CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MÉTODO DE MOMENTOS E ALGORITMO ELIPSOIDAL APLICADOS NO CÁLCULO E OTIMIZAÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS GERADOS POR LINHAS DE TRANSMISSÃO

Isabella Abrão Marques Duane

Belo Horizonte
2022

MÉTODO DE MOMENTOS E ALGORITMO ELIPSOIDAL APLICADOS NO CÁLCULO E OTIMIZAÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS GERADOS POR LINHAS DE TRANSMISSÃO

Isabella Abrão Marques Duane

Texto da Dissertação de Mestrado submetido à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Elétricos

Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Márcio Matias Afonso

Belo Horizonte

2022

Duane, Isabella Abrão Marques
D812m Método de momentos e algoritmo elipsoidal aplicados no cálculo e otimização de campos eletromagnéticos gerados por linhas de transmissão / Isabella Abrão Marques Duane. – 2022.
62 f.: il., gráfs, tabs.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG.
Orientador: Márcio Matias Afonso.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Linhas elétricas aéreas – Teses. 2. Campos eletromagnéticos – Teses. 3. Método dos momentos (Engenharia elétrica) – Teses. 4. Algoritmos – Teses. 5. Otimização matemática – Teses. 6. Métodos de elementos de contorno – Teses. I. Afonso, Márcio Matias. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de São João del-Rei. IV. Título.

CDD 621.31922

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

(folha de aprovação a ser anexada)

Dedico esta obra

aos meus pais, ao meu irmão, e à Kamila Cristina,

minhas maiores riquezas, e principais fontes de inspiração e de vida

ao longo dessa jornada.

Agradecimentos

Um agradecimento especial ao meu orientador, Márcio Matias, pela mentoria, incentivo e paciência ao longo deste trabalho e de tantos outros.

Grandes agradecimentos também aos pesquisadores André Luiz Paganotti, Marco Aurélio Schroeder e Rodney Saldanha, pelas contribuições nos trabalhos desenvolvidos.

E não menos importante, agradeço aos demais pesquisadores do programa, com quem tanto aprendi, em particular aos professores Rafael Alípio, Eduardo Nunes, Úrsula Resende e Eduardo Coppoli.

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem numérica para o cálculo e a otimização dos campos eletromagnéticos gerados por linhas de transmissão aéreas, através do Método de Momentos e do Algoritmo Elipsoidal. O Método de Momentos é baseado em uma formulação integral, e permite que o problema aberto ilimitado seja inteiramente definido na sua fronteira, o que diminui a quantidade de variáveis em comparação com outros métodos. A metodologia proposta foca em uma perspectiva dual para o cálculo de ambos os campos elétricos e magnéticos, e pode ser utilizada para encontrar os gradientes de potencial tanto na superfície dos condutores, quanto em qualquer ponto de interesse no espaço. O trabalho propõe também a análise da influência dos cabos de guarda, de diferentes funções de interpolação e quantidades de elementos de contorno nas distribuições de campo resultantes. Por fim, o método de momentos é acoplado ao método elipsoidal de otimização, com objetivo de minimizar a intensidade dos campos eletromagnéticos avaliados ao nível do solo. Múltiplas restrições de projeto e segurança relacionadas ao projeto original são consideradas no processo de otimização, e as novas posições dos feixes incorrem em perfis reduzidos de campos elétricos e magnéticos ao nível do solo, sem ultrapassar os limites de campo superficial crítico impostos. Os resultados obtidos no trabalho indicam que a metodologia apresentada é robusta e pode ser utilizada no projeto e na otimização de linhas aéreas de transmissão.

Palavras-chave: linhas de transmissão aéreas, campos eletromagnéticos estáticos, método de momentos, método elipsoidal, otimização, equação integral de fronteira.

Abstract

This work presents a numerical approach for computing and optimizing the electromagnetic fields generated by overhead power lines, by means of the Method of Moments and the Ellipsoidal Algorithm. The Method of Moments is based on an integral formulation and allows the unbounded problem to be entirely defined at its boundary, which reduces the number of variables in comparison with other methods. The proposed methodology focuses on a dual perspective for calculating both the electric and magnetic fields, and can be used to find the potential gradients not only at the surface of the conductors, but also at any point of interest in space. The work also proposes the analysis of the influence of grounding wires, and of different interpolation functions and boundary element quantities in the resultant field distributions. Lastly, the method of moments is coupled with the ellipsoidal method of optimization, with the goal of minimizing the electromagnetic field intensities at ground level. Multiple design and security constraints related to the original project of the line are considered in the optimization process, and the new bundle positions incur in reduced electric and magnetic field profiles at ground level, without surpassing the imposed critical field limits on the surface. The obtained results suggest the presented methodology is robust and can be applied on the design and optimization of overhead power lines.

Keywords: overhead power lines, static fields, method of moments, ellipsoidal algorithm, optimization, boundary integral equation.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Lista de Abreviações

LT - Linha de Transmissão

MoM - Método de Momentos (*Method of Moments*)

MIS - Método das Imagens Sucessivas

NPG - Número de Pontos de Gauss

NNOS - Número de Nós

NE - Número de Elementos

DT - Distância Tangente

Lista de Símbolos

A – Potencial Magnético [Ae]

B – Densidade de Fluxo Magnético [T]

H – Campo Magnético [A/m]

V – Potencial Elétrico [V]

D – Densidade de Fluxo Elétrico [C/m²]

E – Campo Elétrico [V/m]

J – Densidade de Corrente de Condução [A/m²]

ε – Permissividade Elétrica [F/m]

μ – Permeabilidade Magnética [H/m]

ρ – Densidade de Carga Elétrica [C/m²]

ω – Frequência Angular [rad/s]

U – Tensão fase-neutro [V]

α – Ângulo interno de canto [rad]

x, y, z – Coordenadas cartesianas reais

Ω – Domínio de Estudo

Γ – Fronteira do Domínio

Γ_u – Fronteira de Dirichlet

Γ_q – Fronteira de Neumann

ζ – Coordenada homogênea

G_0 – Função escalar de Green

n – Direção normal

t – Direção tangente

c_1, c_2 – Coeficientes da equação da matriz característica do elipsóide

c_3 – Coeficiente da equação do centro do elipsóide

m – Vetor subgradiente

x^* – Solução ótima

d – Quantidade de dimensões do problema de otimização

R_k – Distância euclidiana entre o ponto fonte e o ponto de Gauss

L_j – Comprimento do elemento de contorno

N – Função de forma

w – Função de ponderação

u – Função escalar arbitrária

q – Derivada normal de u

$\tilde{u}, \tilde{q}$ – Aproximações de u e q, respectivamente

u^* – Solução fundamental da equação

q^* – Derivada normal da solução fundamental

δ – Função Delta de Dirac

. – Operador produto escalar

$\times$ – Operador produto vetorial

∇ – Operador Nabla

∇^2, L – Operador Laplaciano

$|[Jcob]|$ – Determinante da matriz do Jacobiano

Sumário

1 Introdução

1.1 Contexto e Objetivos

As distribuições dos campos eletromagnéticos de linhas de transmissão (LTs) aéreas, que dependem preponderantemente dos parâmetros da própria linha, devem ser estimadas ainda na fase de projeto, sendo que a intensidade desses campos não deve exceder os valores máximos admissíveis por regulação (Melo *et al*., 1999; Olsen, 1992; EPRI, 1982; EPRI, 2005).

Além disso, as investigações relacionadas a projetos novos e otimizados de linhas existentes, com perdas minimizadas, e faixas de passagem reduzidas, também depende diretamente do cálculo, da análise, e da otimização das distribuições de campo (Duane *et al*., 2020, Melo *et al*., 1999).

Como o cálculo analítico desses campos deixa de ser trivial quando se considera, por exemplo, a geometria real dos cabos e a influência de outros objetos, como dutos metálicos presentes no corredor, é justificada a necessidade de se explorar soluções aproximadas por meio de métodos numéricos, as quais permitam considerações mais fiéis no cálculo das distribuições de campo.

O método de momentos baseia-se em formulações integrais. Tais métodos fornecem soluções precisas, e lidam facilmente com estruturas de maior complexidade geométrica, além de permitir o tratamento direto de problemas abertos (Brebbia, 1978; Afonso *et al*., 2003).

O método de momentos pode modelar com facilidade a região aberta ilimitada de ar que envolve a linha, e também permite que o problema seja inteiramente definido na sua fronteira, o que reduz significativamente o número de variáveis em comparação com outras formulações também robustas, como as de elementos finitos e de diferenças finitas, por exemplo, as quais não são capazes de tratar isoladamente problemas abertos, devendo estar associadas, obrigatoriamente, a uma condição

absorvente ou integral para delimitar o domínio computacional (Brebbia, 1978; Afonso *et al*., 2003; Adriaens *et al*., 1991; Farah *et al*., 2018).

Além disso, na busca por linhas melhoradas, faz-se necessário a utilização de alguma técnica de otimização. Na literatura especializada, podem ser encontradas diversas metodologias para otimização de LTs, dentre as quais pode-se destacar o método elipsoidal, aplicado em (Duane *et al*., 2020; Paganotti *et al*., 2016; Paganotti *et al*., 2015), com vistas a maximização da capacidade de transferência de potência das linhas, direta ou indiretamente. Ademais, o método elipsoidal de otimização é particularmente apropriado para tratar diretamente as diversas restrições não lineares de projeto e segurança da linha a serem consideradas.

A metodologia proposta foca em uma perspectiva dual para o cálculo de ambos os campos elétricos e magnéticos, e permite calcular os campos tanto na superfície dos condutores, quanto em qualquer ponto de interesse do espaço. São feitas análises de sensibilidade dos campos com relação à quantidade de elementos de contorno, com relação ao tipo de elemento de contorno, e com relação à ausência/presença dos dispositivos cabos de guarda.

Além disso, o método de momentos é acoplado ao método elipsoidal de otimização, para minimizar a intensidade dos campos eletromagnéticos ao nível do solo. Múltiplas restrições de projeto e segurança relacionadas ao projeto original são consideradas no processo de otimização, e as novas posições dos feixes incorrem em perfis reduzidos de campos elétricos e magnéticos ao nível do solo, sem ultrapassar os limites de campo superficial crítico impostos.

Nesse sentido, os objetivos gerais do trabalho são estudar a natureza dos campos eletromagnéticos estáticos de linhas de transmissão, e estudar o método integral de momentos e o método elipsoidal de otimização, a fim de determinar e otimizar computacionalmente tais campos. Os objetivos específicos são: i) explorar minuciosamente técnicas numéricas robustas e precisas para o tratamento de problemas de linhas de transmissão, em particular o método de momentos e o método elipsoidal de otimização; ii) explorar questões intrínsecas da formulação

integral, tais como singularidades numéricas e discretização através de diferentes elementos de contorno; iii) explorar questões intrínsecas da formulação do método elipsoidal, como o tratamento de restrições, e a definição da função objetivo escalar; iv) uma vez compreendidos os modelos e as técnicas numéricas, implementar ferramentas computacionais para análise e otimização de problemas reais de linhas, em domínios ilimitados.

1.2 Principais Contribuições

As contribuições deste trabalho resultaram nas seguintes publicações:

- Duane, I.A.M., Afonso, M.M., Paganotti, A.L., Schroeder, M.A.d.O, *Computation of the Electromagnetic Fields of Overhead Power Lines with Boundary Elements*, *IEEE 20th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation*.
- Duane, I.A.M., Afonso, M.M., Paganotti, A.L., Schroeder, M.A.d.O, Saldanha, R.R., *A New Strategy for Optimizing HSIL Transmission Lines*, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems 31*.
- Duane, I.A.M., Afonso, M.M., *Cálculo e otimização dos níveis de campo elétrico ao nível do solo gerados por linhas de transmissão aéreas*, XXIV Encontro Nacional de Modelagem Computacional.

1.3 Organização do Texto

O texto está organizado em seis capítulos. Neste primeiro capítulo, são apresentadas algumas considerações gerais sobre o tema investigado e sobre a estrutura do texto. No segundo capítulo, são apresentados os conceitos físicos e matemáticos necessários para a compreensão do texto, destacando-se a definição dos problemas elétrico e magnético, as condições constitutivas do meio, e a apresentação da equação de Laplace e das condições de contorno essenciais e naturais do problema.

O capítulo três se dedica ao desenvolvimento da formulação do método de momentos em duas dimensões. A formulação integral de contorno é obtida a partir da aplicação do método de resíduos ponderados, e com o auxílio do segundo teorema de Green e das propriedades da função delta de Dirac. Já o capítulo quatro apresenta a

formulação do problema de otimização, a função objetivo, as restrições, os métodos de otimização e os critérios de parada.

Os resultados alcançados são mostrados e analisados no capítulo cinco. Finalmente, no sexto capítulo, são apresentadas as principais conclusões deste trabalho.

2 Modelagem dos Campos Eletromagnéticos

2.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as considerações feitas e as equações utilizadas para descrever o comportamento espacial dos campos elétricos e dos campos magnéticos de linhas de transmissão aéreas.

Como tanto o problema magnético quanto o problema elétrico são reduzidos à um problema de potencial regido pela equação de Laplace, ao final, é possível obter uma formulação única do problema de valor de contorno, independentemente de sua natureza.

2.2 Equações de Maxwell e Relações Constitutivas

O conjunto das equações de Maxwell é capaz de descrever todo o fenômeno macroscópico do eletromagnetismo. Considerando-se os campos sob regime harmônico, as equações de Maxwell em forma diferencial podem ser dadas por:

(Lei de Faraday) $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \tag{2.1}$$

(Lei de Ampère-Maxwell) $$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \tag{2.2}$$

(Lei de Gauss elétrica) $$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_e \tag{2.3}$$

(Lei de Gauss magnética) $$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

Onde, nas equações anteriores, ω é a frequência angular, e a seta caracteriza uma entidade vetorial. Além disso: $\vec{E}$ representa o vetor campo elétrico (V/m); $\vec{B}$ representa o vetor densidade de fluxo magnético (Wb/m^2); $\vec{H}$ representa o vetor campo magnético (A/m); $\vec{J}$ representa o vetor densidade de corrente elétrica de condução (A/m^2); $\vec{D}$ representa o vetor densidade de fluxo elétrico (C/m^2); e ρ_e é a densidade de carga elétrica (C/m^3) (Balanis, 1989).

Além disso, as características do meio são inseridas nas equações de Maxwell através das relações constitutivas auxiliares a seguir, que descrevem as propriedades macroscópicas do meio considerado.

$$\vec{J} = \bar{\bar{\sigma}}\vec{E} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \bar{\bar{\mu}}\vec{H} \tag{2.6}$$

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\vec{E} \tag{2.7}$$

Para as equações (2.5)-(2.7), $\bar{\bar{\sigma}}$ é o tensor de condutividade elétrica do meio (S/m); $\bar{\bar{\mu}}$ é o tensor de permeabilidade magnética do meio (H/m); e $\bar{\bar{\varepsilon}}$ é o tensor de permissividade elétrica do meio (F/m). Além disso, os tensores reduzem-se aos escalares σ, μ, ε caso o meio seja isotrópico. Para meio não linear, os parâmetros constitutivos são função da intensidade dos campos, e para meio não homogêneo os parâmetros são função da posição (Afonso, 2003; Balanis, 1989).

2.3 Considerações Gerais do Modelo

Considere a Figura 2.1, que apresenta a visão frontal da torre de uma linha de transmissão aérea trifásica (de fases A, B e C), com um condutor circular regular em cada fase. Deseja-se calcular a intensidade dos campos elétricos e magnéticos em pontos de observação sobre a linha vermelha: à um metro acima do solo, ao longo de toda a faixa de servidão da LT sob análise.

Para a modelagem, as linhas são consideradas trifásicas, de sequência positiva, transpostas, simétricas, balanceadas, sob regime de operação estático e, além disso, os cabos condutores são considerados infinitamente longos e retos. Quanto ao meio (ar) que envolve a LT e os condutores, este é considerado homogêneo, linear, infinito e isotrópico.

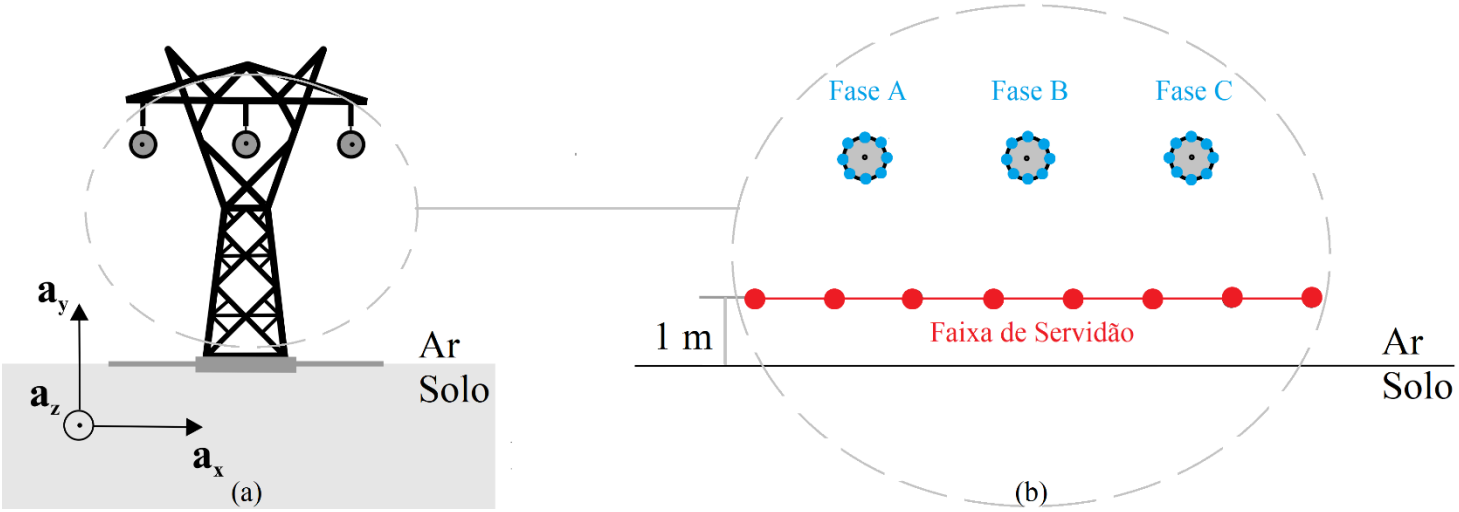

Figura 2.1 – (a) Corte transversal do problema. (b) Pontos de observação sobre os cabos de fase e sobre a faixa de servidão da linha.

Ademais, para o modelo bidimensional apresentado na Figura 2.1 acima, os pontos de avaliação dos campos superficiais encontram-se localizados na superfície (pontos azuis) dos condutores de cada fase.

Os cálculos dos campos elétricos e magnéticos são baseados na teoria eletromagnética e nas equações diferenciais parciais governantes, que serão apresentadas a seguir.

2.4 Modelagem do Campo Elétrico

Manuseando-se a lei de Faraday com o auxílio da natureza não divergente do campo magnético ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$), a distribuição do vetor campo elétrico, $\vec{E}$, no espaço ao redor da torre e seus condutores, pode ser descrita através do negativo do gradiente espacial do potencial elétrico escalar V e da variação temporal de um potencial vetor magnético ($\vec{A}$), conforme discrimina a equação a seguir:

$$\vec{E} = -\nabla V - j\omega\vec{A} \tag{2.1.8}$$

O potencial elétrico espacial escalar, por sua vez, descrito por (2.9), é obtido considerando-se uma análise eletrostática ($j\omega\vec{A} \rightarrow 0$), e substituindo-se (2.8) na lei de

Gauss elétrica, notando-se a respectiva relação constituinte. A Equação de Poisson, dada por (2.9), relaciona a função de densidade de carga ρ (C/m³) em um dado ponto no espaço com a soma das derivadas parciais espaciais do potencial nesse ponto (Sadiku, 2000; Balanis, 1989).

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\rho \tag{2.9}$$

Pressupondo o meio ao redor da linha e dos condutores como linear, homogêneo, isotrópico, de permissividade elétrica ε (F/m), e livre de fontes de carga elétrica, e que os cabos da linha são infinitos na direção z, a Equação (2.9) pode ser particularizada para a Equação de Laplace em duas dimensões, dada pela equação (2.10), a seguir.

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{2.10}$$

A equação diferencial parcial de segunda ordem (2.10) governa o comportamento espacial do potencial elétrico escalar complexo na região bidimensional livre ao redor da linha e seus condutores. Para resolver tal equação, é necessário definir o domínio de estudos, bem como a maneira como os potenciais se comportam nas fronteiras do domínio, de forma a definir completamente o problema de valor de contorno.

O domínio considerado é o espaço livre infinito ao redor dos condutores, e as fronteiras do domínio consideradas são as próprias superfícies dos cabos condutores da linha, dos cabos de guarda aterrados, e do solo, de acordo com a Figura 2.2. Na Figura 2.2, está representada uma LT típica, com um feixe de quatro condutores em cada fase, e sobre os quais os potenciais são conhecidos.

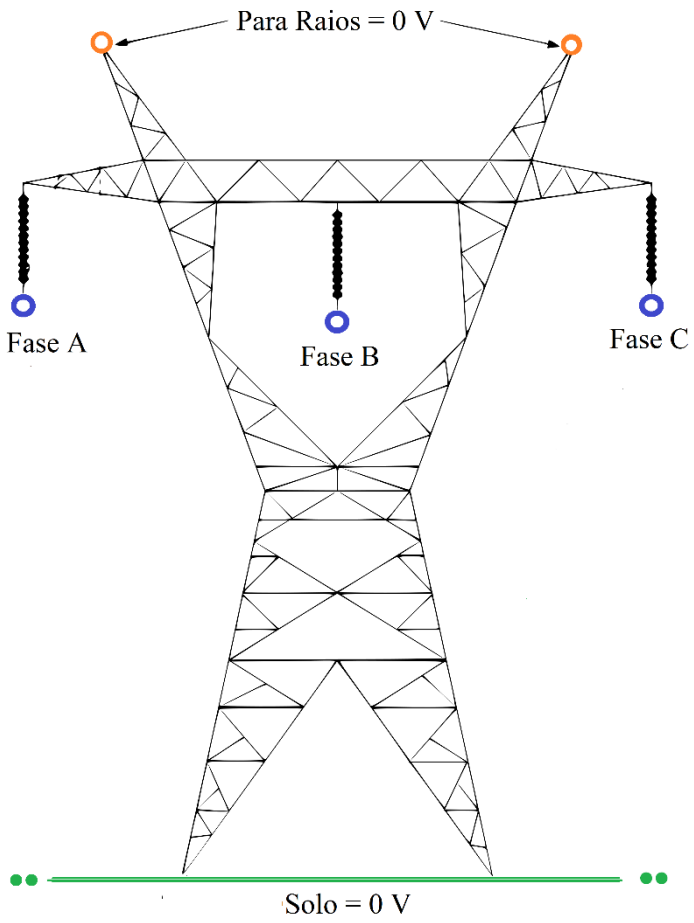

Figura 2.2 – Condições de contorno para o problema elétrico – potenciais elétricos sobre os cabos condutores, sobre os cabos de guarda aterrados, e sobre o solo condutor elétrico perfeito.

Com relação às condições de contorno elétricas, então, consideram-se as tensões complexas de operação sobre a superfície dos condutores, que são dados conhecidos da linha, e podem ser descritas pela equação (2.11), para um sistema trifásico equilibrado, onde U é a tensão de fase (tensão fase-neutro).

$$\begin{cases} A: V_A = Ue^{j0}\ volts \\ B: V_B = Ue^{-j2\pi/3}\ volts \\ C: V_C = Ue^{j2\pi/3}\ volts \end{cases} \tag{2.11}$$

Já o potencial imposto aos cabos de guarda e ao solo é considerado nulo, como indicado na Figura 2.2. Alternativamente, o efeito do solo pode ser computado considerando-se o método das imagens, bastando acrescentar à fronteira as imagens

dos cabos condutores em relação ao solo, com condições de contorno opostas às dadas pela equação (2.11). Desta maneira, não é preciso discretizar e truncar uma grande porção de solo para representá-lo, bastando apenas discretizar a pequena superfície dos condutores imagem, como é feito neste trabalho.

2.5 Modelagem do Campo Magnético

De forma análoga ao que foi feito para o campo elétrico, ao manipular-se a lei de Ampère-Maxwell com $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, e a respectiva relação constituinte ($\vec{B} = \mu\vec{H}$), e sob uma perspectiva magnetoestática (desprezando-se a parcela da corrente de deslocamento), obtém-se a relação a seguir, que permite calcular o potencial vetor magnético a partir da densidade de corrente $\vec{J}$.

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{J} \tag{2.12}$$

Supondo os cabos da linha infinitos na direção z, para o problema 2D existirão apenas componentes longitudinais (perpendiculares ao plano de estudo) para as densidades de corrente de condução, e para o vetor potencial magnético ($\vec{A} = A_z\,\hat{z}$). Assim, o comportamento do potencial magnético escalar complexo pode ser dado pela equação (2.13) a seguir, obtida pela manipulação vetorial da equação (2.12), e da consideração de que o potencial vetor magnético não possui divergente ($\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = -\vec{J}_z \tag{2.13}$$

Por fim, como no ar entre os condutores não circula corrente, i.e $\vec{J} = 0$, a equação diferencial parcial governante no ar é dada pela versão de Laplace da equação (2.13).

Embora o comportamento espacial do potencial magnético seja governado por (2.13) para o problema em questão, para resolvê-lo numericamente é necessário definir o domínio de estudos no qual essa equação diferencial parcial é válida,

especificando também a maneira como os potenciais se comportam nas fronteiras, completando a definição problema de valor de contorno.

O domínio considerado para o problema magnético é o espaço livre infinito ao redor dos condutores, e as fronteiras do domínio consideradas são as próprias superfícies dos cabos de fase da linha, denotadas de azul na Figura 2.2.

Com relação às condições de contorno magnéticas, de forma análoga à equação (2.11), consideram-se os potenciais magnéticos complexos na superfície dos condutores, dados na unidade $tesla.metro$, e calculados em função dos fasores de corrente conhecidos de operação da linha.

2.6 Problema de Valor de Contorno

Foi visto que ambos os problemas elétrico e magnético são governados pela equação de Laplace, segundo as considerações feitas.

A equação de Laplace, aplicada a um ponto $\vec{x}$ sobre o domínio, pode ser dada genericamente pela equação (2.14), onde u representa o potencial (elétrico ou magnético), k representa a propriedade do meio, e n é a coordenada na direção do vetor $\vec{n}$, normal ao contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$, e orientado para fora do domínio Ω, como definidos na Figura 2.3.

$$\begin{cases} \nabla.(-k\nabla u(\vec{x})) = 0, \forall \vec{x} \in \Omega_\infty \\ u(\vec{x}) = \bar{u}(\vec{x}), em\ \Gamma_u, \forall \vec{x} \in \Gamma_u \\ q(\vec{x}) = k\dfrac{\partial u}{\partial n} = \overline{q}(\vec{x}), em\ \Gamma_q, \forall \vec{x}\ \in \Gamma_q \\ \Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma \\ \Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset \end{cases} \tag{2.14}$$

A equação (2.14) define o problema de valor de contorno a ser resolvido, e compreende as condições de contorno essenciais (de Dirichlet) na fronteira Γ_u do domínio, e as condições de contorno naturais (de Neumann) na fronteira Γ_q, sendo $\overline{u}$ e $\overline{q}$ os valores prescritos para os potenciais e os fluxos, respectivamente, sobre a fronteira Γ.

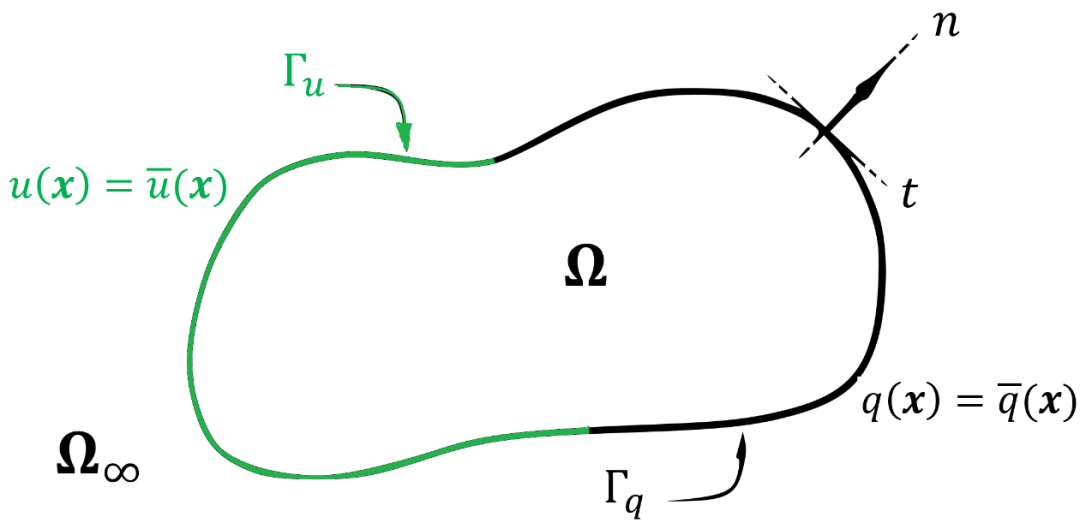

Figura 2.3 – Definição das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann.

Feita a generalização da modelagem, e apresentado o problema de valor de contorno, é apresentado no capítulo seguinte o método numérico escolhido para solucioná-lo.

2.7 Conclusão

Durante o capítulo, foram apresentadas as premissas e as leis físicas e matemáticas consideradas na modelagem dos campos eletromagnéticos de linhas de transmissão aéreas, para a condição estática.

Por meio da dualidade da formulação de potencial, obtém-se uma modelagem final única do problema de valor de contorno, independentemente de sua natureza (elétrica ou magnética).

3 Método de Momentos

3.1 Introdução

São apresentadas a formulação e as considerações para a implementação computacional do método de momentos, a fim de solucionar numericamente o problema de valor de contorno definido na modelagem eletromagnética.

A formulação parte da aplicação do método de resíduos ponderados ao modelo, e com o auxílio do segundo teorema de Green e das propriedades da função delta de Dirac obtém-se uma equação integral fraca unicamente em termos do contorno, e sob as mesmas as condições de contorno anteriormente estabelecidas.

Por fim, particiona-se o contorno em uma série de elementos, e levando-se em conta a contribuição de campo de cada elemento de contorno, e observadas as singularidades, chega-se finalmente ao sistema final de equações, cuja solução fornece os potenciais e os fluxos desconhecidos sobre o contorno, e os quais podem ser utilizados para encontrar os campos em qualquer ponto do domínio interno ou externo à fronteira.

3.2 Método de Resíduos Ponderados e Formulação Fraca

Considerando-se a Equação de Laplace, e o Método de Resíduos Ponderados, obtém-se a equação integral de domínio dada pela equação (3.2.1), sendo que w representa a função de ponderação, contínua até a segunda derivada, e $\tilde{u}$ representa a solução aproximada para o potencial na região de espaço livre que envolve a linha e os seus condutores.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \tilde{u})\, w\, d\Omega = 0 \tag{3.2.1}$$

O Método de Resíduos Ponderados consiste em minimizar o erro da aproximação, de forma que a soma do erro ponderado (pela função w) sobre o domínio seja nula. Aplicando-se a segunda e a terceira identidades de Green sobre a

sentença básica de resíduos ponderados da Equação de Laplace resulta na equação (3.2.2), onde observa-se que a exigência de continuidade de segunda ordem inicialmente exigida para $\tilde{u}$ foi enfraquecida e transferida à função w (Barbosa, 2005; Brebbia, 1978; Jin, 2002).

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w)\tilde{u}\, d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \qquad (3.2.2)$$

Vale ressaltar que, para a equação (3.2.2), Γ é o contorno que delimita o domínio Ω, e n é a coordenada na direção do vetor normal $\vec{n}$, já definidos anteriormente, assim como valem as mesmas condições essenciais e naturais sobre o contorno, estipuladas no capítulo anterior.

A equação (3.2.2) é o ponto de partida para a aplicação do Método de Momentos, e o objetivo agora é transformá-la em uma Equação Integral de Contorno, o que será feito escolhendo-se a função de ponderação como uma função de Green do problema.

3.3 Soluções Fundamentais

A solução fundamental para o campo gerado por uma concentração δ impulsiva de carga aplicada em $\vec{x}'$, em uma posição de observação $\vec{x}$ no domínio infinito, é a função resposta ao impulso, e é chamada função de Green $G_0(\vec{x}, \vec{x}')$. Escolhendo então a função de ponderação w como a função de Green para o operador L de Laplace que rege o problema, obtém-se a relação:

$$\nabla^2 w = LG_0 = \nabla^2 G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x}, \vec{x}') \qquad (3.3.1)$$

Por meio de (3.3.1) e das propriedades de amostragem da excitação delta de *Dirac* δ escolhida, obtém-se a relação (3.3.2) para a aproximação da função potencial $\tilde{u}$ (Brebbia, 1978; Jin, 2002).

$$\int_{\Omega} \tilde{u}(\vec{x}) G(\vec{x}, \vec{x}') d\Omega = -\int_{\Omega} \tilde{u}(\vec{x}) \delta(\vec{x}, \vec{x}') d\Omega = -\tilde{u}(\vec{x}') \qquad (3.3.2)$$

Considerando-se $w = G_0 = u^*$ e $q^* = \partial G_0/\partial n = \partial u^*/\partial n$, e a relação (3.3.2), a equação integral dada por (3.2.2) pode ser reescrita como a Equação Integral de Contorno (3.3.3), onde u^* denota a solução fundamental, ou função de Green, com derivada normal igual a q^*. Como a solução fundamental escolhida satisfaz a equação diferencial no domínio, a equação (3.3.3) se dá agora inteiramente ao longo da fronteira Γ.

$$\tilde{u}(\vec{x}') = \int_{\Gamma} \tilde{q} u^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{u} q^* \, d\Gamma \tag{3.3.3}$$

A equação (3.3.3) fornece o potencial elétrico/magnético em qualquer ponto do domínio aberto (espaço livre), em função dos potenciais e dos campos exclusivamente no contorno. Para então determinar as variáveis desconhecidas no contorno, é preciso agora aplicar a função impulsiva sobre o próprio contorno.

3.4 Equação Integral de Fronteira

Para encontrar os valores de $\tilde{u}$ e $\tilde{q}$ no contorno Γ, ainda desconhecidos, é necessário aplicar a função impulsiva em pontos sobre o próprio contorno, de onde surgem singularidades nos integrandos da solução fundamental, para $\vec{x}' = \vec{x}$. Nesse caso, pode-se aproximar um ponto do domínio ao contorno Γ, por um processo de limite, o qual dá origem à Equação Integral de Contorno (3.4.1), que é igual à equação (3.3.3) para $c(\vec{x}') = 1$ (Silva *et al.*, 2008; Brebbia, 1978).

$$c(\vec{x}')\tilde{u}(\vec{x}') + \int_{\Gamma} \tilde{u}(\vec{x}) q^*(\vec{x}', \vec{x}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{q}(\vec{x}) u^*(\vec{x}', \vec{x}) \, d\Gamma \tag{3.4.1}$$

Onde:

$$c(\vec{x}') = \begin{cases} 0, se\ \vec{x}'\ \text{é}\ um\ ponto\ externo\ a\ \Omega \\ \frac{\alpha}{2\pi}, se\ \vec{x}'\ \text{é}\ um\ ponto\ sobre\ o\ contorno\ \Gamma \\ 1, se\ \vec{x}'\ \text{é}\ um\ ponto\ interno\ a\ \Omega \end{cases}$$

(3.4.2)

Para a Equação Integral de Fronteira (3.4.1), o fator $c(\vec{x}')$ age como um coeficiente dependente da localização de $\vec{x}'$ no espaço, sendo igual a $1/2$ ($\alpha = \pi$) para

contornos Γ suaves, e $\alpha/2\pi$ para qualquer outro tipo de contorno Γ, como denota (3.4.2), e onde α é o ângulo interno do canto, em radianos. De forma semelhante, para pontos fora do contorno, deve-se considerar $c(\vec{x}') = 0$ para um ponto externo ao domínio Ω, e $c(\vec{x}') = 1$ para um ponto interno ao domínio Ω, como resumido em (3.4.2) (Brebbia, 1978).

Agora, para a solução numérica da Equação Integral de Contorno dada por (3.4.1), o contorno é discretizado em uma série de elementos, com um ou mais nós, os quais assumem pontualmente os valores no contorno que são interpolados por meio das funções de interpolação.

3.5 Discretização e Aproximação das Variáveis no Contorno

A equação (3.4.1) é a equação integral na qual o método de momentos é baseado. Para a solução numérica de (3.4.1), o contorno Γ deve decomposto em uma série de elementos Γ_e ao longo do contorno, o que dá origem à equação (3.5.1), onde NE é a quantidade de elementos de contorno (Brebbia, 1978).

$$c(\vec{x}')\tilde{u}(\vec{x}') + \sum_{e=1}^{NE}\left(\int_{\Gamma_e} q^*\{N\}^T d\Gamma_\mathrm{e}\right)\{\tilde{u}\}_j = \sum_{e=1}^{NE}\left(\int_{\Gamma_e} u^*\{N\}^T d\Gamma_\mathrm{e}\right)\{\tilde{q}\}_j \qquad (3.5.1)$$

Para a equação (3.5.1), elementos nodais contínuos e isoparamétricos são utilizados para a discretização. Esses elementos têm exatamente as mesmas propriedades dos elementos correspondentes no método de elementos finitos, porém devido à formulação integral, a dimensão dos elementos é reduzida por um, de forma que para problemas 3D, elementos de contorno 2D são utilizados, e da mesma forma, para problemas 2D, elementos de contorno 1D devem ser aplicados. Além disso, na equação (3.5.1), as distribuições de $\tilde{u}$ e $\tilde{q}$ foram expandidas com relação às funções de forma/interpolação $N_j(\vec{x})$ sobre o elemento e os seus valores nodais $\tilde{u}_j$ e $\tilde{q}_j$, como definido nas equações (3.5.2) e (3.5.3), onde $NNOS$ é o número de nós do elemento Γ_e (Kurz, 1991).

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{NNOS} N_j(\vec{x})\tilde{u}_j = \{N\}^T\{\tilde{u}\}_e, \qquad sobre\ \Gamma_e \tag{3.5.2}$$

$$\tilde{q}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{NNOS} N_j(\vec{x})\tilde{q}_j = \{N\}^T\{\tilde{q}\}_e, \qquad sobre\ \Gamma_e \tag{3.5.3}$$

Então, considerando (3.5.1), (3.5.2), e (3.5.3), e tomando-se o ponto fonte sucessivamente na localização de cada nó sobre o contorno, encontramos o sistema matricial de $NNOS$ equações, descrito por (3.5.3), onde o termo livre foi acoplado à matriz de influência $[H]_{NNOS\times NNOS}$, e $NNOS$ é a quantidade total de nós da malha de contorno (Kurz, 1991).

$$[G]\{\tilde{u}\} = [H]\{\tilde{q}\} \tag{3.5.3}$$

Os argumentos para as matrizes $[H]$ e $[G]$ são dados pelas contribuições elementares isoparamétricas a seguir, relativas a um elemento padrão no espaço ζ:

$$h = \int_{-1}^{1} N_j\, G_0\, |[\,Jcob\,]|\, d\zeta \tag{3.5.4}$$

$$g = \int_{-1}^{1} N_j \frac{\partial G_0}{\partial n}\, |[\,Jcob\,]|\, d\zeta \tag{3.5.5}$$

Onde o elemento de integração $d\Gamma_e$ foi substituído por $|[\,Jcob\,]|\, d\zeta$, e $|[\,Jcob\,]|$ é o determinante da matriz do Jacobiano para a transformação das variáveis para o espaço padrão (Jin, 2002; Afonso *et al.*, 2003).

Além disso, para a equação (3.5.3), $\{\tilde{u}\}$ e $\{\tilde{q}\}$ são os potenciais e os campos nodais no contorno, antes da aplicação das condições de contorno prescritas. Introdução das condições de contorno pelo rearranjo das colunas de $[H]$ e $[G]$ em (3.5.3), tal que apenas as incógnitas estejam no lado esquerdo da equação, dá origem à equação:

$$[A]\{x\} = \{F\} \tag{3.5.6}$$

A solução da equação matricial (3.5.6) fornece os fluxos e potenciais desconhecidos sobre o contorno, e os quais permitem calcular os campos em qualquer parte do domínio.

3.6 Cálculo de Campos no Domínio Interno

Uma vez determinados os potenciais e os campos elétricos/magnéticos ao longo do contorno pela solução de (3.5.4), o fluxo $(q_l)_i$ em qualquer direção l, em um ponto de observação i ao nível do solo, pode ser encontrado por meio de (3.6.1). A equação (3.6.1) é encontrada considerando-se $c(\vec{x}') = 1$ para (3.5.1), e diferenciando-se o potencial $\tilde{u}$ na direção l (Brebbia, 1978). O campo elétrico ao nível do solo pode então ser encontrado considerando as direções $l = x$ e $l = y$, e lembrando que $\vec{E} = -\nabla u$ e $\vec{x} = x\hat{x} + y\hat{y}$.

$$(q_l)_i = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial l}\right)_i = \sum_{e=1}^{NE}\left(\int_{\Gamma_e}\{N\}^T \frac{\partial u^*}{\partial l} d\Gamma_e\right)\{q\}_e - \sum_{e=1}^{NE}\left(\int_{\Gamma_e}\{N\}^T \frac{\partial q^*}{\partial l} d\Gamma_e\right)\{u\}_e \qquad (3.6.1)$$

No que se refere ao vetor densidade de fluxo magnético $\vec{B}$ ao nível do solo, utilizando-se (3.6.1) para calcular as derivadas parciais nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$, pode-se determiná-lo através da equação (3.6.2), com o vetor potencial magnético ($\vec{A} = A_z\hat{z} = \tilde{u}\hat{z}$), que possui apenas uma componente ao longo da linha infinita para o caso $2D$.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\hat{y} \qquad (3.6.2)$$

Para a equação (3.6.1), as derivadas parciais na direção l podem ser calculadas analiticamente, pela regra da cadeia, e dadas por (3.6.3) e (3.6.4) (Barbosa *et al.*, 2005), onde $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y}$ e $r = |\vec{r}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

$$\frac{\partial u^*}{\partial l} = \frac{1}{2\pi r^2}\vec{r}.\vec{l} \qquad (3.6.3)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial l} = -\frac{1}{2\pi r^2}\left[2(\vec{r}.\vec{n})(\vec{r}.\vec{l}) - (\vec{l}.\vec{n})\right] \qquad (3.6.4)$$

3.7 Integração Numérica

Para calcular os coeficientes de influência das matrizes $[G]$ e $[H]$, e montar o sistema dado por (3.5.4), é necessário solucionar as integrais sobre o contorno. A integração numérica é utilizada aqui para os casos onde o ponto fonte não faz parte do elemento a ser integrado, como por exemplo para os casos das equações para um ponto ao nível do solo (ponto interno ao domínio).

Para a integração numérica, considera-se a soma ponderada dada pela fórmula da Quadratura Gaussiana, de acordo com a equação (3.7.1), onde NPG representa a quantidade de pontos de integração considerados.

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\xi = \sum_{k=1}^{NPG} f(\zeta_k)\, w_k \tag{3.7.1}$$

Para a equação (3.7.1), f é a função a ser integrada, escrita em termos da coordenada homogênea ζ no k-ésimo ponto de integração, e w_k é o fator ponderado (função de NPG e do ponto k de integração). A quantidade de pontos de integração, NPG, deve ser escolhida considerando-se a distância entre o ponto fonte e o elemento a ser integrado, e considerando-se também o comprimento do elemento e a função a ser integrada. Além disso, naturalmente, deve existir um compromisso entre o número de pontos de integração e o custo computacional requerido.

De acordo com a fórmula da Quadratura Gaussiana, dada por (3.7.1), e com a definição da função de Green e sua derivada normal em duas dimensões, e considerando-se o caso de elementos constantes, com um nó no centro do elemento, i.e $\{N\} = \{N_1\} = \{1\}$, os coeficientes de influência para o elemento j podem ser calculados através das equações (3.7.2) e (3.7.3) a seguir.

$$h_{ij_{const}} = \int_{\Gamma_j} N_1 q^*\, d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} -\frac{1}{(R_k)^2}(DT)\,.\,w_k\,.\left(\frac{L_j}{2}\right), i \neq j \tag{3.7.2}$$

$$g_{ij_{const}} = \int_{\Gamma_j} N_1 u^*\, d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} \ln\left(\frac{1}{R_k}\right).\,w_k.\left(\frac{L_j}{2}\right), i \neq j \tag{3.7.3}$$

Onde a variável R_k corresponde à distância euclidiana entre o ponto fonte e o ponto de Gauss. A variável DT representa a distância entre o ponto fonte até uma linha tangente ao elemento, e $(L_j/2)$ corresponde ao jacobiano da transformação da integral sobre o elemento j para a integral sobre o elemento natural, de -1 a 1, que para o caso de elementos constantes é igual ao comprimento (L_j) de cada elemento dividido por 2 (Silva *et al.*, 2008; Brebbia, 1978).

De forma semelhante, para o caso de elementos lineares, i.e com funções de interpolação iguais a $\{N\} = \{N_1 \quad N_2\} = \left\{\left(\frac{1-\zeta}{2}\right) \quad \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)\right\}$, os coeficientes de influência da matriz $[H]$ podem ser dados de acordo com as equações (3.7.4) e (3.7.5) a seguir, para os nós locais 1 e 2 elemento j, onde ζ, novamente, é a coordenada homogênea do ponto de integração, que vai de -1 a 1.

$$h^1_{ij_{lin}} = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* \, d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} -\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)\left(\frac{1}{(R_k)^2}(DT) \,.\, w_k \,.\left(\frac{L_j}{2}\right)\right), i \neq j \quad (3.7.4)$$

$$h^2_{ij_{lin}} = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* \, d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} -\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)\left(\frac{1}{(R_k)^2}(DT) \,.\, w_k \,.\left(\frac{L_j}{2}\right)\right), i \neq j \quad (3.7.5)$$

Analogamente, os coeficientes de influência da matriz $[G]$ para os dois nós do elemento j podem ser calculados numericamente pelas equações (3.7.6) e (3.7.7) a seguir (Silva *et al.*, 2008; Brebbia, 1978).

$$g^1_{ij_{lin}} = \int_{\Gamma_j} N_1 u^* \, d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{R_k}\right) . w_k . \left(\frac{L_j}{2}\right)\right), i \neq j \quad (3.7.6)$$

$$g^2_{ij_{lin}} = \int_{\Gamma_j} N_2 u^* \, d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{1}{R_k}\right) . w_k . \left(\frac{L_j}{2}\right)\right), i \neq j \quad (3.7.7)$$

3.8 Integração Analítica

A integração analítica é utilizada no lugar da integral numérica de forma a se obter uma integração mais precisa, para os casos onde os pontos de integração e de fonte encontram-se muito próximos (aqui, no mesmo elemento), isto é, para os casos onde aparecem singularidades, sobre a diagonal principal das matrizes de influência.

Para o caso particular de elementos constantes, com um nó no meio de cada elemento, os termos da diagonal principal de $[H]$ são iguais a 1/2, uma vez que a normal e a coordenada do elemento são sempre perpendiculares entre si, e resta apenas o coeficiente c_i, que como visto é igual à 1/2 para contornos suaves (Brebbia, 1978).

$$h_{ii_{const}} = \hat{h}_{ii} + c_i = \int_{\Gamma_i} q^* \, d\Gamma + \frac{\alpha}{2\pi} = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad (3.8.1)$$

Já as integrais na diagonal de $[G]$ requerem mais cuidado, e podem ser dadas analiticamente de acordo com a equação (3.8.2), para o caso de elementos constantes (Brebbia, 1978).

$$g_{ii_{const}} = \int_{\Gamma_i} u^* \, d\Gamma = -\frac{L_j}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{L_j}{2}\right) - 1\right] \qquad (3.8.2)$$

Para o caso de elementos lineares, os termos da diagonal principal de $[H]$ podem ser calculados implicitamente, por meio da equação (3.8.3), em função dos coeficientes já calculados fora da diagonal principal. Esta equação é encontrada considerando-se potenciais constantes sobre as fronteiras, i.e. fluxos nulos, e o termo unitário resulta da natureza aberta (infinita) do problema (Brebbia, 1978).

$$h_{ii_{lin}} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} H_{ij} \qquad (3.8.3)$$

Já os coeficientes da matriz $[G]$ correspondentes às integrais ao longo de um elemento j que inclua a singularidade podem ser dados analiticamente pelas equações a seguir (Brebbia, 1978):

$$g^1_{ii_{lin}} = \frac{L_j}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln(L_j)\right) \qquad (3.8.4)$$

$$g^2_{ii_{lin}} = \frac{L_j}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln(L_j)\right) \qquad (3.8.4)$$

3.9 Conclusão

São apresentadas as bases lógicas e as expressões do método de momentos, que serão utilizadas no cômputo dos campos eletromagnéticos das LTs.

O método de resíduos ponderados permite transformar o problema de valor de contorno diferencial em um problema integral, e tomando-se uma função de Green como função de ponderação, e com o auxílio da segunda identidade de Green, é obtida uma equação integral unicamente em termos do contorno.

O contorno é divido em elementos de contorno menores, e considerando-se a influência dos pontos fonte em cada nó do contorno, e observadas as singularidades, obteve-se o sistema matricial final, que fornece o valor das incógnitas no contorno, e as quais permitem calcular os campos em qualquer parte do domínio.

4 Otimização

4.1 Introdução

É apresentada a formulação do problema de otimização e, em seguida, são apresentadas a função objetivo e as restrições de projeto e de segurança adotadas no trabalho, bem como as estratégias adotadas para se otimizar os campos eletromagnéticos ao nível do solo.

Por fim, apresenta-se o método de otimização e os critérios de parada utilizados para otimizar a função objetivo sujeita às restrições impostas.

4.2 O Problema de Otimização

Um problema de otimização escalar consiste em encontrar uma solução que minimize ou que maximize uma dada função de mérito (função objetivo), a qual atribui um valor a cada solução.

Já um problema prático de otimização pode ser definido como uma tarefa de encontrar não apenas a solução que otimiza a função objetivo, mas a solução que, ao mesmo tempo, obedeça ao conjunto de restrições impostas, geralmente relacionadas aos limites técnicos do problema.

O problema de otimização mono objetivo (escalar) sujeito a t restrições de desigualdade pode ser expresso matematicamente como:

$$\begin{cases} x^* = \arg\min_{x} f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \\ sujeito\ a: \\ v_i(\vec{x}) \leq 0, \forall i = 1,2,\dots,t \end{cases} \tag{4.1}$$

Isto é, a solução x^* é o argumento que minimiza a função objetivo $f(\vec{x})$ sujeita às t restrições de desigualdade $v_i(\vec{x})$ impostas. No caso desse trabalho, a solução ótima x^* do problema é o vetor solução d-dimensional contendo as posições ótimas dos cabos condutores, que geram o menor perfil de campo ao nível do solo. Já as v restrições garantem que os cabos permaneçam na região de projeto da torre, bem como

garantem distâncias elétricas mínimas entre os condutores de mesma fase e de fases distintas.

A função objetivo $f(\vec{x})$ é apresentada na seção 4.3, e as restrições de desigualdade $v_i(\vec{x})$ são apresentadas na seção 4.4. O método e as estratégias de otimização tomadas, juntamente com os critérios de parada, são apresentadas em 4.5.

As soluções ótimas x^* encontradas, isto é, as posições ótimas dos cabos condutores são vistas no Capítulo 5, onde são mostrados os resultados obtidos através do processo de otimização apresentado neste capítulo.

4.3 Função Objetivo

A função objetivo é desenvolvida a partir da modelagem numérica do Capítulo 3, mais especificamente a partir da expressão (3.6.1), que representa o fluxo em qualquer direção l, em um ponto de observação i ao nível do solo.

Como tal expressão é função da posição $\vec{x}$ dos condutores na torre, o objetivo da otimização é minimizar o perfil de campo ao nível do solo através da variação dessas posições, respeitadas as restrições de projeto e segurança da linha.

Sendo assim, toma-se como função objetivo escalar $f(\vec{x})$ a equação (4.2), que representa o somatório do quadrado da intensidade do campo em todos os n pontos de observação ao longo da faixa de servidão da linha.

$$f(\vec{x}) = \sum_{p=1}^{n} \left\{ \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right|_p^{\;2} + \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right|_p^{\;2} \right\} \tag{4.2}$$

Onde $P_p = (x_p, y_p)$ representa o p-ésimo ponto de observação, situado à um metro acima do solo ($y_p = 1$), ao longo da faixa de servidão (Paganotti *et al.*, 2015; Duane *et al.*, 2021). Ao considerar o somatório do campo em todos os pontos ao longo da faixa de passagem como função objetivo, é possível avaliar todo o perfil de campo ao nível do solo simultaneamente, a cada iteração do método de otimização, mesmo utilizando uma técnica escalar.

Exposta a função objetivo na equação (4.2), as restrições e as estratégias utilizadas na otimização são apresentadas a seguir.

4.4 Restrições

A Figura 4.1 ilustra o problema de otimização e as restrições adotadas no processo de otimização. Os condutores de cada fase são representados pelos discos cinzas (contornados de preto), enquanto que o centro de cada fase é representado por um ×.

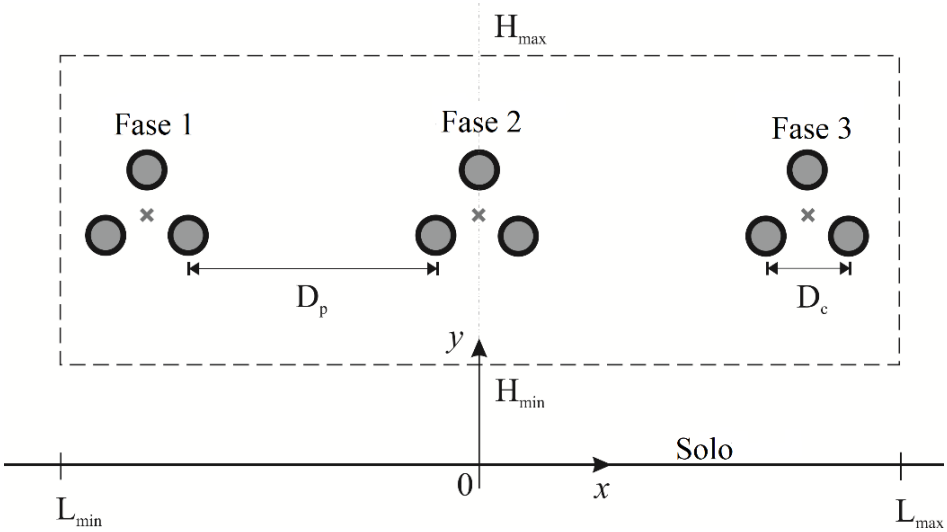

Figura 4.1 – Restrições geométricas adotadas no processo de otimização (Duane *et al.*, 2020).

O eixo da fase central e o solo definem a origem do sistema de coordenadas cartesianas visto na Figura 4.1. Já o contorno retangular pontilhado, demarcado pelos limites laterais esquerdo e direito, L_{esq} e L_{dir}, e pelos limites verticais mínimo e máximo, H_{min} e H_{max}, representam a região física dentro da qual os condutores podem variar durante o processo de otimização. As restrições de altura se dão por razões de segurança, e são tomadas como um metro acima e abaixo das posições iniciais dos condutores (Duane *et al.*, 2020; Paganotti *et al.*, 2012).

Ademais, D_p determina a distância mínima entre condutores de fases distintas, e D_c determina a distância mínima entre condutores da mesma fase. Além disso,

acrescenta-se (4.3) como restrição para o campo elétrico superficial máximo na superfície dos condutores, que não deve ultrapassar o seu valor crítico, para o qual o efeito corona começa a acontecer.

$$MAX(|E|_{SUPERFICIAL}) \leq \ |E|_{CRÍTICO} = 21{,}6\left(1 + \frac{0{,}301}{\sqrt{r}}\right) \tag{4.3}$$

Na expressão (4.3), o campo crítico é dado pela fórmula de Peek, onde r é o raio do condutor, dado em centímetros, e o campo elétrico crítico resultante é dado em kV/cm (EPRI, 1982; Kiessling *et al*. 2003; Miller, 1957). Vale ressaltar que para inserir as referidas restrições ao método deve-se colocá-las no formato de desigualdade da equação (4.1), i.e. $v_i(\vec{x}) \leq 0$ (Duane *et al*., 2020).

Assim, as restrições descritas são impostas com o intuito de que as configurações otimizadas respeitem os limites de projeto e de segurança da linha. Por meio do método elipsoidal, estas restrições são tratadas diretamente, como será descrito a seguir.

4.5 Método Elipsoidal

O perfil de campo ao nível do solo é otimizado empregando-se o método elipsoidal, que é um método de otimização determinístico, baseado na informação do gradiente a cada iteração do método.

O método elipsoidal é escolhido devido à sua facilidade em tratar as diversas restrições não lineares discutidas na seção anterior, o que elimina a necessidade do uso de artifícios como barreiras e penalidades. Além disso, a aplicação do método elipsoidal na otimização de linhas de transmissão já apresentou soluções satisfatórias, como em (Duane *et al*., 2020) e (Paganotti *et al*., 2015).

Cada elipsóide de d dimensões é caracterizado pelo seu centro $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^d$ e sua matriz característica $Q_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$ simétrica definida positiva. Em linhas gerais, o método inicia com um elipsóide contendo a solução ótima x^*, e procede gerando uma sequência recursiva de elipsóides menores contendo o ponto ótimo. A geração de elipsóides de menor volume é baseada no subgradiente da restrição mais violada (caso

o ponto seja infactível), ou baseada no subgradiente da função objetivo no ponto (caso ele seja factível), e continua até que um critério de parada seja atendido. Tal processo caracteriza o algoritmo do método elipsoidal, que pode ser visto no Algoritmo 1, a seguir (Bland *et al.*, 1981; Saldanha *et al.*, 2010; Takahashi, 2007).

Algoritmo 1: Método Elipsoidal

```
   Input: x_0 (solução inicial)
1          Q_0 (matriz característica inicial do elipsóide)
   Result: x* (solução ótima encontrada)
2  Inicializa a matriz característica Q_k do elipsóide com Q_0;
3  Inicializa o centro x_k do elipsóide com a solução inicial x_0;
4  while não atingir critério(s) de parada do
5  |   Avalia todas as restrições no ponto x_k;
6  |   if todas as restrições forem atendidas then
7  |   |   m_k = subgradiente da função objetivo no ponto x_k;
8  |   else
9  |   |   m_k = subgradiente da restrição mais violada no ponto x_k;
10 |   end
11 |   Calcula a nova matriz Q_k + 1 a partir da equação (4);
12 |   Calcula o novo centro x_k + 1 a partir da equação (5);
13 end
14 x* = x_k;
```

Para o Algoritmo 1, o vetor solução inicial (x_0) contém as posições originais (horizontal e vertical) dos condutores e, analogamente, o vetor solução (x^*) contém as posições otimizadas finais dos condutores. Já a matriz característica inicial (Q_0) do problema é tal que englobe os limites do problema.

Na linha 11 do Algoritmo 1, é construída uma nova região elipsoidal, por meio da exclusão da parcela da região na direção do vetor subgradiente m_k (que aponta para a direção de valores crescentes de restrição ou de função objetivo). Assim, a atualização da matriz característica Q do elipsóide pode ser dada pela equação (Saldanha *et al.*, 2010; Duane *et al.*, 2020) a seguir, em que T denota a operação de transposição do vetor.

$$[Q_{k+1}] = c_1(\,[Q_k] - c_2\{s_k\}\{s_k\}^T\,) \tag{4.4}$$

Onde:

$$c_1 = \frac{d^2}{d^2-1}, \qquad c_2 = \frac{2}{d+1}, \qquad \{s_k\} = -\frac{Q_k m_k}{\sqrt{m_k^T Q_k m_k}} \qquad (4.5-4.7)$$

Analogamente, na linha 12 do Algoritmo 1, o cálculo do centro $\vec{x}_{k+1}$ do novo elipsóide (caracterizado por Q_{k+1}), que é a nova estimativa de solução, é dado pela equação a seguir (Saldanha *et al.*, 2010; Duane *et al.*, 2020). Tal relação é função: do centro anterior x_k do elipsóide; da matriz característica e do gradiente anteriores; e do número de dimensões d do elipsóide, que é constante e igual à quantidade de variáveis do problema de otimização em questão.

$$\{x_{k+1}\} = \{x_k\} + c_3\{s_k\} \tag{4.8}$$

Onde:

$$c_3 = \frac{1}{d+1} \tag{4.9}$$

As constantes definidas como c_1, c_2 e c_3 podem assumir outros valores, que variam a profundidade do corte do elipsóide. Outros possíveis valores podem ser dados por

$$c_1 = \frac{d^2(1-\alpha)}{(d^2-1)}, \quad c_2 = \frac{2(1-d\alpha)}{(d+1)(d+\alpha)}, \quad c_3 = \frac{(1+d\alpha)}{(d+1)}. \qquad (4.10-4.12)$$

Onde, nas equações 4.10 a 4.12, o parâmetro α pode variar de 0 a $1/d$, e o algoritmo convencional é dado para $\alpha = 0$. Quando α é maior que zero, tem-se um corte mais profundo, e ao aproximar-se de $1/d$, a convergência do processo de otimização é acelerada, às custas de perda na sua robustez (a solução ótima pode ser perdida) (Saldanha *et al.*, 2010; Paganotti *et al.*, 2015).

De forma geral, as estratégias de otimização permitem que os cabos condutores se movam livremente durante o processo, o que resulta em feixes otimizados não convencionais. Além desta abordagem, propõe-se em (Duane *et al.*, 2020) que se varie somente a posição inicial dos feixes, sem alterá-los, no intuito de viabilizar a aplicação da configuração otimizada através de estruturas (espaçadores e afins) convencionais existentes no mercado. Também é sugerido restringir o feixe central de maneira que ele não varie significativamente na horizontal (com o objetivo

de preservar a simetria da linha). Ambas as estratégias serão utilizadas no processo de otimização, a fim de comparar os resultados obtidos.

Definidas a função objetivo, as restrições, e o algoritmo do método elipsoidal, os critérios de parada utilizados são o número máximo de iterações e a estabilização do valor da função objetivo.

4.6 Conclusão

A função objetivo desse trabalho, representada pelo somatório do quadrado da intensidade do campo em todos os pontos de observação, é otimizada através da variação da posição dos condutores na torre, sujeita às restrições de projeto e de segurança da linha.

Os condutores variam de posição a cada iteração do método elipsoidal até que se atinja uma configuração com um perfil ótimo de campo, ou até que se atinja um dos critérios de parada, e respeitadas as referidas restrições (tratadas diretamente pelo método elipsoidal).

São adotadas duas estratégias na variação dos condutores, de tal forma que em uma delas os condutores podem variar aleatoriamente, respeitadas as restrições, enquanto que na segunda apenas a posição dos feixes originais é variada, sem alterá-los. As estratégias são comparadas no capítulo seguinte, que apresenta dentre outros os resultados obtidos com a minimização dos perfis de campo da linha analisada.

5 Resultados

5.1 Introdução

São apresentados neste capítulo os resultados da aplicação do método de momentos no cômputo e na otimização de campos de linhas de transmissão conhecidas. A metodologia numérica é validada através de comparação com métodos analíticos e semi analíticos, e são feitas análises de sensibilidade com relação à quantidade de elementos de contorno, com relação ao tipo de elemento de contorno, e com relação à ausência/presença de cabos para raios. Além disso, a metodologia é utilizada para estudar as interações de campos com oleodutos presentes no corredor, e para estudar a influência da geometria real dos cabos nos campos, ilustrando a robustez da técnica em relação às técnicas analíticas tradicionais.

Por fim, o método de momentos é acoplado ao método elipsoidal de otimização, com o intuito de minimizar os níveis de campo ao nível do solo provenientes das linhas, respeitadas as restrições impostas.

Todas as rotinas computacionais escritas em linguagem Matlab (Mathworks, 2018) são executadas em um notebook Intel Core i5-8265U @ 1.60 GHz, com 8 GB de memória.

O erro global entre as soluções numéricas e as soluções de referência são calculados pela norma euclidiana (L2) relativa, de acordo com:

$$Erro\ Global\ [\%] = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[X_{ref}(i) - X_{MoM}(i) \right]^2}{\sum_{i=1}^{N} \left[X_{ref}(i) \right]^2} \right\}^{1/2} \times 100 \qquad (5.1)$$

Já o erro relativo entre soluções em um único ponto, como aquele utilizado na medição dos valores de campo máximo, é obtido diretamente pela diferença relativa dos resultados:

$$Erro\ Relativo\ [\%] = \frac{(X_{ref} - X_{MoM})}{X_{ref}} \times 100 \qquad (5.2)$$

5.2 Validação do Cômputo do Campo Elétrico

Para a validação do cômputo do campo elétrico, uma LT de 500 kV do sistema de Furnas, em delta, com um feixe de quatro condutores em cada fase, é analisada. Na Figura 4.1, pode ser vista a silhueta da linha e o posicionamento dos cabos condutores e dos cabos de guarda. A Tabela 5.1 resume os dados da linha.

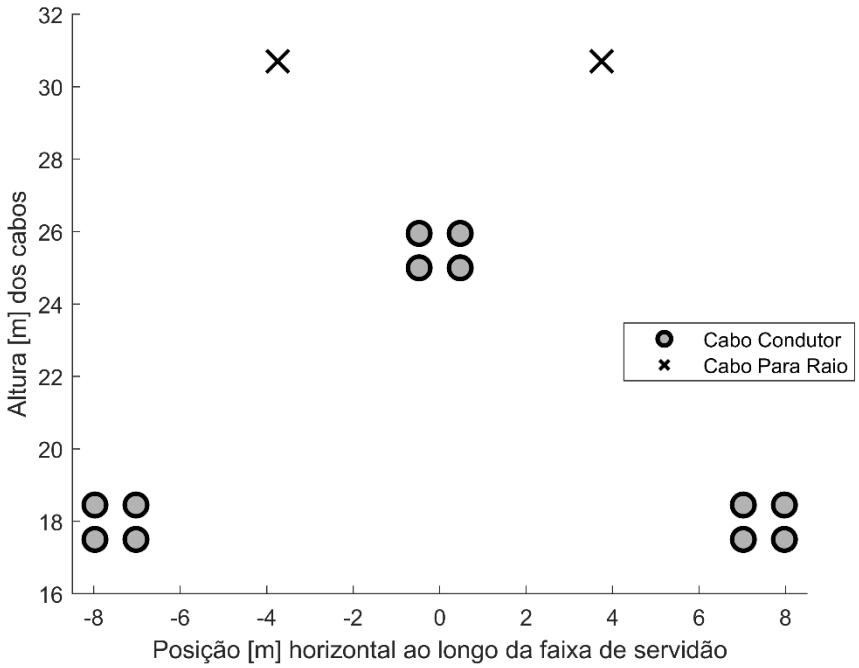

Figura 5.1 – Configuração geométrica dos condutores da LT de 500 kV de Furnas.

Posição	Fase A	Fase B	Fase C	Para Raios
Horizontal [m]	-7,975	-0,475	7,975	-3,75
	-7,025	0,475	7,025	3,75
	-7,025	0,475	7,025	-
	-7,975	-0,475	7,975	-
Vertical [m]	18,45	25,95	18,45	30,7
	18,45	25,95	18,45	30,7
	17,50	25,00	17,50	-
	17,50	25,00	17,50	-
Raio [m]	0,01437			0,00476

Tabela 5.1 – Dados geométricos dos condutores da LT de 500 kV de Furnas.

Para análise inicial da linha, a tensão nominal de operação (500 kV) é considerada, os cabos para raios são desprezados, e os condutores são considerados circulares regulares. Tal situação é a mais idealizada possível, sendo aquela utilizada na maioria dos estudos. Além disso, cada condutor da linha foi discretizado em 128 elementos de contorno.

A Figura 5.2 ilustra a malha de um dos condutores, feita no Gmsh (Geuzaine *et al*., 2009), e constituída por apenas 7 elementos (e 7 nós) de contorno, para melhor visualização, e evidencia a pequena quantidade de elementos necessária para os cálculos, uma vez que eles se dão apenas na fronteira.

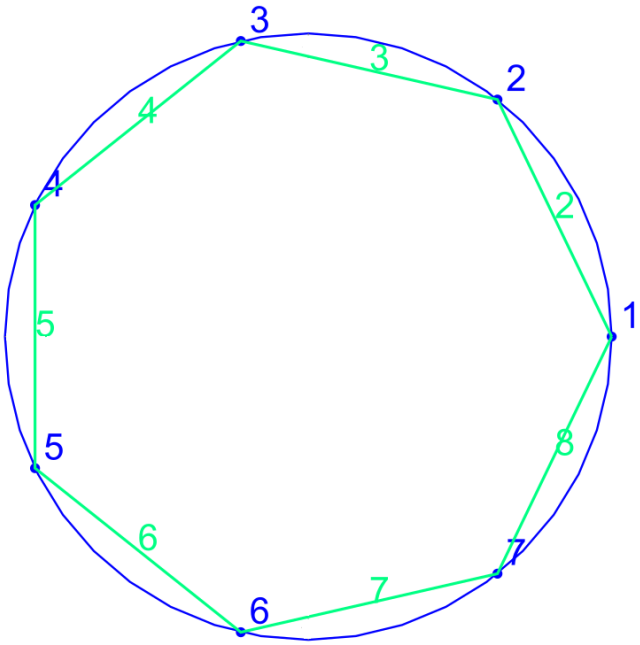

Figura 5.2 – Malha de elementos de contorno para condutor circular regular.

A superposição de todos os subdomínios do contorno nos permite construir o sistema de equações cuja solução fornece os campos elétricos desconhecidos na superfície dos condutores. O campo elétrico para cada ponto de observação ao nível do solo é posteriormente determinado de acordo com a equação (3.6.1).

A Figura 5.3 mostra as curvas comparativas para os níveis de campo elétrico à um metro de altura em relação ao nível do solo, obtidos através do método de

momentos e através do método analítico. E de forma a complementar à Figura 5.3, a Tabela 5.2 traz o erro global (norma euclidiana relativa) em relação aos resultados analíticos, considerando a avaliação dos resultados ao longo de 40 metros da faixa de servidão da linha (de -20 m a 20 m). Também é apresentado o erro e as posições relativas ao campo elétrico máximo, relevante para o projeto de linhas, e o qual é limitado por regulamentações específicas.

Erro (MoM x Analítico)	**Campo Máximo**			**Posição (Campo Máx.)**	
Global L2 rel. [%]	MoM [V/m]	Analítico [V/m]	Erro rel. [%]	MoM [m]	Analítico [m]
0,0629	4209,20	4210,94	0,0536	11,11	11,11

Tabela 5.2 – Intensidade do Campo Elétrico ao Nível do Solo – LT 500 kV Furnas.

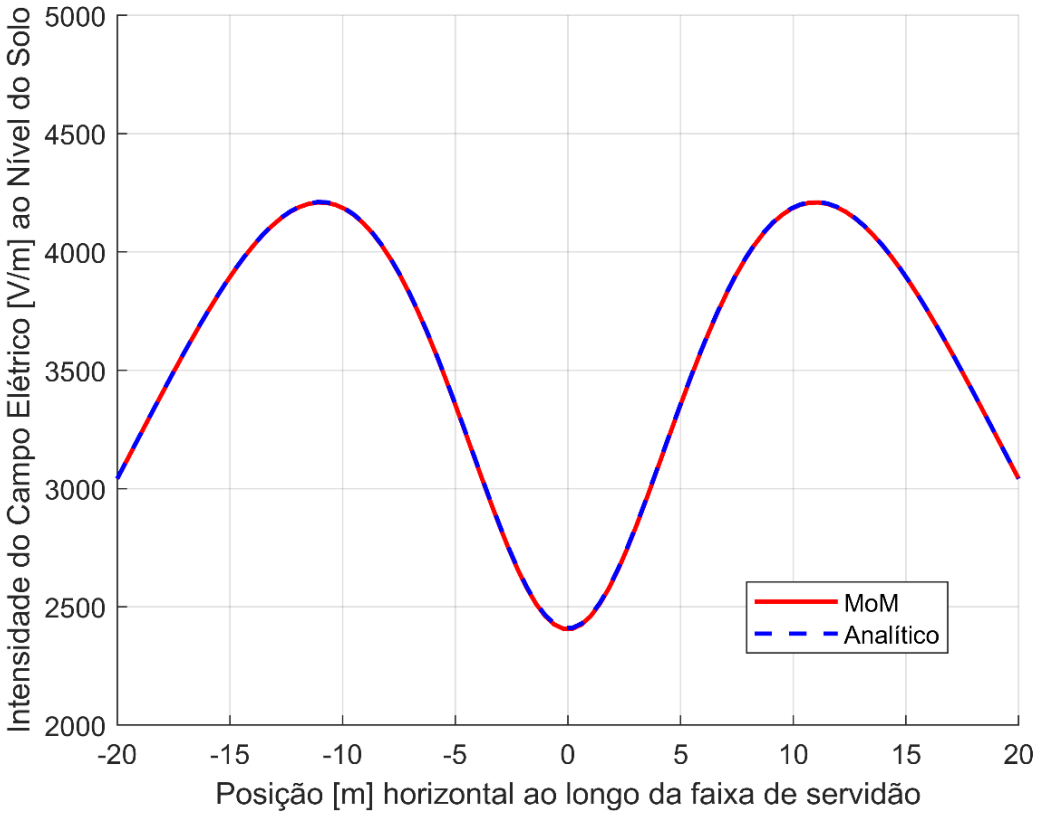

Figura 5.3 – Curvas de Intensidade do Campo Elétrico ao Nível do Solo ao longo da faixa de servidão - LT 500 kV Furnas.

São observadas na Figura 5.3 e na Tabela 5.2 uma excelente concordância entre os resultados de intensidade de campo elétrico ao nível do solo, a qual é ilustrada pelos perfis de campo sobrepostos na Figura 5.3, e comprovada pelos erros relativos (global e de campo máximo) calculados, menores que 0,1%.

O cálculo do campo elétrico na superfície dos cabos condutores com o método de momentos é comparado com o método semi analítico (Método das Imagens Sucessivas) (Paganotti *et al.*, 2012; Sarma *et al.*, 1969). Os gráficos dos campos superficiais para os condutores da fase A são mostrados na Figura 5.4. Para todos os condutores, nota-se uma grande concordância acerca dos resultados obtidos com ambas as metodologias.

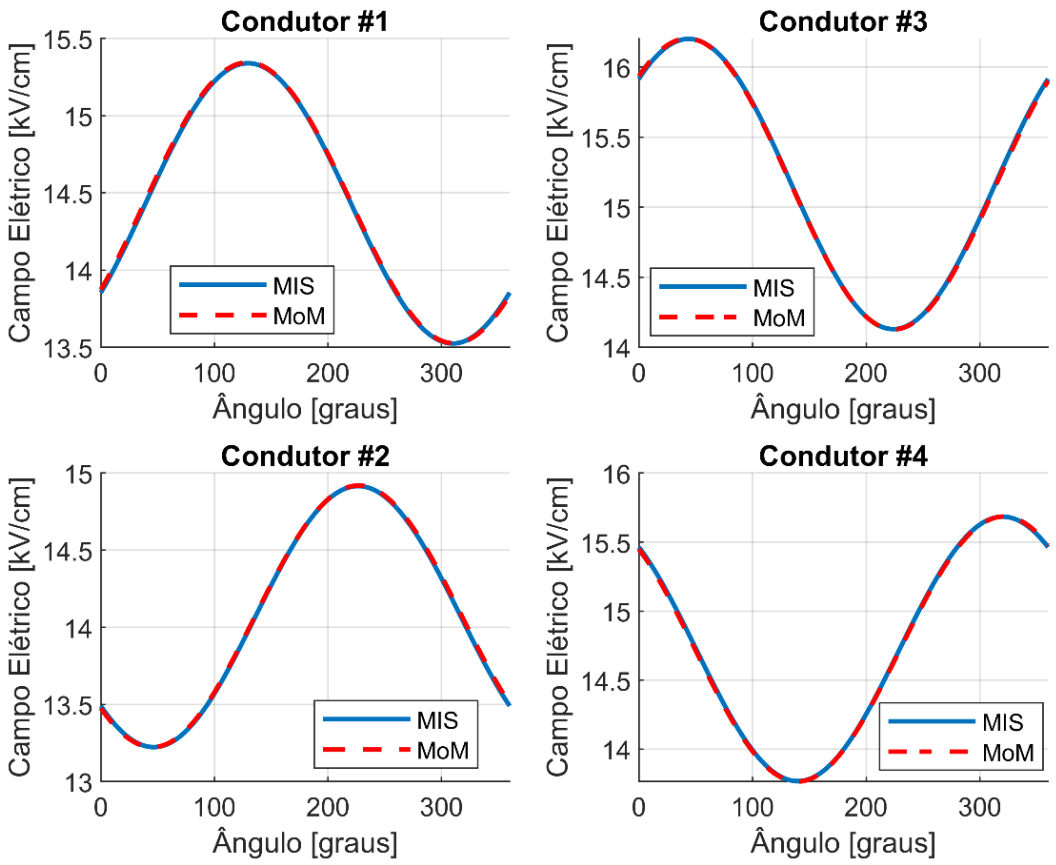

Figura 5.4 – Curvas de intensidade do campo elétrico na superfície dos cabos da Fase A – LT 500 kV Furnas.

A Tabela 5.3 apresenta os erros entre as abordagens de cálculo de campo superficial, considerando-se a avaliação em toda a superfície de cada condutor (de 0° a 360°), de forma a complementar às curvas vistas na Figura 5.4. Também são apresentados o erro e as posições para o valor de campo elétrico máximo superficial, para todos os condutores da linha. O campo elétrico superficial máximo é de suma relevância para o projeto, estando associado às perdas por efeito corona, e o qual não deve ultrapassar o valor crítico.

O erro global máximo é observado sobre a superfície do sétimo condutor da linha, e é menor que 0,3%. E da mesma forma, com relação ao campo máximo, o maior erro relativo (menor que 0,25%) também é observado sobre o sétimo condutor.

Feixe	**Condutor**	**Erro (MoM x MIS)**	**Campo Máximo**			**Ângulo (Campo Máx.)**	
		Global L2 rel. [%]	MoM [kV/cm]	MIS [kV/cm]	Erro rel. [%]	MoM [°]	MIS [°]
A	1	0,0787	15,345	15,340	0,035	130,4	130,4
	2	0,0678	14,919	14,916	0,023	226,8	226,8
	3	0,0668	16,204	16,200	0,018	42,5	42,5
	4	0,0676	15,685	15,684	0,0062	320,3	320,3
B	5	0,1901	15,465	15,499	0,22	138,9	138,9
	6	0,1409	16,490	16,517	0,16	229,6	229,6
	7	0,2587	15,465	15,499	0,22	39,7	39,6
	8	0,2044	16,490	16,517	0,16	311,8	311,8
C	9	0,1072	16,204	16,196	0,05	136,1	136,1
	10	0,0971	15,685	15,679	0,04	221,1	221,1
	11	0,0615	15,345	15,337	0,05	48,2	51,0
	12	0,0533	14,919	14,913	0,04	314,6	314,6

Tabela 5.3 – Campo Elétrico Superficial – LT 500 kV Furnas.

Embora os valores alcançados pelo método de momentos no cálculo dos níveis de campo elétrico superficiais e ao nível do solo tenham sido precisos em comparação com os resultados analíticos, é interessante apurar como algumas variáveis consideradas no modelo de cômputo influenciam os resultados numéricos e o tempo de processamento computacional, como é feito nas análises de sensibilidade a seguir.

5.2.1 Análises de Sensibilidade

Os próximos subtópicos dizem respeito às análises das alterações dos resultados obtidos pelo método de momentos em relação aos seguintes fatores do modelo: presença dos cabos para raios; nível de refinamento da malha de elementos de contorno; e tipo de elementos de contorno utilizados.

5.2.1.1 Consideração dos Cabos Para Raios

A consideração dos cabos para raios através do método de momentos não acarreta nenhuma dificuldade adicional, sendo necessário apenas a sua inserção na malha de elementos de contorno.

A torre da linha de Furnas, com 4 subcondutores por fase, vista na Figura 5.1, é novamente considerada, mas agora incluindo os dois cabos de guarda no modelo.

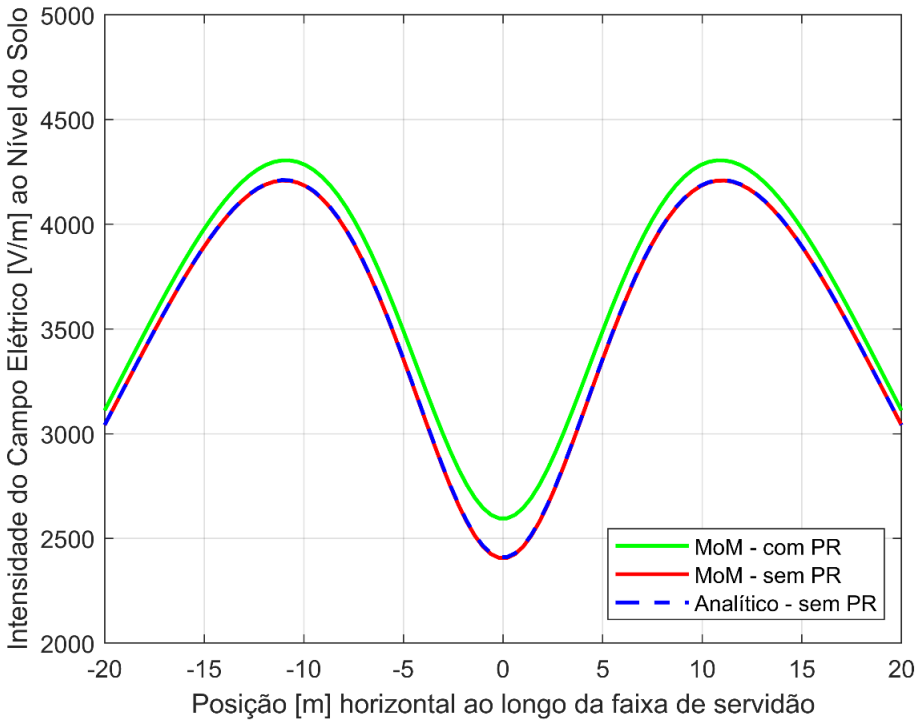

Figura 5.5 - Curvas de Intensidade de Campo Elétrico ao nível do solo com e sem a consideração dos cabos para raios – LT 500 kV Furnas.

A Figura 5.5 apresenta os níveis de campo elétrico ao nível do solo ao longo da faixa de servidão da linha, com e sem presença dos cabos de guarda, comparativamente ao resultado analítico.

O cálculo dos erros globais em relação ao método analítico, e em relação ao próprio MoM, com e sem a consideração dos condutores para raios, incluindo o erro e as posições relativas ao campo elétrico máximo à um metro de altura do solo, são dados pelas Tabelas 5.4 e 5.5 a seguir.

Erro (MoM x Analítico)	**Campo Máximo**			**Posição (Campo Máx.)**	
Global L2 rel. [%]	MoM c/ PR [V/m]	Analítico [V/m]	Erro rel. [%]	MoM c/ PR [m]	Analítico [m]
3,21	4305,10	4210,94	2,24	10,71	-11,11

Tabela 5.4 – Campo elétrico ao nível do solo com para raios – LT 500 kV Furnas.

Erro (MoM x MoM)	**Campo Máximo**			**Posição (Campo Máx.)**	
Global L2 rel. [%]	MoM c/ PR [V/m]	MoM [V/m]	Erro rel. [%]	MoM c/ PR [m]	MoM [m]
3,27	4305,10	4209,20	2,28	10,71	-11,11

Tabela 5.5 – Campo elétrico numérico ao nível do solo com e sem para raios – LT 500 kV Furnas.

É observado um leve aumento, de variação máxima pouco maior que 2%, nos valores das intensidades de campo elétrico ao nível do solo, quando na presença dos cabos de guarda.

A Figura 5.6 apresenta os níveis de campo elétrico superficial sobre cada um dos condutores do feixe da fase A. Os erros e os campos máximos, e suas respectivas posições, para todos os condutores, são encontrados nas Tabelas 5.6 e 5.7.

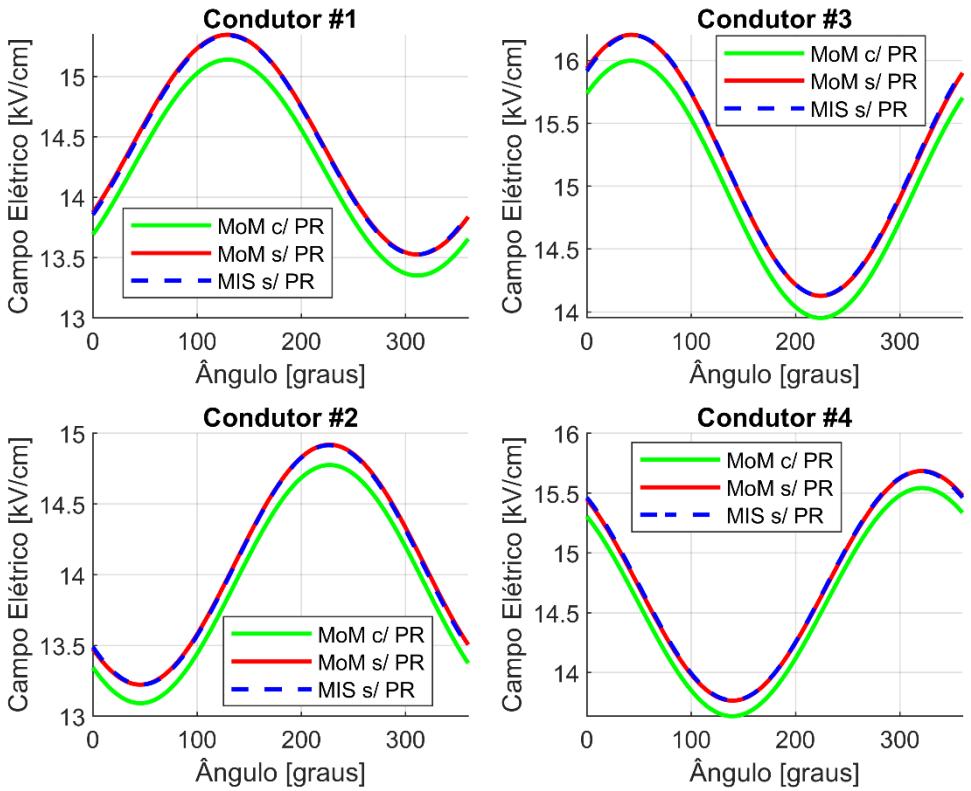

Figura 5.6 – Curvas de intensidade do campo elétrico na superfície dos condutores da Fase A, com e sem a consideração dos cabos para raios – LT 500 kV Furnas.

Feixe	Condutor	Erro (MoM x MIS)	Campo Máximo			Ângulo (Campo Máx.)	
		Global L2 rel. [%]	MoM c/ PR [kV/cm]	MIS s/ PR [kV/cm]	Erro rel. [%]	MoM c/ PR [°]	MIS s/ PR [°]
A	1	1,27	15,14	15,34	1,31	130,4	130,4
	2	0,93	14,78	14,92	0,94	226,8	226,8
	3	1,29	16,00	16,20	1,25	42,5	42,5
	4	0,97	15,54	15,68	0,90	320,3	320,3
B	5	7,69	16,70	15,50	7,76	136,1	138,9
	6	5,16	17,34	16,52	5,00	226,8	229,6
	7	7,61	16,70	15,50	7,76	42,5	39,7
	8	5,09	17,34	16,52	5,00	314,6	311,8
C	9	1,17	16,00	16,20	1,22	136,1	136,1
	10	0,85	15,54	15,68	0,87	221,1	221,1
	11	1,30	15,14	15,34	1,29	48,2	51,0
	12	0,96	14,78	14,91	0,92	314,6	314,6

Tabela 5.6 – Campo Elétrico Superficial – Consideração dos cabos para raios (MoM c/ PR vs MIS s/ PR) – LT 500 kV Furnas.

Feixe	Condutor	Erro (MoM x MoM)	Campo Máximo			Ângulo (Campo Máx.)	
		Global L2 rel. [%]	MoM c/ PR [kV/cm]	MoM s/ PR [kV/cm]	Erro rel. [%]	MoM c/ PR [°]	MoM s/ PR [°]
A	1	1,32	15,14	15,35	1,34	130,4	130,4
	2	0,98	14,78	14,92	0,96	226,8	226,8
	3	1,26	16,00	16,20	1,27	42,5	42,5
	4	0,93	15,54	15,69	0,90	320,3	320,3
B	5	7,89	16,70	15,46	8,00	136,1	138,9
	6	5,30	17,34	16,49	5,17	226,8	229,6
	7	7,89	16,70	15,46	8,00	42,5	39,7
	8	5,30	17,34	16,49	5,17	314,6	311,8
C	9	1,26	16,00	16,20	1,27	136,1	136,1
	10	0,93	15,54	15,69	0,91	221,1	221,1
	11	1,32	15,14	15,35	1,34	48,2	48,2
	12	0,98	14,78	14,92	0,96	314,6	314,6

Tabela 5.7 – Campo Elétrico Superficial – Consideração Dos Cabos Para Raios (MoM c/ PR vs MoM s/ PR) – LT 500 kV Furnas.

A consideração dos cabos para raios incorreu em erros relativos máximos de até quase 8% para os níveis de campo elétrico superficial sobre os condutores do feixe central, enquanto que o desvio máximo para os condutores das fases laterais foi de 1,3%, tanto em relação ao próprio Método de Momentos quanto em relação ao Método das Imagens Sucessivas.

Dessa maneira, embora os níveis de campo ao nível do solo sejam menos afetados pela presença dos cabos de guarda, e embora a maioria dos trabalhos desprezem os cabos para raios na avaliação de campo elétrico das linhas, simplificando o modelo analítico, tal escolha pode incorrer em erros consideráveis em alguns pontos, no que se refere ao campo superficial. Na Figura 5.7, pode-se observar os níveis de campo na superfície do quinto condutor da linha, pertencente à fase central, onde os maiores desvios foram medidos.

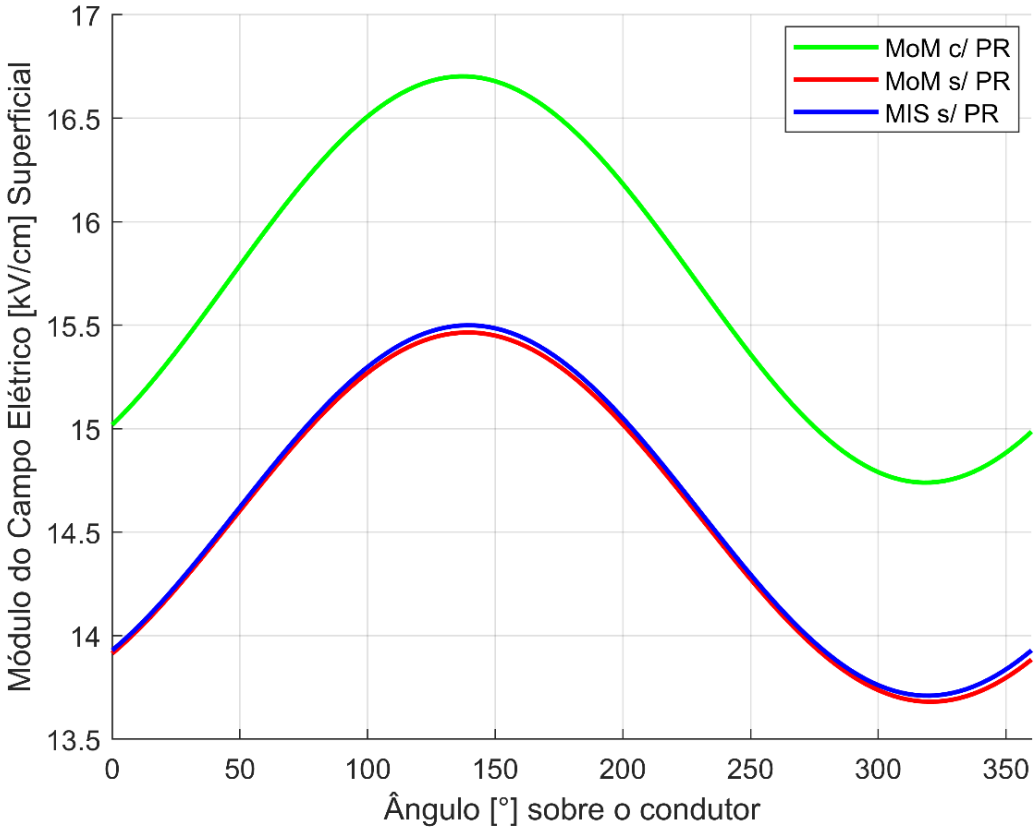

Figura 5.7 – Curvas de intensidade do campo elétrico na superfície do quinto condutor (fase central), com e sem a consideração dos cabos para raios – LT 500 kV Furnas.

5.2.1.2 Refinamento da Malha de Elementos de Contorno

Resultados numéricos para níveis de discretização diversos são apresentados na Tabela 5.8, que resume os erros globais para os condutores da fase A, e para o campo elétrico ao nível do solo, tomando-se como referência os métodos analíticos. Também é informado o tempo total de processamento em cada situação, calculado através da média de tempo de cinco execuções consecutivas do algoritmo.

Nº Elms	Nº Nós	Feixe da Fase A				Solo	Tempo Total
		Condutor 1	Condutor 2	Condutor 3	Condutor 4		
		Erro Global Normalizado Rel. [%]	Erro Global Normalizado Rel. [%]	Erro Global Normalizado Rel. [%]	Erro Global Normalizado Rel. [%]	Erro Global Normalizado Rel. [%]	[s]
192	192	2,91	2,92	1,81	1,78	0,51	0,073
384	384	0,94	0,92	0,53	0,48	0,17	0,15
768	768	0,36	0,34	0,23	0,21	0,09	0,36
1536	1536	0,16	0,15	0,12	0,12	0,07	1,17
3072	3072	0,08	0,07	0,07	0,07	0,06	4,09
6144	6144	0,04	0,03	0,04	0,04	0,06	16,41

Tabela 5.8 – Análise de Sensibilidade por Refinamento da Malha – Erros Globais Normalizados (norma L2) Relativos às referências, e os Tempo de Processamento – LT 500 kV Furnas.

De forma complementar à Tabela 5.8, a Tabela 5.9 dispõe de informações dos campos elétricos máximos em cada situação, incluindo os erros relativos às referências.

Nº Elms	Nº Nós	Feixe da Fase A								Solo	
		Condutor 1		Condutor 2		Condutor 3		Condutor 4			
		[kV/cm]	Erro rel. [%]	[kV/cm]	Erro rel. [%]	[kV/cm]	Erro rel. [%]	[kV/cm]	Erro rel. [%]	[V/m]	Erro rel. [%]
192	192	15,60	2,21	15,15	1,96	16,43	1,45	15,93	1,71	4190,7	0,48
384	384	15,41	0,54	14,98	0,50	16,26	0,37	15,75	0,48	4204,4	0,15
768	768	15,36	0,15	14,93	0,15	16,22	0,11	15,71	0,14	4208,0	0,07
1536	1536	15,35	0,05	14,92	0,05	16,21	0,04	15,69	0,02	4209,0	0,05
3072	3072	15,35	0,04	14,92	0,02	16,20	0,02	15,69	0,01	4209,2	0,04
6144	6144	15,34	0,03	14,92	0,02	16,20	0,01	15,68	0,00	4209,3	0,04

Tabela 5.9 – Análise de Sensibilidade por Refinamento da Malha – Campo Elétrico Máximo – LT 500 kV Furnas.

São também apresentados os comportamentos gráficos dos resultados tabelados, de acordo com as Figuras 5.8 e 5.9. Pode-se perceber na Figura 5.8 que o perfil de campo elétrico ao nível do solo é caracterizado precisamente, mesmo para malhas grosseiras, ilustrando os erros globais e máximos menores que 0,5% vistos nas tabelas 5.8 e 5.9. Observa-se, ainda, que os resultados de campo ao nível do solo já são satisfatórios para a malha mais esparsa considerada (primeira linha das tabelas 5.8 e 5.9).

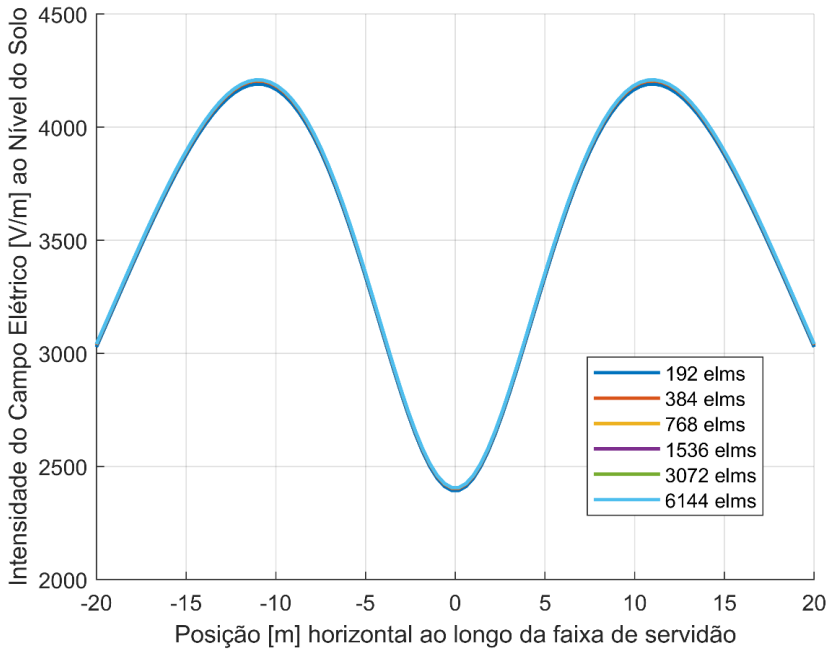

Figura 5.8 – Campo Elétrico ao Nível do Solo – Análise de Sensibilidade por Nível de Discretização – LT 500 kV Furnas.

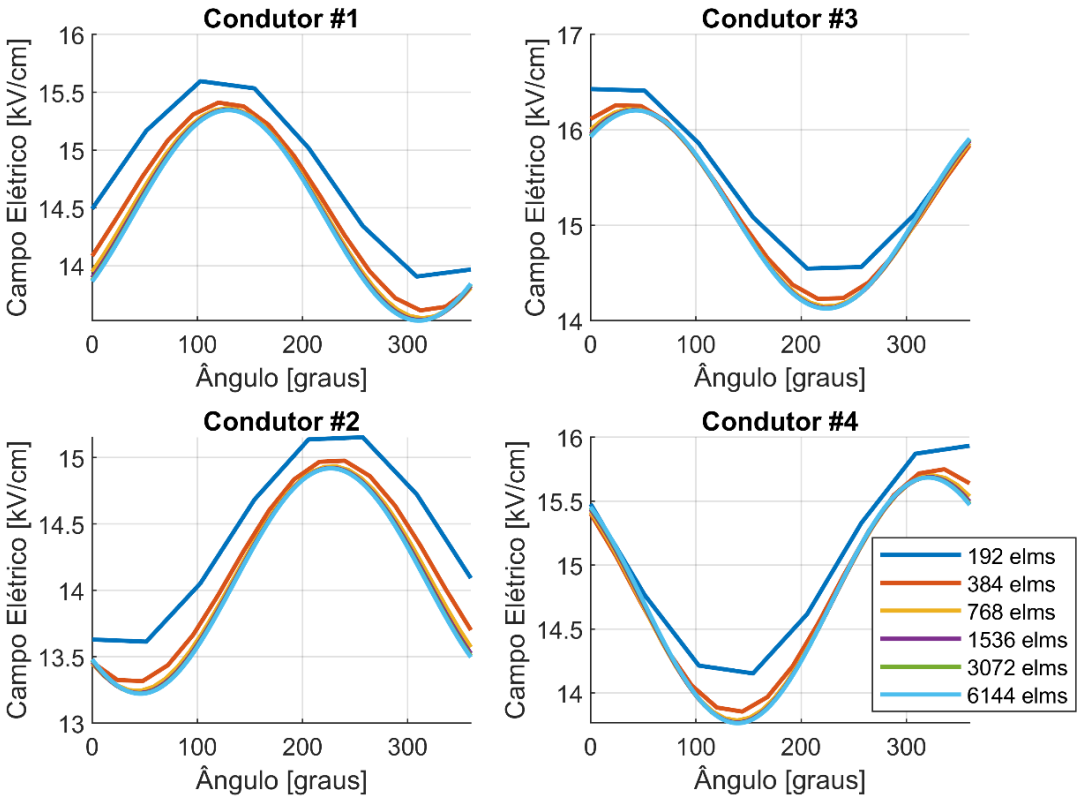

Figura 5.9 – Campo Elétrico Superficial na Fase A – Análise de Sensibilidade por Nível de discretização – LT 500 kV Furnas.

Observa-se que malhas pouco densas também já geram resultados satisfatórios para o campo elétrico superficial, mas nesse caso consegue-se claramente observar a convergência das curvas da Figura 5.9, à medida em que a quantidade de elementos de contorno da malha aumenta, e os erros tabelados diminuem.

A Figura 5.10 ilustra o crescimento do esforço computacional, com o aumento do número de elementos, segundo os resultados já apresentados.

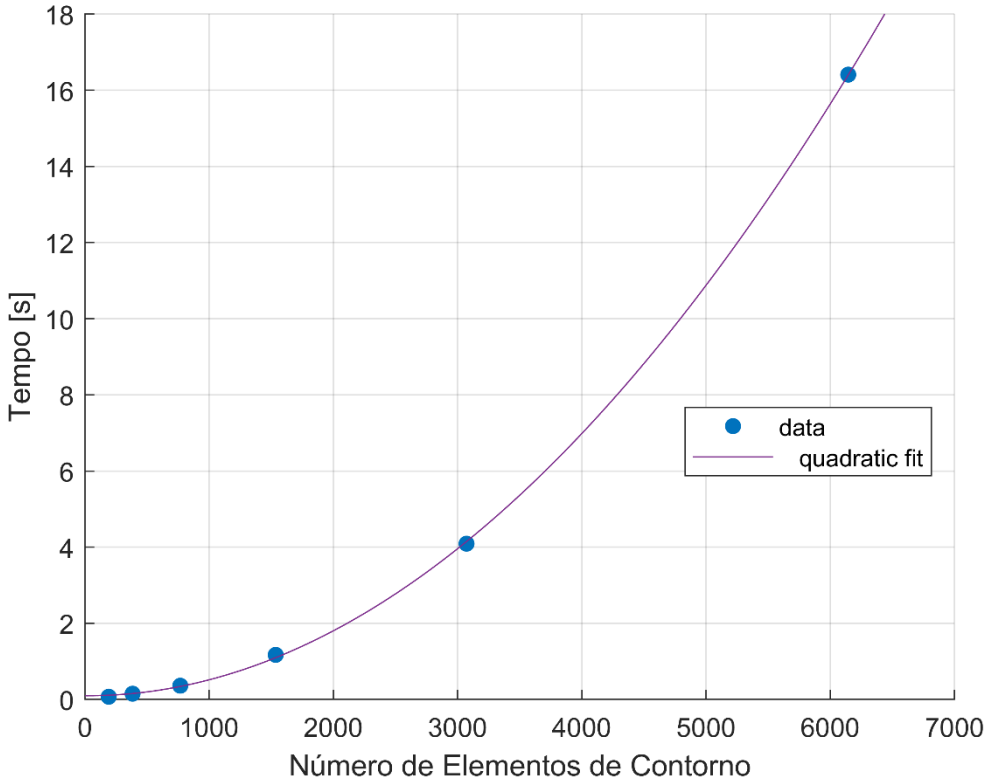

Figura 5.10 – Esforço Computacional por Nível de Discretização – LT 500 kV Furnas.

Pode ser visto que o esforço computacional aumenta de forma quadrática em função da quantidade de elementos da malha, em virtude da montagem das matrizes de influência.

Ainda, discriminou-se o tempo de execução de cada bloco funcional do algoritmo. O algoritmo completo é subdivido em basicamente 4 etapas, as quais juntas totalizam os tempos vistos na Figura 5.10, e na Tabela 5.10. Estas etapas, em ordem,

são: A Definição e Discretização da Geometria, A Montagem das Matrizes de Influência, A Solução do Sistema Linear para o Campo Superficial, e o Cálculo do Campo Elétrico ao Nível do Solo. Observa-se que a montagem das matrizes de influência (que são cheias) e o cálculo do campo ao nível do solo (que também envolve a montagem de novas matrizes de influência), são responsáveis pela maioria do tempo de processamento.

		Tempo de Processamento								
Número de Elementos	**Número de Nós**	**Definição e Discretização da Geometria**		**Montagem das Matrizes de Influência**		**Solução do Sistema Linear p/ o Campo Superficial**		**Cálculo do Campo ao Nível do Solo**		**Total**
		[s]	**[%]**	**[s]**	**[%]**	**[s]**	**[%]**	**[s]**	**[%]**	**[s]**
192	192	0,0044	6,00	0,030	41,02	0,00079	1,09	0,038	51,85	0,073
384	384	0,0081	5,11	0,086	53,80	0,0033	2,06	0,062	39,03	0,15
768	768	0,013	3,66	0,24	66,52	0,012	3,35	0,097	26,47	0,36
1536	1536	0,025	2,14	0,89	76,32	0,06	4,90	0,19	16,64	1,17
3072	3072	0,047	1,14	3,45	83,12	0,29	7,10	0,36	8,64	4,09
6144	6144	0,11	0,68	13,73	83,68	1,98	12,05	0,59	3,59	16,41

Tabela 5.10 – Esforço Computacional por Nível de Discretização e Função Algorítmica – LT 500 kV Furnas.

5.2.1.3 Tipo de Elementos de Contorno

A próxima análise refere-se à sensibilidade dos resultados de acordo com o tipo de elemento utilizado na discretização do domínio, no intuito de serem avaliadas possibilidades de resultados ainda mais precisos.

A Figura 5.11 apresenta os resultados comparativos para o campo elétrico ao nível do solo, e a Figura 5.12 apresenta os resultados comparativos para os campos elétricos na superfície dos condutores do feixe da fase A, levando-se em conta a utilização de elementos de ordem zero e de ordem um (elementos constantes e lineares, respectivamente).

São também apresentados na Tabela 5.11 os erros globais e os tempos médios de processamento, para diferentes tamanhos de malha, considerando-se elementos

de contorno lineares. Novamente, são tidas como referências as soluções analíticas. Ademais, a Tabela 5.12 dispõe as informações dos campos elétricos máximos superficiais e ao nível do solo, incluindo o erro relativo aos resultados de referência.

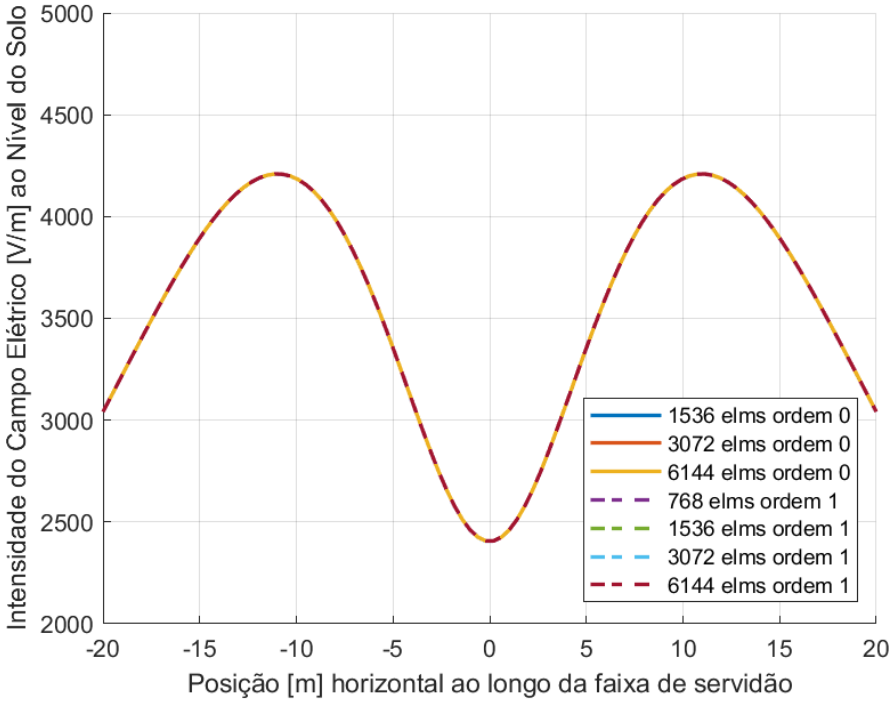

Figura 5.11 - Campo Elétrico ao Nível do Solo – Análise de Sensibilidade por Tipo de Elementos – LT 500 kV Furnas.

Nº Elms	Nº Nós	Feixe da Fase A				Solo	Tempo Total
		Condutor 1	Condutor 2	Condutor 3	Condutor 4		
		Erro Global [%]	Erro Global [%]	Erro Global [%]	Erro Global [%]	Erro Global [%]	[s]
768	768	0,50	0,04	0,31	0,40	0,065	0,8
1536	1536	0,26	0,20	0,19	0,24	0,060	2,3
3072	3072	0,14	0,11	0,11	0,13	0,060	8,0
6144	6144	0,07	0,06	0,06	0,07	0,060	33,3

Tabela 5.11 – Análise de Sensibilidade para Elementos de Contorno Lineares - Erro Global e Tempo de Processamento – LT 500 kV Furnas.

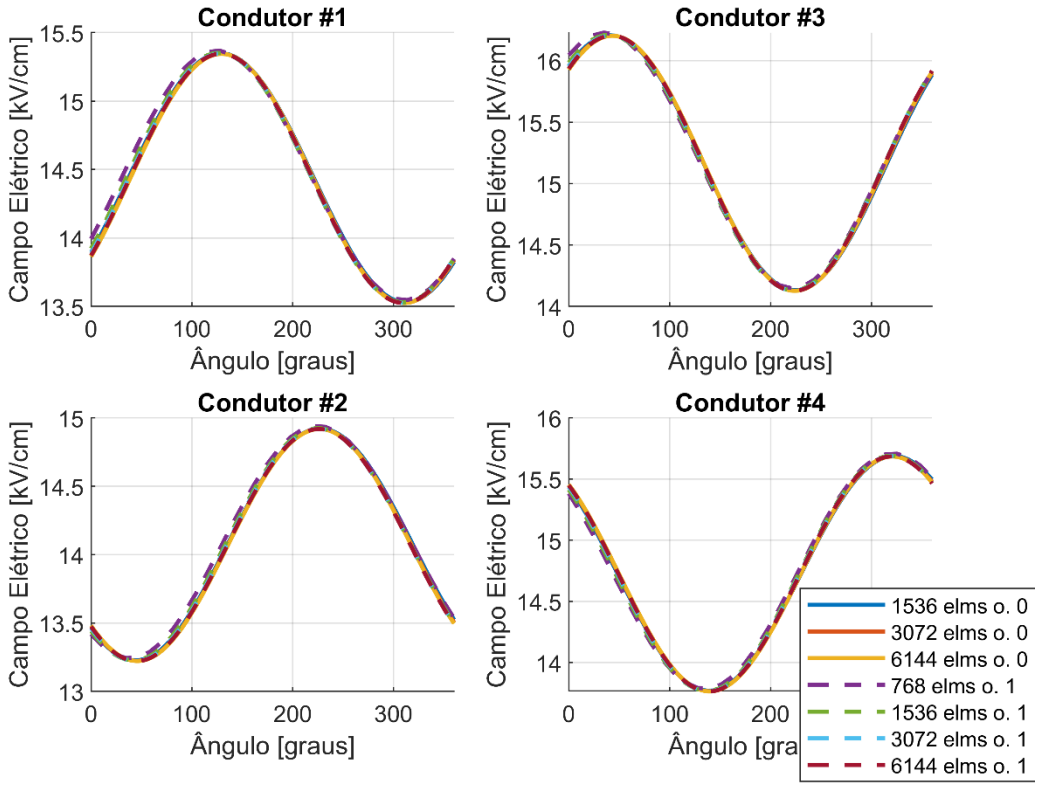

Figura 5.12 - Campo Elétrico na Superfície dos Condutores da Fase A – Análise de Sensibilidade por Tipo de Elementos – LT 500 kV Furnas.

Nº Elms	Nº Nós	Feixe da Fase A								Solo	
		Condutor 1		Condutor 2		Condutor 3		Condutor 4			
		[kV/cm]	Erro rel. [%]	[kV/cm]	Erro rel. [%]	[kV/cm]	Erro rel. [%]	[kV/cm]	Erro rel. [%]	[V/m]	Erro rel. [%]
768	768	15,37	0,18	14,94	0,19	16,23	0,18	15,71	0,17	4209,1	0,04
1536	1536	15,35	0,08	14,92	0,06	16,21	0,06	15,69	0,05	4209,3	0,04
3072	3072	15,35	0,04	14,92	0,03	16,21	0,03	15,69	0,01	4209,3	0,04
6144	6144	15,35	0,03	14,92	0,02	16,20	0,02	15,69	0,01	4209,3	0,04

Tabela 5.12 – Análise de Sensibilidade para Elementos de Contorno Lineares – Análise de Campo Elétrico Máximo – LT 500 kV Furnas.

Os resultados encontrados tanto para elementos constantes (Tabelas 5.8 e 5.9) quanto para elementos lineares (Tabelas 5.11 e 5.12), considerando-se a mesmas quantidades de nós, mostram-se precisos, independentemente da quantidade de elementos. Para as malhas menos densas, a utilização de elementos lineares incorreu em resultados ligeiramente mais precisos em relação às referências, às custas,

entretanto, de maior tempo de processamento. Contudo, deve-se notar que para o caso em questão a utilização de elementos lineares não se justifica, dados os erros satisfatórios encontrados para elementos constantes.

A Figura 5.13 apresenta as curvas de campo elétrico na superfície do quinto condutor (fase central). Observa-se um grande aumento relativo do campo máximo, de aproximadamente 8%, quando na presença dos cabos para raios, entretanto as curvas mostram-se muito próximas, mesmo para as menores malhas.

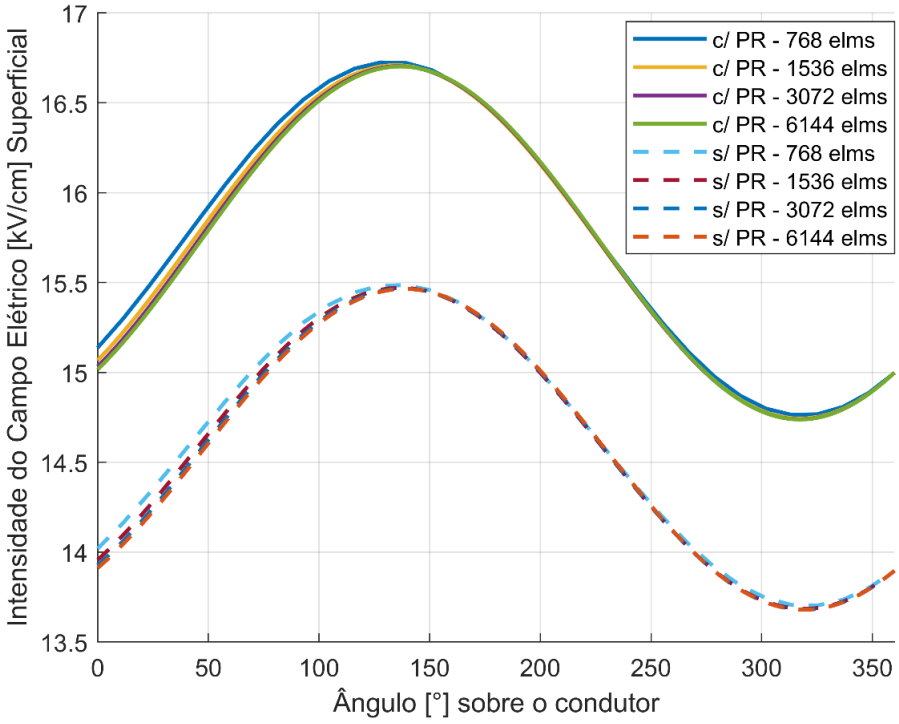

Figura 5.13 – Campo Superficial sobre o quinto condutor – com e sem a consideração dos cabos de guarda, para elementos lineares – LT 500 kV Furnas.

Os gráficos da Figura 5.14 ilustram a evolução dos tempos de solução para as situações com elementos de ordem zero e um, em função do número de nós da malha.

A análise apurando o número de nós como entrada do problema revela que o esforço computacional de solução, quando utilizando elementos de constantes, é mais baixo do que para os elementos lineares, entretanto ambos obedecem a uma lei de crescimento quadrática, em virtude dos *loops* aninhados que fazem a "assemblagem" das matrizes de influência. Deve-se notar, entretanto, que as linhas das matrizes de

influência são independentes, e podem ser calculadas concomitantemente, independentemente do tipo de elemento escolhido.

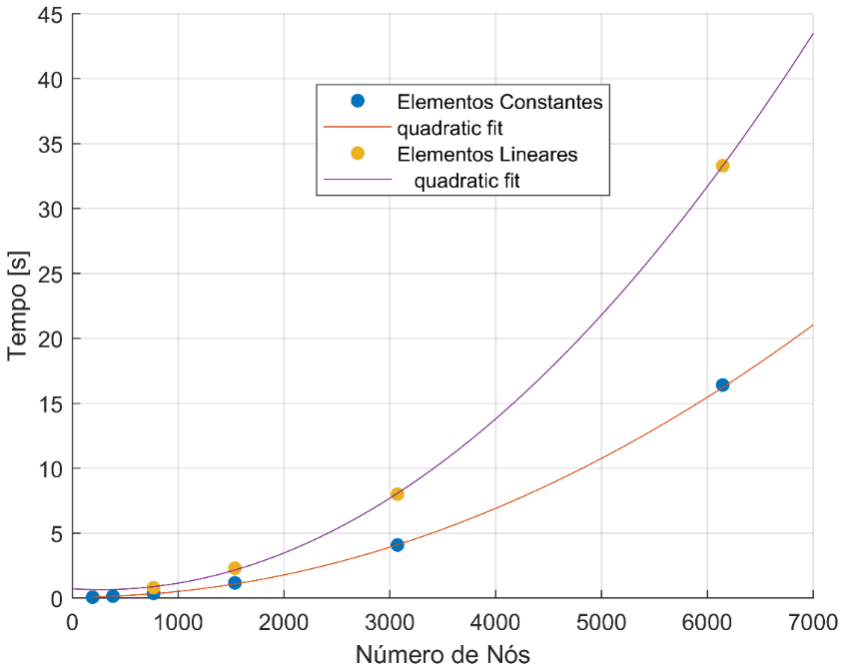

Figura 5.14 – Esforço Computacional – Análise de Sensibilidade por Tipo de Elementos – LT 500 kV Furnas.

5.3 Validação do Cômputo do Campo Magnético

Para a validação do cômputo do campo magnético utilizando o MoM, considera-se primeiramente a linha de transmissão de 500 kV da Hydro Québec, com configuração em delta, e feixes simétricos com 5 condutores em cada fase. A disposição dos condutores dessa linha é ilustrada na Figura 5.15, que representa a seção transversal dos feixes de condutores no ponto de maior proximidade do solo. Maiores detalhes da geometria da linha podem ser obtidos na Tabela 5.13, que fornece o tamanho das bitolas e os posicionamentos dos condutores e dos cabos de guarda na torre. A corrente máxima por fase considerada é igual a 4,68 kA (Farah *et al.*, 2014).

Como referência, é considerado o método analítico quase estático, à 60 Hz, e o efeito do solo é computado pelo método de plano de retorno pelo terra, que estabelece que a corrente transportada por cada condutor retorna pela terra por meio

do condutor imagem localizado abaixo do condutor real, à uma profundidade complexa de penetração, e para a qual tomou-se um solo de resistividade elétrica constante e igual à 1000 Ωm (Deri *et al*., 1981; Perro *et al.*, 2007; Paula *et al.*, 2018).

Além disso, para o MoM, foi considerada uma malha constituída de 64 elementos de contorno constantes (64 nós) sobre cada condutor, e uma quantidade de pontos de Gauss constante e igual a 4 para as integrações numéricas.

Posição	Fase A	Fase B	Fase C	Para Raios
Horizontal [m]	-5,854	0,000	5,854	-4,540
	-5,029	-0,465	5,029	4,540
	-5,344	-0,288	5,344	-
	-6,364	0,288	6,364	-
	-6,679	0,465	6,679	-
Vertical [m]	10,000	12,454	10,000	20,70
	10,648	12,788	10,648	20,70
	11,696	13,328	11,696	-
	11,696	13,328	11,696	-
	10,648	12,788	10,648	-
Raio [m]	0,01258			0,00457

Tabela 5.13 – Dados geométricos dos condutores da LT de 500 kV da Hydro-Québec.

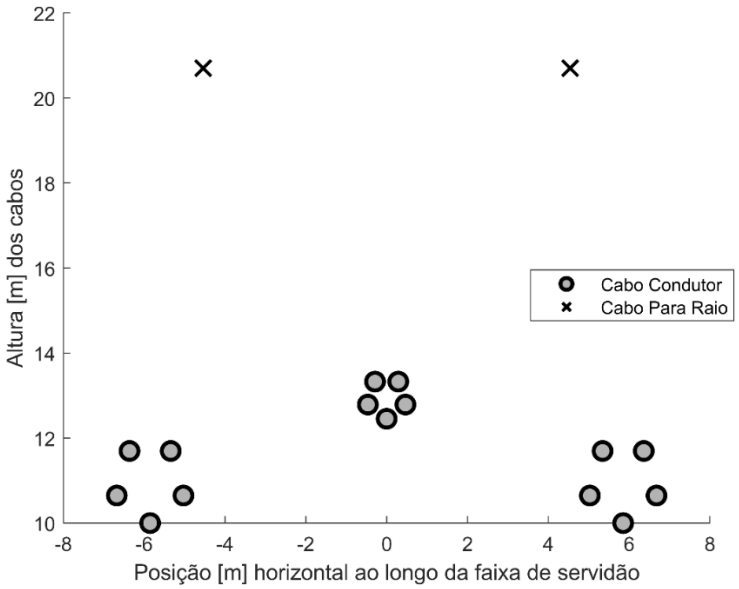

Figura 5.15 – Configuração da LT trifásica de 500 kV da Hydro-Québec.

A Figura 5.16 apresenta a comparação entre os resultados obtidos para a indução magnética à um metro de altura acima do solo. Adicionalmente, a Tabela 5.14 resume os erros encontrados, considerando-se a avaliação de resultados em 40 metros da faixa de passagem (de -20m a 20m). Também são apresentadas as informações relativas ao campo magnético máximo, essencial no projeto de linhas, e o qual é limitado por regulamentações específicas.

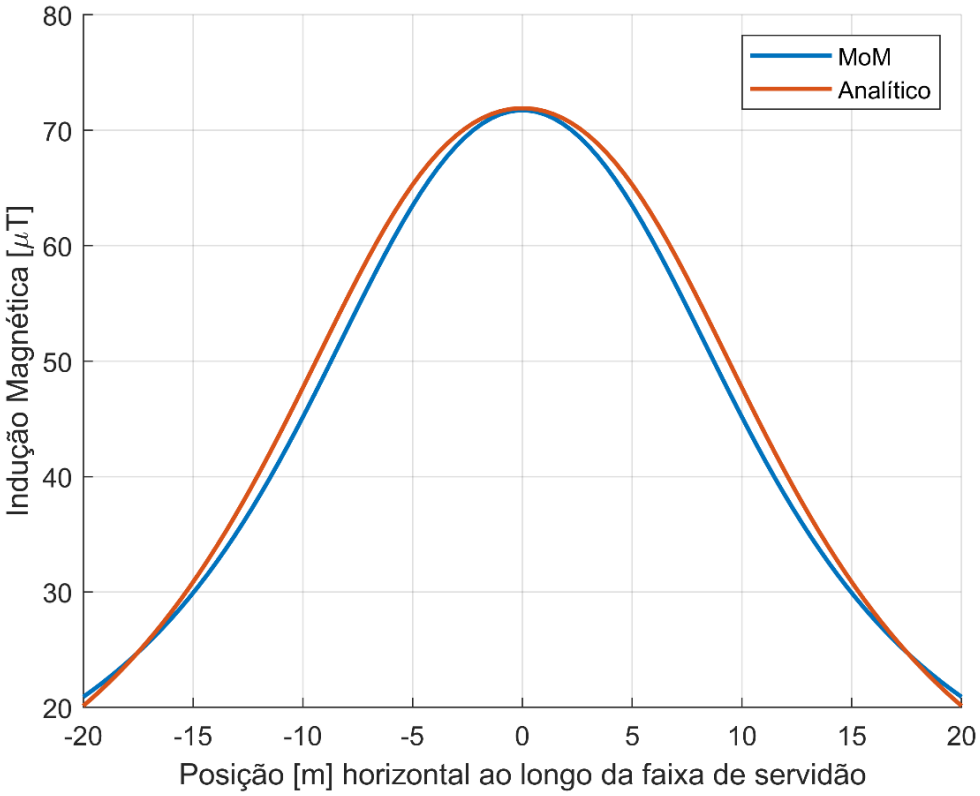

Figura 5.16 – Densidade de Fluxo Magnético ao Nível do Solo (MoM vs Analítico) – LT de 500 kV da Hydro-Québec.

É percebida uma boa concordância entre as metodologias para os resultados da densidade de fluxo magnético, a qual é notada pela proximidade dos perfis ao nível do solo ao longo de toda a faixa analisada, e através do baixo erro global relativo calculado. Para o campo magnético máximo, observa-se que o erro relativo é praticamente desprezível.

Erro (MoM x Analítico)	Campo Máximo			Posição (Campo Máx.)	
Global L2 rel. [%]	MoM [uT]	Analítico [uT]	Erro rel. [%]	MoM [m]	Analítico [m]
3,23	71,7	71,9	0,26	-0,2	-0,2

Tabela 5.14 – Densidade de Fluxo Magnético ao Nível do Solo – LT de 500 kV da Hydro-Québec.

A densidade de fluxo magnético também é calculada para a linha de 500 kV São Gonçalo do Pará – Ouro Preto, da CEMIG, que apresenta feixes de 3 condutores em cada fase, e pode ser vista na Figura 5.17. Os parâmetros da linha encontram-se na Tabela 5.15, a seguir. A corrente máxima por fase considerada é igual a 2,91 kA.

Figura 5.17 – Configuração da Linha de São Gonçalo do Pará – Ouro Preto.

A Figura 5.18 apresenta a comparação entre os resultados obtidos para a densidade de fluxo magnético à um metro de altura acima do solo. Adicionalmente, a Tabela 5.16 resume os parâmetros computados, considerando-se a avaliação de resultados ao longo de 70 metros da faixa de servidão.

Posição	Fase A	Fase B	Fase C	Para Raios
Horizontal [m]	-10,478	-0,228	10,478	-7,25
	-10,250	0,000	10,250	7,25
	-10,021	0,228	10,021	-
Vertical [m]	16,530	16,530	16,530	24,71
	16,758	16,758	16,758	24,71
	16,530	16,530	16,530	-
Raio [m]	0,01437			0,005555

Tabela 5.15 - Tabela de parâmetros da LT 500 kV São Gonçalo do Pará – Ouro Preto.

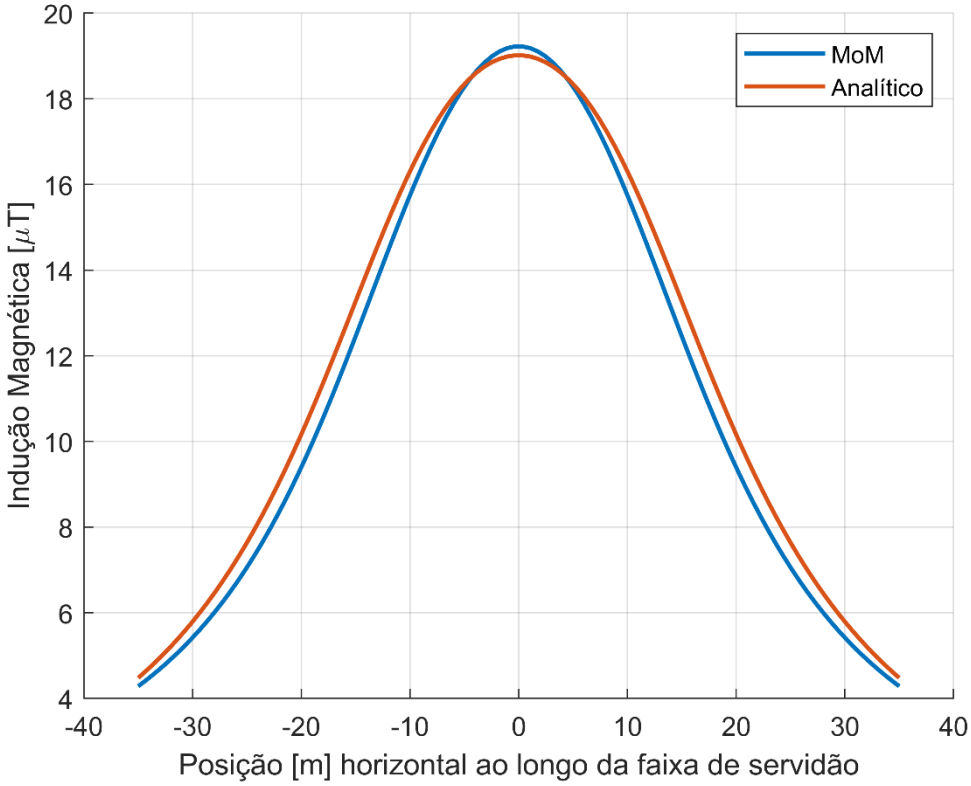

Figura 5.18 – Perfil da Densidade de Fluxo Magnético ao Nível do Solo – LT 500 kV São Gonçalo do Pará.

É percebida novamente uma boa concordância para os resultados da densidade de fluxo magnético entre as metodologias consideradas, de forma que o desvio relativo máximo é da ordem de 1%, e o erro global da solução é da ordem de 4%.

Erro (MoM x Analítico)	Campo Máximo			Posição (Campo Máx.)	
Global L2 rel. [%]	MoM [uT]	Analítico [uT]	Erro rel. [%]	MoM [m]	Analítico [m]
4,23	19,22	19,01	1,09	-0,35	-0,35

Tabela 5.16 – Densidade de Fluxo Magnético ao Nível do Solo – LT 500 kV São Gonçalo do Pará.

5.4 Otimização

Para a otimizar a linha, o campo elétrico ao nível do solo é tomado como função objetivo, como geralmente é feito, com o intuito de maximizar a potência natural da linha indiretamente.

A linha trifásica considerada é de 500 kV, com 5 subcondutores no feixe de cada fase, já descrita e estudada na análise de campo magnético. Os parâmetros considerados ao longo da otimização podem ser vistos na Tabela 5.17, a seguir e, de forma a simplificar o processo de otimização, os cabos de guarda foram desprezados.

A altura dos condutores é permitida variar um metro acima e abaixo das alturas máximas e mínimas originais, na faixa de 9,0 à 14,33 m, enquanto que as suas posições horizontais podem variar entre -6,68 e 6,68 metros. Além disso, uma distância mínima de 5,0 metros entre condutores de fases adjacentes deve ser respeitada, bem como uma distância mínima de 0,45 metros entre subcondutores de mesma fase, e o campo superficial crítico, calculado com a fórmula de Peek, deve ser de até 27,0 kV.

Na Figura 5.19, podem ser vistas as posições originais e otimizadas dos cabos condutores, considerando-se as duas abordagens propostas para a otimização no Capítulo 5.

Para a primeira técnica de otimização, que mantém a simetria do feixe original, é observado o aumento da altura dos feixes laterais, a fim de minimizar o campo ao nível do solo. Já para a segunda técnica, onde os condutores podem se mover livremente no espaço restringido, além do aumento da altura dos feixes em relação à altura original, observa-se uma ligeira aproximação entre as fases, e a expansão/contração dos feixes originais, tornando-os assimétricos e distintos entre si. Os campos oriundos dessas configurações dão origem aos perfis de campo elétrico observados à um metro acima do solo, apresentados na Figura 5.20.

Tensão de operação [kV]	500
Corrente máx. por fase [A]	4680
Nº de fases	3
Nº de condutores por fase	5
Raio do condutor [m]	0,01387
Limite lateral esquerdo [m]	-6,68
Limite lateral direito [m]	6,68
Altura mínima [m]	9,00
Altura máxima [m]	14,33
Distância mínima entre condutores de fases vizinhas [m]	5,0
Distância mínima entre condutores de mesma fase [m]	0,45
Campo elétrico superficial crítico [kV/cm]	27,0

Tabela 5.17 – Parâmetros de Otimização – Linha de 500 kV da Hydro-Québec.

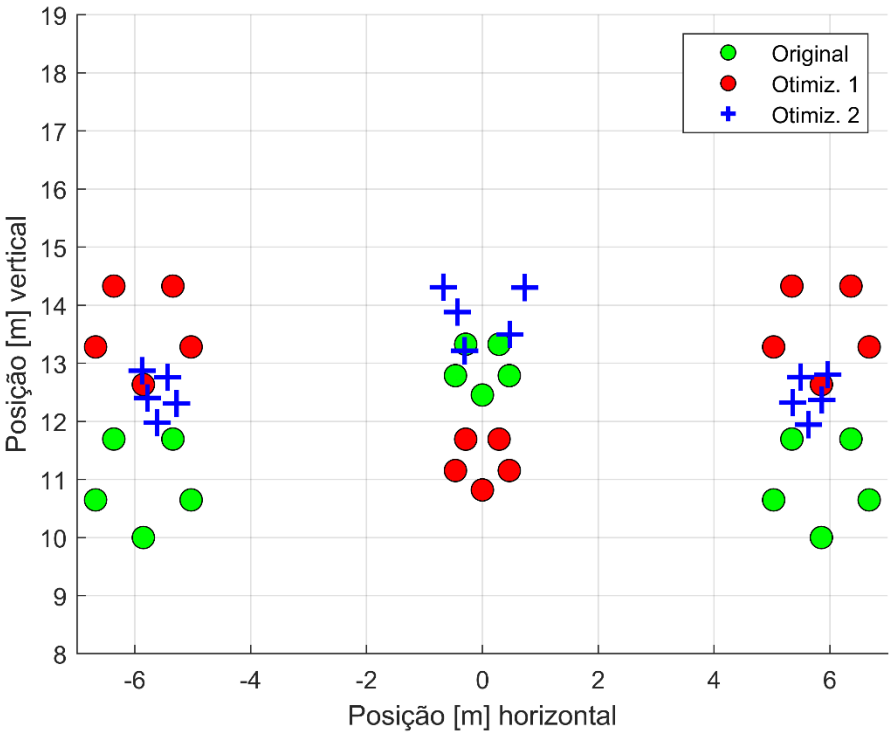

Figura 5.19 - Posições originais e otimizadas dos cabos condutores – LT trifásica de 500 kV da Hydro-Québec.

Para o campo elétrico ao nível do solo, observa-se uma acentuada redução de aproximadamente 4 kV/m nos picos de campo, e também são observadas reduções de campo significativas ao longo de grande parte da faixa de passagem considerada, para ambas as otimizações.

Os níveis de campo elétrico superficiais sobre os condutores originais e otimizados da fase A podem ser vistos na Figura 5.21. Nota-se que os campos superficiais também são alterados com a otimização das posições dos condutores, sendo o campo superficial máximo original igual a 17,30 kV/cm. Para a Otimização 1, o campo máximo superficial medido foi de 17,62 kV/cm, enquanto que para a Otimização 2, o campo máximo superficial medido foi de 19,43 kV/cm, valor esperadamente maior, devido à maior aproximação experimentada por alguns condutores. Apesar disso, os valores máximos de campo superficial para ambas as técnicas não ultrapassaram o valor crítico (27,0 kV/cm) imposto como restrição.

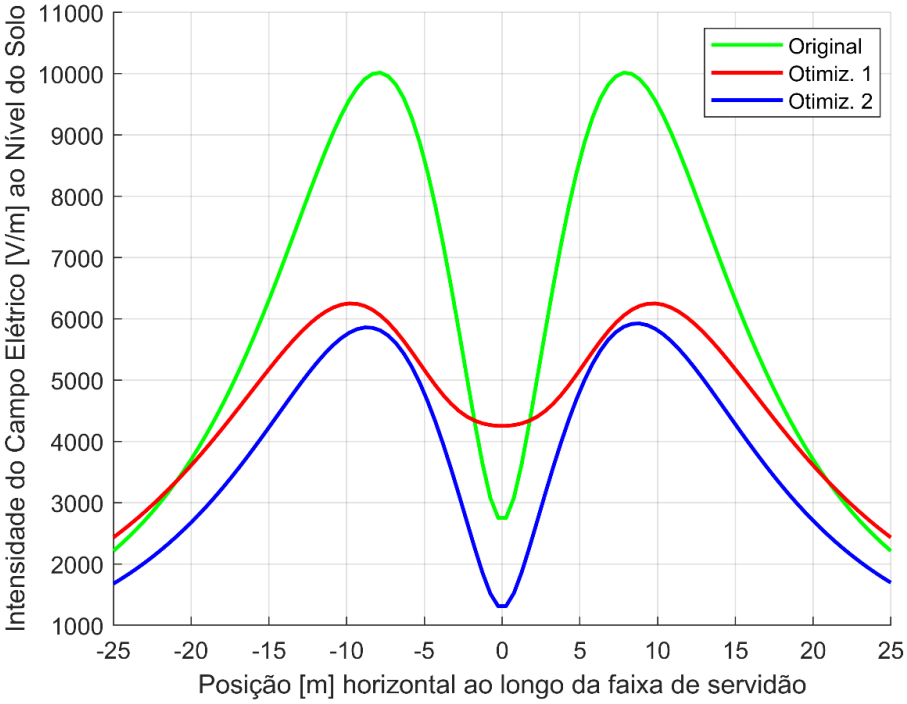

Figura 5.20 – Níveis de campo elétrico originais e otimizados ao nível do solo - LT de 500 kV da Hydro-Québec.

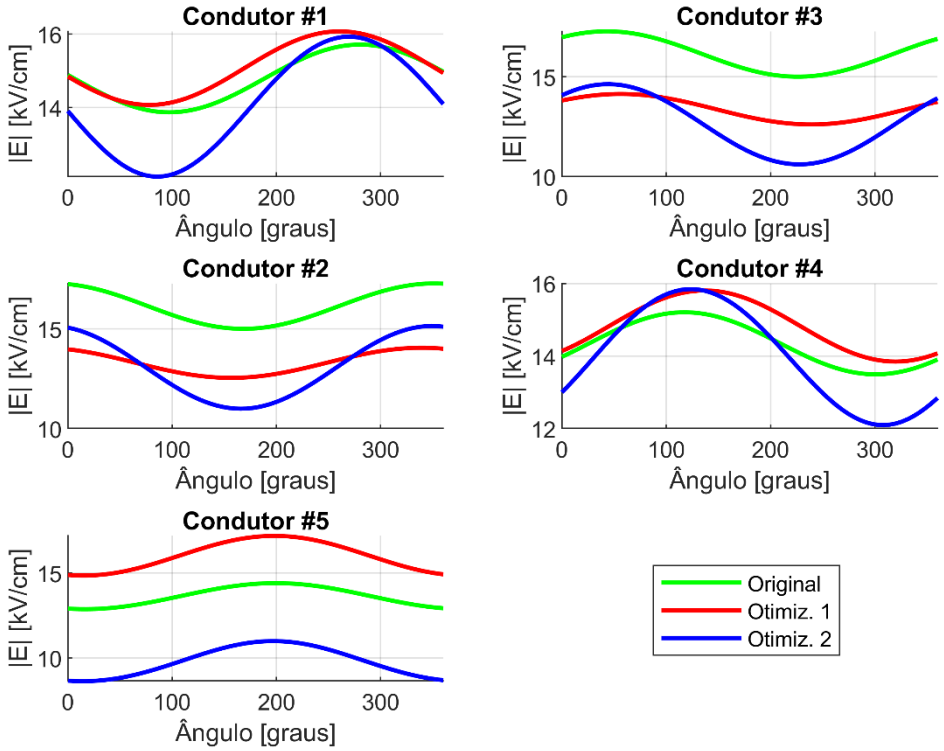

Figura 5.21 – Níveis originais e otimizados de campo elétrico superficial (para os condutores da fase A) – LT de 500 kV da Hydro-Québec.

Por fim, na Figura 5.22, podem ser vistos os níveis de densidade de fluxo magnético à um metro acima do solo. Observa-se uma redução muito semelhante nos níveis de campo magnético ao longo de toda a faixa de passagem considerada, para ambas as técnicas de otimização.

Assim, verifica-se que a configuração geométrica otimizada para a técnica 1 é bem semelhante à configuração original, sendo suscetível a ser suportada pela atual estrutura (espaçadores, etc.) da linha, além de apresentar níveis de campo elétrico e magnético inferiores ao longo da faixa de servidão da linha. Contudo, ainda deve ser verificada a viabilidade das novas estruturas exigidas, no caso de uma recapacitação. Já para a técnica 2, apesar dos níveis de campo reduzidos observados, a geometria é não usual e assimétrica, não sendo possível de ser implementada através de estruturas convencionais.

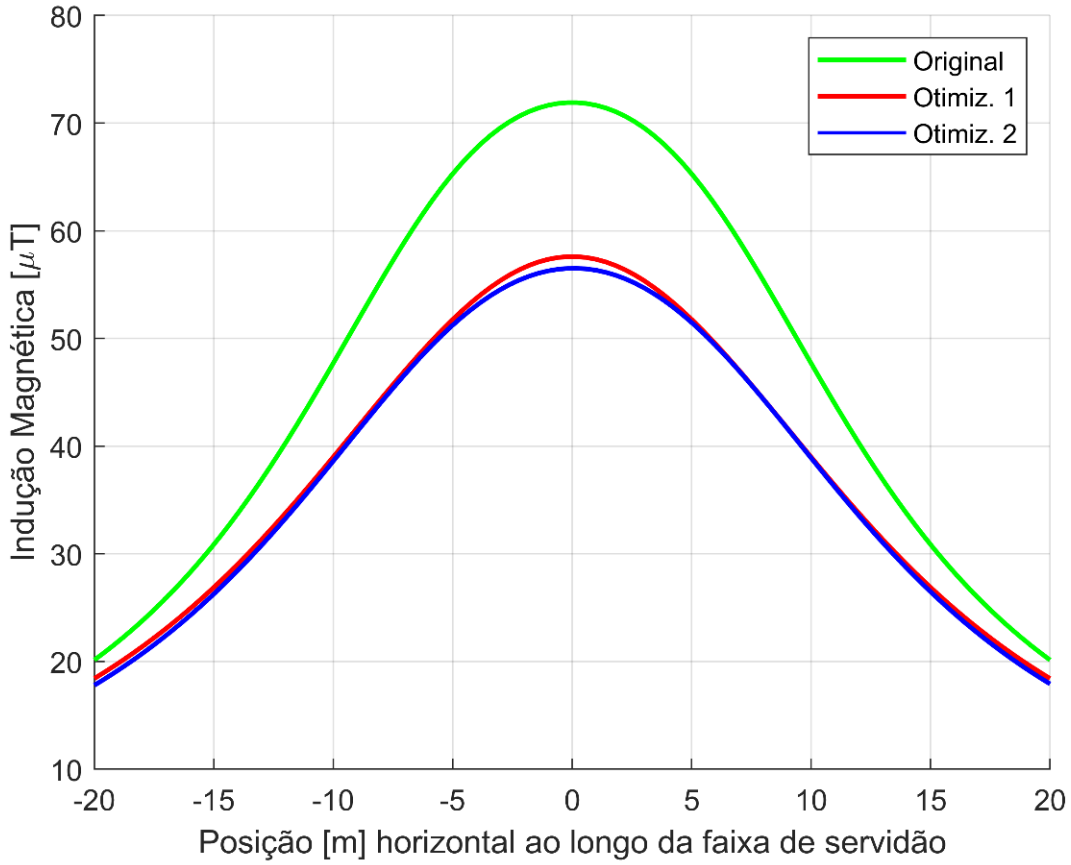

Figura 5.22 – Densidades de fluxo magnético ao nível do solo, para as configurações original e otimizadas – LT de 500 kV da Hydro-Québec.

6 Conclusão

Neste trabalho, o método de momentos é estudado e aplicado na avaliação dos campos elétricos e magnéticos estáticos de linhas de transmissão, e é posteriormente acoplado ao método elipsoidal de otimização para minimizar os níveis de campo ao nível do solo.

A modelagem apresentada foi implementada computacionalmente, e permitiu avaliar e otimizar os campos de linhas conhecidas. Os resultados numéricos mostraram-se precisos em relação aos analíticos, mesmo para o tipo de elemento mais simples, malhas pouco densas, e baixos tempos de solução.

Além disso, as análises de sensibilidade a parâmetros que caracterizam o modelo comprovam a convergência, a consistência e a eficiência do método. Ademais, a robustez da técnica permitiu a avaliação da influência dos cabos de guarda.

Ainda, a otimização dos feixes reduziu significativamente os níveis de campo na altura do solo, ao mesmo tempo que respeitou todas as restrições estruturais e elétricas impostas, promovendo a reutilização das estruturas originais da linha. Assim, o método de momentos aliado ao método elipsoidal atendeu plenamente ao objetivo pretendido de avaliar e otimizar linhas de transmissão, compondo uma nova metodologia possível de ser utilizada no projeto e otimização de linhas de alta energia.

Portanto, de maneira geral, além da metodologia proposta, o trabalho oferece uma visão do potencial de aplicação do método de momentos em modelagens mais eficientes e mais robustas de linhas de transmissão, e consequentemente de grande interesse e relevância prática.

Ademais, visando a continuação do trabalho, podem ser sugeridas como propostas de continuidade: a extensão da metodologia a problemas tridimensionais de linhas; a paralelização da montagem das matrizes de influência do método de momentos; e a consideração de geometrias mais complexas para os cabos condutores.

7 Referências

I. A. M. Duane, M. M. Afonso, M. A. d. O. Schroeder, S. T. M. Gonçalves, A. L. Paganotti, R. R. Saldanha, "*A New Strategy for Optimizing HSIL Transmission Lines*", Journal of Control, Automation and Electrical Systems 31 (2020): 1288-1297.

A. A. M. Farah, *Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos em Linhas de Transmissão pelo Método dos Elementos Finitos* (Dissertação de Mestrado), Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2014.

M. M. Afonso, *Métodos Híbridos na Solução de problemas de Espalhamento Eletromagnético* (Tese de Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, 2003.

A. L. Paganotti, "*Cálculo e Minimização de Campos Elétricos de Linhas de Transmissão* (Dissertação de Mestrado)", Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2012.

E. B. d. Silva Filho, *Estudo de campo elétrico em linha de transmissão utilizando o método dos elementos de contorno*. 2008. 207 f. (Dissertação de Mestrado), Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2008.

E. V. S. Pouzada, *Estudo da Aplicação dos Elementos de Contorno à Análise de Propagação em Estruturas Guiantes* (Tese de Doutorado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999.

C. R. N. Barbosa, *O Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas Bidimensionais com Acoplamento Iterativo Entre Sub-regiões* (Dissertação de Mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

C. A. Brebbia, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*, London, Pentech Press, 1978.

A. A. M. Farah, M. M. Afonso, J. A. Vasconcelos and M. A. d. O. Schroeder, "*A Finite-Element Approach for Electric Field Computation at the Surface of Overhead Transmission Line Conductors*," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 54, no. 3, pp. 1-4, March 2018, Art no. 7400904.

A. L. Paganotti, M. M. Afonso, M. A. O. Schroeder, R. S. Alipio, E. N. Gonçalves and R. R. Saldanha, "*The surge impedance loading optimization by an adaptive Deep Cut Ellipsoidal algorithm*," International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, vol. 51, no. s1, pp. S157-S165, April 2016.

A. L. Paganotti, M. M. Afonso, M. A. O. Schroeder, R. S. Alipio, E. N. Gonçalves and R. R. Saldanha, "*An adaptive deep cut ellipsoidal algorithm applied to the optimization of transmission lines*" – IEEE Transactions on Magnetics, vol. 51, no. 3, March 2015.

D. A. G. Vieira, A. C. Lisboa, and R. R. Saldanha, "*An enhanced ellipsoid method for electromagnetic devices optimization and design*," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 46, no. 8, pp. 2843–2852, Aug. 2010.

Electric Power Research Institute (EPRI), "*Transmission Line Book Reference / 345 kV and Above*," 2º Edição, Estados Unidos, 1982.

M. O. B. C. Melo, L. Fonseca, E. Fontana, and S. R. Naidu, "*Electric and magnetic fields of compact transmission lines*," IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 14, no. 1, pp. 200–204, Jan. 1999.

R. G. Olsen, P. S. Wong, *Characteristics of Low Frequency Electric and Magnetic Fields in the Vicinity of Electric Power Lines*. IEEE Transactios on Power Delivery. 1992, Vol. VII, 4, pp. 2046-2055.

R. G. Bland, D. Goldfarb, and M. J. Todd, "*The ellipsoid method: A survey*," Operations Research, vol. 29, no. 6, pp. 1039–1089, Dec. 1981.

R. H. C. Takahashi, "*Otimização Escalar e Vetorial*", Belo Horizonte, MG, Brasil, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

EPRI, “*AC Transmission Line Reference Book: 200 KV and Above*”, Palo Alto, CA, USA, 2005.

M. N. O Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*. 3a. ed. New York: Oxford University Press, 2000.

J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. New York, 2002.

J. P. Adriaens, F. Delince, P. Dular, A. Genon, W. Legros and A. Nicolet, "*Vector potential boundary element method for three dimensional magnetostatic*," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, no. 5, pp. 3808-3810, Sept. 1991, doi: 10.1109/20.104931.

S. Kurz, J. Fetzer, W. M. Rucker, “*Coupled BEM-FEM methods for 3D field calculations with iron saturation*”, OPEN-2000-151, 1991.

C. Geuzaine and J.-F. Remacle. *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, 2009.

I. A. M. Duane e M. M. Afonso. *Cálculo e Otimização dos Níveis de Campo Elétrico ao Nível do Solo Gerados por Linhas de Transmissão Aéreas*. ENMC, Outubro de 2021.

The Math Works, Inc. *MATLAB, version 2018a*. Natick, MA: The Math Works, Inc., 2018.

B. D. S. Perro, *Estudo de Campos Eletromagnéticos em Linhas de Transmissão a Frequência Industrial* (Trabalho de Conclusão de Graduação), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

F. Kiessling, P. Nefzger, J. F. Nolazko, and U. Kaintzyk, *Overhead power lines: Planning, design, construction*. Berlin: Springer, 2003.

C. J. Miller, “*The calculation of radio and corona characteristics of transmission-line conductors”,* Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems, 76(3), 461–472, 1957.

A. Deri, G. Tevan, A. Semlyen, and A. Castanheira, “*The Complex Ground Return Plane, a Simplified Model for Homogenous and Multi-Layer Earth Return,”*, in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-100, no. 8, pp. 3686-3693, Aug. 1981.

P. C Resende, P. H. C. Santos, M. A. d. O. Schroeder, M. M. Afonso, “*Magnetic Fields Minimization of Transmission Lines by Differential Evolution Method*”, XXII Congresso Brasileiro de Automática, Setembro de 2018.

A. Seagar and S. Nilboworn, “*Calculation of power line fields between circular conductors*,” International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing, 2013.

M. P. Sarma and W. Janischewskyj, "*Electrostatic Field of a System of Parallel Cylindrical Conductors*," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-88, no. 7, pp. 1069-1079, July 1969.

A. C. Balanis, “*Advanced Engineering Electromagnetics*,” New York, 1989.