_{(\ell)}^T - \bar{G}_{(\ell)}^T \\ \star & \bar{Q}_1 & 0 & 0 & -\bar{G}_{\underline{d}(\ell)}^T \\ \star & \star & \bar{Q}_2 & 0 & -\bar{G}_{d_k(\ell)}^T \\ \star & \star & \star & \bar{Q}_2 & -\bar{G}_{\bar{d}(\ell)}^T \\ \star & \star & \star & \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall \ell \in [1, m], \quad (3.78)$$

são verificadas, em que

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \bar{Q} - F_1^T \bar{P} F_1 - \Pi^T \bar{Z} \Pi - \text{He}(F_5^T [\bar{\mathcal{T}} F_5 + \bar{G} F_1 + \bar{G}_{\underline{d}} F_2 + \bar{G}_{d_k} F_3 + \bar{G}_{\bar{d}} F_4]) \\ \Phi_{2(i)} &= [A_i Y^T + B_i \bar{K} \quad 0 \quad A_{di} Y^T \quad 0 \quad B_i \bar{\mathcal{T}}^T]^T, \\ Y &= \bar{P} + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2, \\ \bar{Q} &= \text{diag}(\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, 0, -\bar{Q}_2, 0), \\ \bar{Z} &= \text{diag}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2), \\ \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -2I & I & 0 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ F_2 &= [0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ F_3 &= [0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad 0], \\ F_4 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad I \quad 0], \\ F_5 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I]. \end{aligned}$$

Então o sistema em malha fechada (3.4), com o ganho do controle robusto dado por

$$K = \bar{K} Y^{-1}, \quad (3.79)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais verificadas no conjunto \mathcal{C} dado em (3.33), \mathcal{V} dado em (3.34) e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ com (3.37)–(3.40).

Prova: Da factibilidade de (3.77), a positividade de (3.6) e Y são garantidas. Considerando $\bar{P} = Y P Y$, $\bar{Q}_1 = Y Q_1 Y$, $\bar{Q}_2 = Y Q_2 Y$, $\bar{Z}_1 = Y Z_1 Y$, $\bar{Z}_2 = Y Z_2 Y$, $\mathcal{T} = \bar{\mathcal{T}}^{-1}$,

$\bar{G} = GY$, $\bar{G}_{\underline{d}} = G_{\underline{d}}Y$, $\bar{G}_{d_k} = G_{d_k}Y$, $\bar{G}_{\bar{d}} = G_{\bar{d}}Y$, $\bar{K}^T = YK^T$, usando (3.3), pre e pós multiplicando a desigualdade resultante por

$$\Lambda_3 = \text{diag}(I_4 \otimes Y^{-1}, \mathcal{T}, I),$$

e sua transposta, respectivamente, multiplicando a desigualdade resultante por $\alpha_{k,(i)}$, e resumindo $i = 1, \dots, N$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 & F_0(\alpha_k)^T \\ \star & -Y(P + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2)Y \end{bmatrix} \prec 0,$$

em que $F_0(\alpha_k) = [A(\alpha_k) + BK \quad 0 \quad A_d(\alpha_k) \quad 0 \quad B(\alpha_k)]$ e $\bar{\Phi}_1 = -F_1^T P F_1 + Q - \Pi^T \bar{Z} \Pi - \text{He}(F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4])$. De (3.3) e com as definições mencionadas para \bar{P} , \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 é possível escrever $Y = (P + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2)^{-1}$, que permite obter

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 & F_0(\alpha_k)^T \\ \star & -(P + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2)^{-1} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Aplicando-se complemento de Schur nessa última desigualdade, obtém-se

$$\Theta = F_0(\alpha_k)^T (P + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2) F_0(\alpha_k) - \bar{\Phi}_1 \prec 0. \quad (3.80)$$

Aqui, é necessário mostrar que $\Theta \prec 0$ garante (3.5), permitindo assim concluir sobre a estabilidade robusta local do sistema em malha fechada (2.16). Então, usando (3.6)-(3.9) e definindo o vetor de estados ζ_k como

$$\zeta_k = [x_k^T \quad x_{k-\underline{d}}^T \quad x_{k-d_k}^T \quad x_{k-\bar{d}}^T \quad \phi(u_k)^T]^T,$$

pré- e pós-multiplicando Θ em (3.80) por ζ_k^T e ζ_k , respectivamente, recupera-se

$$\zeta_k^T \Theta \zeta_k = \Delta V_1(\varphi_k) + \Delta V_2(\varphi_k) + \Gamma_{31}(\zeta_k) + \Gamma_{32}(\zeta_k) - \Psi < 0, \quad (3.81)$$

em que

$$\Delta V_1(\varphi_k) = \zeta_k^T (F_0(\alpha_k)^T P F_0(\alpha_k) - F_1^T P F_1) \zeta_k,$$

$$\Delta V_2(\varphi_k) = \zeta_k^T Q \zeta_k,$$

$$\Gamma_{31}(\zeta_k) = \zeta_k^T (F_0(\alpha_k) \underline{d}^2 Z_1 F_0(\alpha_k) - \Pi_1^T Z_1 \Pi_1) \zeta_k,$$

$$\Gamma_{32}(\zeta_k) = \zeta_k^T (F_0(\alpha_k) (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2 F_0(\alpha_k) - \Pi_2^T Z_2 \Pi_2) \zeta_k,$$

$$\Psi = \zeta_k^T \text{He}(F_5^T \mathcal{T} [F_5 + G F_1 + G_{\underline{d}} F_2 + G_{d_k} F_3 + G_{\bar{d}} F_4]) \zeta_k = 2(\phi(u_{u_k})^T \mathcal{T} [\phi(u_k + G x_k)]).$$

O restante da prova é a mesma usada para o Teorema 3.2.

Portanto, pode-se concluir que a factibilidade de (3.77) garante a estabilidade robusta local do sistema linear discreto no tempo com atraso variante nos estados sob a lei de

controle (3.2), para um conjunto inicial adequado de condições iniciais, e funções de classe \mathcal{K} dado por $\kappa_1(\|x_k\|) = \epsilon_1\|x_k\|$, com as seguintes variáveis pequenas o suficiente $\epsilon_1 > 0$, $\kappa_2(\|\varphi_k\|) = \lambda_{\max}(P)\|x_k\|^2 + \rho_1\|\varphi_k\|^2 + \rho_2\|\Delta\varphi_k\|^2$ e $\kappa_3(\|x_k\|) = \epsilon_3\|x_k\|^2$, para algum ϵ_3 real positivo.

Se a factibilidade de (3.78) também é verificada, pode-se pré- e pós-multiplicar a LMI (3.78) por $\text{diag}\{I_4 \otimes Y^{-T}, 1\}$ e sua transposta respectivamente, e aplicar Complemento de Schur para obter

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ \star & Q_1 & 0 & 0 \\ \star & \star & Q_2 & 0 \\ \star & \star & \star & Q_2 \end{bmatrix} \succcurlyeq \begin{bmatrix} K_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ -G_{\underline{d}(\ell)} \\ -G_{d_k(\ell)} \\ -G_{\bar{d}(\ell)} \end{bmatrix} \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} \begin{bmatrix} K_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ -G_{\underline{d}(\ell)} \\ -G_{d_k(\ell)} \\ -G_{\bar{d}(\ell)} \end{bmatrix}^T.$$

Então, pré- e pós-multiplicando a desigualdade anterior por ζ e ζ^T respectivamente com $\zeta = [x_k^T \ x_{k-\underline{d}}^T \ x_{k-d_k}^T \ x_{k-\bar{d}}^T]$ e usando o Lema 3.2, obtém-se $1 \geq V(\varphi_k) \geq x_k^T P x_k + x_{k-\underline{d}}^T Q_1 x_{k-\underline{d}} + x_{k-d_k}^T Q_2 x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}^T Q_2 x_{k-\bar{d}} \geq |u_{k(\ell)} - \omega_{k(\ell)}|^2 / u_{0(\ell)}^2$, com $\omega_k = G x_k + G_{\underline{d}} x_{k-\underline{d}} + G_{k-d_k} x_{k-d_k} + G_{\bar{d}} x_{k-\bar{d}}$. Portanto, é garantido que $x_k \in \mathbb{S}$ e assim o Lema 2.1 é verificado completando a prova. \blacksquare

Observe que, o Teorema 3.3 engloba o caso da incerteza e do atraso invariante no tempo, isto é, $\underline{d} = \bar{d}$. Nesse caso, as expressões em (3.39) e (3.40) são reescritas como $\rho_1 = \underline{d}\eta_1$ e $\rho_2 = \underline{d}^2(1 + \underline{d})\eta_3/2$, respectivamente.

Uma consideração importante que deve ser feita a respeito desta última abordagem é que, diferente das duas anteriores, nela, não é necessário ajustar nenhum parâmetro ϵ . Isso é uma vantagem, uma vez que o ajuste errado desse parâmetro pode levar a resultados piores ou até gerar a infactibilidade da solução. Essa característica faz com que essa condição seja, em geral, menos conservadora do que as outras duas apresentadas anteriormente.

O Teorema 3.3 pode ser simplificado considerando $\omega_k = G x_k$, em que é obtido o seguinte corolário, que conduz a uma menor estimativa da região de atração.

Corolário 3.3. *Considere o sistema 3.1 e suponha que existem matrizes simétricas $\bar{P} = \bar{P}^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_1^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Q}_2 = \bar{Q}_2^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_1^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{Z}_2 = \bar{Z}_2^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\underline{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{d_k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{G}_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e uma matriz diagonal $\bar{\mathcal{T}} \succ 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_{2(i)} \\ \star & -Y \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall i \in [1, N], \quad (3.82)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{K}_{(\ell)}^T - \bar{G}_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall \ell \in [1, m], \quad (3.83)$$

são verificadas, em que

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \bar{Q} - F_1^T \bar{P} F_1 - \Pi^T \bar{Z} \Pi - \text{He}(F_5^T [\bar{T} F_5 + \bar{G} F_1]) \\ \Phi_{2(i)} &= [A_i Y^T + B_i \bar{K} \quad 0 \quad A_{di} Y^T \quad 0 \quad B_i \bar{T}^T]^T, \\ Y &= \bar{P} + \underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2, \\ \bar{Q} &= \text{diag}(\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, 0, -\bar{Q}_2, 0), \\ \bar{Z} &= \text{diag}(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2), \\ \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -2I & I & 0 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ F_5 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I]. \end{aligned}$$

Então o sistema em malha fechada (3.4), com o ganho do controle robusto dado por

$$K = \bar{K} Y^{-1}, \quad (3.84)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais verificadas no conjunto \mathcal{C} dado em (3.33), \mathcal{V} dado em (3.34) e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$ com (3.37)–(3.40).

Prova: A prova do Corolário 3.3 segue a mesma ideia da prova do Teorema 3.3, substituindo (3.43) por $\omega_k = Gx_k$. ■

3.4.1 Procedimento de Otimização

Um procedimento de otimização pode ser associado ao Teorema 3.3 e ao Corolário 3.3, que tratam apenas o problema de factibilidade, para maximizar o tamanho dos conjuntos \mathcal{C} , \mathcal{V} e $\mathcal{B}(r_1, r_2)$. Para isso, propõe-se o seguinte procedimento de otimização.

$$J_3 = \begin{cases} \min & \text{traço} \left(\sum_{j=1}^5 \beta_j H_j \right) \\ \text{sujeito a} & (3.77), (3.78), \text{ e} \\ & \begin{bmatrix} H_j & I \\ I & Y^T + Y - \bar{X}_j \end{bmatrix} \succeq 0, \end{cases} \quad (3.85)$$

em que $\beta_j \geq 0$ são ponderações, $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e \bar{X}_j corresponde a j -ésima matriz da lista $\{\bar{P}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2\}$.

Observe que, se (3.85) é factível, então tem-se $Y + Y - \bar{X}_j \preceq Y\bar{X}_jY$ que é usado para substituir o bloco (2,2) de (3.85). Aplicando complemento de Schur, obtém-se $H_j \succeq Y^{-1}\bar{X}Y^{-1}$. Por causa de $\bar{X}_j = YX_jY$, com X_j sendo a j -ésima matriz na lista $\{P, Q_1, Q_2, Z_1, Z_2\}$, tem-se $H_j \succeq X_j$ e então a minimização de $\text{traço}(H_j)$ leva a minimização de $\text{traço}(X_j)$. Adicionalmente, β_j pode ser usado para ponderar os efeitos de cada matriz da função de Lyapunov-Krasovskii candidata. Note que para o Teorema 3.3, o procedimento de otimização é o mesmo, apenas substituindo (3.77) e (3.78) por (3.82) e (3.83) respectivamente.

3.4.2 Exemplos Numérico

Exemplo 1:

Considere o sistema discreto no tempo (3.1) com matrizes conhecidas dadas por (3.58) mostradas no exemplo da condição anterior e sujeito as mesmas condições previamente mencionadas. O atraso é constante $\underline{d} = \bar{d} = 5$, e a entrada saturante é limitada em $\bar{u} = 15$. O objetivo é projetar a lei de controle saturante (3.2) tal que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condições iniciais. Foi usado o procedimento de otimização J_3 , com $\beta_2 = 1$ e $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Foram testadas algumas combinações e verificado que, dentre as testadas, a ponderação não nula apenas de β_2 levou a estimativas maiores para as regiões. O Teorema 3.3 e o Corolário 3.3 podem ser usados para estimar o conjunto de condições iniciais como uma bola de raio r no espaço \mathbb{R}^2 , isto é, todos os estados $x_j, j \in [0, -\bar{d}]$ possuem $\|x_j\| \leq r$. Foram testados o Teorema 3.3 e o Corolário 3.3, e os valores do raio r são mostrados na Tabela 3.5 juntamente com uma condição já existente na literatura.

Tabela 3.5: Raio da Região de Atração - Condição III - Exemplo 1.

Condição	Raio
Teorema 3.3	$r = 76.275$
Corolário 3.3	$r = 72.154$
(Chen <i>et al.</i> , 2019)	$r = 72.596$

Pode-se observar que o resultado obtido para o Teorema 3.3 é melhor (aproximadamente 6% maior) do que o obtido pelo Corolário 3.3 e que os resultados estão bem próximos do valor já encontrado por (Chen *et al.*, 2019), sendo que para o Teorema 3.3 foi obtido uma valor maior.

Assim, percebe-se que a inclusão dos termos $G_{\underline{d}}$, G_{d_k} e $G_{\bar{d}}$ na proposição do sinal ω_k que está presente na condição generalizada de setor, aumenta o tamanho da estimativa da região de atração.

Devido a ausência de parâmetros de ajuste, essa condição é considerada pela autora coma a principal contribuição desse trabalho. Por isso, esse exemplo foi mais explorado, utilizando para o restante do exemplo o Teorema 3.3.

Para o Teorema 3.3, foram encontrados $r = 76.275$, $\rho_1 = 6.8900 \times 10^{-5}$, $\rho_2 = 4.5474 \times 10^{-9}$, $\rho_3 = 2.2737 \times 10^{-9}$. Portanto, isso ilustra que a abordagem deste trabalho leva a uma bola maior de condições iniciais. No entanto, essa abordagem permite propor conjuntos mais gerais. Por exemplo, se for escolhido $r_1 = 74$ e $r_2 = 0$, pode-se escolher como uma sequência de condições iniciais

$$\varphi_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -66.9 \\ 96.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix} \right\},$$

que tem $\|\varphi_0\| = 117.66$.

Assim, a abordagem aqui proposta permite lidar com norma muito maior que as encontradas nos trabalhos mencionados.

Exemplo 2: Considere o sistema variante no tempo (3.1) como dois vértices dados por (3.59) e (3.60) mostradas no exemplo da primeira condição e sujeito as mesmas condições previamente mencionadas. O atraso é $d_k \in [2,4]$, e o sinal de controle saturado é $\bar{u} = 10$. Como feito no Exemplo 1, foi usado o procedimento de otimização J_3 com $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_4 = \beta_5 = 1$ para calcular a maior bola em \mathbb{R}^2 ($r_1 = r$ e $r_2 = 2r$) para condições iniciais $\varphi_{0,4}$. Foram testadas algumas combinações e verificado que, dentre as testadas, a ponderação não nula de β_4 e β_5 levou a estimativas maiores para as regiões. Foram testados o Teorema 3.3 e o Corolário 3.3 e os valores do raio r são mostrados na Tabela 3.6

Tabela 3.6: Raio da Região de Atração - Condição III - Exemplo 2.

Condição	Raio
Teorema 3.3	$r = 49.093$
Corolário 3.3	$r = 40.689$

Mais uma vez verifica-se que o resultado obtido para o Teorema 3.3 é bem melhor (aproximadamente 21% maior) do que o obtido pelo Corolário 3.3.

Assim, percebe-se que a inclusão dos termos $G_{\underline{d}}$, G_{d_k} e $G_{\bar{d}}$ na proposição do sinal ω_k que está presente na condição generalizada de setor, aumenta o tamanho da estimativa da região de atração.

Assim como no exemplo anterior, esse também foi mais explorado, utilizando para o

restante do mesmo o Teorema 3.3.

O valor do raio $r = 49.0930$, obtido pelo Teorema 3.3 que produz a bola \mathcal{B}_1 e o elipsóide \mathcal{C}_1 são mostrados na Figura 3.1 (linha preta tracejada).

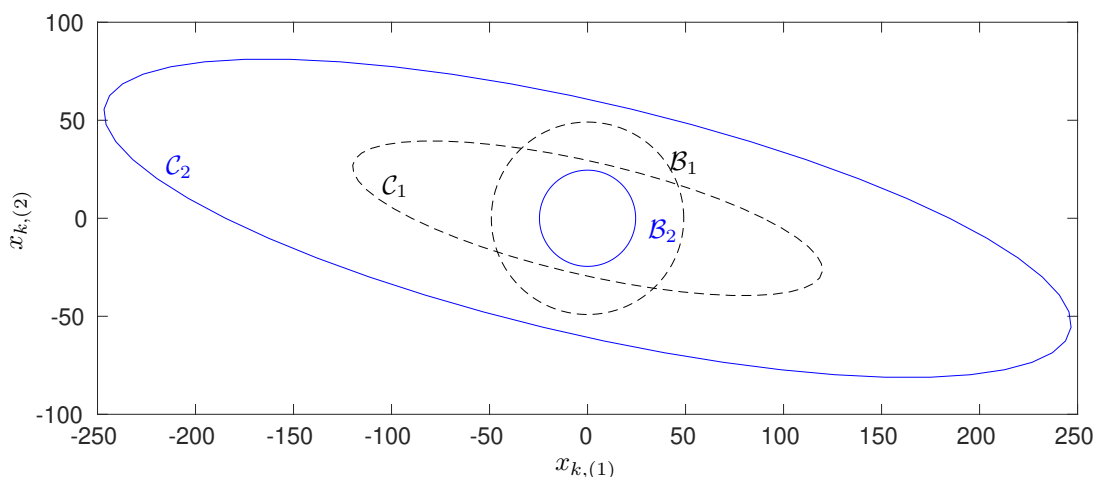


Figura 3.1: Região de Atração.

Se os estados atrasados são assumidos para ser metade desse valor, isto é, $r = 24.55$ então obtém-se a bola \mathcal{B}_2 e o elipsóide \mathcal{C}_2 mostrados na Figura 3.1 (linha azul contínua). Nesse último caso, a sequência $\varphi_{0,4}$ pode ter norma tão grande quanto 286.4. Também é possível notar que, como o raio r_1 (com $r_2 = 2r_1$) diminui, o tamanho da região \mathcal{C} aumenta.

Esse efeito foi investigado pegando valores de raio igualmente espaçados de $4.90930 \leq r \leq 49.0930$: para cada valor de r , com $r_1 = r$ e $r_2 = 2r$, foram usados vetores $x_{-1} \in \mathbb{R}^2$ na borda do conjunto $\mathcal{B}(r, 2r)$ (assim, x_{-1} com módulo igual a r e ângulo θ com o eixo horizontal dado ao longo de um meio ciclo). Para cada par (r, θ) foi calculado a área do respectivo conjunto \mathcal{C} : $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \pi(1 - \gamma)/\sqrt{\det P}$ e γ dado por (3.36). As áreas obtidas são mostradas na Figura 3.2.

A área do conjunto \mathcal{C} (associado a x_0) aumenta quando a norma dos estados atrasados é reduzida.

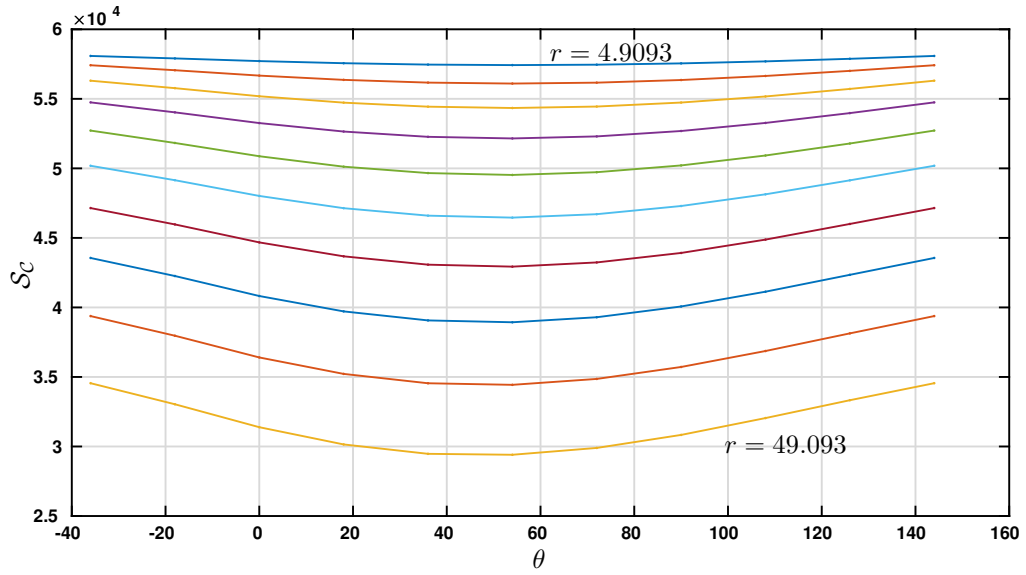


Figura 3.2: Área de \mathcal{C} , $S_{\mathcal{C}}$, para $4.90930 \leq r \leq 49.0930$ e x_{-1} tomadas na borda de $\mathcal{B}(r, 2r)$.

Por fim, a Tabela 3.7 mostra o efeito do valor do atraso máximo no raio da região.

Tabela 3.7: Variação do Raio em Função do Atraso Máximo.

	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
Teorema 3.3	$r = 49.093$	$r = 38.233$	$r = 30.785$	$r = 24.943$
Corolário 3.3	$r = 40.689$	$r = 28.272$	$r = 20.561$	$r = 15.479$

Isso ilustra como a abordagem aqui proposta de estimativa da região de atração pode levar a resultados menos conservadores comparados a outras condições encontradas na literatura.

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram mostradas três importantes contribuições. A primeira foi apresentar uma desigualdade de somatórios responsável por atrasos variáveis no tempo. A segunda foi propor uma nova caracterização do conjunto admissível de sequências iniciais que consiste na definição de três conjuntos, produzindo sequências iniciais maiores do que abordagens semelhantes na literatura. E por último foi verificado que a inclusão de termos no sinal ω_k para representar a condição generalizada de setor, aumenta o tamanho da estimativa da região de atração. Utilizando essas contribuições, foram apresentadas três abordagens para resolver o problema proposto. Para a autora, o principal resultado deste trabalho é o Teorema 3.3 devido a inexistência de parâmetros a serem ajustados, pois esse ajuste é uma tarefa difícil que pode gerar até a infactibilidade da solução.

A fim de comparar as três condições desenvolvidas neste capítulo, os resultados obtidos pelos teoremas 3.1, 3.2, e 3.3 são mostrados nas tabelas 3.8 e 3.9 para os exemplos 1 e 2 respectivamente. Para o primeiro exemplo, os resultados obtidos neste trabalho são comparados com outros já existentes na literatura.

Tabela 3.8: Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 1.

Teorema	Raio
Teorema 3.1	$r = 74.558$
Teorema 3.2	$r = 76.268$
Teorema 3.3	$r = 76.275$
(Chen <i>et al.</i> , 2019)	$r = 72.596$
(Zhang <i>et al.</i> , 2011)	$r = 73.693$
(Xu <i>et al.</i> , 2012)	$r = 63.029$
(Chen <i>et al.</i> , 2014)	$r = 68.491$

Tabela 3.9: Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 2.

Teorema	Raio
Teorema 3.1	$r = 55.470$
Teorema 3.2	$r = 47.599$
Teorema 3.3	$r = 49.093$

Na Tabela 3.8 pode ser visto que para o Exemplo 1, o maior valor de raio obtido, foi para o Teorema 3.3. Já para o Exemplo 2, o maior valor de raio obtido, foi para o Teorema 3.1 como mostrado na Tabela 3.9. Assim, pode-se concluir que, a escolha de qual condição usar, depende de cada caso específico, sendo que cada uma é melhor para uma determinada situação. Vale ressaltar que, para o Teorema 3.1, há a necessidade de ajustar os parâmetros ε_1 e ε_2 o que em determinadas circunstâncias pode não ser viável.

Abordagem por Sistema Aumentado

Como já mencionado no Capítulo 1, o objetivo deste trabalho é projetar um ganho de controle K por realimentação de estados dado por

$$u_k = Kx_k, \quad (4.1)$$

que garanta a estabilidade local assintótica do sistema linear discreto no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores dado por

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)\mathbf{sat}(u_k), \\ &\forall k \geq 0 \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad \forall k \in [-\bar{d}, 0], \end{cases} \quad (4.2)$$

em que o atraso é dado por $d_k \in [\underline{d}, \bar{d}]$.

A saturação é representada por uma função do tipo zona morta dada por

$$\phi(u_k) = \mathbf{sat}(u_k) - u_k, \quad (4.3)$$

a qual pertence a um setor. Devido a saturação, é necessário estimar uma região, contida na região de atração, para a qual todas as trajetórias iniciadas em seu interior permaneçam nessa região e convirjam assintoticamente para a origem.

Para resolver esse problema, neste capítulo, o sistema (4.2) é reescrito como um sistema aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso. São apresentadas duas abordagens: a primeira usando uma abordagem direta, por complemento de Schur como feito em (Silva, 2016), e a segunda usando o Lema de Finsler (veja Apêndice (A.1)).

4.1 Definição do Sistema Aumentado

A ideia central desta abordagem consiste em reescrever o sistema (4.2) como um sistema aumentado, livre de atrasos, e chaveado pelo valor do atraso. Neste caso, deseja-se

encontrar um ganho de controle \mathbb{K} por realimentação de estados que garanta a estabilidade local assintótica em malha fechada do sistema linear discreto no tempo e saturação de atuadores. Essa abordagem é menos conservadora do que a descrita no capítulo anterior (veja por exemplo os trabalhos (De Souza *et al.*, 2018) e (Silva *et al.*, 2018a)), entretanto requer um esforço computacional muito maior devido à maior complexidade das LMIs obtidas.

Assim, o sistema (4.2) pode ser reescrito como (Hetel *et al.*, 2008):

$$\tilde{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha_k)\tilde{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbf{sat}(u_k), \quad (4.4)$$

em que o estado aumentado, \tilde{x}_k , é definido por

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}, \quad \in \mathbb{R}^{n \times (\bar{d}+1)}$$

e a matriz que define a dinâmica e a matriz de entrada são dadas por

$$\mathbb{A}(\alpha_k) = \left[\begin{array}{cccc|c} A(\alpha_k) + \Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{\bar{d}-1} & \Gamma_{\bar{d}} \\ \hline & I_{n\bar{d}} & & & 0_{n\bar{d} \times n} \end{array} \right], \quad (4.5)$$

em que

$$\Gamma_i = \begin{cases} A_d(\alpha_k) & \text{se } i = d_k \\ 0_{n \times n} & \text{se } i \neq d_k \end{cases} \quad \forall i \in [0, \bar{d}], \quad (4.6)$$

e

$$\mathbb{B}(\alpha_k) = [B^T(\alpha_k) \quad 0_{m \times n\bar{d}}]^T. \quad (4.7)$$

Usando a função zona morta descrita no Capítulo 2, aqui definida como

$$\phi(\tilde{u}_k) = \mathbf{sat}(\tilde{u}_k) - \tilde{u}_k, \quad (4.8)$$

e a lei de controle

$$\tilde{u}_k = \mathbb{K}\tilde{x}_k, \quad (4.9)$$

em que o ganho aumentado é dado por

$$\mathbb{K} = [K_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad (4.10)$$

é possível substituir em (4.4), e obter o sistema incerto discreto no tempo com entrada saturante e chaveado pelo valor do atraso dado por

$$\tilde{x}_{k+1} = (\mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K})\tilde{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k)\phi(u_k), \quad (4.11)$$

A estrutura do ganho \mathbb{K} pode ser diferente como mostrado em (De Souza *et al.*, 2018) e (Silva *et al.*, 2018a). No entanto, neste trabalho apenas a estrutura proposta em (4.10) é investigada, mantendo, portanto, a mesma lei de controle usada no Capítulo 3. Estruturas mais completas, certamente resultam em condições menos conservadoras.

4.2 Caracterização da Região de Atração

Devido à saturação, é necessário fazer a caracterização da região de atração. É utilizada uma candidata a função de Lyapunov dada por

$$V(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k. \quad (4.12)$$

Caso (4.12) seja uma função de Lyapunov, então é possível definir um conjunto de nível dado pelos estados \tilde{x}_k tais que

$$\tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k \leq 1.$$

Dessa forma, tem-se que uma estimativa possível para a região de atração \mathcal{R}_A pode ser dada pelo conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(\mathbb{P}, 1) = \{\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n(\bar{a}+1)} : \tilde{x}_0^T \mathbb{P} \tilde{x}_0 \leq 1\}$. Pode-se então, calcular o raio da maior bola inscrita nesse conjunto elipsoidal, usando-se a restrição

$$\tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k \leq \lambda_{\max}(\mathbb{P}) \|\tilde{x}_k\|^2 \leq 1,$$

que pode ser reescrita como

$$\|\tilde{x}_k\| \leq r = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbb{P})}}. \quad (4.13)$$

Dependendo da maneira como as condições para síntese do ganho são desenvolvidas, pode-se obter uma condição convexa que dependa de \mathbb{P} ou de $\mathbb{W} = \mathbb{P}^{-1}$. Assim, são apresentadas duas condições de síntese para resolver o problema: a primeira desenvolvida de forma direta e expressa em termos de \mathbb{W} como em (Silva, 2016), e a segunda proposta usando Lema de Finsler e expressa em termos de \mathbb{P} . Os exemplos foram programados no Matlab usando YALMIP e o solver LMI Lab.

4.3 Formulação sem Uso de Lema de Finsler

A primeira condição é desenvolvida diretamente, e a candidata a função de Lyapunov dada em (4.12) é expressa em termos de $\mathbb{W} = \mathbb{P}^{-1}$ como feito em (Silva, 2016) tendo assim

$$V(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \mathbb{W}^{-1} \tilde{x}_k > 0, \quad (4.14)$$

para $\tilde{x}_k \neq 0$, em que \tilde{x}_k é o vetor de estados aumentado, e \mathbb{W} é uma matriz simétrica definida positiva em $\mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$.

Assim, pode-se estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Considere o sistema 4.2 e suponha que existe uma matriz simétrica $\mathbb{W} \succ 0 \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$, uma matriz diagonal $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes $U \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{d}+1)}$, e $S \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{d}+1)}$, tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{W} & \mathbb{A}_{i,j}U + \mathbb{B}_iZ & \mathbb{B}_iR \\ \star & \mathbb{W} - U^T - U & -S^T \\ \star & \star & -2R \end{bmatrix} \prec 0, \quad \begin{array}{l} \forall i \in [1, N], \\ \forall j \in [\underline{d}, \bar{d}], \end{array} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{W} + U + U^T & Z_{(\ell)}^T - S_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.16)$$

Então o sistema (4.4) em malha fechada, com a lei de controle (4.9), com ganho dado por

$$\mathbb{K} = ZU^{-1}, \quad (4.17)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais tais que $\tilde{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{W}^{-1}, 1) = \{\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)} : \tilde{x}_0^T \mathbb{W}^{-1} \tilde{x}_0 \leq 1\}$.

Prova: Se a LMI (4.15) é verificada, então a positividade de (4.14) é garantida. Considerando $Z = \mathbb{K}U$, $S = GU$, $R = \mathcal{T}^{-T}$, e utilizando o fato que $-U^T \mathbb{W}^{-1} U \preceq \mathbb{W} - U^T - U$ em (4.15), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{W} & \mathbb{A}(\alpha_k)U + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K}U & \mathbb{B}(\alpha_k)\mathcal{T}^{-T} \\ \star & -U^T \mathbb{W}^{-1} U & -U^T G^T \\ \star & \star & -2\mathcal{T}^{-T} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.18)$$

Aplicando a transformação de congruência que consiste em pré- e pós-multiplicar (4.18) por Λ_4^T e Λ_4 , em que

$$\Lambda_4 = \text{diag}(I, U^{-1}, \mathcal{T}),$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{W} & \mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K} & \mathbb{B}(\alpha_k) \\ \star & -\mathbb{W}^{-1} & -G^T \mathcal{T}^T \\ \star & \star & -2\mathcal{T} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.19)$$

Aplicando complemento de Schur obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K} \\ \mathbb{B}(\alpha_k)^T \end{bmatrix} \mathbb{W}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K} & \mathbb{B}(\alpha_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbb{W}^{-1} & -G^T \mathcal{T}^T \\ \star & -2\mathcal{T} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.20)$$

Pré- e pós-multiplicando respectivamente a equação (4.20) pelo vetor de estados X_k^T e X_k , em que

$$X_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^T & \phi(\tilde{u}_k)^T \end{bmatrix}^T,$$

pode-se encontrar

$$\begin{aligned} & [(\mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K})\tilde{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k)\phi(u_k)]^T \mathbb{W}^{-1} [(\mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K})\tilde{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k)\phi(u_k)] \\ & - \tilde{x}_k^T \mathbb{W}^{-1} \tilde{x}_k - \phi(u_k)^T \mathcal{T} \phi(u_k) - \phi(u_k)^T \mathcal{T} G \tilde{x}_k - \phi(u_k)^T \mathcal{T} \phi(u_k) - \tilde{x}_k^T G^T \mathcal{T}^T \phi(u_k). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Utilizando (4.11) em (4.21), tem-se

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_{k+1}^T \mathbb{W}^{-1} \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k^T \mathbb{W}^{-1} \tilde{x}_k \\ & - \phi(u_k)^T \mathcal{T} \phi(u_k) - \phi(u_k)^T \mathcal{T} G \tilde{x}_k - \phi(u_k)^T \mathcal{T} \phi(u_k) - \tilde{x}_k^T G^T \mathcal{T}^T \phi(u_k). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Reagrupando (4.22) obtém-se:

$$\Delta V - 2 \left(\phi(K_{\tilde{x}_k})^T \mathcal{T} [\phi(K_{\tilde{x}_k}) + G\tilde{x}_k] \right) < 0. \quad (4.23)$$

Portanto, pode-se concluir que a factibilidade de (4.15) é verificada e a estabilidade local do sistema linear discreto no tempo sob a lei de controle (4.9) com ganho dado por (4.17) é garantida sempre que as trajetórias dos estados evoluem dentro do conjunto \mathbb{S} .

Além de verificar (4.15), é necessário verificar (4.16), para garantir que a condição de setor é válida. Considerando $\mathbb{Z} = \mathbb{K}U$, $S = GU$, e $U^T \mathbb{W}^{-1} U \geq -\mathbb{W} + U^T + U$ em (4.16), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} U^T \mathbb{W}^{-1} U & U^T \mathbb{K}_{(\ell)}^T - U^T G_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.24)$$

Definindo $U^T = F^{-1}$, e aplicando a transformação de congruência que consiste em pré- e pós-multiplicar (4.24) por Λ_5 e Λ_5^T em que

$$\Lambda_5 = \text{diag}(F, I),$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbb{W}^{-1} & \mathbb{K}_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.25)$$

Aplicando complemento de Schur tem-se

$$\mathbb{W}^{-1} - (\mathbb{K}_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T) \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.26)$$

Pré- e pós-multiplicando respectivamente a equação (4.26) pelo vetor de estados \tilde{x}_k^T e \tilde{x}_k , tem-se:

$$\tilde{x}_k^T \mathbb{W}^{-1} \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T (\mathbb{K}_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T) \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \tilde{x}_k \geq 0. \quad (4.27)$$

Portanto verificando a LMI (4.16), garante-se que qualquer trajetória em malha fechada que começa em $\mathcal{E}(\mathbb{W}^{-1}, 1)$ permanece em \mathbb{S} . \blacksquare

4.3.1 Procedimento de Otimização

Um procedimento de otimização pode ser associado ao Teorema 4.1, que trata apenas do problema de factibilidade, para maximizar \mathbb{S} . Para isso, propõe-se o seguinte procedimento de otimização.

$$J_4 = \begin{cases} \min & \text{traço}(H) \\ & (4.15), (4.16), \text{ e} \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} H & I \\ \star & \mathbb{W} \end{bmatrix} \succeq 0, \end{cases} \quad (4.28)$$

Observe que, se (4.28) é factível, então aplicando complemento de Schur, obtém-se $H \geq \mathbb{W}^{-1}$, e então a minimização de $\text{traço}(H)$ leva a minimização de $\text{traço}(\mathbb{W}^{-1})$, e, portanto, à maximização do elipsóide correspondente a estimativa da região de atração.

Observação 4.1. Para encontrar a matriz de ganho estático \mathbb{K} e U adequados, é necessário impor as seguintes estruturas nas matrizes \mathbb{Z} e U .

$$\mathbb{Z} = [Z_0 \quad 0_{m \times n\bar{d}}] \quad U = \text{diag}(U_0, U_1), \quad (4.29)$$

em que $Z_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $U_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_1 \in \mathbb{R}^{n\bar{d} \times n\bar{d}}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}U^{-1}$.

Outras estruturas são propostas em (De Souza, 2017) e (Silva, 2016) que permitem recuperar diferentes configurações para a matrizes de ganho \mathbb{K} .

4.3.2 Exemplos Numérico

Exemplo 1: Considere o sistema discreto no tempo (4.4) com matrizes conhecidas dadas, como no Capítulo 3, por

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.15 \\ 0.03 & 0.8 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

o atraso é constante $\underline{d} = \bar{d} = 5$, e a entrada saturante é limitada em $\bar{u} = 15$. O objetivo é projetar a lei de controle saturante (4.9) tal que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condições iniciais. Foi utilizado o procedimento de otimização J_4 . O Teorema 4.1 pode ser usado para estimar o conjunto de condições iniciais como uma bola de raio r no espaço \mathbb{R}^2 , isto é, todos os estados $x_j, j \in [0, -\bar{d}]$ possuem $\|x_j\| \leq r$. Para o Teorema 4.1, o raio encontrado foi de $r = 85.039$.

Exemplo 2: Considere o sistema variante no tempo (4.4) com dois vértices dados, como no Capítulo 3, por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.20 \\ 0.09 & 1.00 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.03 \\ 0.02 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 0.99 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0.20 \\ 0.11 & 1.00 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.09 \\ 0.04 & 0.06 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2.02 \\ 1.01 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

O atraso é $d_k \in [2,4]$, e o sinal de controle saturado é $\bar{u} = 10$. Foi utilizado o procedimento de otimização J_4 . Para o Teorema 4.1, o raio encontrado foi $r = 83.908$.

4.4 Formulação Utilizando Lema de Finsler

A segunda condição foi desenvolvida utilizando o Lema de Finsler, permitindo a obtenção de LMIs expressas em termos de \mathbb{P} . A candidata a função de Lyapunov é dada por

$$V(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k > 0, \quad (4.33)$$

para $\tilde{x}_k \neq 0$, em que \tilde{x}_k é o vetor de estados aumentado, e \mathbb{P} é uma matriz simétrica definida positiva em $\mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$.

Assim, pode-se estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Considere o sistema 4.2 e suponha que existe uma matriz simétrica $\tilde{\mathbb{P}} \succ 0$ em $\mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$, uma matriz diagonal definida positiva $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e matrizes $U \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{d}+1)}$ e $S \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{d}+1)}$, e um escalar positivo ε tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} -\tilde{\mathbb{P}} + \text{He}(\mathbb{A}_{i,j}U + \mathbb{B}_i\mathbb{Z})\varepsilon & -U\varepsilon + U^T\mathbb{A}_{i,j}^T + \mathbb{Z}^T\mathbb{B}_i^T & -S^T + \mathbb{B}_iR\varepsilon \\ \star & \tilde{\mathbb{P}} - U^T - U & \mathbb{B}_iR \\ \star & \star & -2R^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad \begin{array}{l} \forall i \in [1, N], \\ \forall j \in [\underline{d}, \bar{d}], \end{array} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{P}} & \mathbb{Z}_{(\ell)}^T - S_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.35)$$

Então o sistema (4.4) em malha fechada, com a lei de controle (4.9), com o ganho dado por

$$\mathbb{K} = \mathbb{Z}U^{-1}, \quad (4.36)$$

é localmente assintoticamente estável para qualquer sequência de condições iniciais tais que $\tilde{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{P}, 1) = \{\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)} : \tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k \leq 1\}$.

Prova: Se a LMI (4.34) é verificada, então a positividade de (4.33) é garantida. Considerando $\mathbb{Z} = \mathbb{K}U$, $S = GU$ e $\tilde{\mathbb{P}} = U^T\mathbb{P}U$ em (4.34), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -U^T\mathbb{P}U + \text{He}(\mathbb{A}(\alpha_k)U + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K}U)\varepsilon \\ \star \\ \star \\ -U\varepsilon + U^T\mathbb{A}(\alpha_k)^T + U^T\mathbb{K}^T\mathbb{B}(\alpha_k)^T & -U^T G^T + \mathbb{B}(\alpha_k)R\varepsilon \\ U^T\mathbb{P}U - U^T - U & \mathbb{B}(\alpha_k)R \\ \star & -2R^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.37)$$

Definindo $F = U^{-T}$ e $\mathcal{T} = R^{-T}$ e aplicando a transformação de congruência que consiste em pré- e pós-multiplicar (4.37) por Λ_6 e Λ_6^T , em que

$$\Lambda_6 = \text{diag}(I_2 \otimes F, \mathcal{T}),$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{P} + \text{He}(F\mathbb{A}(\alpha_k) + F\mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K})\varepsilon \\ \star \\ \star \\ -F\varepsilon + \mathbb{A}(\alpha_k)^T F^T + \mathbb{K}^T\mathbb{B}(\alpha_k)^T F^T & -G^T\mathcal{T}^T + F\mathbb{B}(\alpha_k)\varepsilon \\ \mathbb{P} - F - F^T & F\mathbb{B}(\alpha_k) \\ \star & -2\mathcal{T} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.38)$$

Usando o Lema de Finsler, a desigualdade (4.38) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbb{P} & 0 & -G^T \mathcal{T}^T \\ \star & \mathbb{P} & 0 \\ \star & \star & -2\mathcal{T} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}(\alpha)} + \underbrace{\begin{bmatrix} F\varepsilon \\ F \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{A}(\alpha_k) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K} & -I & \mathbb{B}(\alpha_k) \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}(\alpha)} \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T(\alpha_k) + \mathbb{K}^T \mathbb{B}^T(\alpha_k) \\ -I \\ \mathbb{B}(\alpha_k)^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}^T(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} F^T \varepsilon & F^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}^T(\alpha)} \prec 0. \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

Pré- e pós-multiplicando a equação (4.39) pelo vetor de estados X_k^T e X_k respectivamente, em que

$$X_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^T & \tilde{x}_{k+1}^T & \phi(\tilde{u}_k)^T \end{bmatrix}^T$$

tem-se

$$\begin{aligned}
 & \tilde{x}_{k+1}^T \mathbb{P} \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k - \phi(\tilde{u}_k)^T \mathcal{T} \phi(\tilde{u}_k) - \phi(\tilde{u}_k)^T \mathcal{T} G \tilde{x}_k - \phi(\tilde{u}_k)^T \mathcal{T} \phi(\tilde{u}_k) - \tilde{x}_k^T G^T \mathcal{T}^T \phi(\tilde{u}_k) \\
 & + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha) + \mathcal{G}^T(\alpha) \mathcal{X}^T(\alpha) < 0. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Reagrupando (4.40) obtém-se:

$$\Delta V - 2 \left(\phi(K \tilde{x}_k)^T \mathcal{T} [\phi(K \tilde{x}_k) + G \tilde{x}_k] \right) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha) + \mathcal{G}(\alpha)^T \mathcal{X}^T(\alpha) < 0. \quad (4.41)$$

Portanto, pode-se concluir que a factibilidade de 4.34) é verificada e a estabilidade local do sistema linear discreto no tempo sob a lei de controle (4.9) com ganho dado por (4.36) é garantida sempre que as trajetórias do estados evoluem dentro do conjunto \mathbb{S} .

Além de verificar (4.34), é necessário verificar (4.35) para garantir que a condição de setor é válida. Considerando $\mathbb{Z} = \mathbb{K}U$, $S = GU$, e $\tilde{\mathbb{P}} = U^T \mathbb{P} U$ em (4.35), tem-se:

$$\begin{bmatrix} U^T \mathbb{P} U & U^T \mathbb{K}_{(\ell)}^T - U^T G_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.42)$$

Definindo $U^T = F^{-1}$, e aplicando a transformação de congruência que consiste em pré- e pós-multiplicar (4.42) por Λ_7 e Λ_7^T em que

$$\Lambda_7 = \text{diag}(F, I),$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{K}_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T \\ \star & u_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.43)$$

Aplicando complemento de Schur tem-se

$$\mathbb{P} - (\mathbb{K}_{(i)}^T - G_{(i)}^T) \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \succeq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.44)$$

Pré- e pós-multiplicando respectivamente a equação (4.44) pelo vetor de estados \tilde{x}_k^T e \tilde{x}_k , tem-se

$$\tilde{x}_k^T \mathbb{P} \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T (\mathbb{K}_{(\ell)}^T - G_{(\ell)}^T) \frac{1}{u_{0(\ell)}^2} (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \tilde{x}_k \geq 0, \quad \forall \ell \in [1, m]. \quad (4.45)$$

Portanto, verificando a LMI (4.35), garante-se que qualquer trajetória em malha fechada que começa em $\mathcal{E}(\mathbb{P}, 1)$ permanece em \mathbb{S} . ■

O Teorema 4.2 depende de ε que tem de ser buscado à parte para que as condições sejam de fato LMIs. Caso contrário, tem-se BMIs (do inglês Bilinear Matrix Inequality). Isso é, portanto, uma desvantagem desta formulação em relação à anterior. Verifica-se, no entanto, que uma busca em ε pode levar a uma melhora considerável na estimação da região de atração em relação ao obtido pelo uso do Teorema 4.1, conforme ilustrado pelos exemplos. Além disso, observa-se que as condições do Teorema 4.1 podem ser recuperadas a partir das condições do Teorema 4.2, fazendo-se $\varepsilon = 0$ e operações de mudança de linha e coluna.

4.4.1 Procedimento de Otimização

Um procedimento de otimização pode ser associado ao Teorema 4.2, que trata apenas do problema de factibilidade, para maximizar \mathbb{S} . Para isso, propõe-se o seguinte procedimento de otimização.

$$J_5 = \begin{cases} \min & \text{traço}(H) \\ & (4.34), (4.35), \text{ e} \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} H & I \\ \star & -\tilde{\mathbb{P}} + U + U^T \end{bmatrix} \succeq 0, \end{cases} \quad (4.46)$$

Observe que, se (4.46) é factível, então tem-se $U^T \tilde{\mathbb{P}} U \succeq -\tilde{\mathbb{P}} + U^T + U$ que é usado para substituir o bloco (2,2) de (4.46). Usando o fato que $\mathbb{P} = U^{-T} \tilde{\mathbb{P}} U^{-1}$ e aplicando complemento de Schur, obtém-se $H \succeq U^{-T} \tilde{\mathbb{P}} U^{-1}$. Assim, tem-se que $H \succeq \tilde{\mathbb{P}}$ e então a minimização de $\text{traço}(H)$ leva a minimização de $\text{traço}(\tilde{\mathbb{P}})$.

Observação 4.2. Assim como para a condição anterior, para encontrar a matriz de ganho estático \mathbb{K} e U adequados, é necessário impor as mesmas estruturas propostas para o Teorema 4.1.

4.4.2 Estruturas de $\tilde{\mathbb{P}}$

Uma das desvantagens das abordagens propostas por (De Souza, 2017) e (Silva, 2016) é o custo computacional das condições LMI, uma vez que o número de variáveis de decisão e o número de linhas LMI crescem rapidamente com o aumento do valor do atraso máximo. Isso se deve, basicamente, ao fato de se considerar todos os produtos possíveis entre os estados atrasados: $x_{k-(i-1)}^T \tilde{\mathbb{P}}_{ij} x_{k-(j-1)}$, i e $j \in [1, \bar{d} + 1]$. Por outro lado, as condições Lyapunov-Krasovskii estudadas no Capítulo 3 consideram apenas algumas iterações entre os estados atrasados, resultando em condições LMI que demandam um esforço computacional bem menor para serem resolvidas. Estes fatos servem de motivação para buscar a imposição de restrições estruturais na matriz $\tilde{\mathbb{P}}$ usada no Teorema 4.2, de forma a reduzir a complexidade computacional das condições propostas. É esperado que a redução dessa complexidade resulte em aumento de conservadorismo, levando a estimativas menores da região de atração. Por essa razão, são investigadas algumas estruturas para verificar o impacto dessas estruturas nessas duas características (complexidade numérica e conservadorismo da região estimada).

Note que essas estruturas não são impostas nas condições do Teorema 4.1, pois ao recuperar a matriz $\mathbb{P} = \mathbb{W}^{-1}$ a estrutura é perdida, fazendo com que as propostas de iterações entre os estados não seja direta.

Assim, são impostas estruturas apenas para a matriz \mathbb{P} do Teorema 4.2. Por exemplo, foram selecionadas a investigação de 5 estruturas como mostrada a seguir, em que P é simétrica.

Estrutura I: Corresponde a uma função de Lyapunov-Krasovskii dada por

$$\sum_{i=-1}^{-(\bar{d}+1)} x_i^T P_{-i,-i} x_i.$$

Nessa estrutura o estado atrasado x_i não é correlacionado com o valor do estado em outros instantes. Para $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ tem-se:

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Estrutura II: Corresponde a um função de Lyapunov-Krasovskii dada por

$$\sum_{i=-1}^{-(\bar{d}+1)} x_i^T P_{-i,-i} x_i + \sum_{i=-1}^{-\bar{d}} x_i^T S_{-i,-(i+1)} x_{i+1}.$$

Essa estrutura é, portanto, mais geral que a anterior. Para $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ tem-se:

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} P_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ \star & P_2 & S_2 & 0 & 0 \\ \star & \star & P_3 & S_3 & 0 \\ \star & \star & \star & P_4 & S_4 \\ \star & \star & \star & \star & P_5 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Estrutura III: Corresponde a um função de Lyapunov-Krasovskii dada por

$$\sum_{i=-1}^{-(\bar{d}+1)} x_i^T P_{-i,-i} x_i + \sum_{i=-1}^{-\bar{d}} x_i^T S_{-i,-(i+1)} x_{i+1} + \sum_{i=-1}^{-(\bar{d}-1)} x_i^T S_{-i,-(i+2)} x_{i+2}.$$

Para $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ tem-se:

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} P_1 & S_1 & S_5 & 0 & 0 \\ \star & P_2 & S_2 & S_6 & 0 \\ \star & \star & P_3 & S_3 & S_7 \\ \star & \star & \star & P_4 & S_4 \\ \star & \star & \star & \star & P_5 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Estrutura IV: Corresponde a um função de Lyapunov-Krasovskii dada por

$$\sum_{i=-1}^{-(\bar{d}+1)} x_i^T P_{-i,-i} x_i + \sum_{i=-2}^{-(\bar{d}+1)} x_1^T S_{-1,-i} x_i.$$

Para $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ tem-se:

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} P_1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \star & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & P_3 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & P_4 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & P_5 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Estrutura V: Corresponde a um função de Lyapunov-Krasovskii sem restrições, apenas dada por matrizes P , que como já mencionada, P é simétrica. Para $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ tem-se:

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} \\ \star & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} \\ \star & \star & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ \star & \star & \star & P_{44} & P_{45} \\ \star & \star & \star & \star & P_{45} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

4.4.3 Exemplos Numérico

Exemplo 1:

Considere o sistema discreto no tempo (4.4) com matrizes conhecidas dadas por (4.30) mostradas no exemplo da condição anterior e sujeito as mesmas condições previamente mencionadas. O atraso é constante $\underline{d} = \bar{d} = 5$, e a entrada saturante é limitada em $\bar{u} = 15$. O objetivo é projetar a lei de controle saturante (4.9) tal que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condições iniciais. Foram utilizados $\varepsilon = 0.1$, (esse valor foi escolhido através de testes que levassem a uma solução factível com um maior valor para o raio) e o procedimento de otimização J_5 . Como mencionado anteriormente, o Teorema 4.2 pode ser usado para estimar o conjunto de condições iniciais como uma bola de raio r no espaço \mathbb{R}^2 , isto é, todos os estados $x_j, j \in [0, -\bar{d}]$ possuem $\|x_j\| \leq r$. Para o Teorema 4.2, os raios r encontrados para as diferentes estruturas são mostrados na Figura 4.1.

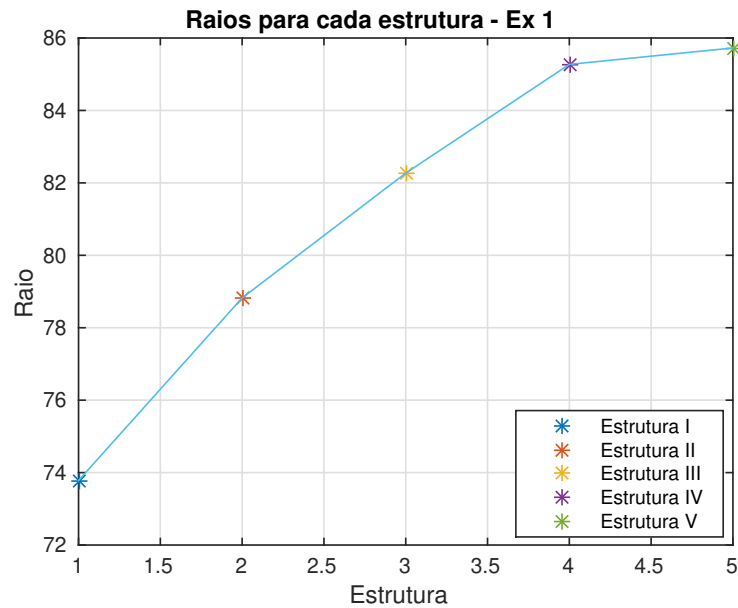


Figura 4.1: Raios para Cada Estrutura - Exemplo 1.

Como pode ser visto na Figura 4.1, o maior raio obtido é para estrutura sem restrições para a matriz \mathbb{P} (estrutura V), mas que, em contrapartida, tem um maior número de variáveis de decisão como mostrado na seção a seguir, o que gera um maior custo computacional. Assim, se é desejado diminuir o custo computacional é indicado que se imponha estrutura para a matriz \mathbb{P} , mas sabendo que isso gerará estimativas de regiões de atração menores. Nesse caso por exemplo, o aumento do valor do maior raio obtido (estrutura V) em relação ao menor raio obtido (estrutura I) foi de aproximadamente 16%.

Exemplo 2: Considere o sistema variante no tempo (4.4) com dois vértices dados por (4.31) e (4.32) mostradas no exemplo da condição anterior e sujeito as mesmas condições

previamente mencionadas. O atraso é $d_k \in [2,4]$, e o sinal de controle saturado é $\bar{u} = 10$. Foi usado o procedimento de otimização J_5 , e $\varepsilon = 0.1$ (esse valor foi escolhido através de testes que levassem a uma solução factível com um maior valor para o raio). Para o Teorema 4.2, os raios r encontrados para as diferentes estruturas são mostrados na Figura 4.2.

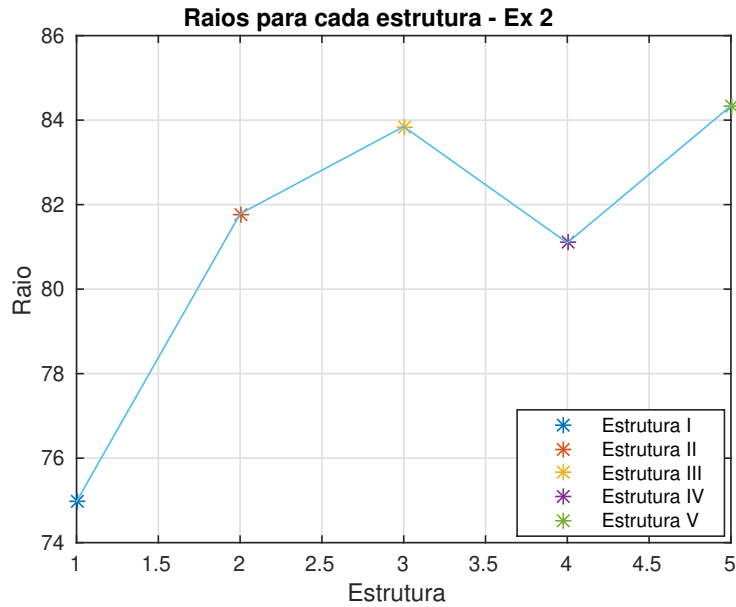


Figura 4.2: Raios para Cada Estrutura - Exemplo 2.

Como pode ser visto na Figura 4.2, o maior raio obtido é para estrutura sem restrições para a matriz \mathbb{P} (estrutura V), mas que, em contrapartida, tem um maior número de variáveis de decisão como mostrado na seção a seguir, o que gera um maior custo computacional. Assim, se é desejado diminuir o custo computacional é indicado que se imponha estrutura para a matriz \mathbb{P} mas sabendo que isso gerará estimativas de regiões de atração menores. Nesse caso por exemplo, o aumento do valor do maior raio obtido (estrutura V) em relação ao menor raio obtido (estrutura I) foi de aproximadamente 12%. Deve-se salientar também que, para a estrutura IV foi obtido um raio menor do que para a estrutura III, fato que pode ser explicado devido ao número de variáveis de decisão da estrutura IV ser menor do que o da estrutura III o que é mostrada na próxima seção. Outra hipótese é a forma como cada estrutura se relaciona com a função de Lyapunov-Krasovskii equivalente, por exemplo a estrutura IV relaciona o estado atual com estados passados diferentes da estrutura III.

Vale lembrar, que para o Teorema 4.2 há a desvantagem do ajuste do parâmetro ε oriundo da aplicação do Lema de Finsler.

4.5 Complexidade das LMIs

Um ponto muito importante a ser analisado é a complexidade das LMIs, pois isso influencia na eficiência da condição. Como por exemplo, podem ser analisados a dimensão das LMIs, e o número de variáveis de decisão. Quanto menores esses números, menos complexa é a condição, e conseqüentemente menos conservadora.

Na Tabela 4.1 são mostradas as fórmulas gerais para o cálculo das dimensões de cada LMI, e nas Tabelas 4.2 e 4.3 são mostradas essas dimensões para os Exemplos 1 e 2 respectivamente. Para todas as tabelas, as condições de Lyapunov-Krasovskii usadas são as correspondentes aos Teoremas 3.1 e 3.3 e as do sistema aumentado correspondentes aos Teoremas 4.2 e 4.1. Considerando $\bar{n} = n(\bar{d} + 1)$, em que $n = 2$ é a ordem do sistema, $m = 1$ é o número de entradas, $N = 2$ é o número de vértices e $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ para o Exemplo 1, e $\underline{d} = \bar{d} = 5$ para o Exemplo 2, a complexidade numérica das LMIs é mostrada nas tabelas a seguir.

Tabela 4.1: Dimensões das LMIs - Geral

	Lyapunov-Krasovskii	Sistema Aumentado
Finsler (LMIs)	(3.44): $(5n + m) \times (5n + m)$	(4.34): $(2\bar{n} + m) \times (2\bar{n} + m)$
	(3.45): $(4n + 1) \times (4n + 1)$	(4.35): $(\bar{n} + m) \times (\bar{n} + m)$
	(3.57): $(2n) \times (2n)$	(4.46): $(2\bar{n}) \times (2\bar{n})$
Direta (LMIs)	(3.77): $(5n + m) \times (5n + m)$	(4.15): $(2\bar{n} + m) \times (2\bar{n} + m)$
	(3.78): $(4n + 1) \times (4n + 1)$	(4.16): $(\bar{n} + m) \times (\bar{n} + m)$
	(3.85): $(2n) \times (2n)$	(4.28): $(2\bar{n}) \times (2\bar{n})$

Tabela 4.2: Dimensões das LMIs - Exemplo 1

	Lyapunov-Krasovskii	Sistema Aumentado
Finsler (LMIs)	(3.44): 11×11	(4.34): 25×25
	(3.45): 9×9	(4.35): 13×13
	(3.57): 4×4	(4.46): 24×24
Direta (LMIs)	(3.77): 11×11	(4.15): 25×25
	(3.78): 9×9	(4.16): 13×13
	(3.85): 4×4	(4.28): 24×24

Tabela 4.3: Dimensões das LMIs - Exemplo 2

	Lyapunov-Krasovskii	Sistema Aumentado
Finsler (LMIs)	(3.44): 11×11	(4.34): 21×21
	(3.45): 9×9	(4.35): 11×11
	(3.57): 4×4	(4.46): 20×20
Direta (LMIs)	(3.77): 11×11	(4.15): 21×21
	(3.78): 9×9	(4.16): 11×11
	(3.85): 4×4	(4.28): 20×20

Analisando as Tabelas 4.2 e 4.3, percebe-se que, para o caso utilizando sistema aumentado, quanto maior o valor do atraso máximo, maior a dimensão da LMI e consequentemente maior a sua complexidade numérica ($\bar{d} = 5$ para o Exemplo 1 e $\bar{d} = 4$ para o Exemplo 2).

O número de variáveis de decisão é um ponto fundamental para análise da complexidade numérica de LMIs. Esse valor é calculado como mostrado a seguir.

Dada um matriz L , o número de variáveis escalares a serem determinadas é dado por nm , n^2 , e $\frac{n(n+1)}{2}$ se L está no espaço $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbb{R}^{n \times m}$ com a restrição adicional de ser simétrica, respectivamente.

Os números de variáveis de decisão para cada caso e diferentes estruturas de \mathbb{P} , são mostrados nas Tabelas 4.4 e 4.5, para os Exemplos 1 e 2 respectivamente, em que os atrasos mínimo e máximo são $\underline{d} = \bar{d} = 5$ para o primeiro caso, e $\underline{d} = 2$ e $\bar{d} = 4$ para o segundo.

Tabela 4.4: Número de Variáveis de Decisão - Exemplo 1.

	Lyapunov-Krasovskii	Sistema Aumentado
Teoremas 3.1 e 4.2	33	252
Teoremas 3.3 e 4.1	29	Estrutura I: 192 Estrutura II: 212 Estrutura III: 228 Estrutura IV: 212 Estrutura V: 252

Tabela 4.5: Número de Variáveis de Decisão - Exemplo 2.

	Lyapunov-Krasovskii	Sistema Aumentado
Teoremas 3.1 e 4.2	33	191
Teoremas 3.3 e 4.1	29	Estrutura I: 151 Estrutura II: 167 Estrutura III: 179 Estrutura IV: 167 Estrutura V: 191

Como pode ser visto nas Tabelas 4.4 e 4.5, o número de variáveis de decisão é muito maior na abordagem por sistema aumentado do que na abordagem por Lyapunov-Krasovskii, o que justifica um maior custo computacional do primeiro. Além disso, percebe-se que o número de variáveis de decisão também aumenta com o aumento do valor do atraso máximo. Verifica-se também, que pode-se reduzir o custo computacional impondo estruturas para a matriz $\tilde{\mathbb{P}}$, mas que essas restrições diminuem o raio da estimativa da região de atração. A Tabela 4.6 mostra o melhor (estrutura V) e o pior (estrutura I) caso das estruturas impostas para a matriz $\tilde{\mathbb{P}}$ para os dois exemplos testados.

Tabela 4.6: Comparação da Complexidade das LMIs.

Exemplo	Estrutura	Raio	Nº Variáveis de Decisão
Exemplo 1	Estrutura I	73.782	192
	Estrutura V	85.725	252
Exemplo 2	Estrutura I	74.974	151
	Estrutura V	84.337	191

Pela Tabela 4.6, percebe-se que para o Exemplo 1, um aumento de 31% no número de variáveis de decisão resulta em um aumento de 16% no valor do raio da região estimada, e para o Exemplo 2 um aumento de 26% no número de variáveis de decisão resulta em um aumento de 12% no valor do raio da região estimada. Cabe então ao projetista, a decisão de escolha baseada em cada aplicação específica.

4.6 Considerações Finais

Neste capítulo, foi abordada a representação de sistemas com atraso através de um sistema aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso. Além de apresentar a abordagem já presente na literatura (Teorema 4.1), foi proposta uma nova abordagem, o Teorema 4.2, em que é possível impor restrições à matriz \mathbb{P} de modo a reduzir o número de variáveis de decisão, e conseqüentemente a complexidade numérica de modo a gerar um menor custo computacional. Essa imposição aumenta o conservadorismo gerando

estimativas de regiões de atração menores. Por isso, a escolha de qual condição usar depende da necessidade de cada aplicação. Além disso, verificou-se também que quanto maior o valor do atraso máximo, maior a complexidade numérica das LMis.

A fim de comparar as duas condições apresentadas neste capítulo, com as outras três desenvolvidas no capítulo anterior, os resultados obtidos pelos Teoremas 3.1, 3.2, 3.3, 4.1 e 4.2 são mostrados nas Tabelas 4.7 e 4.8 para os exemplos 1 e 2 respectivamente. Para o primeiro exemplo, os resultados obtidos neste trabalho são comparados com outros já existentes na literatura.

Tabela 4.7: Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 1.

Teorema	Raio
Teorema 4.1	$r = 89.039$
Teorema 4.2 (estrutura V)	$r = 85.725$
Teorema 3.1	$r = 74.558$
Teorema 3.2	$r = 76.268$
Teorema 3.3	$r = 76.275$
(Chen <i>et al.</i> , 2019)	$r = 72.596$
(Zhang <i>et al.</i> , 2011)	$r = 73.693$
(Xu <i>et al.</i> , 2012)	$r = 63.029$
(Chen <i>et al.</i> , 2014)	$r = 68.491$

Tabela 4.8: Raio da Região de Atração - Comparação Exemplo 2.

Teorema	Raio
Teorema 4.1	$r = 83.908$
Teorema 4.2 (estrutura V)	$r = 84.337$
Teorema 3.1	$r = 55.470$
Teorema 3.2	$r = 47.599$
Teorema 3.3	$r = 49.093$

Pode-se observar que o valor do raio, e consequentemente o tamanho da estimativa da região de atração, para a abordagem usando sistema aumentado apresentada neste capítulo é maior do que a abordagem usando uma função de Lyapunov-Krasovskii mostrada no capítulo anterior. Entretanto a complexidade numérica e consequentemente o custo computacional para essas condições são bem maiores do que para as condições do Capítulo 3.

Conclusões

5.1 Considerações Finais

Neste trabalho foram propostas condições de síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e entradas saturantes. A saturação do atuador foi representada em termos de uma não-linearidade do tipo zona-morta, com a consequente aplicação da condição generalizada de setor. Devido a saturação foi necessário estimar uma região de atração dentro da qual todas as trajetórias iniciadas em seu interior permaneçam nessa região e convirjam para a origem. Assim, foram determinadas condições para síntese de controladores do tipo realimentação de estados, que garantiram para um conjunto de condições iniciais admissíveis, a estabilidade assintótica de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores.

Para isso, foram propostas duas abordagens: a primeira utilizando uma função de Lyapunov-Krasovskii adequada que trata os estados atrasados e a segunda reescrevendo o sistema com atraso como um sistema incerto aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso.

Para a abordagem usando uma função de Lyapunov-Krasovskii foram propostas três condições: a primeira, usando o Lema de Finsler, e as outras duas sem utilizá-lo, sendo uma acrescentando variável de folga e a última sem acréscimo de variáveis de folga. Uma vantagem dessa última abordagem, é que não são perdidos graus de liberdade ao obter a condição de síntese em relação às condições de análise, isso porque não são anuladas nenhuma das variáveis. Por isso, a última abordagem mostrou-se como a principal contribuição deste trabalho devido a ausência de ajuste de parâmetros, e para esse resultado, foi escrito um artigo que será submetido a um periódico internacional. Entretanto, a escolha de qual condição usar, depende de cada caso específico, sendo que cada uma é melhor

para uma determinada situação.

Dessa forma, para a abordagem por função de Lyapunov-Krasovskii, as principais contribuições deste trabalho foram três. A primeira foi propor uma desigualdade de somatórios responsável por atrasos variáveis no tempo em que foi fornecido um método para deduzir uma condição de estabilização menos conservadora. A segunda foi propor uma nova caracterização do conjunto admissível de sequências iniciais que consiste na definição de três conjuntos, produzindo sequências iniciais com maior norma do que abordagens semelhantes na literatura. E por último foi verificado que a inclusão na composição do sinal extra da condição generalizada de setor, pode aumentar o tamanho da estimativa da região de atração.

Foram também apresentadas duas condições em que o sistema com atraso foi representado por um sistema aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso: a primeira foi uma abordagem já presente na literatura, e a segunda foi proposta uma condição utilizando o Lema de Finsler. Uma desvantagem da abordagem por sistema aumentado é o custo computacional das condições LMI, uma vez que o número de variáveis de decisão e o número de linhas LMI crescem rapidamente com o aumento do valor do atraso máximo. Por outro lado, as condições Lyapunov-Krasovskii estudadas no Capítulo 3 consideram apenas algumas iterações entre os estados atrasados, resultando em condições LMI que demandam um esforço computacional bem menor para serem resolvidas. Devido a esse fato, foram impostas restrições estruturais na matriz $\tilde{\mathbb{P}}$ usada no sistema aumentado, de forma a reduzir a complexidade computacional das condições propostas. A redução dessa complexidade resulta em aumento de conservadorismo, levando a estimativas menores da região de atração. Por isso, foram investigadas algumas estruturas para verificar o impacto dessas estruturas nessas duas características (complexidade numérica e conservadorismo da região estimada).

Assim, a principal contribuição para a abordagem usando sistema aumentado, foi propor estruturas para a matriz $\tilde{\mathbb{P}}$, de modo a reduzir o número de variáveis de decisão, e, conseqüentemente, o custo computacional para executá-la.

Por fim, para todas as condições, foram apresentados exemplos numéricos demonstrando a eficiência dos métodos propostos e comparando com outros existentes na literatura.

Dessa forma, concluiu-se que a abordagem usando uma função de Lyapunov-Krasovskii resulta em estimativas de regiões de atração menores do que as usando sistema aumen-

tado, que em contrapartida necessita de um custo computacional maior que a primeira. Além disso, as abordagens que utilizam o Lema de Finsler tem a desvantagem de ter a necessidade de ajustar parâmetros. Por essas razões, cabe então ao projetista, decidir qual a melhor abordagem para resolver cada caso especificamente.

5.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros sugere-se a investigação do uso de funções Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros, especialmente nas condições desenvolvidas no Capítulo 2. Além disso, é natural investigar os desdobramentos das condições aqui investigadas para tratar a minimização do ganho ℓ_2 ou outros critérios de desempenho.

Além disso, avaliar o comportamento das condições de estabilização obtidas nos capítulos 3 e 4 nos casos de síntese de controladores por realimentação (estática ou dinâmica) de saída bem como o projeto de filtros robustos para sistemas com atrasos (veja por exemplo (Lacerda, 2014)).

No caso de sistemas variantes no tempo, pode-se investigar também as aplicações das abordagens aqui investigadas em sistemas do tipo (*quasi-*)LPV, o que inclui, portanto, os sistema fuzzy do tipo Takagi-Sugeno.

Finalmente, um elemento fundamental na abordagem é a utilização da condição de setor, levando a uma caracterização da região de atração a partir de elipsóides. Assim, pode-se investigar: a possibilidade da caracterização dessa região por outros entes geométricos menos conservadores, a representação das bordas dessa estimativa de região utilizando-se de polinômios de ordem par maior que 2, ou se novas caracterizações das estimativas por formulações mais gerais tenderiam a resultar em condições de síntese menos conservadoras.

Apêndice A

Ferramentas Matemáticas

Neste apêndice são apresentadas algumas ferramentas matemáticas utilizadas na demonstração de estabilidade dos controladores propostos nos capítulos 3 e 4, como Lema de Finsler e Complemento de Schur.

A.1 Lema de Finsler

O Lema de Finsler é utilizado na demonstração de estabilidade dos controladores robustos, para transformar as funções de energia nas LMIs apresentadas nas seções 3.2 e 4.4 e é definido como mostrado a seguir.

Lema A.1. Lema de Finsler: *Considere $\varphi \in \mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M}(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{rank}(\mathcal{G}(\alpha)) < n$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i $\varphi^T \mathcal{M} \varphi < 0, \forall \varphi : \mathcal{G}(\alpha) \varphi = 0, \varphi \neq 0$

ii $\mathcal{G}(\alpha)^{\perp T} \mathcal{M}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha)^{\perp}$

iii $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{M}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{G}(\alpha)^T \mathcal{G}(\alpha) < 0$

iv $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{M}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{G}(\alpha) + \mathcal{G}(\alpha)^T \mathcal{X}(\alpha)^T < 0$

A.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur é uma relação entre submatrizes contidas em uma matriz. Seja Q e R matrizes simétricas, então a condição

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0 \tag{A.1}$$

é equivalente a

$$R \geq 0, \quad Q - S^T R^{-1} S \geq 0.$$

Assim, o complemento de Schur da submatriz R corresponde à seguinte expressão:

$$Q - S^T R^{-1} S \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

A.3 Procedimento S

O Procedimento S é um resultado matemático que dá condições sob as quais uma desigualdade quadrática particular é uma consequência de outra desigualdade quadrática. Ele tem aplicações na teoria de controle, álgebra linear e otimização matemática. O Procedimento S é mostrado no lema a seguir.

Lema A.2. *Sejam F_0, \dots, F_p funções quadráticas dependentes da variável $\zeta \in \mathbb{R}^n$:*

$$F_i(\zeta) \triangleq \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i, \quad i = 0, \dots, p,$$

em que $T_i = T_i^T$. Considerando a seguinte condição para F_0, \dots, F_p :

$$F_0(\zeta) \geq 0 \quad \forall \zeta \mid F_i(\zeta) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.3})$$

Obviamente se existe $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tal que

$$\forall \zeta, F_0(\zeta) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(\zeta) \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

então (A.3) é verificada. Não é trivial o fato que quando $p = 1$, o contrário vale desde que haja algum ζ_0 tal que $F_1(\zeta_0) > 0$.

Referências

- Chen, C. T. 1999. *Linear system theory and design*. 3rd edn. Oxford University Press.
- Chen, Y., Fei, S., & Zhang, K. 2014. Stabilisation for switched linear systems with time-varying delay and input saturation. *International journal of systems science*, **45**(3), 532–546.
- Chen, Y., Wang, Z., Fei, S., & Han, Q-L. 2019. Regional stabilization for discrete time-delay systems with actuator saturations via a delay-dependent polytopic approach. *Ieee transactions on automatic control*, **64**(3), 1257–1264.
- Corso, J. 2009. *Sobre o controle para uma classe de sistemas não lineares com atuadores saturantes*. Ph.D. thesis, UFSC.
- De Souza, C. 2017. *Robustez na estabilidade entrada-estado de sistemas discreto no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores*. M.Phil. thesis, CEFET-MG.
- De Souza, C., Leite, V. J. S., Silva, L. F. P., & Castelan, E. B. 2018. ISS robust stabilization of state-delayed discrete-time systems with bounded delay variation and saturating actuators. *Ieee transactions on automatic control*.
- Fridman, E. 2014. *Introduction to time-delay systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser.
- Ghiggi, I. M. F. 2008. *Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes*. Ph.D. thesis, UFRGS.
- Gomes da Silva Jr., J. M., & Tarbouriech, S. 2005. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *Ieee transactions on automatic control*, **50**(1), 106–111.
- Gu, K., Kharitonov, V. L., & Chen, J. 2003. Stability of time-delay systems. *In: Control engineering*.

-
- Hetel, L., Daafouz, J., & C.Iung. 2008. Equivalence between the lyapunov-krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear analysis: Hybrid systems*, **2**(3), 697–705.
- Jensen, J. W. 1905. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, **30**, 175–193.
- Lacerda, M. J. 2014. *Contribuições ao problema de filtragem h-infinito para sistemas dinâmicos*. Ph.D. thesis, UNICAMP.
- Lee, S. Y., Park, J., & Park, P. 2019. Bessel summation inequalities for stability analysis of discrete-time systems with time-varying delays. *International journal of robust and nonlinear control*, **29**(2), 473–491.
- Liu, X., Wang, F., & Tang, M. 2017. Auxiliary function-based summation inequalities and their applications to discrete-time systems. *Automatica*, **78**, 211–215.
- Lopes, A. N. D. 2017. *Seguimento de referência em controle de sistemas não lineares sob restrições via modelagem takagi-sugeno*. M.Phil. thesis, CEFET-MG.
- Lopes, A. N. D., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2018. On the integral action of discrete-time fuzzy ts control under saturated actuator. *Pages 1–8 of: 2018 ieee international conference on fuzzy systems (fuzzieee)*.
- Nam, P., Pathirana, P., & Trinh, H. 2015. Discrete wirtinger-based inequality and its application. *International journal of the franklin institute*, **352**, 1893–1905.
- Pal, V. C., & Negi, R. 2018. Delay-dependent stability criterion for uncertain discrete time systems in presence of actuator saturation. *Transactions of the institute of measurement and control*, **40**(6), 1873–1891.
- Park, P. G., Ko, J. W., & Jeong, C. 2011. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. *Automatica*, **47**.
- Seuret, A., & Gouaisbaut, F. 2014. Integral inequality for time-varying delay systems. *European control conference france*.
- Seuret, A., Gouaisbaut, F., & Fridman, E. 2015. Stability of discrete-time systems with time-varying delays via a novel summation inequality. *Ieee transactions on automatic control*, **60**(10), 2740–2745.
- Seuret, A., Gouaisbaut, F., & Liu, K. 2016. Discretized Jensen inequality: an alternative vision of the reciprocally convex combination lemma. *Ifac papersonline*.

-
- Silva, J. V. V. 2016. *Caracterização de sistemas discretos no tempo com saturação de atuadores e atraso nos estados*. M.Phil. thesis, CEFET-MG.
- Silva, J. V. V., Silva, L. F. P., Rubio Scola, I., & Leite, V. J. S. 2018a. Robust local stabilization of discrete-time systems with time-varying state delay and saturating actuators. *Mathematical problems in engineering*, **2018**, 1–9. Article ID 5013056.
- Silva, L. F. P., Leite, V. J. S., Castelan, E. B., & Feng, G. 2018b. Delay dependent local stabilization conditions for time-delay nonlinear discrete-time systems using takagi-sugeno models. *International journal of control, automation and systems*, **16**, 1435–1447.
- Souza, L. C. A., & Palhares, R. M. 2008. Estimação de parâmetros em sistemas lineares variantes no tempo. *Cba*.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M., & Queinnec, I. 2011. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
- Vidyasagar, M. 1993. *Nonlinear system analysis*. 2rd edn. Prentice Hall.
- Wei, Y., Zheng, W. X., & Xu, S. 2015. Robust output feedback control of uncertain time-delay systems with actuator saturation and disturbances. *Journal of the franklin institute*, **352**(5), 2229–2248.
- Xiao, S., Xu, L., Zeng, H.-B., & Teo, K. L. 2018. Improved stability criteria for discrete-time delay systems via novel summation inequalities. *International journal of control, automation and systems*, **16**, 1592–1602.
- Xu, S., Feng, G., Zou, Y., & Huang, J. 2012. Robust controller design of uncertain discrete time-delay systems with input saturation and disturbances. *Ieee transactions on automatic control*, **57**(10), 2604–2609.
- Zhang, X., Zhao, J., & Dimirovski, G. M. 2011. l_2 -gain analysis and control synthesis of uncertain discrete-time switched linear systems with time delay and actuator saturation. *International journal of control*, **84**(10), 1746–1758.