CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLOGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELETRICA
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Romulo Jose da Silva Junior

ESTABILIZAÇÃO LOCAL ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS A ATRASO VARIANTE NO TEMPO E ATUADORES SATURANTES

Belo Horizonte
2022

Romulo .Jose da Silva .Junior

ESTABILIZAQAO LOCAL ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS A ATRASO VARIANTE NO TEMPO E ATUADORES SATURANTES

Dissertac;;:io apresentada ao Programa de P6s-Graduac,:ao em Engenharia Eletrica (PPGEL) do Centro Federal de Educac;ao Tecnol6gica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenc;ao do titulo de Mestre em Engenharia Eletrica.

Orientador: Prof. Dr. Valter Junior de Souza Leite
Coorientador: Prof. Dr. Luis Filipe Pereira Silva

Belo Horizonte
2022

(Catalogação - Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

S586e Silva Júnior, Romulo José da.
Estabilização local entrada-estado de sistemas incertos discretos no tempo sujeitos a atraso variante no tempo e atuadores saturantes. / Romulo José da Silva Júnior. – Belo Horizonte, 2022.
97 f. : *il.*

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.
Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva.

Área de Concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.
Linha de Pesquisa: Sistema de Controle.
Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

1. Atraso nos estados. 2. Sistemas incertos discretos no tempo. 3. Controle Robusto. 4. Estabilidade Entrada-Estado. 5. Ganho ℓ2. 6. Atuadores Saturantes. I. Leite, Valter Júnior de Souza. II. Silva, Luís Filipe Pereira. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Universidade Federal de São João del-Rei. V. Título.

CDU: 681.51

Bibliotecária Responsável Maria Inês Passos Pereira Bueno CRB-6:2805

Romulo .Jose da Silva .Junior

ESTABILIZA<:;AO LOCAL ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO SUJEITOS A ATRASO VARIANTE NO TEMPO E ATUADORES SATURANTES

Dissertac;ao apresentada ao Programa de P6s-Graduac;ao em Engenharia Eletrica (PPGEL) do Centro Federal de Educac:;ao Tecnol6gica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtem.;ao do titulo de Mestre em Engenharia Eletrica.

Comissao Avaliadora:

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza
Departamento de Engenharia Eletronica
UFMG

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gorn;:alves
Departamento de Engenharia Eletrica
CEFET / MG

Prof. Dr. Valter Jr. de Souza Leite
Departamento de Engenharia Mecatronica
CEFET / MG

Prof. Dr. Luis Filipe Pereira Silva
Departamento de Engenharia Mecatronica
CEFET / MG

Belo Horizonte
2022

CENTRO FEDERAL DE EDUCAQAO TECNOLOGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRICA
PROGRAMA DE P6s-GRADUAQAO EM ENGENHARIA ELETRICA
AssocrAQAO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ
DISSERTAQAO DE MESTRADO

Dissertagao intitulada *"Estabilizar;Ji,o local entrada-estado de sistemas incertos discretos no tempo sujeitos a atraso variante no tempo e atuadores saturantes",* desenvolvida por Romulo Jose da Silva Junior, aprovada pela banca examinadora constituida pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Valter Jr. de Souza Leite
Departamento de Engenharia Mecatr6nica - PPGEL CEFET / MG
(Orientador)

Prof. Dr. Luis Filipe Pereira Silva
Departamento de Engenharia Mecatr6nica - CEFET / MG
(Coorientador)

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza
Departamento de Engenharia Eletr6nica - UFMG

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gongalves
Departamento de Engenharia Eletrica - PPGEL CEFET / MG

Belo Horizonte
2022

DEDICO ESTE TRABALHO A DEUS, CUJA PRESENQA ME CONFORTA PERANTE AS TRIBULAQOES, AUXILIANDO NAS MINHAS ESCOLHAS, ME CONCEDENDO CONFIANQA E FE FRENTE AOS DESAFIOS E ADVERSIDADES.

Agradecimentos

Agrade<;o,

Primeiramente a Deus por iluminar meus caminhos, me concedendo saude e forc.;as para realizar esse grande sonho, a conclusao do mestrado.

Minha mae Marcia, pelo apoio, exemplo e suporte durante toda minha vida.

Meu pai Romulo, pelo apoio, exemplo e suporte durante toda minha vida.

Meu irmao Gabriel, pelo apoio e companheirismo, por acreditar em mim e incentivar meus sonhos.

Minha esposa Karina, por todo carinho e todos os bons momentos os quais me proporcionaram paz e tranquilidade. Pelas palavras de apoio e incentivo, sempre me mostrando que sou capaz, que posso confiar em mim mesmo. Por me amar e me fazer sentir tao feliz e especial.

Aos meus familiares, pela torcida e orac.;6es.

Aos meus amigos, Flaviane, Lorena, Marina, Fernanda, Matheus, Nathalia, pela paciencia, incentivo e apoio durante toda minha caminhada.

Meu orientador Valter Leite, pela amizade, confian<;a, por sempre buscar minha evoluc;ao para que eu apresente o melhor de mim mesmo, pelos ensinamentos e pela disponibilidade de estar apoiando durante toda a minha formac.;ao. Por me convidar e incentivar para seguir o caminho do Mestrado.

Meu co-orientador Luis Filipe, pela amizade, por guiar minha evoluc;ao, pelos ensinamentos e pela disponibilidade de estar apoiando durante toda a minha formac.;ao.

Meus amigos e companheiros de forma<;ao, Gabriel, Larissa, Alane Lucas.

Todos os professores do CEFET-MG os quais contribuiram para minha formac;ao, e aos avaliadores deste trabalho.

Por fim, agrade<;o a todos que de alguma forma contribuiram para conclusao deste trabalho.

A vida e como um lapis que certamente se esgotara, mas deixara uma bela escrita.

"Nami - One Piece"

Resumo

Neste trabalho sao desenvolvidos metodos para a sintese de controladores por realimentac;:ao de estado para sistemas discretos e invariantes no tempo com atraso nos estados, atuadores saturantes e sujeitos a perturbac;:oes pertencentes a classe dos sinais de energia. Admite-se que o atraso seja variante no tempo e que as matrizes do modelo que descrevem o sistema pertenc;:am a um politopo, cujo vetor de parametros seja incerto. A contribuic;ao central da dissertac;:ao consiste na proposic;.ao de condic;:oes que podem prover a estabilizac;.ao robusta local entrada-estado (ISS) da malha fechada para um conjunto de condic;:oes iniciais admissfveis e sinais de perturbac;:ao, limitados pela norma l!.$_2$. Essas condic;:oes avanc;:am em relac;ao a result ados encontrados na literatura, nos quais apenas a estabilizac;ao assint6tica foi tratada. Para obter resultados menos conservadores, sao utilizadas candidatas a furn;oes de Lyapunov-Krasovskii (L-K) dependentes do parametro incerto. Alem disso, as condic;:oes propostas para a sfntese de controladores dependem do valor do atraso, porem sua complexidade nao cresce com o aumento do valor do atraso. Para desenvolver esses metodos foram utilizadas a condic;:ao generalizada de setor, representando os atuadores saturantes como uma nao linearidade do tipo zona-morta, a majorac;:ao de termos decorrentes dessas func;:oes e o Lema de Finsler. Outra contribuic;:ao esta nos procedimentos de otimizac;:ao propostos que permitem melhores resultados na estimativa da regiao de atrac;:ao, na tolerancia a disturbios e na minimizac;.ao dos efeitos do disturbio na safda do sistema. A ideia central nesses procedimentos de otimizac;ao consiste na reescrita da candidata a furn;:ao de L-K em um espac;;o aumentado, permitindo que a abordagem atinja desempenhos comparaveis a de outras alternativas encontradas na literatura, mas com um custo computacional bem menor. Por fim, exemplos numericos sao apresentados para demonstrar a eficacia dos metodos propostos e estabelecer uma comparac;:ao com resultados existentes na literatura.

Palavras-chave: Atraso nos estados. Sistemas incertos discretos no tempo. Controle Robusto. Estabilidade Entrada-Estado. Ganho l!.$_2$. Atuadores saturantes.

Abstract

In this work, methods are developed for the synthesis of state feedback controllers for discrete time-invariant systems with state-delay, saturating actuators and subject to disturbances that belong to the class of energy signals. It is assumed that the delay is time-varying and that the model matrices that describe the system belong to a polytope, whose parameter vector is uncertain. The central contribution of the dissertation consists in the proposition of conditions that can provide robust local input-to-state stability (ISS) of the closed loop for a set of admissible initial conditions and disturbance signals, limited by the $\mathcal{L}_2$ norm. These conditions advance in relation to results found in the literature, that only asymptotic stabilization was treated. To obtain less conservative results, candidates for Lyapunov-Krasovskii (L-K) functions dependent on the uncertain parameter are used. Furthermore, the proposed conditions for the controller synthesis depend on the delay value, but their complexity does not increase with the increase of the delay value. To develop these methods, the generalized sector condition was used, representing the saturating actuators as a non-linearity of the dead-zone type, the majoration of terms resulting from these functions and the Finsler's Lemma. Another contribution is the proposed optimization procedures that allow better results in the estimation of the attraction region, in the disturbance tolerance and in the minimization of the disturbance effects on the system output. The central idea in these optimization procedures is rewriting the candidate L-K function in an augmentated space, allowing the approach to achieve performances comparable to other alternatives found in the literature, but with a much lower computational cost. Finally, numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed methods and establish a comparison with existing results in the literature.

Key-words: State-delay. Discrete-time uncertain systems. Robust Control. Input-to-State Stability. $\mathcal{L}_2$ gain. Saturating actuators.

Sumario

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acronimos e Notac;oes

LMI	*Linear Matrix Inequality* - Desigualdades Matriciais Lineares.
BMI	*Bilinear Matrix Inequality* - Desigualdades Matriciais Bilineares.
L-K	Lyapunov-Krasovskii.
ISS	*Input-to-State Stability* - Estabilidade entrada-estado.

$\mathbb{N}$	conjunto dos numeros inteiros.
$\mathbb{R}$	conjunto dos numeros reais.
$\mathbb{R}^n$	conjunto vetorial de dimensao *n* com elementos compostos por numeros reais.
$\mathbb{R}^+$	conjunto de numeros reais positivos.
$\mathbb{Z}^+$	conjunto de numeros inteiros positivos.
]RnXnu	conjunto de matrizes com dimens6es *n* x *nu* e composta por elementos reais.
ME *]RnXnu*	matriz de dimens6es *n* x *nu* composta por elementos reais.
x E *]Rn*	vetor coluna com *n* posi<;6es e elementos reais.
MT	transposta da matriz *M*.
M(i)	i-esima linha da matriz *M* ou i-esimo elemento do vetor *M*.
Mii	elemento diagonal (i,i) da matriz *M*.
Maxb	matriz *M* E *IR.axb_*
M(1I	simplifica<;ao de nota<;ao para (M(i))T.
M>O	matriz *M* simetrica, quadrada, definida positiva.
M ?_ 0	matriz *M* simetrica e semi definida positiva.
|| · 1|2	norma 2 de um vetor ou matriz.
$\star$	elementos simetricos em rela<;ao a diagonal nas LMis.
I	matriz identidade com dimens6es apropriadas.
0	matriz nula com dimens6es apropriadas.
N	numero de vertices de um sistema.
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$	Regiao de Atra<;ao.
$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$	estimativa da Regiao de Atrac;ao.
$\mathcal{R}_0$	Regiao de Condi<;6es Iniciais.
$\mathcal{R}_{\mathcal{E}0}$	estimativa da Regiao de Condi<;6es Iniciais.

d	atraso mfnimo.
d	atraso maximo.
dk	atraso no instante k.
£2	espac;o de sinais limitados em energia.
ACE	A e um subconjunto de B.
diag(A,B)	matriz bloco diagonal [t l] para as matrizes A e B quadradas.
He(A)	operador hermitiano, tal que He(A) $=A+$ AT.
tr(M)	trac;o da matriz M.
®	produto de Kronecker entre duas matrizes.
c E]a,b[	valores de c tais que $a < c < b$.

Capitulo 1

Introduc;ao

Neste trabalho sao investigadas metodologias para sintese de controladores robustos, por meio da realimentac;ao de estados, para uma classe de sistemas incertos e discretos no tempo, os quais sao sujeitos a ac;ao de perturbac;ao e atuadores saturantes. 0 funcional de Lyapunov-Krasovskii, dependente de parametros, e o problema de otimizac;iio convexa, garantem a estabilidade local, atraves de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMis). Os atuadores saturantes fazem parte da maioria das aplicac;oes reais, podendo causar perda de desempenho ou ate mesmo instabilidade dos sistemas de controle. Alem disso, a ac;ao da perturbac;.ao pode fazer o processo operar fora da regiiio desejada, tornando-o suscetivel a instabilidade. Assim sendo, se faz necessaria a estimac;ao da regiiio de condic;:oes iniciais as quais contemplam trajet6rias convergentes para a origem, para esses sistemas em malha fechada e estabilidade entrada-estado (ISS, do ingles *Input-to-state stability).* 0 problema central, investigado nesse trabalho, consiste no projeto de controladores robustos, estabilidade local e ISS de sistemas com atuadores saturantes, dependentes de estados atrasados variantes no tempo e sujeitos a ac;:iio de perturbac;:iio.

1.1 Formula<_;ao do Problema

Esta sec;ao apresenta a relevancia da considerac;iio dos efeitos gerados pelos atuadores saturantes em conjunto aos sinais ex6genos em sistemas com estados atrasados. Algumas consequencias de tais limitac;oes siio ilustradas por um exemplo de sistema discreto no tempo, demonstrando a importancia de se considerar o limite maximo da ac;iio do atuador fisico no projeto dos controladores ea ac;ao da perturbac;iio em sistemas em malha fechada.

1.1.1 Atuadores saturantes

Para ilustrar os efeitos dos atuadores saturantes em um sistema, assume-se o sistema discreto no tempo e sujeito a parametros incertos invariantes no tempo dado por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + B(\alpha)\mathtt{sat}(u_k), \tag{1.1}$$

em que *xk* E *JRn* e o vetor de estados, *uk* E *JRnu* representa o sinal de controle, as matrizes *A(a)* E *IRnxn, B(a)* E *IRnxnu* pertencem ao politopo descrito pela combinac;;ao convexa dos *N* vertices conhecidos,

$$[\mathrm{A(a)}\quad \mathrm{B(a)}] = \overset{N}{\underset{i=l}{\boldsymbol{Lai}}}[\mathrm{Ai\ Bi}],$$

sendo *a* pertencente ao simplex unitario r definido por:

$$\mathrm{r} = \{a \in JRN : \overset{N}{\underset{i=l}{\boldsymbol{L}}}\mathrm{O'.i} = 1,\ \ \mathrm{O'.i}\ 2{::}\ 0, 'i \in [1,N]\}- \tag{1.2}$$

As limitac;;oes de *uk* sao representadas pela func;;ao descentralizada de saturac;;ao, sat(uk)(R), em que para cada £ E [1,nu] define-se

$$\mathrm{sat(uk)(l?)} = \begin{cases} U(f)' & \text{se} \quad Llk(t) > U(f)' \\ llk(l?), & \text{se} \quad 1!c(l?)\ {:::}\ Uk(C)\ {:::}\ Ll(R), \\ 1!c(l?), & \text{se} \quad 1lk(t) < 1!c(R), \end{cases}$$

sendo 1!c(t) e fl(t) os limites minimo e maximo que podem ser aplicados pelo £-esimo atuador.

Exemplo 1.1 (Atuadores saturantes) *Considere um sistema* (1.1) *dado par (Tarbouriech* et al., *2011, p. 8) com n* = 2, *N* = 2 *e nu* = 1 *discretizado pela amostragem T* = *0.0ls adaptado em (Lopes, 2017, p.10), determinado pelas seguintes matrizes*

$$\mathrm{Ai}= \begin{bmatrix}1.0001 & 0.0100\\ 0.0100 & 1.0001\end{bmatrix}, \mathrm{A}_{=}^{2} \begin{bmatrix}1.0010 & 0.0100\\ 0.0100 & 1.0010\end{bmatrix}, \mathrm{Bi}= \mathrm{B}_{=}^{2} \begin{bmatrix}-0.0001\\ -0.0100\end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

com vertices instriveis em malha aberta, sendo autovalores de A_1 *iguais a* 0.9910 *e* 1.0110 *e* A_2 *iguais a* 0.9901 *e* 1.0101, *o'U seja, poss,uem 'Um autovalor* com *m6&ulo maior que um.* 0 *sistema em malha fechada, sem restrii;oes no at'Uador e fornecido par*

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k. \tag{1.4}$$

Escolhendo-se K = [13 10], *garante-se a estabilidade global, de modo que os autovalores estejam con:fi:nados no cfrrnlo de raio 'U'n:itririo, sendo, os mr5d,ulos* 0.9872 *e* 0.9135 *para* A_1 *e* 0.9863 *e* 0.9126 *para* A_2. *Dessa forma, a estabilidade do sistema em malha fechada e expressa pelos autoualores mlculados de* $(A(a) + B(a)K)$. *Para o sistema* (1.4) *as trajet6rias convergem assintoticamente para a origem, para q,ualq,uer condii;ao inicial em* IR^2. *Porem, considerando o sinal de controle saturante, apresentado no sistema* (1.1), *com* -5 ::; *uk* ::; 5, o *sistema em malha fechada torna-se nao linear. A seguir sao ilustrados alg,uns casos de condii;oes iniciais.*

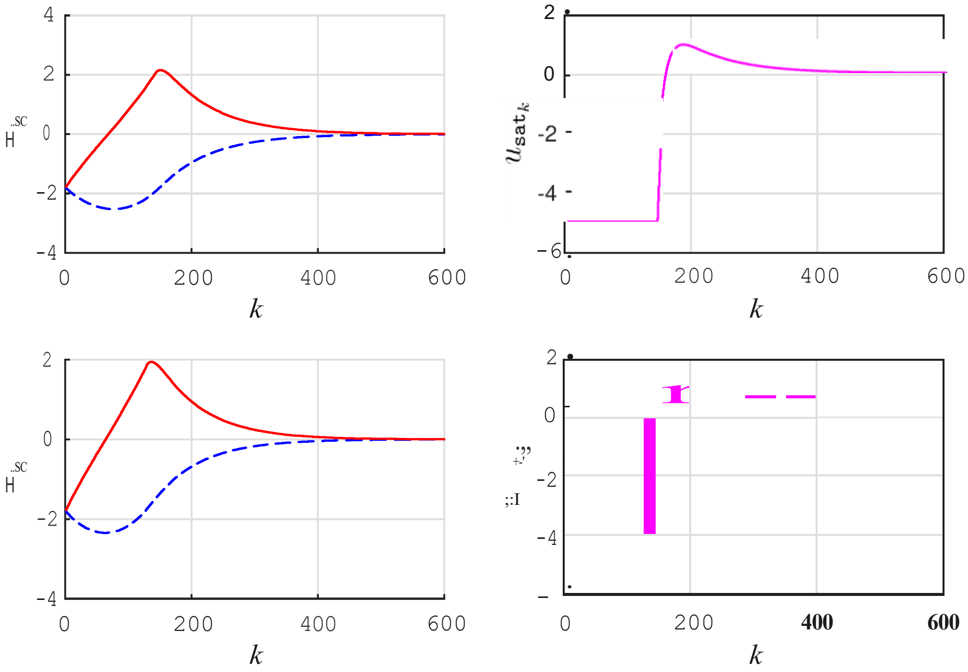

Figura 1.1: Convergencia dos estados para origem e sinal de controle saturante em cada configurac;;ao dos vertices do sistema (1.3) para a condic;;ao inicial $x_0 = [-1.8\ \ -1.8]$.

A partir da Figura 1.1 observa-se que, embora o sistema (1.6) *esteja sujeito ao sinal de controle saturante, os estados convergem assintoticamente para a origem partindo-se da condir;[io inicial* [-1.8 -1.8]. *J1i para a condir;ifo inicial* [-2 -3], *apresentada na Figura 1. 2, observa-se q·ue na configurar;ao do primeiro vertice do sistema, embora o atuador esteja operando em, seu lirnite, a energia fornecida nao e sufi,c:iente para q·u,e os estados sejam levados ate a origem. Sem as restrir;oes, a energia do controlador ultrapassaria os limites apresentados, garantindo a convergencia dos estados. Para a ccmfi,g·urar;ao do segundo vertice, e possfvel perceber q·ue, embora as estados estejam est6:veis, com ar;ao do atuador saturante, nao se tem a convergencia para a origem, ja q·ue* o *primeiro estado, curva tracejada em azul, estabiliza em* -5. *Nota-se que, mesmo que os vertices do sistema* (1.3) *estejam pr6ximos, as condir;oes iniciais tem convergencia distintas. Par tais motivos, se faz necessaria a caraterizar;ao da regiao de atrar;ao, analisando a garantia da estabilidade local assint6tica do sistema. Dessa forrna, o sistema e localmente assintoticamente estavel para um conj-unto de condir;oes in:iciais, pertencentes a uma sub-regiao, denom:inada regiao de atrar;ao (RA)-*

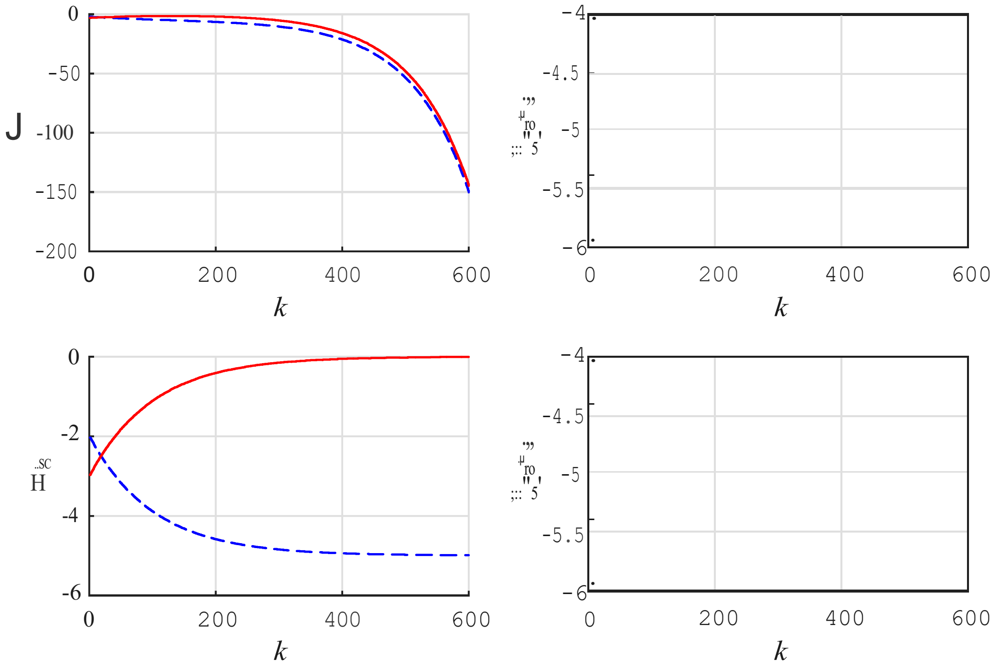

Figura 1.2: Evoluc;;ao dos estados e sinal de controle saturante em cada configurac;;.ao dos vertices do sistema (1.3) para a condic;;ao inicial x_0 = [-2 -3].

1.1.2 Sinais ex6genos

Para ilustrar os efeitos da perturbac;;ao em um sistema, assume-se o sistema discreto e invariante no tempo sujeito a parametros incertos invariantes no tempo dado por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + B(\alpha)\mathtt{sat}(u_k) + B_w(\alpha)w_k, \tag{1.5}$$

em que *wk* E *:!Rn* e o vetor de sinais ex6genos e as matrizes *A(a)* E *lRnxn, B(a)* E *lRnxnu* e *Bw(a)* E *lRnxnw* pertencem ao politopo descrito pela combinac;;ao convexa dos *N* vertices conhecidos,

[A(a) *B(a)* *Bw(a)]* =***Lai*** [Ai *Bi* *Bwi]* ,
N
i=l

sendo *a* pertencente ao simplex unitario r definido por (1.2).

Exemplo 1.2 (At;;ao da Perturbat;;ao) *Considere um sistema* (1.5) *dado par (Tarbouriech* et al., *2011, p. 8)* com *n* = 2, *N* = 2, *nu* = l *e nw* = l *discretizado pela amostragem T = 0.01s adaptado em (Lopes, 2017, p.10), est6:uel em malha fechada, determinado pelas seguintes matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix}1.0001 & 0.0100\\ 0.0100 & 1.0001\end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix}1.0010 & 0.0100\\ 0.0100 & 1.0010\end{bmatrix}, \quad B1 = B2 = Bw1 = Bw2 = \begin{bmatrix}-0.0001\\ -0.0100\end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

0 *sistema em malha fechada, sem restrir;oes no atuador e fornecido par*

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + B_w(\alpha)w_k. \tag{1.7}$$

De forma analoga ao exemplo 1.1 *escolhendo-se* $K = [13 \quad 10]$ *com* -5 :::; 'l..Lk :::; 5, *o sistema em malha fechada torna-se niio linear. Sendo assim, o sinal ex6geno excita o sistema, levando-o para fora da origem, a convergencia dos estados e garantida apenas para ·um lim:itante de energia de pert·urbar;iio. A seg·u-ir e apresentado um caso com cond-ir;iio inicial r/:Ula* e *sinal de pert·urbar;iio na forma de um p·ulso aplicado no instante* k = 30 *com amplitude* 480.

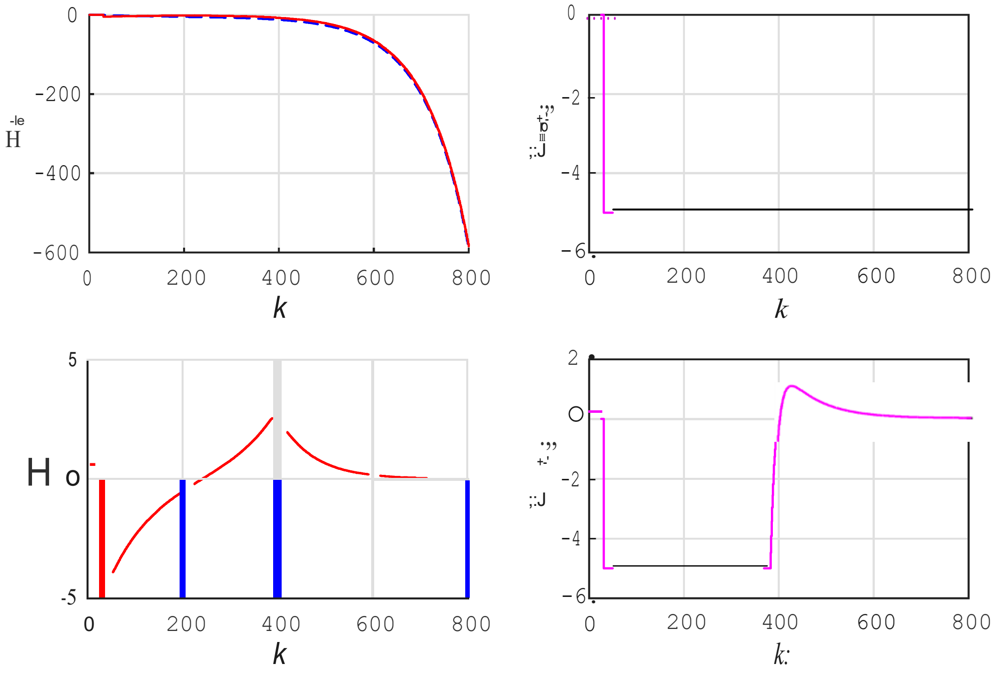

Figura 1.3: Evoluc;;ao dos estados e sinal de controle saturante em cada configurac;;ao dos vertices do sistema (1.6) para a condic;ao inicial nula e w_{30} = 480.

A part-ir da Fig·ura 1. 3, *observa-se q·ue na config·urar;iio do primeiro ·uert·ice do s·1.sistema* (1.6), *embora o atuador esteja operand* a *em seu limite, a energia fornecida niio e s-uficiente para que os estados sejam levados a origem. Ja para o sistema operando na configurar;iio do seg·undo vertice, com ar;iio do at-uador saturante, e possfoel perceber q-ue os estados convergem assintoticamente para a origem. Dessa forrna, mesmo q-ue os vertices do sistema* (1.6) *estejam pr6ximos, a ar;iio da pert-urbar;iio tem conseq·uencias distintas em cada ·um deles. Par tais mot-ivos, se faz necessaria a determinar;iio da maxima energia de pert·urbar;iio aplicada a todas as config·urar;oes do sistema polit6pico. Em aplicar;oes reais, os sistemas estiio sujeitos a diversos fatores externos os quais podem, ou niio, ser mens-uraveis. Logo, se faz necessaria a caracterizar;iio da regiiio de maxima energia externa* *que o sistema pode assumir, uma vez ultrapassado o limite de energia de perturbar;iio, o sistema torna-se instd:uel.*

1.1.3 Estados atrasados

Outro aspecto relevante presente nas aplicac;;oes reais e o atraso, o qual pode ser constante ou variante no tempo. Sendo assim, a caracterizac;;ao da regiao de atrac;;ao deve levar em considerac;;ao as influencias dos estados atrasados. Para ilustrar os efeitos dos estados atrasados em um sistema, assume-se o sistema discreto e invariante no tempo sujeito a parametros incertos invariantes no tempo dado por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\mathtt{sat}(u_k), \tag{1.8}$$

em que $xk\text{-}dk$ e o vetor de estados atrasados do sistema, dk e um numero inteiro positivo representando o atraso variante no tempo tal que $dk \in [O,d]$. $Ad \in Irtnxn$ e matriz que corresponde a dinamica do sistema afetada pelos estados atrasados, pertencente ao politopo descrito pela combinac;;ao convexa dos N vertices conhecidos,

$$[A(a) \quad Ad(a) \quad B(a)] = \overset{N}{\underset{i=l}{Lai}} [Ai \quad Ad; \quad Bi],$$

sendo a pertencente ao simplex unitario r definido por (1.2).

Exemplo 1.3 (Efeito dos estados atrasados) *Considere um sistema* (1.8) *dado par (Tarbouriech* et al., *2011, p. 8) com* $n = 2$, $N = 2$, $nu = 1$ *discretizado pela amostragem* $T = 0.0ls$ *adaptado em (Lopes, 2017, p.10), estd:uel em malha fechada, determinado pelas seguintes matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0010 & 0.0100 \\ 0.0100 & 1.0010 \end{bmatrix}, \quad A_{di} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{d^2} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 \begin{bmatrix} -0.0001 \\ -0.0100 \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

0 *sistema em malha fechada, sern restrir;oes no at-uador* e *fornecido par*

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k}. \tag{1.10}$$

De forma analoga ao exemplo 1.1 escolhendo-se $K = [13 \quad 10]$ *com* $-5 ::; uk ::; 5$, *o sistema em malha fechada torna-se niio linear. Sendo assim, as contrib·u-ir;oes adicionadas a part-ir dos estados atrasados, funtamente a lim:itar;tio de energia do controlador podem tornar o sistema instavel. A seg·uir* e *apresentado ·um caso com a seq·uencia de condir;iio inicial* $\{[\;],[\;]\}$, em *que o vetor* $[-2 \quad -3]$ *corresponde a* x_0 *e o vetor* $[-1 \quad -1]$ *a* x_{-1}.

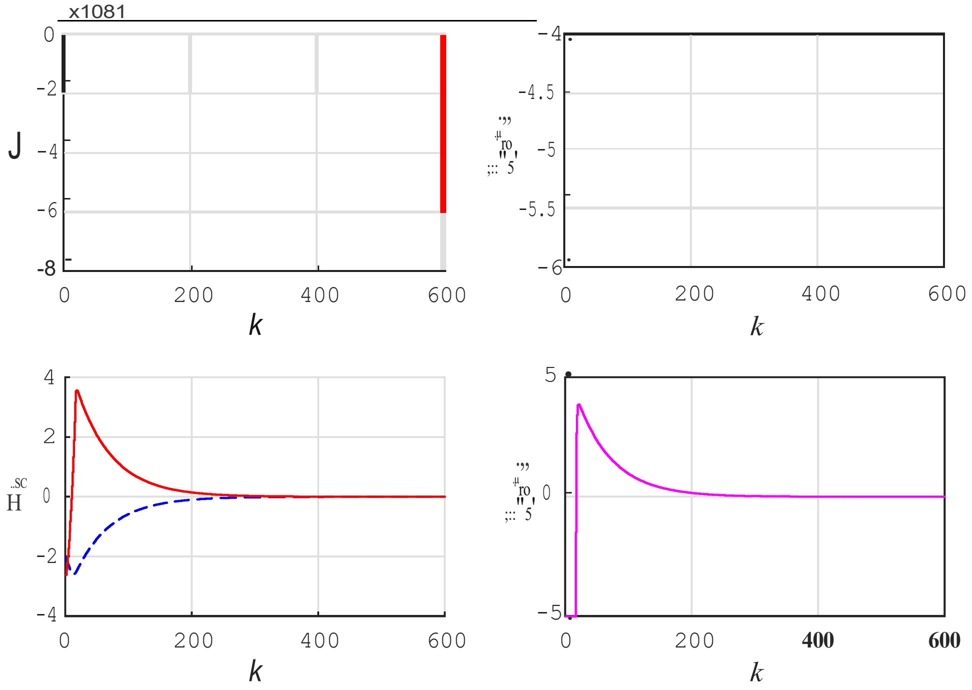

Figura 1.4: Evoluc;;ao dos estados e sinal de controle saturante em cada configurac;;.ao dos vertices do sistema (1.9).

A partir da Fig·ura 1.4, observa-se que na config·urar;iio do primeiro vertice do sistema (1.9), *as contrib·uir;oes geradas a partir do atraso instabil-izaram o sistema, um.a vez que as limitar;oes do controlador niio conferem energia s·uficiente para levar as estados para a origem. Jri pa:ra o sistema operando na cor1fi,gurar;iio do seg·undo vertice, com ar;ii,o do atuador sat-urante, e possf:uel perceber q·ue os estados convergem assintoticamente para a origern. Dessa fonna, rnesrno que os vertices do sisterrw,* (1.9) *estejarn pn5xirnos, a w;iio dos estados atrasados tem consequencias distintas em cada um deles. Aumentando-se a maxima energia do controlador para* $u = 30$ *am.bas vertices do sistema* (1.9) *siio estabilizados, conforme pode ser observado a partir da Figura 1.5. Dessa forma, as efeitos dos estados atrasados estiio diretamente relacionados com a energia disponfuel para controlar o sistema. Quanta menos energia o controlador dispoe mais aparentes siio as efeitos do atraso de estado. Sendo assim, e necessario constrnir sfnteses de controles que sejam capazes de considerar tais efeitos.*

Neste trabalho, considera-se o atraso variante no tempo para sistemas incertos, descritos conforme a seguir

$$\begin{cases} x_{k+1} & A(a)xk + Ad(a)xk\text{-}dk + B(a)\text{sat}(uk) + Bw(a)wk,\ \backslash\text{:}/k\ 2\text{::}\ 0 \\ x_{-j} & <po(j),\backslash\text{:}/j\ \text{E}\ [d,O]. \end{cases} \qquad (1.11)$$

Em que $7..lk = Kxk$ e a lei de controle por realimentac;;ao de estados, a qual assegura, para um conjunto de condic;;oes iniciais admissiveis, a estabilidade assint6tica do sistema

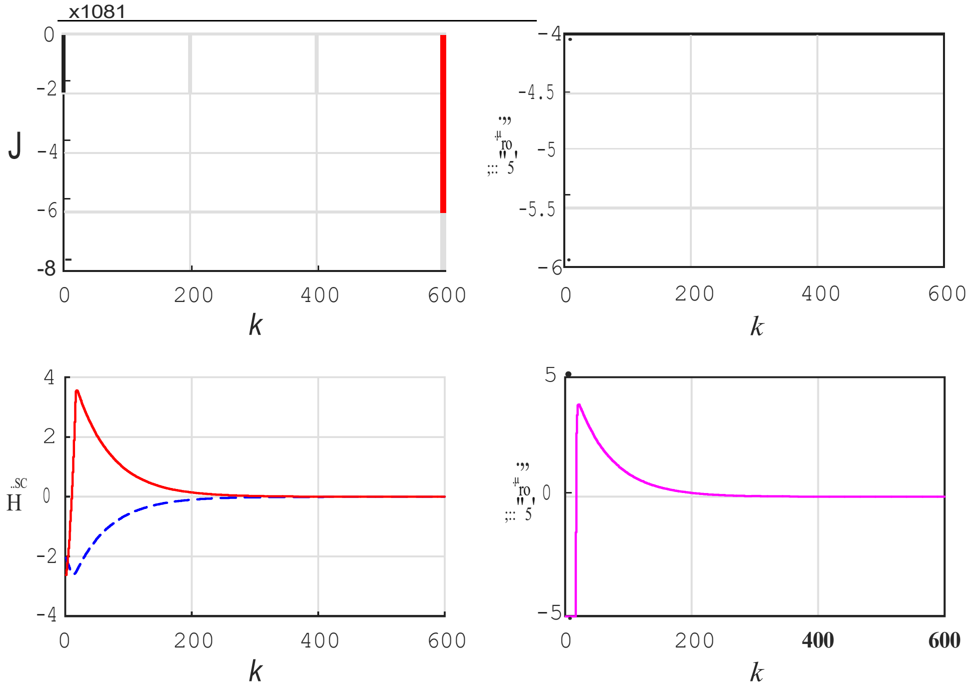

Figura 1.5: Estabilizac;iio dos estados e sinal de controle saturante em cada configurac;iio dos vertices do sistema (1.9).

em malha fechada. Neste trabalho representa-se a saturac;iio por uma func;iio *¢('uk)* = sat(uk) - *1.lk* do tipo zona morta. Isto posto, o sistema (1.11) pode ser reescrito como

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\phi(u_k) + B_w(\alpha)w_k.$$

Portanto, siio desenvolvidas condic;oes baseadas na abordagem do funcional de Lyapunov-Krasovskii, objetivando formulac;:oes menos conservadoras comparado as ja existentes na literatura, mantendo-se uma complexidade numerica relativamente baixa.

A seguir siio apresentados os objetivos geral e espedfico e a organizac,-iio do texto. No capf tulo seguinte e realizada uma revisiio bibliografica do tema abordado nessa dissertac;iio e uma formalizac,-iio detalhada das ferramentas matematicas e conceitos apresentados.

1.2 Objetivo Geral

0 presente trabalho tern como objetivo geral determinar condic;oes para a sfntese de controladores robustos, por realimentac;iio de estados, aplicadas em sistemas discretos no tempo, com atraso variante no tempo presente nos estados, sujeitos a atuadores saturantes, parametros incertos e invariantes no tempo e a ac;iio de perturbac,-iio ex6gena. Tais condic;oes visam garantir a convergencia das trajet6rias dos estados para a origem dado um conjunto de condic;oes iniciais e um conjunto de perturbac;oes admissfveis.

1.3 Objetivos Especificos

Para complementar o objetivo geral deste trabalho, alguns objetivos especificos tambem sao necessarios:

- Buscar formulac;oes menos conservadoras em relac;ao as condic;oes encontradas na literatura para a sfntese de controladores;
- Determinar uma nova caracterizac;ao geometrica da regiao de atrac;ao, garantindo que o sistema seja assintoticamente localmente estavel, tornando esta regiao a maior possf vel, a partir da representac;ao do estado do sistema com atraso em um espac;o aumentado;
- Analisar e mitigar os efeitos das perturbac;oes nas classes de sistemas investigados, a partir da nova abordagem;
- Aplicar as condic;oes de sfntese em exemplos numericos.

1.4 Organiza ao do Documento

Este trabalho esta organizado em cinco capf tulos. Para o presente capf tulo, e realizada uma introduc;ao dos conteudos os quais serao abordados junto ao tema, os objetivos gerais e especfficos, alem da organizac;ao do texto.

No Capftulo 2 sao apresentados os trabalhos ja existentes na literatura, os principais conceitos, determinac;oes e abordagens te6ricas necessarias para compreensao e desenvolvimento deste trabalho. Tais como o conceito de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii, incertezas polit6picas, sistemas com atraso, atuadores saturantes, estabilidade entrada-estado (ISS).

No Capftulo 3, inicialmente, e definida a func;ao de L-K que sera utilizada. Em seguida, sao apresentadas duas abordagens para resolver o problema proposto. Ambas empregam a desigualdade de Jensen, para que as soluc;oes nao sejam dependentes de todos os estados atrasados. Dessa forma, a primeira delas, apresenta majorac;oes de parte dos termos do funcional de **L-K,** o que introduz um escalar E a ser determinado. Neste caso, as matrizes do funcional de Lypaunov-Krasovskii utilizado nao sao polit6picas. Na segunda abordagem apresenta matrizes do funcional de L-K dependentes dos parametros incertos invariantes no tempo, ou seja polit6picas, o que garante soluc;oes menos conservadoras em relac;ao ao uso do funcional de L-K da primeira soluc;ao. Alem disso, e utilizado o Lema de Finsler para introduzir variaveis de folga que ampliam o conjunto de factibilidade das LMis propostas. Note que nesta abordagem, nao e empregada a majorac;ao de termos que implicam na busca de um escalar E.

No Capitulo 4, e apresentada uma nova abordagem para caracterizac;;ao da regiao geometrica de atra<:;ao, sendo esta, uma das principais contribui<:;oes deste trabalho. Alem disso, sao apresentadas furn;:.oes objetivo, que juntamente as condic;;oes desenvolvidas, possuem um custo computacional relativamente baixo, ao comparar-se com a vigente literatura. Somado a isto, sao desenvolvidos os procedimentos de otimiza<:;ao aplicados nos estudos de caso, para maximiza<;ao da regiao de atra<:;ao, analise da maxima energia de perturba<:;ao, e mitigac;;ao dos efeitos do sinal ex6geno na saida regulada do sistema.

.Ja no Capitulo 5 sao apresentadas algumas considera<:;oes finais sobre o trabalho alem das propostas de trabalhos futuros. Por fim, o trabalho apresenta ainda, apendices complementares para um melhor entendimento do desenvolvimento das condic;-6es.

Capitulo 2

Fundamentos

Neste capitulo sao apresentados trabalhos ja existentes na literatura e fundamentos matematicos basicos para o desenvolvimento das condic;:oes de projeto de controladores, por realimentagao de estados para estabilizagao local de sistemas discreto no tempo, com estados atrasados, sujeitos a atuadores saturantes e perturbagoes ex6genas.

2.1 Revisao Bibliografica

Os processos reais sao extremamente complexos, possuindo diversos fatores que dificultam a sua representac;:.ao. Dessa forma, se faz necessaria a obtenc;:ao de modelos matematicos e ferramentas cada vez mais precisas e eficientes, sendo avaliados principalmente pelo desempenho do sistema de controle resultante. Alem disso, pode ser considerado o tempo de obtern;ao da resposta e a complexidade numerica. Uma vez que o setor industrial demanda uma engenharia mais assertiva, sustentavel e rentavel, almeja-se otimizar os processos para economia de energia, reduzindo gastos e uso de recursos naturais. Entretanto, os sistemas reais geralmente possuem atraso nos estados variante no tempo, atuadores saturantes e sinais ex6genos, os quais afetam negativamente o desempenho ou a estabilidade dos mesmos (Fridman, 2014).

0 atraso nos estados e uma caracteristica comumente encontrada em diversos sistemas dinamicos reais, tais como: processos quimicos, mecanicos, biol6gicos, economicos, etc. (MacDonald, 2008; Hu & Wang, 2013; Fu & Ma, 2016). 0 atraso de estado representa um desafio relevante para aplicagoes, representagoes matematicas e implementagoes computacionais. Segundo Niculescu (2001); Gu *et al.* (2003); Gomes da Silva Jr. & Leite (2007), a origem do atraso nesses sistemas possui, de forma geral, tres razoes distintas: uma propriedade intrinseca do sistema, uma consequencia nao desejada da ac;:ao de controle, ou ainda incorporagao intencional de atrasos no controle de sistemas. Alem disso, a estabilidade dos sistemas com atraso pode ser dependente ou nao do valor do atraso.

Na literatura, sistemas discretos no tempo com atraso nos estados tern ganhado uma maior aten(.'ao nas ultimas decadas. Tecnicas de representac;ao em sistema aumentado foram estabelecidas em meados dos anos 90. Entretanto, tal abordagem requer uma elevada complexidade numerica, considerando todos os estados atrasados, para determina(,'ao dos ganhos de controladores robustos (Kapila & Haddad, 1998). como dependentes ou independentes do atraso. De acordo com (Niculescu, 2001), uma das tecnicas mais utilizadas para a investiga(,'ao de sistemas com atraso e baseada em fun(,'6es de Lyapunov-Krasovskii (L-K). Aplica(,'6es dessa abordagem podem ser encontradas em Hetel *et al.* (2008); Miranda & Leite (2011); Caldeira *et al.* (2011); Xu *et al.* (2014); Castro *et al.* (2020). Em (Castro *et al.,* 2020) foi proposta a utilizac;ao dessa fum.;ao relacionando estados atrasados com atuais, a qual foi utilizada como inspira(,'ao neste trabalho para tratar sistemas incertos e discretos no tempo.

Alem do atraso, os processos reais estao sujeitos a limitac;ao de energia, outro fator capaz de influenciar no desempenho podendo ate mesmo causar instabilidade. De acordo com Pal & Negi (2018), para um sistema de controle com uma ampla gama de condic;6es de operac:;ao, pode acontecer que a variavel de controle atinja os limites do atuador e em sistemas praticos, nao e possf vel atender as demandas de sinal de controle ilimitadas (como por exemplo: corrente, tensao, pressao, fluxo e etc.) devido a restric;ao ffsica do atuador. Quando isso acontece, o ciclo de *feedback* e quebrado e o sistema funciona como um circuito aberto porque o atuador ira permanecer em seu limite independentemente da safda do processo. Como resultado, o sistema geral se torna inerentemente nao linear e o controlador perde sua capacidade de controlar o processo. Combinando-se tais fatores com a ae;ao integral, pode-se gerar um rapido crescimento do sinal de controle, denominado *windup* (Astrom & Rundqwist, 1989). Alguns trabalhos foram desenvolvidos para lidar com esse tipo de situae;ao, sendo um deles apresentado por (Zaccarian & Teel, 2011), aplicando-se um compensador *anti-windup,* que estabelece uma relae;ao entre o sinal de controle calculado e o efetivamente aplicado no sistema real, realimentando-se uma proporc;ao desse sinal no controlador. Alem de aumentar o tamanho da Regiao de Atrac;ao, a ac:;ao *anti-windup* pode melhorar o desempenho da malha fechada. (Tarbouriech *et al.,* 2011, p. 32). Sistemas discretos no tempo sujeitos a atuadores saturantes foram investigados em Gomes da Silva Jr. *et al.* (2001, 2008). Ja em Negi *et al.* (2012), e apresentada uma abordagem para a sfntese de controladores com ac;ao *anti-windup,* aplicada em sistemas discretos no tempo, precisamente conhecidos e com atraso variante no tempo. Isto posto, a saturac;ao nao linear e inevitavel para projetar um controlador: ela deteriora o desempenho do sistema em malha fechada e causa instabilidade (Hu & Lin (2001),Tarbouriech *et al.* (2011, p. 3,9-12)). Dessa forma, e necessario determinar uma regiao composta por todas as condic:;6es iniciais admissfveis, denominada de regiao de atrac;ao (RA)- De acordo com Tarbouriech *et al.* (2011, p. 14) e Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005), a determina<;ao de tal regiao pode ser uma tarefa desafiadora, pois a regiao pode nao ser convexa, aberta e ate ilimitada em algumas direc;oes. Assim, uma estimativa da regiao de atrac;ao *(RE)* e maximizada de forma que *RE RA-*

Outro fator presente em aplicac;oes reais e a ac;ao de sinais ex6genos, fazendo com que as trajet6rias dos estados sejam desviadas da condi<:ao de equilfbrio, levando a queda de desempenho ou ate mesmo perda de estabilidade. Nesses casos, geralmente, nao se e possfvel garantir que as trajet6rias do sistema sejam limitadas para qualquer sinal de pertuba<;ao. Sendo assim, e importante a caracterizac;ao de conjuntos de condic;oes iniciais e sinais de perturba<:ao admissf veis, garantindo a convergencia dos estados para a origem. A caracteriza<:ao de tais sinais ex6genos, geralmente, e relacionada aos limites de amplitude (fl.$_{00)}$ e/ou energia (fl.$_{2)}$ do sinal de perturba<:ao. Tal problematica e denominada como analise da estabilidade entrada-estado (ISS) (Tarbouriech *et al.,* 2011, p. 27). Dessa forma, uma vez cessada a perturbac;ao a convergencia para a origem deve ser garantida, ou seja, para sinais ex6genos e condic;oes iniciais admissfveis.

Sistemas discretos no tempo, com atraso nos estados e atuadores saturantes tern atrafdo aten<;ao nos ultimas anos. Os trabalhos (Ghiggi, 2008; Chen *et al.,* 2014; Silva *et al.,* 2018a; Castro *et al.,* 2020) propoem condic;oes de estabilizac;ao assint6tica. Alem disso, esses trabalhos fornecem estimativas para o conjunto de condic;oes iniciais tais que as trajet6rias em malha fechada convergem para a origem, ou seja, estimativas da regiao de atra<;ao. Em (Ghiggi, 2008) sao tratados: casos com atraso variante no tempo, obtendo uma lei de controle por realimentac;ao de todos os estados, casos com atraso incerto invariante no tempo em sistemas precisamente conhecidos. 0 desempenho da malha fechada e investigado em **(Lin,** 2012) considerando a convergencia exponencial dos estados para a origem para sistemas precisamente conhecidos.

Enquanto Xu *et al.* (2012); Chen *et al.* (2014); Pepe *et al.* (2017); Castro *et al.* (2020) empregam uma abordagem baseada em Lyapunov-Krasovskii (L-K), Silva *et al.* (2018a) adota uma representac;ao aumentada sem atraso chaveada pelo valor do atraso, gerando estimativas muito maiores da regiao de atra<:ao com maior demanda computacional. Ressalta-se que tal condic;ao representa uma expansao da proposta inicial apresentada em Hetel *et al.* (2008), reformulada por Binotti (2015) que inserem uma forma mais geral do funcional de Lyapunov-Krasovskii e (Silva, 2016) o qual trata de sistemas incertos com atraso variante no tempo. No entanto, os sinais de perturba<:ao nao sao abrangidos por nenhum dos trabalhos mencionados acima. Dessa forma, o uso de estabilidade (ou estabilizac;ao) de entrada para estado local (regional), para lidar com sistemas discretos no tempo, sujeitos ao atraso de estados, apresentado em (de Souza *et al.,* 2019), representa uma abordagem baseada em espac;o aumentado, estendendo os resultados de (Silva *et al.,* 2018a), abordando assim a presenc;a de sinais ex6genos.

Pepe *et al.* (2017) analisa a estabilidade incremental entrada-estado, em contextos de estabilidade exponencial local e global de uma classe de sistemas nao lineares, discretos no tempo, sujeitos a atraso nos estados. Apesar de apresentar uma formulac;:ao geral, esta nao se aplica diretamente ao caso de atuadores saturantes.

Abordagens distintas para a caracterizac;:.ao da regiao de condic;:6es iniciais para sistemas discretos com atrasos e atuadores saturantes sao apresentadas por (Zhang *et al.,* 2011; Xu *et al.,* 2012; Chen *et al.,* 2014; Silva *et al.,* 2018b; Chen *et al.,* 2019; de Souza *et al.,* 2019; Castro *et al.,* 2020; Lima *et al.,* 2021). Tal caracterizac;:ao *e* necessaria para analisar a regiao de valores que os estados podem assumir, os quais possuirao trajet6rias limitadas dentro de *RA* convergentes para a origem.

Em Xu *et al.* (2012) sao determinados ganhos para um controlador robustos por realimentac;:ao de estado, em que a regiao de atrac;:ao e aproximada por conjuntos de condic;:6es iniciais, limitados uniformemente por uma bola dentro de *IFtn* com raio r_1. Zhang *et al.* (2011) apresentam uma abordagem para sintese de controladores robustos, por realimentac;:ao de estados, para sistemas chaveados, a partir de matrizes constantes que caracterizam a estrutura das incertezas. Ja Chen *et al.* (2019) apresentam uma caracterizac;:ao da estimativa da regiao de atrac;:ao menos conservadora, em que duas bolas sao determinadas por dois parametros r_1 e r_2 sendo o conjunto dos estados atrasados admitidos limitado por r_2 :S $2r_1$. Em Silva *et al.* (2018b) foi proposta uma abordagem para obtenc;:ao de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno, em que a caracterizac;:ao e dividida em duas partes, determinando um elips6ide *C* em *IFtn* para o vetor de estados atuais e uma regiao $B(r_1,r_2)$ para a sequencia de estados atrasados. Tal abordagem nao considera o acoplamento entre o estado atual x_0 e o estado atrasado x_{-1}. Uma caraterizac;:ao geometrica mais abrangente foi apresentada em Silva *et al.* (2018a); de Souza *et al.* (2019) determinando um conjunto elipsoidal em um espac;:o aumentado com dimensao $n(J+1)$. Porem, por considerar todos os estados atrasados, tal soluc;:ao requer um elevado custo computacional. Em Lima *et al.* (2021) uma func;:ao de Lyapunov-Krasovskii foi mapeada em um espac;:o aumentado, explorando melhores metodos de otimizac;:ao para ampliar a regiao de atrac;:ao estimada no caso de analise de estabilidade robusta (local). A vantagem neste caso e que as condic;:6es da LMI para o projeto do controlador permanecem com complexidade numerica independente do atraso maximo, J. .Ja em Castro *et al.* (2020) a estimativa da regiao de atrac;:ao considera os acoplamentos entre x_j e x_{j-1}, j E [0,J], descrevendo-se assim um funcional de L-K que relaciona diretamente os estados atrasados e atuais. Alem disso, nao se tern um sistema aumentado composto por todos os estados atrasados reduzindo-se a complexidade numerica das condic;:6es. Neste trabalho e abordada a estabilizac;:ao robusta entrada-estado para uma classe de sistemas incertos discretos no tempo com atraso no estado variante no tempo e limitado por valores minimo (4.) e maximo (J), atuadores saturantes e sujeitos a perturba<_:;6es limitadas em energia (£2). A partir das condi<_:;6es desenvolvidas, sao formulados procedimentos de otimiza<_:;ao convexa para maximizar o conjunto de condi<_:;6es iniciais admissfveis ou maximizar o limite de energia das perturba<_;-6es toleraveis. As se<_:;6es a seguir apresentam os principais conceitos necessarios no desenvolvimento deste trabalho.

2.2 Fundamenta ao Teorica

Esta sec;ao apresenta algumas ferramentas matematicas fundamentais para o desenvolvimento e compreensao dos principais resultados deste trabalho.

2.2.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

A estabilidade de um sistema pode ser determinada a partir da analise da sua energia interna. Se o sistema possui um valor de energia positivo e essa energia tende a zero conforme o tempo tende ao infinito, entao o sistema e dito assintoticamente estavel no sentido de Lyapunov. Esse metodo utiliza uma furn;ao escalar que representa a quantidade de energia do sistema em relac;ao ao seu ponto de equilfbrio. De acordo com (Khalil, 1996, p. 140), se esta furn;ao for positiva e decrescente no tempo, pode-se concluir que o sistema e assintoticamente estavel, sendo chamada de fun<_;-.ao de Lyapunov. Assim, as condic;6es de Lyapunov para analise de estabilidade assint6tica de um sistema linear discreto no tempo sao apresentadas a seguir.

Considere o sistema linear discreto no tempo:

$$x_{k+1} = Ax_k, \tag{2.1}$$

em que *xk* E *]Rn* e o vetor de estados no instante *k* E Z+ e *A* E *]RnXn* e a matriz dinamica do sistema.

Teorema 2.1 (Estabilidade Global por Lyapunov (Adaptado de Khalil (1996, p. 140))) *Existindo-se ·uma funr;iio de Lyap-unov, determinada par V(xk), tal que:*

1. $V(x_k) > 0 \ \forall x_k \neq \mathbf{0}$ *e* $V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$,

2. $\|x_k\| \to \infty \Rightarrow V(x_k) \to \infty$,

3. $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \ \forall x_k \neq \mathbf{0}$ *e* $\Delta V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$,

entiio o sistema (2.1) e dito globalmente assintoticamente estavel.

A partir da noc;ao de superffcie de Lyapunov, pode-se realizar a interpreta<_;-ao geometrica do Teorema 2.1, definida conforme a seguir.

Defini<_;ao 2.1 (Tarbouriech *et al.* (2011, p. 53)) *Considere afunr;iio de Lyap·unov V(xk)- A s·uper.f(cie de nfoel .Cv(V,c) definida no espar;o de estados par*

$$\mathcal{L}_\mathcal{V}(V,c)=\Big\{x_k\in\mathbb{R}^n;V(x_k)=c,\ c>0\Big\},$$

e *denom:inada s-uperffoie de Lyap·unov.*

Associado a superficie de nfvel *.Cv(V,c),* pode-se definir a regiao de subnfvel *S(V,c)* conforme a seguir:

Defini<_;ao 2.2 *Considerando a s·uperf(cie nfoel Lv (V,c), define-se o conj-unto*

$$\mathcal{S}(V,c)=\Big\{x_k\in\mathbb{R}^n;V(x_k)\leq c,\ c>0\Big\},$$

cuja fronteira e *dada par .Cv(V,c).*

Portanto, a condi<_:;ao *V(xk)* < 0 implica que, quando a trajet6ria do sistema cruza a superffcie de Lyapunov *.Cv(V,c),* ela se move para o interior do conjunto contrativo *S(V,c)* estando sempre confinada no mesmo. Note que, a medida que *c* diminui, a superffcie de Lyapunov encolhe em dire<_:;ao a origem. Isto posto, quando *V(xk)* < 0, a trajet6ria do sistema entra na superficie de Lyapunov, a qual decresce em dire<_:;ao a origem, conforme o tempo aumenta, resultando na convergencia das trajet6rias para a origem. Quando o sistema e nao-linear, a equa<_:;ao (2.1) nao e capaz de descrever adequadamente o comportamento dinamico em todos os pontos do *IRn.* Tal nao linearidade pode ser causada por diferentes fatores, sendo inerente ao sistema, ou mesmo pelo fato de que os atuadores reais nao sao capazes de realizar a a<_:;ao de controle calculada pelo controlador, devido as limita<_:;6es fisicas, podendo causar instabilidade nos processos. Dessa forma, para atuadores saturantes, e considerado neste trabalho o sistema nao autonomo:

$$x_{k+1}=Ax_k+B\mathtt{sat}(u_k). \tag{2.2}$$

Se *A* nao e Schur-estavel, entao, o sistema (2.2), pode ter estabilidade apenas localmente, o que nos leva a seguinte definic;ao:

Defini<_;ao 2.3 (Tarbouriech *et al.* (2011, p. 14})) *A regiiio de atrar;iio RA da origem do sistema (2.2)* e *definida coma o conj-unto de todas as condir;oes iniciais* x_0*, cujas respectivas trajet6rias convergem assintot-icamente para a origem. Em outras palavras, se* x_0 E *RA entiio xk* ----+ 0 *quando k* ----+ oo.

Assim sendo, e necessario determinar uma candidata a func;ao de Lyapunov que satisfac;a condic;oes de estabilidade local, tal fator sera explorado nas sec;oes seguintes.

2.2.2 Estabilidade de Sistemas com Atraso nos Estados

Conforme apresentado na se<_:;ao 2.2.1, o metodo de Lyapunov pode ser empregado para realizar a analise de estabilidade de sistemas sem a presen<_:;a do atraso. Dessa forma, encontra-se uma fun<_:;ao de Lyapunov *V(xk),* a qual pode representar uma medida generalizada da energia do desvio dos estados em rela<_:;ao ao ponto de equilibrio *xk* = 0.

A dependencia dos estados passados, e nao apenas do estado atual *xk,* foi proposta inicialmente por Kolmanovskii & Myshkis (1992, p. 166). Para sistemas dependentes de estados atrasados, o conceito de estado e caracterizado por uma sequencia de vetores no *IRn* no intervalo de instantes *d* E [-d,0] , sendo *cl* o atraso maximo. Sendo assim, a sequencia do estado inicial e representada, no presente trabalho, por 'P(J,o·) Por sua vez, o estado do sistema em um instante *k* e denotado por *'P(rl,k)* = {*xk-J,* ··· , *xk}.* Neste trabalho, buscando uma simplificac;ao de representac;:ao, sao chamados de estados atuais, aqueles definidos pelo vetor *xk,* e os estados atrasados sao descritos pelos demais vetores da sequencia, denotados por *Xk-j, j* E [d,1]. Logo, busca-se uma func;:ao *V('P(rl,k))* dependente de *'P(rl,k),* considerando-se o desvio dos estados em relac;:ao ao ponto de equilibrio *xk* = 0. Essa dependencia dos estados passados e determinada como candidata a fun<_:;ao de Lyapunov-Krasovskii (Fridman, 2014, p. 63). Dessa forma, o metodo de Lyapunov-Krasovskii pode ser empregado para investigar a estabilidade assint6tica de sistemas autonomos discretos no tempo com atraso nos estados, descritos conforme a segmr:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k}, \tag{2.3}$$

em que *Xk-dk* e o vetor de estados atrasados do sistema, *A* e *Ad* E *IRnxn* sao as matrizes que correspondem a dinamica do sistema afetada pelos estados atrasados, *dk* e um mimero inteiro positivo representando o atraso variante no tempo tal que *dk* E [0,d].

Para defini<_:;ao dos teoremas para analise de estabilidade dos sistemas sao utilizadas as fun<_:;oes auxiliares propostas em (Khalil, 1996, p. 144) definidas a seguir.

Defini<;ao 2.4 (Fun ao classe lC} *Uma funr;ao contfri:ua a* : [0,a) ----+ [0,oo) e *dita pertencer a classe* ***K,*** *se for estritamente crescente e* a(0) = 0. *E dda pertencente a classe* **K,00** *se a=* oo *e a(r)* ----+ oo *quando r* + oo.

Defini ao 2.5 (Fun ao classe K.C) *Uma funr;ao conUnua /3* : [0,a) x [0,oo) ----+ [0,oo) e *dita pertencer a classe K.C se, para cada s fi,:ro, o mapeamento f3(r,s) pertence a classe K, em relar;ao a r e, para cada r .fixo,* o *mapeamento /3(r,s)* e *decrescente em relar;ao as e /3(r,s)* ----+ 0 *a medida que s* ----+ oo.

O Teorema de Lyapunov-Krasovskii, adaptado de (Gu *et al.,* 2003, p. 11), empregado para analise de estabilidade de sistemas com atraso nos estados e apresentado a seguir.

Teorema 2.2 (Estabilidade Global de Lyapunov-Krasovskii) *Se exist-ir'Umafunr;,iio V(<p(J,k)), denominada .funr;,iio de Lyap·unov-Krasovskii, e .funr;,oes* ""$_1$ *e* ""$_2$ *classe* K *e a .funr;,iio* ""$_3$ *classe* K£, *tal que*

1. ""1 (II'P(J,o)II^2 *V(<p(J,k))* ""2 (II'P(J,k)11:),
2. *6V(<p(J,k))* -""3 (II'P(J,0JII^2),

em *que*

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) = V(\varphi_{(\bar{d},k+1)}) - V(\varphi_{(\bar{d},k)}),$$

enttio o sistema a·utonomo (2.8) e *glohalmente assintoticamente estri:uel.*

Funcional de Lyapunov-Krasovskii

Objetivando exemplificar o Teorema 2.2 e apresentado a seguir o desenvolvimento empregando uma fun<_:;ao de Lyapunov-Krasovskii com dependencia dos estados atrasados dada por:

$$V(cpk) = x!\ Pxk + \overset{k-1}{\underset{j=k-d}{L}} xJ\,Qxj > 0, \tag{2.4}$$

em que a variac;ao da energia e expressa por:

$$\Delta V(\varphi_k) = V(\varphi_{k+1}) - V(\varphi_k) < 0. \tag{2.5}$$

Dessa forma, aplicando-se (2.4) em (2.5) tem-se:

$$\Delta V(\varphi_k) = x_{k+1}^{\top} P x_{k+1} + \overset{k}{\underset{j=k-d+l}{L}} xJ\,Qxj \ - \ x!\ Pxk \ - \overset{k-1}{\underset{j=k-d}{L}} xTQx_J\cdot_J < 0,$$

a qual pode ser reescrita no formato

$$\Delta V(\varphi_k) = x_{k+1}^{\top} P x_{k+1} + x_k^{\top}(Q-P)x_k - x_{k-\bar{d}}^{\top} Q x_{k-\bar{d}} < 0.$$

Observa ao: A analise de estabilidade apresentada assegura estabilidade global. Porem, se houver alguma nao-linearidade, tal qual atuadores saturantes, e necessaria a analise de estabilidade local, pois podem haver estados suficientemente grandes para os quais o atuador nao possua energia suficiente para atrair a respectiva trajet6ria para a origem. Dessa forma, nao se e possivel representar adequadamente o comportamento dinamico do sistema, para todos os pontos de *IRn.* Logo, torna-se relevante estimar o conjunto de condic;oes iniciais para as quais as trajet6rias sao atraidas para a origem. Tais questoes serao abordadas no capitulo seguinte.

2.2.3 Estabilidade Entrada-Estado

Considere que o sistema (2.3) esteja sujeito a uma entrada de perturba<_:;ao externa, em que:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} + B_w w_k \tag{2.6}$$

em que *Wk* E *JRnw* e o sinal de perturba<_:;.ao e *Bwk* E *JRnXnw.* Um sistema e dito estavel no sentido de entrada-estado (188), se o mesmo for globalmente assintoticamente estavel quando nao houver entradas de perturba<_:;ao, e se as trajet6rias, excitadas por um sinal externo, forem limitadas por uma fun<_:;ao ao longo do tempo. Inicialmente, o conceito de 188 foi definido por Sontag (1989), para o caso contfnuo no tempo. A seguir, e apresentada a defini<_:;ao de 188 para o caso discreto no tempo.

Defini.;ao 2.6 (ISS - Adaptada de (Sontag, 1989) e (Khalil, 1996, p. 175)) 0 *sistema* (2.6) e *dito est6:vel de entrada-estado se existir ·uma furu;ao /3 de classe ICC e ·uma fun<;ao* CY *de classe* K *tais que, para qualquer sequencia inicial* i.f)(J,o) *e qualquer entrada limitada* wk, *a solw;.ao i.f)(J,k) existe para todo k* 2:: *ko e satisfaz*

$$111.()(J,k) \,||\quad /3(111.()(J,o)||,\, k - ko) + CY\left(\sup_{ko\text{-}S.k\text{-}S.k} ||wk||\right) \tag{2.7}$$

Segundo Khalil (1996), a inequa<_:;ao (2.7) garante que para cada entrada limitada *wk,* a sequencia *r.p(J,k)* seja limitada. Alem disso, conforme *k* aumenta, os estados caracterizados por *i.f)(J,k)* sao limitados por uma furn;ao classe *K£* do $\sup_{k?\_ko}$ ||wk||- Para *wk* 0, (2.7) e reduzido para

$$\left\|\varphi_{(\bar{d},k)}\right\| \leq \beta\left(\left\|\varphi_{(\bar{d},0)}\right\|, k - k_0\right),$$

logo, a estabilidade entrada-estado implica que a origem de um sistema autonomo, nao excitado, (2.3) e globalmente assintoticamente estavel. A no<_:;ao de estabilidade de entrada para estado e definida para o caso global onde os estados inicias e a entrada podem ser arbitrariamente grandes. Uma versao local desta nogao adaptada de (Leite *et al.,* 2020, p. 357-366) e considera<_:;oes do caso contfnuo presentes em (Tarbouriech *et al.,* 2011, p. 29)) sao apresentadas a seguir.

Quando um sistema de controle esta sujeito a agao de sinais ex6genos, nao se pode garantir que as trajet6rias do mesmo convirjam para a origem enquanto as perturbagoes *wk* nao sao nulas, ao longo de *k* oo. Logo, minimiza-se a influencia desta perturba<_:;ao sobre o sistema. Neste caso, garante-se que qualquer trajet6ria *i.f)(J,k)* seja limitada para sinais ex6genos *w* tambem limitados. Dessa forma, no presente trabalho, busca-se por perturba<_:;.oes limitadas em energia, ou seja, considera-se que o sinal *w* tern norma £2 menor que b"-^{1}, isto e, a relagao

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \delta^{-1} \right\}, \tag{2.8}$$

sendo llwll; = $\overset{\infty}{\underset{k=O}{L}}$ w[wk.

Para garantir que as trajet6rias do sistema (2.6) sejam limitadas, e considerada a fun<_:;ao abaixo

$$\nu_k \triangleq \Delta V(\varphi_{(\bar{d},k)}) - w_k^\top w_k,$$

em que V(cp(J,k)) > 0 e uma candidata a furn:;ao de Lyapunov-Krasovskii. Assim tem-se

$$\overset{k}{\underset{i=O}{Lvk}} = V(cp(d,k)) - V(cp(J,o)) - \overset{k}{\underset{i=O}{LW\{Wi}}$$

Definindo-se os seguintes conjuntos associados a *V* (*cp*(*cl,k*)):

$$\mathcal{R}_0 \triangleq \left\{\varphi_{(\bar{d},0)} \in \mathbb{R}^n : V(\varphi_{(\bar{d},k)}) \leq \beta^{-1}\right\}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \triangleq \left\{\varphi_{(\bar{d},0)} \in \mathbb{R}^n : V(\varphi_{(\bar{d},k)}) \leq \eta^{-1}\right\}, \tag{2.10}$$

em que 'TJ-^{1} = ;3-^{1} + 5-^{1}. Logo, se *vk* < 0, tem-se \/cp(J,o) E *Ro* e *wk* E *P* em que:

1. Se *Wk* -=/=- **0,** entao

   $$V(\varphi_{(\bar{d},k)}) < V(\varphi_{(\bar{d},0)}) + \|w\|_2^2 \leq \beta^{-1} + \delta^{-1} = \eta^{-1},$$

   e portanto, as trajet6rias do sistema nao saem do conjunto *RE* *RA;*

2. se *wk*= **0,** \:/*k* 2". 0, entaoV(cp(J,k)) < 0, o que por sua vez garante que cp(J,o) **0,** conforme *k* oo.

Nota-se que *vk* < 0, assegura que *RE* e uma regiao de estados atingiveis considerando que cp(J,o) E *Roe* que *w* E *P*. Alem disso, para *wk*= **0,** se *vk* < 0, segue queV(cp(J,k)) < 0, *Vcp(J,k) ERE,* o que significa que *RE* esta contido na regiao de atra<_:;ao do sistema (RA) e pode ser vista como uma estimativa da mesma. Destaca-se que, uma abordagem para o caso continuo pode ser observada a partir de (Tarbouriech *et al.*, 2011, p. 29).

A representac;:ao da estabilidade entrada-estado pode ser observada a partir da Figura 2.1. Para o tal, tomando-se o instante *k*$_{0}$, em azul claro, como ponto de partida, o sinal ex6geno *w* inicia sua a<_:;ao, assim, as condi<_:;6es iniciais sao pertencentes ao conjunto *R*$_{0}$. Isto posto, para quaisquer valores de *wk,* a trajet6ria dos estados permanece confinada em *RE,* conforme pode ser observado a partir da curva tracejada em vermelho. Sendo cessada a perturbac;:ao no instante k$_1$, em azul escuro, garante-se a convergencia dos estados para a origem, ao passo que *k* oo. Dessa forma, a partir da estabilidade entrada-estado, para o sistema nao autonomo

$$x_{k+1} = Ax_k + B\mathtt{sat}(Kx_k) + A_d x_{k-d_k} + B_w w_k,$$

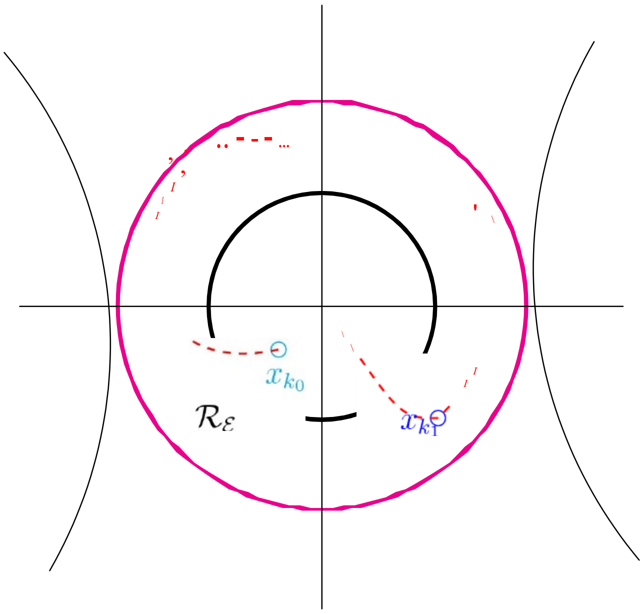

Figura 2.1: (Adaptada de (Tarbouriech *et al.,* 2011)) Condic,:ao inicial contida em *Ro,* sujeita a um sinal ex6geno o qual se inicia no instante k_0. A trajet6ria do estado, nao ultrapassa a regiao *RE* estimada para *RA-* Dessa forma, ao atingir-se *wk* = **0** para *k* 2': k1, o estado converge assintoticamente para a origem, demonstrando assim, a estabilidade entrada-estado do sistema.

e possfvel projetar os ganhos K do controlador robusto, o qual sera melhor descrito nas sec;oes seguintes, objetivando maximizar a estimativa da regiao de condic;oes iniciais *R0,* para um determinado limite de energia de perturbac:ao, 5-^{1}, ou mesmo garantir a tolerancia ao maior valor possfvel da energia de perturbac;ao.

2.2.4 Estimativa do ganho f2

A estabilidade £2 desempenha um papel especial na analise de sistemas. Conforme apresentado em (Khalil, 1996, p. 209), e natural trabalhar sinais integraveis ao quadrado, que podem ser vistos como sinais de energia finita. Em muitos problemas de controle, o sistema e representado como um mapeamento de uma entrada de perturba<_:;ao *wk* para uma safda controlada *zk,* que deve ser pequena. Para sinais de entrada £2, o sistema de controle e projetado para tornar o ganho finito do mapeamento de entrada-safda £2 estavel e minimizar o ganho £2. Em tais problemas, e importante nao apenas ser capaz de descobrir se o sistema e estavel com ganho finito £2, mas tambem calcular o ganho ou um limite superior sobre o mesmo.

Considere o sistema discreto nao-linear, a seguir, sujeito a um sinal ex6geno *wk:*

$$Xk+l = Axk + Adxk-dk + Bwwk$$

$$zk = Cxk,$$

sendo *Zk* E *JRnz* a safda regulada a partir de CE *]Rnzxn_*

Defini ao 2.7 (Adaptada de (Lu *et al.*, 2009; Zheng & Wu, 2008)) *Dado* $_1 > 0$ E R *Diz-se que* o *sistema* (2.11) *possui ganho* £2 *restrito menor que* 1, *se a seg·uinte condir;ao* e *satisfeita:*

$$\overset{oo}{\underset{k=O}{L}} zizk < 1^2 \overset{oo}{\underset{k=O}{L}} wiwk, \qquad (2.11)$$

sob a condir;iio inicial cp(J,o) = **0** *e para todo wk* E *P.*

Definindo *Dk= vk+,-*^{2}*zI zk =V(cp(d,k))-wiwk+,-*^{2}*zI zk, \:/k* > 0, sendo *V(cp(d,k))* > 0 a candidata a func;ao de Lyapunov-Krasovskii, tal que

$$\sum_{i=0}^{k} \bar{\nu}_k = V(\varphi_{(\bar{d},k)}) - V(\varphi_{(\bar{d},0)}) - \sum_{i=0}^{k} w_i^\top w_i + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=0}^{k} z_i^\top z_i. \qquad (2.12)$$

Logo, quando *Dk* < 0 tem-se que:

1. se *wk=* **0,** entao *V(cp(J,k))* < -,-^{2}zJ *zk* '.S 0, o que garante *cp(J,k)* **0** para *k* oo.
2. se *wk i=-* **0** e cp(J,o) E *R₀,* isto e, cp(J,o) pertence a regiao de condic;oes iniciais, com *wk* satisfazendo (2.8):
   (a) *V(* cp(J,k)) < *V(* cp(J,o)) + llwll; :S 5-^{1}, o que por sua vez implica que as trajet6rias do sistema nao saem do conjunto *RE* s;;;; *RA;*
   (b) para *k* oo, llzkll; < 1^2 llwll; +1^{2}V(cp(J,o))- Desta forma, se cp(J,o) = **0**, segue que llzk ll; < ,^{2} llwll;, ou seja, 1^2 e um fator limitante para o ganho £2.

Assim *Dk* < 0 assegura que *RE* e uma regiao de estados possfveis considerando que cp(J,o) E *Ro* e *w* E *P.* Alem disso, no caso em que *wk* = **0**, se *Dk* < 0, tem-se *V(* cp(J,k)) < 0, *\:/cp(d,k)* *ERE,* o que significa que *RE* s;;;; *RA-*

2.2.5 Sistemas sujeitos a incerteza de parametros

Os processos ffsicos reais possuem uma gama de complexidade expressivamente maior que seus modelos matematicos os quais, em diversos casos, sao representados com uma aproximac:ao, desconsiderando-se variaveis ou fenbmenos. Para uma modelagem mais fiel e necessario considerar os diferentes tipos de incertezas que o processo pode vir a possuir, as quais podem ser oriundas da presern;a de rufdos, erros e simplificac;oes decorrentes da linearizac;ao do sistema, dinamicas nao modeladas ou nao conhecidas e variae;oes parametricas. Dessa forma, muitos parametros sao incertos durante o funcionamento do sistema, logo, e de suma importancia empregar tecnicas que tornam possfvel garantir a estabilidade do sistema nessas condic;oes. Sendo assim, e necessario representar o sistema de forma que as incertezas estejam presentes, ou seja, construir um modelo matematico fixo denotado por (sistema nominal) somado as incertezas.

Classifica ao das incertezas

Existem diversas formas de representa<_:;ao das incertezas de parametro de um sistema, por exemplo, as representa<;:.6es de incertezas por uma limita<_:;ao em norma ou por um politopo convexo no espa<_:;o. Neste trabalho, sera empregada a representa<_:;ao de incertezas por politopos, devido a facilidade na obten<;:ao de condi<;:6es convexas para a sintese de controladores. Um politopo e descrito como uma interse<_:;ao de subespa<_:;os, que formam um conjunto convexo, podendo ser caracterizado, completamente, por seus vertices.

Sendo o sistema linear (2.1) discreto no tempo, sujeito a incertezas no modelo, tem-se que a expressao com parametros incertos invariantes no tempo pode ser dada por:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k,$$

em que a matriz *A(a)* e determinada pela combina<_:;ao convexa representada por

$$A(a) = \overset{N}{L} aiAi,$$

sendo o vetor escalar *a,* que parametriza o politopo de incertezas, denotado por *a* [a1, ... ,aN]T pertencente ao simplex unitario, descrito por:

$$r = \{ a \text{ E } JRN : \overset{N}{\underset{i=l}{Lai}} = 1, \text{ O'.(i) } 2{:}\ 0, \text{ i E } [1,N]\}\text{-} \tag{2.13}$$

0 numero de vertices do politopo de incertezas do sistema e igual a 2q, sendo *q* a quantidade de parametros incertos invariantes no tempo a qual o sistema esta sujeito.

2.2.6 Sintese de Controladores Saturantes

Sendo o sistema incerto e discreto no tempo, com atraso nos estados e atuadores saturantes, representado conforme a seguir:

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B(\alpha)\mathtt{sat}(u_k), \tag{2.14}$$

em que o atraso variante no tempo e limitado por *4.* E [1,J] tal que *dk* E [4.,d]. As matrizes *A(a)* e *Ad(a)* E *IRnxn* e *B(a)* E *IRnxnu* pertencem ao politopo descrito pela combina<_:;iio convexa dos *N* vertices conhecidos.

$$[A(a) \quad Ad(a) \quad \mathrm{B(a)}] = \overset{N}{\underset{i=l}{Lai}} [Ai \quad Adi \quad \mathrm{Bi}],$$

sendo *a* pertencente ao simplex unitario r definido por (2.13).

A fun<_:;ao sat(1lk)(c), ilustrada na figura 2.2, e vetorial, em que para cada £ E [1,nu] define-se

$$\mathtt{sat}(u_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \bar{u}_{(\ell)}, & \text{se} \quad \text{'Llk(e)} > \text{'U(c)'} \\ u_{k(\ell)}, & \text{se} \quad \text{1l(c) ::; 1lkcel ::; 'U(c),} \\ \underline{u}_{(\ell)}, & \text{se} \quad \text{Llk(e)} < \text{1/,\_(£)} \end{cases}$$

sendo JJ.(e) e fi(e) os limites minimo e maximo que podem ser aplicados pelo £-esimo atuador.

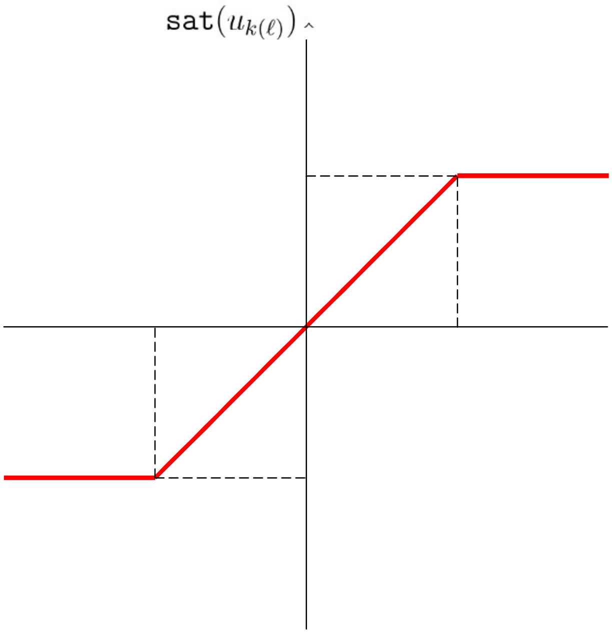

Figura 2.2: Fun<_:;ao de satura<_:;ao sat(uk(e)), com JJ.(e) = -fi(e)-

A lei de controle por realimenta<_:;ao de estados e empregada para estabilizar localmente o sistema (2.14):

$$u_k = Kx_k, \tag{2.15}$$

em que K E *JRnuxn* representa o ganho do controle a ser calculado.

As a<_:;oes da satura<_:;ao geram nao linearidades, ja que, muitas vezes o sistema demanda uma energia maior que a capacidade do atuador real. Dessa forma, a convergencia das trajet6rias dos estados para o origem depende das condi<_:;oes inicias do sistema. Sendo assim, e necessario determinar o conjunto de todas as condi<_:;oes iniciais cujas respectivas trajet6rias convergem assintoticamente para origem, ou seja, determinar a regiao de atrac.;ao da origem do sistema.

Segundo Tarbouriech *et al.* (2011, p. 14), quando essa regiao abrange todo o espac.;o de estados, isto e, *RA* = *IRn* para sistemas sem dependencia de atraso, garante-se a estabilidade global assint6tica do sistema. No entanto, para sistemas dependentes do atraso e sujeitos a atuadores saturantes, em geral, a convergencia para a origem nao e garantida para qualquer condi<_:;ao no espac.;o *IRn,* mas para um determinado sub-conjunto. Dessa forma, garante-se apenas a estabilidade local assint6tica do sistema. Alem disso, a determinac.;ao exata de *RA* da origem de um sistema pode ser uma tarefa complexa e desafiadora ja que a mesma pode nao ser convexa, aberta ou limitada. Logo, o objetivo e obter uma estimativa dessa regiao, *RE,* ou seja, um subconjunto da regiao de atrac.;ao, com representac.;ao analitica bem definida.

2.2.7 Modelagem por nao-linearidade de setor

Para tratar a satura<_:;ao e empregada a modelagem de nao linearidade de setor presente em (Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech, 2005). Por meio desse metodo, representa-se o problema a partir da fun<_:;ao zona morta apresentada a seguir:

$$\phi(u_k) = \mathtt{sat}(u_k) - u_k \tag{2.16}$$

'Uk(C)- U(c), se 'Uk(C) > U(c),
</>('uk(C)) = ·{ 0, se JJ,_(C) 'Llk(t) U(c),
Uk(C)- JJ(c)' se Uk(C) < JJ(c).

De acordo com a defini<_:;ao (2.16), tem-se que sat(1Lk) = </>(uk) + uk, que usado em (2.14) juntamente com (2.15) obtem-se

$$x_{k+1} = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x_k + A_d(\alpha)x_{k-d_k} + B\phi(Kx_k)$$

Conforme apresentado em (Tarbouriech *et al.,* 2011, p. 43), um conjunto poliedral auxiliar e definido para lidar com a satura<_:;ao presente em (2.14):

$$\mathcal{S} \triangleq \{x_k \in \mathbb{R}^n : |u_k - \omega_k| \leq \bar{u}_{(\ell)}\},\ \forall \ell \in [1,n_u] \text{ e } \underline{u}_{(\ell)} = -\bar{u}_{(\ell)}. \tag{2.17}$$

Sendo wk E *JRnw* um sinal instrumental projetado, como uma variavel de folga. O conjunto ***S*** determina os estados xk em que o sinal Llk -wk nao ultrapassa o limite da saturac;:ao $\pm u$. Dessa forma, para um sinal adequado wk, a condi<_:;ao generalizada de setor e formulada pelo lema apresentado por Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005) reproduzido a seguir.

Lema 2.1 (Condi'sao Generalizada de Setor) *Considere a funr;ao </>(uk), corzforme definido em (2.16). Se xk* ES, *entii,o tem-se a relar;i'io*

$$\phi(Kx_k)^\top \mathcal{T}[\phi(Kx_k) + \omega_k]_{(\ell)} \leq 0,\ \forall \ell \in [1,n_u] \tag{2.18}$$

e *valida para q·ualq·uer matriz* T *dfogonal definida positiva.*

Conforme apresentado por Castro *et al.* (2020), embora o termo wk = G.Tk seja comumente empregado na literatura, a inclusao de termos correspondentes aos estados atrasados na proposi<_:;ao do sinal wk, traz uma escolha mais geral podendo gerar resultados menos conservadores. Uma escolha possivel e wk = Gxk + G4xk-d + Gdkxk-dk + GJxk-J, que sera tambem empregada neste trabalho.

2.2.8 Desigualdades Auxiliares

Para as dedrn:;oes dos teoremas propostos no capitulo seguinte, sao empregadas as desigualdades apresentadas nos lemas a seguir, objetivando majorar termos associados aos somat6rios de produtos ponderados dos vetores da sequencia que caracteriza os estados.

Lema 2.2 (Desigualdade de Jensen} *Se:ja 'Uma matriz de.finida positiva* $Z =$ ZT E *IRnxn e* y: [a,b]-+ *IRn, a seguinte desigualdade pode ser considerada (Jensen, 1906):*

$$\sum_{j=a}^{b} y_j^\top Z y_j \geq \frac{1}{b-a+1} \left(\sum_{j=a}^{b} y_j^\top \right) Z \sum_{j=a}^{b} y_j \Big)$$

Lema 2.3 *Se:ja R* RT E *TiTlhXn ,u,,-n,u", ''n,1'•tr'/-,Z ,lnfi,,lr,l,(1, ı r,d st, : u t. Se ex-iste ·uma matr-iz X* E *IRnxn tal que*

[: 1] *0,* (2.19)

entiio, a desigualdade a seguir e *valida*

[\ lR 0 1 c;R] [* R X R] 'ii<:; E]0,1[.

Prova: De acordo com (Park *et al.,* 2011), a prova consiste em verificar que

[* ¼R 0 1l c ;R] _ [1 c;R * -X 1': ,R-] [R X * R] '

Dessa forma e necessario mostrar que

1 * cR, ł -X] 1-c; -'-R 0. (2.20)

Aplicando-se o complemento de Schur em (2.20), obtem-se de forma equivalente

1 <:; c; (R - xT R-1x) o.

Sendo <:; E]0,1[nota-se que -1_ e positivo. Alem disso, pela aplicac;:ao do complemento de Schur, a desigualdade (R - XTR-1X) 0 e equivalente a (2.19). ■

2.3 Considera oes Finais

Neste capitulo foram abordadas as principais considerac;:oes te6ricas necessarias para o desenvolvimento e melhor compreensao deste trabalho. Dentre essas: estabilidade no sentido de Lyapunov, estabilidade de sistemas com atraso nos estados, tanto no sentido global quanto local, estabilidade entrada-estado (ISS), estimativa do ganho £2, controladores saturantes e condic;:ao generalizada de setor. No Capitulo 3, e apresentada uma descric;:ao do problema a ser tratado, alem das condic;:oes convexas desenvolvidas. Estas por sua vez, determinam os ganhos do controlador robusto que garante a estabilidade assint6tica local e estabilidade entrada-estado, a partir da escolha adequada da candidata a func;:ao de Lyapunov-Krasovskii.

Capitulo 3

Estabilizac;ao Entrada Estado

Neste capitulo sao apresentadas novas condic;oes convexas para sintese de controladores por realimentac;ao de estados para uma classe de sistemas discretos no tempo, sujeitos a atrasos nos estados, atuadores saturantes e perturbac;ao limitada em energia. Essas condic;oes tratam sinais ex6genos limitados em energia a partir da analise de estabilidade entrada-estado (188) e do ganho £2 entre a saida de interesse e a entrada de perturbac;ao. Neste trabalho utiliza-se a mesma candidata a func;ao de Lyapunov-Krasovskii apresentada em Castro *et al.* (2020), porem sao desenvolvidas novas condic;;oes para considerar incertezas polit6picas do sistema.

As condic:;oes propostas sao adequadas a utilizac:;ao dos procedimentos de otimizac:;ao convexa, os quais serao explorados no pr6ximo capitulo. Alem disso, a caracterizac;ao geometrica da regiao *RE* sera explorada no capitulo seguinte, logo, assume-se a representac;;ao da mesma a partir da abordagem algebrica.

3.1 Formula ao do Problema

Seja o sistema incerto e discreto no tempo, com atraso, variante no tempo, presente nos estados, entradas de controle saturantes e pertubac;ao limitada em energia, tal que

$$\begin{aligned} Xk+l &= A(a)xk + Ad(a)xk\text{-}dk + \mathrm{B(a)sat(uk)} + Bwk(a)wk, \\ Zk &= C(a)xk + Cd(a)xk\text{-}dk + \mathrm{D(a)sat('uk)} + Dwk(a)wk, \end{aligned} \tag{3.1}$$

sujeito a condic;ao inicial r..p(J,o) = {*X_J,* X_J+i, · · · , x0}, em que *xk* E *ffi.n* representa o vetor de estados atuais, *zk* E *ffi.nz* e a saida regulada do sistema, *Llk* E *JR.nu* representa o sinal de controle, sat(uk) e uma func;ao de saturac;ao vetorial descentralizada fornecida por (2.15). Os limites minimo e maximo de *1.lk(R)* sao dados por Il(e) = -fl(e), £ E [1,nul, os quais sao aplicados pelo £-esimo atuador, *wk* E *ffi.nw* representa o vetor do sinal ex6geno, pertencente ao conjunto *P* apresentado em (2.8) e repetido abaixo para conveniencia do leitor:

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \delta^{-1} \right\}, \tag{3.2}$$

em que 5-^{1} E JR+ corresponde ao limite maximo de energia da perturbac;:ao. 0 atraso *dk* variante no tempo assume valores inteiros no intervalo 0 < rj,_ ::; *dk* ::; *d* < oo.

As matrizes *Ai* E *IRnxn, Adi* E *IRnxn, Bi* E *]RnXnu, Bwi* E *]RnXnw, Ci* E *]Rnuxn, cdi* E *]Rnuxn, Di* E *]RnuXnu* e *Dwi* E *]RnwXnw* representam *N* vertices do politopo, definidas por:

$$\begin{bmatrix} A & A_d & B & B_w \\ C & C_d & D & D_w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i & B_{wi} \\ C_i & C_{di} & D_i & D_{wi} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Alem disso, *a* e o vetor de para.metro incerto invariante no tempo, pertencente ao simplex unitario determinado por (2.13), isto e, *ai* 0, L:i *ai* = 1.

A lei de controle empregada neste trabalho para estabilizar o sistema (3.1)-(3.3) e dada por

$$u_k = Kx_k, \tag{3.4}$$

em que *K* E *]Rnuxn* e a matriz de ganho de realimentac;;ao de estado do controlador. Portanto, usando essa lei de controle de realimentac;;ao de estado (3.4) no sistema (3.1), obtem-se o seguinte sistema de malha fechada:

{ *Xk+l* = *A(a)xk* + *Ad(a)xk-dk* + B(a)sat(Kxk) + *Bw(a)wk,* (3-5)
Zk = *C(a)xk* + *Cd(a)xk-dk* + D(a)sat(Kxk) + *Dw(a)wk.*

Devido a saturac;:ao dos atuadores, a qual limita a energia real que a ac;;ao de controle pode aplicar no sistema, nao se e possivel garantir a estabilidade global dos sistemas, se eles forem instaveis em malha aberta. Portanto, e necessario lidar com a estabilizac;;ao local, para a determinac;;ao da regiao de atrac;;ao *RA*- A determinac;;ao de tal regiao nao e uma tarefa facil em geral (Tarbouriech *et al.,* 2011, p. 14). Uma nova metodologia para determinar a regiao estimada de atrac;;ao *RE* t;;;; *RA* e apresentada ao longo desta sec;;ao. Alem disso, o vetor de entrada de perturbac;:ao e considerado na analise de estabilidade local do sistema em malha fechada (3.5). Consequentemente, emprega-se a estabilidade entrada-estado (ISS), sendo a definic;:.ao da mesma, adaptada de (Leite *et al.,* 2020, p. 357-366), apresentada a seguir.

Defini«_;ao 3.1 0 *sistema incerto em malha fechada (3.5), com a lei de controle* (3.4), *e dito est6:vel de entrada para estado (ISS) se para todo escalar positivo 6, quaisquer sequencias dew* E *P,* rp(J,o) E *REo e para todo a* E r, *todas as tra:jet6rias de estado resultantes permanecem limitadas em RA e convergem para a origem, conforme a sequencia wk diminuiu, para qualquer k* 0.

Na sequencia, e apresentado o problema que sera tratado nesse trabalho.

Problema 3.1 *Considere* o *sistema incerto discreto no tempo su:jeito a atraso variante no tempo, atuadores sat·urantes e pert-urbar;ao limitada em energia dado par* (3.1)-(3.3).

Determine os ganhos do controlador robusto, par realimentar;ao de estados (3.4), *que garantam, para ·um conj-unto de condir;oes inicia-is* RE RA *e um conjunto de sinais ex6genos w* E *P admissf:veis, a estabilidade entrada-estado (ISS) do sistema em malha fechada* (3.5). *Alem disso, o controlador, projetado par realimentar;ao de estados, deve garantir um certo limite superior do ganho* .e2, *entre a entrada de pert·urbar;ao w e a sa[da regulada z, de modo que*

$$\|z\|_2 \leq \gamma(\|w\|_2 + \mathcal{B}),$$

em que as condir;oes inic-iais em RE *produzem o termo* **B** 0.

3.2 Resultados Preliminares

Abordam-se os atuadores saturantes a partir da condigao generalizada de setor apresentada em (2.18), proposta por Gomes da Silva Jr. & Tarbouriech (2005). Para isso, a nao linearidade da saturac.;ao e tratada como zona morta ¢(*uk*). Conforme apresentado no Lema 2.1, e possfvel escrever a saturac.;ao como sat(uk) = *cp('uk)* + *·uk,* fornecendo o seguinte sistema em malha fechada:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Xk+l & = & (A(a) + B(a)K)xk + Aa(a)xk\text{-}dk + B(a)cp(Kxk) + Bw(a)wk, \\ zk & = & C(a)xk + Ca(a)xk\text{-}dk + D(a)cp(Kxk) + Dw(a)wk. \end{array} \right. \quad (3\text{-}6)$$

Dessa forma, (3.6) representa uma reescrita na formulac;ao do modelo do sistema apresentado em (3.5).

3.2.1 Candidata a Furn;ao de Lyapunov-Krasovskii

E empregada a mesma func;ao candidata de Lyapunov-Krasovskii (L-K) proposta por (Castro *et al.,* 2020), apresentada a seguir:

$$V(\bar{x}_k) = V_1(x_k) + V_2(\bar{x}_k) + V_3(\bar{x}_k), \quad (3.7)$$

em que,

$$Vi(xk) = xk^{T}\bar{P}xk, \quad (3.8)$$

$$½(xk) = \sum_{i=k-g}^{k-1} XiQ1xi + \sum_{i=k-d}^{k-g-1} XiQ2xi, \quad (3.9)$$

$$½(xk) = d \sum_{i=l-g}^{0} \sum_{j=k+i}^{k} yJ\, Z1Yj + (cl - d) \sum_{i=l-J} \sum_{j=k+i}^{k} yJ\, Z2Yj, \quad (3.10)$$

com

$$y_j = x_j - x_{j-1}, \quad (3.11)$$

o vetor de estados aumentados determinado por

$$\bar{x}_k = \big[x_k^\top \;\; x_{k-1}^\top \;\; x_{k-2}^\top \;\; \cdots \;\; XT_{k\text{-}d} \text{ -]T} \; . \tag{3.12}$$

e as matrizes definidas positivas *P,* Q1, Q2, Z1, Z2 E *]Rn_*

V(xk) e uma furn;ao L-K se afirma<;oes apresentadas no Teorema 2.2 forem verificadas, repetidas a seguir para conveniencia do leitor.

r,;1(llxoll²):::;*V(xk):::;* r,;2(llxkll²), (3.13)

6 *V(xk)=V(xk+1)-V(xk)*:::;-K.3(llxoll²), (3.14)

para *xk* E *RA* e as furn:;6es r,;1, r,;2 e r,;3 de classe *K.*

Para calcular a variac;ao da func;ao de Lyapunov-Krasovskii entre dois instantes, expressa-se a variac;ao de cada um dos termos, tal qual a seguir:

$$\Delta V_1(x_k) = x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k, \tag{3.15}$$

$$\Delta V_2(\bar{x}_k) = x_k^\top \bar{Q}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}}, \tag{3.16}$$

$$\Delta V_3(\bar{x}_k) = y_{k+1}^\top \left(\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2\right) y_{k+1}$$

- *d_* $\underbrace{\overset{k}{\underset{i=k\text{-}4+1}{L}} \; Yi \; Z1 Yi}_{S1}$ - (*d* - r;J_) $\underbrace{\overset{k\text{-}4}{\underset{i=k\text{-}d+l}{|:}} \; y_i^\top \bar{Z}_2 y_i}_{S2}$. (3.17)

Nota-se que (3.15) e (3.16), dependem apenas dos vetores de estados *xk, xk-.<1*e *xk-J,* enquanto (3.17) deve ser ajustado para evitar a dependencia de todos os vetores *Xk-j, j* E [0,d]. Sendo assim, a desigualdade de Jensen, (Jensen, 1906), veja Lema 2.2, pode ser aplicada nos dois termos com somat6rio de 6½(xk): em S_1 de forma direta, e em S_2 ap6s dividir o somat6rio em duas partes, explicitando dessa forma, o termo dependente de *Xk-dk,* conforme proposto por Castro *et al.* (2020). Aplicando a desigualdade de Jensen em S_1 tem-se

4 ; **tl** *yJ Z1Y;* :> **Ctl***yJ)* Z1 **Ctl***Y;)* . (3.18)

Utilizando-se (3.11) pode-se reescrever o lado direito da equac;ao (3.18) como

(*t* (j=k-4+1) *xJ* - *t* (j=k-4+1) *xJ-1)* Z1 (*t* (j=k-4+1) *X-j* *t* (j=k-4+1) *Xj-1)*

Reescrevendo-se os indices em termos de *Xj* obtem-se

$$d\_ \overset{k}{\underset{j=k\text{-}4+1}{|:}} y_j^\top \bar{Z}_1 y_j \geq \left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^{k} x_j^\top - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j^\top\right) \bar{Z}_1 \left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^{k} x_j - \sum_{j=k-\underline{d}}^{k-1} x_j\right),$$

em que $\left(\sum_{j=k-\underline{d}+1}^{k} x_j - \sum_{j=k-\underline{d}+1}^{k} x_{j-1}\right)$, pode ser simplificado em $(x_k - x_{k-\underline{d}})^\top$, resultando em um majorante para S_1

$$S_1 = \underline{d} \sum_{j=k-\underline{d}+1}^{k} y_j^\top \bar{Z}_1 y_j \geq (x_k - x_{k-\underline{d}})^\top \bar{Z}_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}). \tag{3.19}$$

De forma analoga, majora-se S_2, dividindo-se o mesmo em dois somatórios, para explicitar o termo dependente do instante $k - d_k$. Logo, obtem-se:

$$S_2 = (\bar{d} - \underline{d}) \left[\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j^\top \bar{Z}_2 y_j + \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j^\top \bar{Z}_2 y_j \right]$$

Aplicando-se a desigualdade de Jensen, Lema 2.2, obtem-se

$$\begin{aligned} S_2 \leq (\bar{d} - \underline{d}) \Bigg[& \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} y_j \right) \\ & + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} y_j \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir de (3.11) pode-se reescrever (3.20) como

$$\begin{aligned} S_2 \leq (\bar{d} - \underline{d}) \Bigg[& \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j^\top - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_{j-1}^\top \right) \bar{Z}_2 \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j - \sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_{j-1} \right) \\ & + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j^\top - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_{j-1}^\top \right) \bar{Z}_2 \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j - \sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_{j-1} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

Escrevendo os índices em termos de x_j tem-se

$$\begin{aligned} S_2 \leq (\bar{d} - \underline{d}) \Bigg[& \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j^\top - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-d_k-1} x_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left(\sum_{j=k-\bar{d}+1}^{k-d_k} x_j - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-d_k-1} x_j \right) \\ & + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j^\top - \sum_{j=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} x_j^\top \right) \bar{Z}_2 \left(\sum_{j=k-d_k+1}^{k-\underline{d}} x_j - \sum_{j=k-d_k}^{k-\underline{d}-1} x_j \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dessa forma, reescrevendo os somatórios com os mesmos limites, pode-se simplificar (3.21) em

$$\begin{aligned} (\bar{d} - \underline{d}) \Bigg[& \frac{1}{(\bar{d} - d_k)} (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}) \\ & + \frac{1}{(d_k - \underline{d})} (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - x_{k-d_k}) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.22}$$

de forma analoga a realizada para o termo S1. Definindo-se

$$\varsigma = \frac{d_k - \underline{d}}{\bar{d} - \underline{d}},$$

tem-se que

1 d-d 1 $\frac{\bar{d} - \underline{d}}{d_k - \underline{d}}$,
1- <; $d - d_k$ e ς

podem reescrever (3.22) como

1 T 1 T
I- (xk-dk - xk_J) Z2(xk-dk - xk_J) + -(xk-d- xk-dk) Z2(xk-d - xk-dk), (3.23)
<; <;

e definindo Ok = [xk-d. Xk-dk_], (3.23) pode ser expressa por
Xk-dk - Xk-d

$$S_2 \geq \Omega_k^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{\varsigma}\bar{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{1-\varsigma}\bar{Z}_2 \end{bmatrix} \Omega_k. \quad (3.24)$$

Empregando-se o Lema 2.3, (3.24) pode ser reescrita como

S2 or [¼:2 - 1 zJ Ok or [:2 r] Ok,

escolhendo-se X = -Z2, para obter

s2 or[:2 -Z:2]ok,

que substituindo-se Ok tem-se

$$S_2 \geq (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})$$

Dessa forma, e possfvel obter um majorante para S2, tal qual:

k-j_
S2 (d - d.) L yJ Z2Yj (xk-d. - 2xk-dk + xk_J)T Z2(xk-d. - 2xk-dk + xk_J). (3.25)
j=k-d+l

Logo, a partir de (3.19) e (3.25) e possfvel reescrever (3.17) como

6 ½(xk) ::; Y[+1(d.2Z1 + (J - d.)2Z2) Yk+1 - (xk - xk-,t_)T Z1(xk - xk-,t_)
-(Xk-,j_- 2xk-dk + Xk_J) T Z2(xk-,j_ - 2xk-dk + Xk_J). (3.26)

Dessa forma, determina-se**6** V(xk) =**6** Vi(xk) **+6** V2(xk)**+6** ½(xk) a partir de (3.15-3.16) como

6V(xk) = xk T + 1 Pxk+l - xk T P xk + xk T Q 1xk - xk T _g_(Q 1 - Q2)xk-d. - xk T _JQ 2xk-J
k k-,j_
2 2
+ y[+l (d. Z1 + (d - d.) Z2) Yk+l - d. L Yi Z1Yi - (d - d.) L Yi Z2Yi· (3.27)
i=k-,j_+l i=k-d+l

Utilizando a desigualdade apresentada em (3.26) tem-se que

$$
\begin{aligned}
V(\bar{x}k) :::;\ & xk^{\top}+l\,\bar{P}\,xk+1 - xk^{\top}\bar{P}\,xk + xk^{\top}\bar{Q}\,1xk - xk^{\top}\_g(\bar{Q}1 - \bar{Q}\,2)xk\text{-}{<}J: - xk^{\top}\_J\bar{Q}\,2xk\text{-}J \\
& + YI+1\,(r;f,\_2\,Z1 + (cl - r;J,.)2\,Z2)\,Yk+1 - (xk - Xk\text{-}4)^{\top}\,Z1(xk - Xk\text{-}4) \\
& - (xk\text{-}4 - 2xk\text{-}dk + xk\_J)^{\top}\,\bar{Z}2(Xk\text{-}g - 2xk\text{-}dk + xk\_J)\text{-}
\end{aligned}
$$

Por fim, para sistemas dependentes de para.metros incertos invariantes no tempo, o funcional de Lyapunov-Krasovskii e denotado por *V(xk,a)* com as matrizes *P(a),* Q_1(a), Q2(a), Z1(a), Z2(a).

3.2.2 Caracteriza«;ao Algebrica da Regiao de Atra«;ao

A caracterizae;ao geometrica da estimativa da regiao de atragao *(RE),* sera explorada no capf tulo seguinte. 0 Lema a seguir apresenta a caracterizagao algebrica da estimativa da regiao de atragao.

Lema 3.1 *Se V(xk) e ·uma furu;iio L-K, asseg·urando a estabilidade rob·usta local do sistema (3.6), entiio* o *conjunto RE pode ser definido em term.as das c-urvas de nfvel de V(x), .Cv(TJ), coma segue:*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\eta) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)};\ V(\bar{x}_k) \leq \eta^{-1}\}, \tag{3.28}$$

sendo que Xk *representa* o *vet or de estado aumentado dado par (3.12) e* TJ-^{1} *a energia total que* o *sistema admite, dada pela soma das energias* 13-^{1} *e* 5-^{1}, *das cond-i9oes in·iciais e pert·urba9oes admissfveis, respectivamente.*

3.3 Projeto do controlador por realimenta ao de estado

Nesta segao sao apresentadas duas condig6es desenvolvidas que provem uma solugao ao Problema 3.1. A primeira delas e determinada por meio da desigualdade de Jensen e majorag6es dos termos de L-K, e a introdue;ao de um relaxamento a partir da variavel escalar *E.* Ja a segunda abordagem permite que as matrizes do funcional de L-K, apresentado em (3.7), sejam dependentes de para.metros, o que pode resultar em soluc;-6es menos conservadoras determinadas a partir da solugao equivalente fornecida atraves do Lema de Finsler.

A primeira condigao foi desenvolvida a partir do Teorema 2, apresentado em (Castro *et al.* (2020)), de maneira a relaxar a condie;ao de estabilidade assint6tica, adotando-se a estabilidade entrada estado (ISS). Dessa forma, para sintetizar um controlador por realimentac;ao de estados (3.4), que garanta que as trajet6rias do sistema (3.6) sejam limitadas para qualquer perturbagao em (3.2) e garanta um determinado limite superior do ganho £2 entre a entrada de perturbagao wk e a saida regulada zk, ou seja, a solugao do Problema 3.1, segue o Teorema:

Teorema 3.1 (Projeto de Controle) *Considere o sistema* (3.1). *Se existem as matrizes simetricas, defin:idas positivas, w* > **0** E *IR_nXn'* Q1 > **0** E *IR_nXn'* Q2 > **0** E *IR_nXn'* Z1 > **0** E *IR_nXn e* Z2 > **0** E *IR_nxn, matrizes L* E *IR_nuxn, G* E *IR_nuxn, G4* E *IR_nuxn, Gdk* E *IR_nuxn, Gd* E *IR_nuxn, ·uma matriz diagonal, definida positiva, T* > **0** E *IR_nuXnu, e* os *escalares* E E]0, 2], 1 > 0, TJ > 0 *e 15* > 0, *que satisfazem:*

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Theta_{1i} & \boldsymbol{0}_{4n+n_u\times n_w} \\ \star & \boldsymbol{0}_{n_w}\end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(F_{b1}^\top \Phi_{3i}^\top\right) - F_6^\top F_6\right) & \begin{bmatrix}\Theta_{2i} \\ (B_{wi})^\top\end{bmatrix} & F_{zi}^\top \\ \star & \Theta_3 & \boldsymbol{0}_{n\times n_u} \\ \star & \star & -\gamma^2 \boldsymbol{I}_{n_u}\end{bmatrix} < \boldsymbol{0}, \forall i \in [1,N], \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} W & \boldsymbol{0}_{n\times 3n} \\ \star & \mathcal{Q}_1\end{bmatrix} & \left([\mathrm{L} \quad \boldsymbol{0}_{3n_u\times n}] - \mathcal{G}\right)_{(\ell)}^\top \\ \star & \eta \bar{u}_\ell^2\end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}, \forall \ell \in [1,n_u], \quad (3.30)$$

$$\eta - \delta < 0,$$

sendo,

81i = (He (F1Ter- Fl9cc)3) + Q2 - 2FlTF5 - ITT [!1 :]II)

82i = [AW+ BiL - w On Adiw On BiT]T'

83 = E²(1 Z1 + (d - r;J,_)2 Z2) - (2E - E²)W,

$$\mathcal{Q}_1 = \mathtt{diag}(Q_1,Q_2,Q_2), \ \mathcal{Q}_2 = \mathtt{diag}(Q_1, -Q_1 + Q_2, \boldsymbol{0}_n, -Q_2, \boldsymbol{0}_{n_u}),$$

II= [In -In On On Onxnu] On In -2In In Onxnu ' Fi= [In On On On OnxnJ, F5 = [On On On On Inxnu] ,

9cc) = [Gee) G4(£) Gdk(£) GJ(c)] , - [In On On On Onx=] On In On On Onxnu On On In On Onxnu ' On On On In Onxnu

Fz; = [Ci OnuXn Cd; OnuXn Di Dw;], Fbl = [In On On On Onxnu Onxnw] ,

<P3i = [On On On On Onxnu Bw;]T, F6 = [On On On On Onxnu Inxnw] ,

en tao, o sistema em malha fechada (3.6), com ganho robusto de realimentar;ao de estados dado par

$$K = LW^{-1},$$

e *tal que*

1. *Se wk#-* **0** *com w* E P:

   (a) *as trajet6rias do sistema* (3.6) *permanecem limitadas em* £v(TJ) c RA *para todo* X0 *pertencente ao conjunto* REo = £v(f3) *com* V(xk) :::; llwll + V(xo) :::; c5-1 + 13-1 = ry-1, *para todo k* > O;

   (b) *para* $k \to \infty$, $\|z_k\|_2^2 < \gamma^2\big(\|w\|_2^2 + V(\bar{x}_0)\big)$.

2. *Se* wk = **0** *para todo* k 2:: k 2:: 0, *entiio* xk ----+ **0** *sem deixar* RE *conforme* k ----+ oo.

Prova: Inicialmente, pre e p6s-multiplicando (3.29) por diag(I5n,0n,Inu,0nw) e seu transposto, respectivamente, para T/ = 1 em (3.30), obtem-se as desigualdades (16) e (17) do Teorema 1 de (Castro *et al.,* 2020).

Se a LMI (3.29) e verificada, entao a positividade de (3.7) e garantida e tem-se que V(xk) > 0 para Xo #- 0. Alem disso, W E *]RnXn* e T E *]RnuXnu* sao regulares, isto e, possuem inversa representadas por W-1 e7-1 respectivamente. Sendo assim, aplicando-se o complemento de Schur em relagao ao termo,..,;2Inu de (3.29) obtem-se

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}\Theta_{1i} & \\ \star & \end{bmatrix} + \mathrm{He}\,(\mathrm{Fbi<Pl}) - \mathrm{F_{6T}\,F5}\right) & \begin{bmatrix}\Theta_{2i} \\ (B_{wi})^\top\end{bmatrix} \\ * & \Theta_3 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}F_{zi} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^\top \gamma^{-2} \begin{bmatrix}F_{zi} & \mathbf{0}\end{bmatrix} < \mathbf{0}, \forall i \in [1,N]. \quad (3.31)$$

Tomando-se W1; = ([ŏ1i 0] 0 + He (FbT<PTi) - FTF5) e \⊥ 12; = [0 Ti Bw;] T e agrupando-se os termos relacionados a Ina mesma posigao que 11'1;, a LMI (3.31) pode ser reescrita por

$$\begin{bmatrix}\Psi_{1_i} + F_{zi}^\top \gamma^{-2} F_{zi} & \Psi_{2_i} \\ \star & \Theta_3\end{bmatrix} < \mathbf{0}, \forall i \in [1,N]. \quad (3.32)$$

Para recuperar os termos apresentados em 03 sem a rela<:;ao de E, e necessario retomar a desigualdade a seguir

$$\Theta_3 = -2\varepsilon W + \varepsilon^2(W + \underline{d}^2\bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2\bar{Z}_2) \geq -W(W + \underline{d}^2\bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2\bar{Z}_2)^{-1}W. \quad (3.33)$$

Escolhendo-se *(W - c:Y)Y-1(W - c:Y)* 2:: **0,** para qualquer escalar c, qualquer matriz regular *Y* = *W* + *rJ.2 Z1* + (J - d.)2 *Z2* e adotando-se a representac;:ao

$$\bar{Y} = WY^{-1}W, \quad (3.34)$$

pode-se reescrever a desigualdade (3.33) como

$$\Theta_3 \geq -\bar{Y}. \quad (3.35)$$

Substituindo-se (3.35) em (3.32) e multiplicando (3.32) por a(i) e somando para i E [1,N], obtem-se

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^N \alpha_{(i)}(\Psi_{1_i} + F_{zi}^\top \gamma^{-2} F_{zi}) & \sum_{i=1}^N \alpha_{(i)} \Psi_{2_i} \\ \star & -\bar{Y}\end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.36)$$

Aplicando-se o complemento de Schur em relagao ao termo $-Y$ de (3.36), e possivel reescrever a LMI como:

e $\overset{N}{\underset{i=l}{L}}$ Q!(i) W1i + $\overset{N}{\underset{i=l}{L}}$ *Fz:r-*^{2}*Fzi* + $\left(\overset{N}{\underset{i=l}{\text{LQ!(i)W2i}}}\right)^{T}$ y-1 $\left(\overset{N}{\underset{i=l}{\text{LQ!(i)W2i}}}\right)$ < **0.** (3.37)

Tomando-se os vetores aumentados definidos por,

$$\zeta_k = \begin{bmatrix} \rho_k \\ \mathcal{T}^{-1}\phi(Kx_k) \\ w_k \end{bmatrix}, \ \rho_k = \begin{bmatrix} W^{-1}x_k \\ W^{-1}x_{k-\underline{d}} \\ W^{-1}x_{k-d_k} \\ W^{-1}x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

com I:: $_{1}$ai W1; = W1(a) e as matrizes

1 i,J

$_{-'1}$(<>-) [**He**(P1T E-J,(a)T - F:[9c,i:=:) + 2 - 2/0'.[TF:s - rrT [: TT :]

+He *(Fbi* <l>3(a?) - F$_6$F6,

0$_2$(a) = *[A(a)W* + *B(a)KW* - *W* o *A(a)W* o *B(a)Tr,*

W2(a) = [82(a)T *Bw(a)r'* $\overset{N}{\underset{i=l}{L}}$aiW2;(k = *Yk+l,* $\overset{N}{\underset{i=l}{L}}$ *aiFzi(k* = *Zk,*

atraves de (3.34) com

$$\bar{Y}^{-1} = W^{-1}YW^{-1} = W^{-1}(W + \underline{d}^2 Z_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 Z_2)W^{-1}$$

ea partir de (3.37), tem-se que (;[8(k

(;[w1(a)(k + *Yl+1* (w-^{1}+_42w-^{1}z1w-^{1}+ *(cl-* .4)2w-^{1}z2w-^{1}) *'Yk+1*

+ *zl* ,-^{2}*zk* < **0.** (3.39)

Analisando-se o termo (;[W$_1$ (a)*(k,* com a expansao a partir da transformagao fornecida por (3.38), para *wk* = *9(1:)Pk* eF$_6$(k = *wk* e possivel obter

(T$_{k}$,T$_{\pm'1}$($_{Ql}$)*,t*$_{,k}$ = *X*T*k+l* *w-iww-1* *Xk+l* - *xk*$^{Tw-iww-1}$*Xk* + *xk*$^{Tw-1Q_1}$ w-1 *Xk*

+ xL4w-^{1}(Q2 - *Q1)w-*^{1}*xk-g* - *x;_Jw-*^{1}*Q2W-*^{1}*xk_J-* *xrw-l* z1*w-*^{1}*xk*

- *xk*T - *4w-*^{1}*(z* 1 - *z* 2)w-^{1} *Xk-4* + *xk*T*-dk* w-^{1}4z 2w-^{1} *Xk-dk* - *xk*T*-d* *w-*^{1}*z* 2 w-^{1} *xk-d*

+ *xk*T - *4w-*^{1}*z* $_1$w-^{1} *Xk* + *xk*$^{Tw-1}$*z* $_1$ w-^{1} *Xk-4* + *xk*T - *4*w-^{1}2z $_2$w-^{1} *Xk-dk*

+ *xk*T*-dk* w-^{1}2z $_2$w-^{1} *xk-4* - *xk*T*-J* *W-*^{1}*Z*$_2$ w-^{1} *Xk-4* - *xk*T*-4* *W-*^{1}*Z*$_2$ w-^{1} *xk-J*

+ *x;_Jw-*^{1} *2z2w-*^{1}*xk-dk* + *xLdk w-*^{1} *2z2w-*^{1}*xk-d*

- He (*¢(uk)*T T-^{1}*[<P('uk)* + *wk])* - *wlwk* (3.40)

Considerando-se as matrizes equivalentes dadas por *P* = w-1, Q1 = w-1Q1w-1, Q2 = w-1Q2w-1, Z1 = w-1z1w-1, Z2 = w-1z2w-1, *T* =r-1, *K* = *Lw-1*, *¢(uk)* = *cp(Kxk)*, pode-se reescrever (3.40) como

(k '¥1(0:)(k = xk+lPxk+l - xk Pxk + xk Q1xk + xk_g_(Q2- Q1)Xk-!l: - xk_JQ2xk-d
- xk Z1xk - xk_g_(Z1 - Z2)xk-!l: + xk-dk 4Z2xk-dk - xk_JZ2xk-J + xk_4Z1xk
+ xk Z1xk-!l: + xk_ 42Z2xk-dk + xk-dk2Z2xk-!l: - xk_JZ2xk-!l: - xk_ 4Z2xk-J
+ xk_J2 Z2xk-dk + xk-dk2 Z2xk-J - He(cp(uk) T -1 [cp(uk) + wk]) - wk wk. (3.41)

Substituindo-se (3.41) em (3.39) obtem-se

(k 8(k = xk+1Pxk+1 - xk Pxk + xk Q1xk + xk_g_(Q2 - Q1)xk-!l: - xk_JQ2xk_J- xk Z1xk
-xk_4(Z1-Z2)xk-4+xk-dk4Z2xk-dk -xk_JZ2xk_J+xk-!l:Z1xk+xk Z1xk-4+xk-!l:2Z2xk-dk
+ xk-dk2Z2xk-!l: - xk_JZ2xk-!l: - xk_4Z2xk-J + xk_J2Z2xk-dk + xk-dk2Z2xk-J
+ Yl+1 (P +d2Z1 + (J - d.)2Z2) Yk+l - He (cp(uk)T 7-1[¢(tlk) + wk])

$$- w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k \ < \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Reorganizando os termos de (3.42) e possivel expressar a desigualdade como

$$\begin{aligned} x_{k+1}^\top \bar{P} x_{k+1} - x_k^\top \bar{P} x_k + x_k^\top \bar{Q}_1 x_k - x_{k-\underline{d}}^\top (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) x_{k-\underline{d}} - x_{k-\bar{d}}^\top \bar{Q}_2 x_{k-\bar{d}} \\ + y_{k+1}^\top \left(\underline{d}^2 \bar{Z}_1 + (\bar{d} - \underline{d})^2 \bar{Z}_2 \right) y_{k+1} - (x_k - x_{k-\underline{d}})^\top \bar{Z}_1 (x_k - x_{k-\underline{d}}) \\ - (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}})^\top \bar{Z}_2 (x_{k-\underline{d}} - 2x_{k-d_k} + x_{k-\bar{d}}) - \mathrm{He}\left(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1} [\phi(u_k) + \omega_k] \right) \\ - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k \ < \mathbf{0}, \end{aligned}$$

sendo (3.29) verificada, tem-se que

$$\Delta V(\bar{x}_k) - \mathrm{He}\left(\phi(u_k)^\top \mathcal{T}^{-1} [\phi(u_k) + \omega_k] \right) - w_k^\top w_k + z_k^\top \gamma^{-2} z_k \ < \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Portanto, se (3.43) e verificada, tem-se que V(:z\) - He (¢(uk)TT-1[¢(uk) + *wk]*) - *w[wk < -z[,-2zk* **:SO** que assegura a estabilizac;:ao entrada-estado.

Alem disso, a estabilidade local do sistema em malha fechada (3.6), e garantida se o termo *cp(Kxk)TT-1[cp(Kxk) + wk]* e negativo. Para o tal, emprega-se a condic;:ao generalizada de setor apresentada em (2.18). Aplicando-se o complemento de Schur em relac;:ao ao termo *r,u e)* de (3.30), para um dado *f*, considerando *wk* = *Q(e)Pk*, pre-multiplicando por Pl e p6s-multiplicando por Pk, na LMI resultante, obtem-se:

$$\mathbf{0} < Pl \{ [: \quad J - ([KW \quad \mathbf{0}] - Q);l\,(77u(c))^{-1}\,([KW \quad \mathbf{0}] - Q)(c)\}\, Pk$$

$$= xk^{T}\bar{P}xk + xk\text{-}{<}i.^{T}\bar{Q}1xk\text{-}{<}i. + xk\text{-}dk^{T}\,\bar{Q}2xk\text{-}dk + xk\_J^{T}\bar{Q}2xk\text{-}J$$

$$-pr\{ ([\mathbf{KW} \quad 0] - \mathbf{Q});)\,(r]'U(c))^{-1}\,([\mathbf{KW} \quad 0] - Q)(ci\}\, Pk$$

$$= xk^{T}\bar{P}xk + xk\text{-}dQlxk\text{-},j\_^{T}{}^{-} + xk\text{-}dk^{T}\,\bar{Q}2xk\text{-}dk + xk\_JQ2xk\text{-}d^{T\_} - \frac{(Kxk - wk)\,)\,(Kxk - wk)(c)}{-2}$$

$$:S\; V(xo) - (77fl(c))^{-1}\, l(uk - wk)(cl.$$

Se xk e tal que o conjunto S, apresentado em (2.17), e verificado, entao a desigualdade (2.18) e verdadeira assegurando que -He $(¢(uk)TT^{-1}[¢(uk) + wk])$ em (3.43) e semi definida positiva. Consequentemente, como a desigualdade (3.43) e verificada, pode-se concluir que $V(xk)$ apresentado em (3.27) e menor que 0. Considerando que as LMis (3.29) e (3.30) sejam verificadas, pode-se garantir que Kxk E S, o Lema 3.1 e verificado e entao, o sistema incerto de malha fechada resultante e ISS, com a regiao de atrac:ao estimada dada por $£v(77)$ em (3.28). Dessa forma, se $wk = 0$ o sistema nao sofre ac:ao da perturbac:ao, e as trajet6rias de xk convergem para a origem, a medida que k --+ oo. Para wk -/:- 0 as trajet6rias do sistema permanecem limitadas em $£v(77)$ para qualquer condic:ao inicial x_0 pertencente a $£v(f3)$, dado o relaxamento promovido por $V(xk)$ '.S $\|w\| + V(x0)$:S $5^{-1} + /3^{-1} = 77^{-1}$, para todo $k > 0$. Alem disso, a ac:ao da perturbac:ao na saida regulada do sistema e limitada por 1, a partir da relac:ao $\|zk\| <\,,^{2}(\|w\| + V(xo))$ para k--+ oo. ■

Observa ao 3.1 *Um fator relevante para validar a eficienC'ia das condir;oes propostas e a an6,l,ise da complexidade r,:umerica, q,ue depende do m1mero de vari6:ueis escalares* K_1 e *do numero de linhas* $£_1$. *No caso do Teorema 3.1, podem ser calculados:*

$$£_1 = N(4n + 1 + n) + 2Nn + n + nu(4n + 1), \quad K1 = nun + n^2 + \frac{5n(n+1)}{2} + 1.$$

Observa ao 3.2 *E necessario que E seja fornecido para que 3.29, seja tratada coma uma LMI, caso contrario, a equar;iio seni tida coma 'Uma BM!.*

3.3.1 Condi ao com variavel de folga

A segunda condic:ao proposta como solrn:;ao do Problema 3.1 foi desenvolvida a partir do uso do Lema de Finsler. Essa abordagem permite a obtenc:ao de condic;oes com variaveis de folga, alem de considerar que as matrizes P, Q_1, Q_2, Z_1 e Z_2, da candidata a func:ao de Lyapunov-Krasovskii (3.7), possuam parametros incertos invariantes no tempo a. Dessa forma, apresenta-se o teorema a seguir, empregado para soluc:ao do Problema 3.1.

Teorema 3.2 (Projeto de Controle) *Considere o sistema* (3.6). *Existindo as matrizes simetricas definidas positivas, pi* > **0** E *]RnXn'* Q1i > **0** E *]RnXn'* Q2i > **0** E *]RnXn'* Z1i > **0** E *]RnXn e Z2i* > **0** E *IRnxn, para i* E [1,N], *matrizes LE]Rnuxn,* GE *]Rnuxn, G,1* E *]Rnuxn, Gdk* E *]Rnuxn, Gd* E *]Rnuxn, 'Uma matriz diagonal, definida positiva, T* > **0** E *]RnuXnu, uma matriz F* E *IRnxn e os escalares* 1 > 0, T/ > 0 *e 6* > 0, *que satisfazem:*

$$-,*4nu \quad FZi] \quad \mathbf{0}\ w\cdot \quad [1\ N] \qquad (3.44)$$
$$[\quad Yi \quad < \ ,v1.\ E\ , \quad ,$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}P_i & \mathbf{0}_{n\times 3n}\\ \star & \mathcal{Q}_{1i}\end{bmatrix} & ([L \quad 0^3nu:n]- \quad Q))] \\ & \star \quad TJUo(£.)\end{bmatrix} \ ?\_\mathbf{0},\ \backslash/£\ E\ [1,nu]\ e\ Vi\ E\ [1,N], \qquad (3.45)$$

$$T/ - \ 5 < 0, \qquad (3.46)$$

sendo,

$$Yi= \quad <P1i - <P2i,\ <P2i = 2FJ\ TF6 + He(F_6T\ 9(c)3),\ Q1i = diag(Q1i,Q2i,Q2i),$$

$$9(c) = [G(c) \quad G,1(C) \quad Gdk(C) \quad GJ(c)]\ ,\ Fz; = [Onuxn \quad Ci \quad OnuXn \quad Cdi \quad OnuXn \quad Di \quad Dw;]'$$

$$== \ \ \begin{array}{ccccccc} [On & In & On & On & On & Dnxnu & Onxn,, \\ = & On & In & On & On & Onxnu & Dnxnw \\ & On & On & In & On & Onxnu & Onxnw \\ On & On & On & On & In & Onxnu & Onxnw \end{array}$$

$$<P1i = \left|\begin{array}{ccccccc} r\ i & T4i & On & Ad;FT & On & BiT & Bw; \\ & T2i & Z1i & On & On & Onxnu & Onxnw \\ * & * & T3i & 2Z2i & -Z2i & Onxnu & Onxnw \\ * & * & * & -4Z2i & 2Z2i & Dnxnu & Dnxnw \\ * & * & * & * & T5i & Onxnu & Onxnw \\ ▪ & * & * & * & * & Onu & OnuXnwj \\ ▪ & * & * & * & * & * & -1_{nw} \end{array}\right|$$

com as seguintes matrizes:

$$= d\_2Z1i + (d,- sJY\ Z2i,\ T1i = \quad + pi - F - FT,\quad T2i = \quad - pi + Q1i - Z1i,$$

$$T3i = Q2i - Q1i - Z1i - Z2i,\ T4i = AiFT + BiL - \ '\quad T5i = -Z2i - Q2i$$

e os vetores auxiliares:

$$f_i\ E\ \overset{11])1X7}{m.}\ :\ f_{i(j)} = \begin{cases}1 & s\,e\ .J = z, \\ 0 & s\,e\,j\ -=|-\ l.'\end{cases},\quad p._i = f\cdot_i\ \overset{19,}{'<Y}\ I\ ,\quad p._i\ E\ \overset{1l])nX(5n+nu+nw)}{m.}$$

entao, se (3.44)-(3.46)sao *factfveis, o sistema em malha fechada (3.6), com ganho do rob,usto de realimentar;ao de estados dado par*

$$K = LF^{-\top},$$

e *tal que*

1. *Se wk#- 0 com w* E P:

   (a) *as trajet6rias do do sistema* (3.6) *permanecem limitadas em* £v(77) C *RA, para todo x0 pertencente ao conjunto REo* = *£v(/3) com V(xk,a)* llwll + *V*(x_0,a) 5-^{1} +13-^{1} = r7-^{1}, *para todo k* > O;

   (b) *para k* oo, llzkll ,¥2(11wll + *V(xo,a)).*

2. *Se wk=* **0** *para todo k* 2 *k* 2 0, *entao xk* **0** *sem deixar RE conforme k* oo.

Prova: Se (3.44) e verificado, entao, a positividade dos termos de *Yi* e garantida e atraves de (3.7), tem-se que *V(xk,a)* > 0 para *Xo #-* 0. Alem disso, *F* E *]RnXn* e *T* E *]RnuXnu* sao regulares, isto e, possuem inversa detonada por p-^{1} e T-^{1} respectivamente. Dessa forma, aplicando-se a transformagao de congruencia, diag(Inu,A) para A = diag(I$_5$n0 *p-l* ,T-^{1},InJ na LMI (3.44) e aplicando-se o complemento de Schur em relagao ao termo *-"'r21nu* da matriz resultante da transformagao de congruencia tem-se

$$\begin{bmatrix} F^{-1}T_{1i}F^{-\top} & p\text{-}lT4ip\text{-}T & \mathbf{0} & p\text{-}lAd; & \mathbf{0} & p\text{-}lBi & p\text{-}lBWi \\ \star & p\text{-}lT2ip\text{-}T & p\text{-}l\,Z1ip\text{-}T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & p\text{-}lT3ip\text{-}T & 2p\text{-}l\,Z2ip\text{-}T & p\text{-}lz2ip\text{-}T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \_4p\text{-}l\,Z2iF\text{-}T & 2p\text{-}l\,Z2ip\text{-}T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & p\text{-}lT5ip\text{-}T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \cdot \end{bmatrix} - \Lambda(2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 + \mathtt{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi))\Lambda + F_{z_i}^\top \gamma^{-2} F_{z_i} < \mathbf{0}, \forall i \in [1,N] \tag{3.47}$$

para *Gt=* [F-T *Onx4n+nu+nw]*T, /3J = [-In *Ac1* **On** *Ad* **On** *B Bw], Ac1 =A+ BK* e separando-se os termos, da matriz da esquerda, na LMI (3.47), em fungao de *G*$_1$ e *f3t,* obtem-se

$$\Phi_{1i} + G_f\beta_f + \beta_f^\top G_f - \Lambda(2F_6^\top \mathcal{T}^{-1}F_6 + \mathtt{He}(F_6^\top \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi))\Lambda + F_{z_i}^\top \gamma^{-2} F_{z_i} < \mathbf{0}, \forall i \in [1,N], \tag{3.48}$$

em que <I>1i e dado por,

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
\text{rp-1T:ip-T} & \text{\_p-1-yp-T}_{\text{i}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \text{p-1T2ip-T} & \text{p-1 Z1ip-T} & 0 & 0 & 0 & \\
* & * & \text{p-1T3ip-T} & \text{2p-1 Z2ip-T} & \text{\_p-1z2ip-T} & 0 & 0 \\
* & * & * & \text{\_4p-1 Z2iF-T} & \text{2p-1 Z2ip-T} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \text{p-1T5ip-T} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -1
\end{array}\right] \tag{3.49}$$

com Toi = 1"i + -

Adotando-se $Y;$ = p-l $\}"iF$-T, A = p-l pip-T, $T2i$ = $p\text{-}^{1}T2iF$- T, f'3i = $p\text{-}lr3ip$-T, T_{5i} =p-^{1}(-Z2; - Q2JF-T = $(-Z_{2;}$ - Q2J e separando-se a matriz identidade da linha e coluna 7, dos demais termos de <I>1i reescreve-se (3.49) como

$$\text{<I>1i} = \bar{\text{<I>}}\text{1i} - F_7^{\top} F1 = \left[\begin{array}{ccccccc}
\text{If}' & \text{.;.A} & Y; & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & T2i & \text{Z1i} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & T3i & \text{2Z2i} & -Z2i & 0 & 0 \\
* & * & * & \text{-4Z2i} & \text{2Z2i} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \text{f'5i} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & 0 & \\
* & * & * & * & * & * &
\end{array}\right] -F{:}(F_{7.} \tag{3.50}$$

Dessa forma, a partir da aplicagao do Lema de Finsler, apresentado no apendice A.3, substituindo-se (3.50) em (3.48) tem-se a seguinte representagao equivalente

$$\Theta_i = \bar{\Phi}_{1i} - 2F_6^{\top}\mathcal{T}^{-1}F_6 - \mathrm{He}(F_6^{\top}\mathcal{G}_{(\ell)}\Xi) - F_7^{\top}F_7 + F_{z_i}^{\top}\gamma^{-2}F_{z_i} < \mathbf{0}, \forall i \in [1,N], \tag{3.51}$$

Multiplicando (3.51) por CY(i) e somando para i E [1,N], obtem-se

$$\Theta(\alpha) = \bar{\Phi}_1(\alpha) - 2F_6^{\top}\mathcal{T}^{-1}F_6 - \mathrm{He}(F_6^{\top}\mathcal{G}_{(\ell)}\Xi) - F_7^{\top}F_7 + F_z(\alpha)^{\top}\gamma^{-2}F_z(\alpha) < \mathbf{0}. \tag{3.52}$$

Tomando-se os vetores aumentados Pk e (k, definidos por,

$$\rho_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-\underline{d}} \\ x_{k-d_k} \\ x_{k-\bar{d}} \end{bmatrix}, \ \hat{\rho}_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \rho_k \end{bmatrix}, \ \zeta_k = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_k \\ \phi(Kx_k) \\ w_k \end{bmatrix},$$

pre-multiplicando por (-;[e p6s multiplicando por (k, na LMI (3.52) obtem-se,

$$\zeta_k^{\top}\left(\bar{\Phi}_1(\alpha) - 2F_6^{\top}\mathcal{T}^{-1}F_6 - \mathrm{He}(F_6^{\top}\mathcal{G}_{(\ell)}\Xi) - F_7^{\top}F_7 + F_z(\alpha)^{\top}\gamma^{-2}F_z(\alpha)\right)\zeta_k < 0.$$

Considerando $\omega_k = \mathcal{G}_{(\ell)}\Xi\zeta_k = \mathcal{G}_{(\ell)}\rho_k$, $z_k = F_z(\alpha)\zeta_k$, $w_k = F_7\zeta_k$, é possível determinar

$$\zeta_k^{\top}\Theta(\alpha)\zeta_k = \zeta_k^{\top}\bar{\Phi}_1(\alpha)\zeta_k - \mathrm{He}(\phi(u_k)^{\top}\mathcal{T}^{-1}(\phi(u_k) + \omega_k)) - w_k^{\top}w_k + z_k^{\top}\gamma^{-2}z_k < 0. \tag{3.53}$$

Alem disso, e possfvel expandir O termo *er* <I>1 (*a)(k* em

T - T - T - T- T-
Xk+lP(a)xk+l + *xk+1Y(a)xk+l* - *xk+1Y(a)xk* - *xk Y(a)xk+l* + *xk T2(a)xk*
T- T - T - T -
+*xk Z1(a)xk-4* + *xk_4Z1(a)xk* + *xk_4T3(a)xk-4*+ *xk-dk2Z2(a)xk-4*
T - T - T– T–
+*xk_42Z2(a)xk-dk* - *xk-dk 4Z2(a)xk-dk* - *xk_4Z2(a)xk-J* - *xk_JZ2(a)xk-g*
T - T - T -
+*xk-dk2Z2(a)xk-J* + *xk_J2Z2(a)xk-dk* - *xk_J(Z2(a)* + *Q2(a))xk-J·* (3.54)

Isto posto, diferentemente do Teorema 3.1, o termo *Y(a)* e explfcito, nao sendo necessaria a relagao que utiliza E. Sendo assim, a partir das matrizes

Y(a) = d.^{2}Z1(a) + (J- d.)^{2}Z2(a),T2(a) = *Y(a)* - *P(a)* + Q1(a) - Z1(a),
T3(a) = Q2(a) - Q1(a) - Z1(a) - Z2(a),

e possfvel reescrever (3.54) como

$$x_{k+1}^{\top}\bar{P}(\alpha)x_{k+1}+x_{k+1}^{\top}\bar{Y}(\alpha)x_{k+1}-x_{k+1}^{\top}\bar{Y}(\alpha)x_k-x_k^{\top}\bar{Y}(\alpha)x_{k+1}+x_k^{\top}(\bar{Y}(\alpha)-\bar{P}(\alpha)+\bar{Q}_1(\alpha)$$

$$-\bar{Z}_1(\alpha))x_k+x_k^{\top}\bar{Z}_1(\alpha)x_{k-\underline{d}}+x_{k-d}^{\top}\bar{Z}_1(\alpha)x_k+x_{k-d}^{\top}(\bar{Q}_2(\alpha)-\bar{Q}_1(\alpha)-\bar{Z}_1(\alpha)-\bar{Z}_2(\alpha))x_{k-\underline{d}}$$

T - T - T - T–
+ *xk-dk2Z2(a)xk-4* + *xk_42Z2(a)xk-dk* - *xk-dk 4Z2(a)xk-dk* - *xk_4Z2(a)xk-J*
T - T - T -
- *xk_JZ2(a)xk-4* + *xk-dk2Z2(a)xk-J* + *xk_J2Z2(a)xk-dk*
- *xk_J(Z2(a)* + *Q2(a))xk-J·* (3.55)

Dessa forma, a partir das desigualdades de Jensen, apresentadas em (3.19) e (3.25), para os somat6rios S1 e S2' *Yk+l* = *Xk+l* - *Xk* e substituindo-se *ek*I>1 (*a)(k* por (3.55) em (3.53) obtem-se

V(xk,a) - He *(cp(1lk)TT-^{1}[cp(1lk)* + *wk])* - *wl wk+ zl 1-^{2}zk* < 0. (3.56)

Portanto, se (3.56) e verificada, tem-se que *V(xk,a)* - He *(cp(uk)TT-^{1}[cp(uk) +wk])* - *w[wk* *-z[* 1-^{2} *zk* < 0 assegurando a estabilidade entrada-estado. Alem disso, a estabilidade local do sistema em malha fechada (3.6), e garantida se o termo *cp(K xk)TT-^{1}[cp(K xk)+ wk]* e negativo. Para o tal, emprega-se a condigao generalizada de setor apresentada em (2.18). Aplicando-se o complemento de Schur na ultima linha e coluna de (3.45), para um dado £, considerando A2 = **diag(l$_4$** ® *p-* T) e *wk* = *9(c)PkA2,* pre-multiplicando por (pkA2T) e p6s-multiplicando por *PkA2,* na LMI resultante, obtem-se:

0 < (pkA2)T { [: J - *([KFT* **0] - Q)**) (77uzc))-^{1} *([KFT* **0]** - 9\c)} *PkA2*
= *xk$^{Tp-lp-p-}$* T *Xk*+ *xk*T*-g p-lQ-* 1 *p-* T *Xk-g*+ *xk*T*-dk p-lQ-* 2 *p-* T *Xk-dk*+ *x*T*k - J p-lQ-* 2 *p-* T *xk-J*
-(pkA2)T { *([KFT* **0]** - Q)) (77uzc))-^{1} *([KFT* **0]** - Q)(ci} *PkA2*
T T T T
= *xk Pxk* + *xk-dQ1Xk-g* + *xk-d Q2Xk-dk* + *xk_JQ2xk-J* - *(Kxk - Wk)) (Kxk - wk)(C)* / (2) *TJ'll(C)*
V(xo,a) - (77uzc))-^{1} *(uk - wk)(c)*^{2}.

Se *xk* e tal que o conjunto ***S,*** apresentado em (2.17), e verificado, entao a desigualdade (2.18) e verdadeira assegurando que -He *(¢(uk)TT-^{1}[cp(uk) +wk])* em (3.43) e semi definida positiva. Consequentemente, como a desigualdade (3.56) e verificada, pode-se concluir que *V(xk,a)* apresentado em (3.27) e menor que 0. Considerando que as LMis (3.44)e (3.45) e a desigualdade (3.46) sejam verificadas, pode-se garantir que *Kxk* E ***S,*** o Lema 3.1 e verificado e entao, o sistema incerto de malha fechada resultante e ISS, com a regiao de atrac;:ao estimada dada por *.Cv(17)* em (3.28). Dessa forma, se *wk* = 0 o sistema nao sofre ac;:ao da perturbac;:ao, e as trajet6rias de *xk* convergem para a origem, a medida que *k* -+ OO. Para *wk* -/:- 0 as trajet6rias do sistema permanecem limitadas em *.Cv(17)* para qualquer condic;:ao inicial x_0 pertencente a *.Cv(/3),* dado o relaxamento promovido por *V(xk,a)* :::; llwll + *V*(x_0,*a*) :::; J-^{1} + *13*-^{1} = 17-^{1}, para todo *k* > 0. Alem disso, a ac;:ao da perturbac;:ao na saida regulada do sistema e limitada por 1, a partir da relac;:ao llzkll < 1^2(llwll + *V(io,a))* para *k*-+ OO. ■

Observac:;ao 3.3 *Destaca-se q·ue, a condir;ao corwexa proposta no Teorema :J.2, apresenta ·uma sol·ur;ao em q-ue* o *func-ional de L-K poss·ui matrizes dependentes de parametros, incertos e invariantes no tempo, devido* a *abordagem baseada no Lema de Finster, que introduz vari6:ueis de folga. Alem disso, diferentemente do Teorema 3.1,* o *termo* *!i?* *Z*$_1$*i*+(*d-d.)2* Z$_2$i, *nao poss·ui a majorar;ao q·ue ·utiliza* E, *nao sendo necessario escolher valores deste parametro para tratar a desig-ualdade* 3.44 *coma LMI e obter sol-ur;oes factfueis 6timas.*

Observac:;ao 3.4 *De forma analoga* a *Observar;ao 3.1, apresentada no Teorema 3.1, a complexidade numerica do Teorema* 3.2, *pode ser calc-ulada a partir de* £$_2$ *e* **JC$_2$** *sendo*

$$\mathcal{L}_2 = N(5n + n_u + n_w) + n + n_u(4n + 1),\ \mathcal{K}_2 = n_u n + 5n^2 + n_u^2 + \frac{5n(n+1)}{2} + 2.$$

Observac:;ao 3.5 *A sol·ur;ao dos Teoremas* 3.1 *e* 3.2, *garante q·ue* V(x,a) *seja ·umafunr;ao de L-K e que* V(x,a) < 0. *Dessa forma, a partir do Lema* (3.1) *assegura-se a estabilidade robusta local do sistema* (3.6). *Benda assim,* o *conjunta* RE *determina estimativa da regiao de atrar;ao.*

3.4 Considera oes Finais

Neste capitulo, foi formalizado o problema de estabilizac;:ao entrada-estado. Com a ajuda de resultados presentes na literatura, foi feita a caracterizac;:ao algebrica da regiao estimada de atrac;:ao, *RE,* por meio do Lema 3.1. Em seguida, as condic;:oes para estabilizac;:ao do caso incerto foram proposta. No Capitulo 4, sao apresentados os exemplos numericos para ilustrar as condic;:oes desenvolvidas, assim como investigada a representac;:ao geometrica da estimativa da regiao de atrac;:ao.

1 capitulo 4

Caracterizac;ao da Regiao de Atrac;ao

Neste capf tulo e apresentada uma nova abordagem para a caracterizac;:ao geometrica da regiao de atrac;:ao a partir de uma func;.ao de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade (regional) de sistemas com atraso variante no tempo nos estados. Inspirado pelos trabalhos (Castro *et al.,* 2020) e (Silva *et al.,* 2018a) o funcional de L-K, apresentado no Capf tulo 3, e reescrito em um espac;:o aumentado, permitindo a proposic;:iio de procedimentos de otimizac;ao mais eficientes que as outras condic;oes encontradas na literatura. Como consequencia, a regiiio de estimativa de atrac;:iio obtida pode ser aplicada em casos numericos, para ilustrar a eficacia das condic;:oes desenvolvidas. Parte dos resultados apresentados neste capftulo pode ser encontrada em (Silva Jr. *et al.,* 2022a) e (Silva Jr. *et al.,* 2022b).

4.1 Caracteriza<;ao Geometrica da Regiao de Atra<;ao

Distintas abordagens para a caracterizac;:iio da regiiio de condic;:oes iniciais para sistemas discretos com atrasos e atuadores saturantes, sao apresentadas por Zhang *et al.* (2011),Xu *et al.* (2012),Chen *et al.* (2014),Silva *et al.* (2018b),Chen *et al.* (2019),de Souza *et al.* (2019),Castro *et al.* (2020) e Lima *et al.* (2021). Tal caracterizac;:ao e necessaria para analisar o conjunto de valores que os estados podem assumir, assegurando trajet6rias limitadas dentro de *RA* e convergentes para a origem.

Em (Xu *et al.,* 2012) siio determinados ganhos robustos para realimentac;:ao de estado, em que a regiao de atra<;ao e aproximada por uma bola dentro do espac;:o n com raio r_1. Com isso, os conjuntos de condic;:oes iniciais 'P(J,o) = { *X_J, X_J+1,* · · · , x_0} tern cada um de seus componentes limitados uniformemente.

Zhang *et al.* (2011) apresentam uma abordagem para sfntese de controladores robustos, por realimentac;:ao de estados, para sistemas chaveados, a partir de matrizes constantes que caracterizam a estrutura das incertezas. Alem disso, a caracterizac;:ao da regiao de atrac;:ao e realizada atraves de multiplas func;:oes de Lyapunov. 0 conjunto de nfvel *.Cv(fJ)* pode ser expresso pela intersec;:ao de conjuntos elipsoidais *xJ Pixk* :::; */3*. Dessa forma, a regiao estimada pode ser mais geral que a bola estimada em (Xu *et al.,* 2012).

Outras abordagens buscam reduzir o conservadorismo das estimativas ao tentar considerar a variac;:ao dos componentes de 1P(J,o)· Em (Chen *et al.,* 2014) e (Chen *et al.,* 2019) a regiao de atrac;ao e estimada pelo conjunto *Xr* = { *1P(d,k)* : l1P(J,k) le:::; r1, l1P(J,k+l) - *1P(d,k)* le :::; *rd* com r1 e r2, obtidos por meio do maximo autovalor de cada matriz *P,* Q1, Q2, Z1 e Z2 do funcional de L-K. Tal abordagem pode ser convenientemente expressa em termos das metric-as da sequencia de vetores que comp6em a condii;ao inicial e de sua respectiva variac;ao no tempo conforme a seguir:

$$\left\|\varphi_{(\bar{d},0)}\right\| = \max_{j=0,\dots,\bar{d}} |x_{k-j}| \tag{4.1}$$

$$\left\|\Delta\varphi_{(\bar{d},0)}\right\| = \max_{j=1,\dots,\bar{d}} |x_{k-j} - x_{k-j+1}| \,. \tag{4.2}$$

Dessa forma, o conjunto de condii;6es iniciais, dos estados atuais, e limitado por r1 como em Xu *et al.* (2012), mas restringindo a variai;ao dos componentes sucessivos de 1P(J,o)· Essa variac;:ao e limitada a r2 em Chen *et al.* (2014) e Chen *et al.* (2019) enquanto que em Xu *et al.* (2012) a variai;ao admissivel e de 2r1.

Ja em (Silva *et al.,* 2018b) foi proposta uma abordagem para obteni;ao de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno, em que a caracterizai;.ao da estimativa da regiao e dividida em duas partes: um elips6ide *C* contido em *IRn* para os estados atuais *x0,* e uma regiao *B(r1,r2)* para os estados atrasados, delimitados pela sequencia *lf)o* obtida pela remoi;ao de *x0.* Alem disso, e considerada a regiao de estabilidade do modelo que e denotada por *Vo* = {*Xk* E *]Rn* : *IL(c)Xkl* :::; T/(£)} com T/(£) > 0, *L(c)* E JRlXn e £ E [l,11:], sendo 11: 0 numero de restric;oes do sistema. Em que *C* = *{x0* E EJ,+1: V1(x0,a0):::; c(1P(J,o))} Voe *B(r1,r2)* = {1P(J,o)j E *Ej, j* E [1,d] : ll1P(J,o) || :::; r1, ll.6.1P(J,o)|| :::; r2 e 1P(J,o)j E *Vo, j* E [1,d]}. Assim, nao sao levados em conta todos os estados atrasados e as estimativas de *C* e B(r1,r2) sao independentes, uma vez que, a func;:ao fuzzy candidata Lyapunov-Krasovskii, empregada em (Silva *et al.,* 2018b), nao considera o acoplamento entre o estado atual *x0* e o estado atrasado x_1.

Visando uma caracterizai;ao geometrica mais geral, (Silva *et al.,* 2018a) e (de Souza *et al.,* 2019), utilizaram um conjunto elipsoidal em um espai;o aumentado com dimensao *n(J* + 1), sendo Jo valor maximo do atraso. Para de Souza *et al.* (2019), por exemplo, emprega-se uma candidata a func;ao de Lyapunov aumentada, a qual e determinada pela combinai;ao de todos os estados atrasados no intervalo de O a J, definindo-se o conjunto *C* = {*d+* E § : § ₺ [max(.4,dk - .6.J), min(*d,dk*+.6..4)]}. Essa candidata, representa um conjunto de nfvel descrito por .*Cv(TJ)* = {*1P(d,k)* E JRn(d+l) : *V'PJ,k,ak,dk* :::; 'l]-1}. Diferentemente dos anteriores, o resultado proposto em (Silva *et al.,* 2018a) e (de Souza *et al.,* 2019) considera a variac;ao dos atrasos entre amostragens consecutivas. Entretanto, por considerar todos os estados atrasados tal soluc;ao requer um elevado custo computacional. Adicionalmente ao encontrado em (Chen *et al.,* 2014) e (Chen *et al.,* 2019), em (Castro *et al.,* 2020) a estimativa da regiao de atragao considera os acoplamentos entre *xj* e *xj-l,* com *j* E [O,d], por meio de um funcional de L-K que relaciona diretamente os estados atrasados e atuais. Tal abordagem tambem e empregada na candidata a func;ao de Lyapunov-Krasovskii do presente trabalho. Dessa forma, as condic;6es dependem do vetor *xk,* dos estados relacionados com o maior e o menor atraso *xk-cl* e *xk-<1:,* e do estado atrasado *xk-dk.* Assim sendo, nao se tern um sistema aumentado composto por todos os estados atrasados reduzindo-se a complexidade numerica das condic;6es especialmente para valores maiores de *cl.* Isto posto, para (Castro *et al.,* 2020) a regiao e obtida atraves dos conjuntos *C* = *{xo* E *IR.n* : *Vi(xo)* :S 1 - 1} e *V* = *{yo* E *IR.n* : *Yci Jyo* < 1}, os quais produzem a regiao *B(r1,r2),* em que ll<f?oll :S r1 e ll <f?oll :S r2 e *Yo*= *x0* - x_1. Os valores de *1,* r1 e r2 dependem das matrizes do funcional de L-K e do valor do atraso.

Em (Lima *et al.,* 2021) uma fung.ao de Lyapunov-Krasovskii e mapeada em um espago aumentado para explorar melhores metodos de otimizac;ao e ampliar a regiao estimada de atrac;ao. Porem e utilizado um funcional de L-K diferente daquele empregado em Castro *et al.* (2020), abordando-se apenas o caso precisamente conhecido. A caracterizac;ao da regiao e estimada a partir do elipsoide com raio determinado atraves do maior autovalor da matriz resultante em espago aumentado.

No presente trabalho e proposta uma nova abordagem para a caraterizagao da regiao de atrac;ao, partindo-se da candidata de Lyapunov-Krasovskii, empregando um vetor de estados aumentados porem, preservando-se o baixo custo computacional. Tal caracterizac;ao sera melhor detalhada nas sec;oes seguintes. Diferentemente de (Zhang *et al.,* 2011), (Xu *et al.,* 2012), (Chen *et al.,* 2014) e (Chen *et al.,* 2019), que delimitam a regiao de atragao como uma bola pertencente a *JRn,* com raio r1 = *r* e r2 = 2r, no presente trabalho *RE* pode ser estimada como uma regiao em espago aumentado, flexibilizando as relac;6es entre os vetores de estados atrasados. Tal abordagem e possibilitada a partir do acoplamento de *x0* e x_1, ou seja, *y0,* da candidata de L-K (3.7) e da caracterizagao geometrica da regiao em espac;o aumentado. Logo, e gerada uma regiao menos conservadora, comparando-se com Zhang *et al.* (2011); Xu *et al.* (2012); Chen *et al.* (2014); Silva *et al.* (2018b); Chen *et al.* (2019); Castro *et al.* (2020); Lima *et al.* (2021), mencionados anteriormente, as quais determinam regi6es convexas *RE.* Somado a isso, a nova abordagem nao apresenta uma grande complexidade computacional, comparando-se com as condic;oes menos conservadoras encontradas na literatura, (de Souza *et al.,* 2019) e (Silva *et al.,* 2018a) que podem possuir elevado custo computacional para a obtenc;ao das soluc;6es, como ilustrado nos exemplos numericos.

Estima ao da regiao de atra ao

A estimac;ao da regiao de atrac;ao *RE* e determinada a partir da candidata a func;-ao L-*K* conforme apresentado no Lema a seguir.

Lema 4.1 *Se* $V(\bar{x}_k) = V_1(x_k) + V_2(\bar{x}_k) + V_3(\bar{x}_k)$ *em que,*

$$1/\mathrm{i}(xk) = xk^{\top} \bar{P}\, xk, \tag{4.3}$$

$$½(xk) = \underset{i=k-g}{\overset{k-1}{I{:}x[Q1xi}} + \underset{i=k-d}{\overset{k-g-1}{I{:}x[Q2xi,}} \tag{4.4}$$

$$Vi(xk) = d \overset{0}{\mathbf{L}}\ \overset{k}{\mathbf{L}}_{i=l-gj=k+i}\ uJ\, Z1?1j + (\mathrm{J} - \mathrm{d})\ \mathbf{L}\ \overset{k}{\mathbf{L}}_{\mathrm{i=l\text{-}Jj=k+i}}\ uJ\, Z2?1j, \tag{4.5}$$

com

$$y_j = x_j - x_{j-1},$$

e *·uma furu;iio L-K, asseg-urnndo a estabilidade rob·usta local do sistema*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} xk+l &=& (\mathrm{A(a)} + B(a)K)xk + Ad(a)xk\text{-}dk + B(a)rp(Kxk) + Bw(a)wk, \\ Zk &=& C(a)xk + Cd(a)xk\text{-}dk + D(a)rp(Kxk) + Dw(a)wk, \end{array} \right.$$

entiio o conj-unto RE pode ser definido a partir do conj-unto de nfoel £v (T/):

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\eta) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)};\ V(\bar{x}_k) = \bar{x}_k^T \bar{M} \bar{x}_k \leq \eta^{-1}\}, \tag{4.6}$$

sendo que xk representa o vetor de estados aumentados dado par

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k^{\top} & x_{k-1}^{\top} & x_{k-2}^{\top} & \cdots & x_{k-\bar{d}}^{\top} \end{bmatrix}^{\top},$$

e *a matriz M permite a reescrita do funcional de L-K, no espar;o a·umentado, sendo definida par:*

$$\bar{M} = P_f + Q_{1f} + Q_{2f} + Z_{1f} + Z_{2f}, \tag{4.7}$$

com as matrizes

$$P1 = v1v°[®P,\ Q11 = (t\underset{\mathrm{i=2}}{\overset{\mathtt{l+d}}{w}}v!)®Q1, \qquad Q21 = (\ \underset{\mathrm{i=g+2}}{\overset{\mathbf{J+1}}{\mathbf{L}}}\ wv!)\ ®\mathrm{Q2},$$

$$\mathrm{D1} = g \overset{Q}{\mathbf{L}}\overset{Q}{\mathbf{L}}_{\mathrm{i=l\ j=l}}\ vivJ\, d1ij\ ®\ \mathrm{Z1}, \quad Z11 = \mathrm{diag(D1,0)},$$

$$\mathrm{D2} = \mathrm{l1}\ \underset{\mathrm{i=l}}{\overset{\mathrm{i1}}{\mathbf{L}}}\ \underset{\mathrm{j=l}}{\overset{\mathrm{l1}}{\mathbf{L}}}\ \mathrm{V(U}\ \mathbf{I}\ d2ij\ Q9\ \mathrm{Z2}, \qquad D3 = \mathrm{l2}\ \underset{\mathrm{i=l}}{\overset{i2}{\mathbf{L}}}\underset{\mathrm{j=l}}{\overset{i2}{\mathbf{L}}}\ vivJ\, d3ij\ ®\ \mathrm{Z2},$$

$$Z_{2f} = -\iota_1^2 \mathrm{He}(v_{(\iota_2+1)} v_{\iota_2}^{\top}) \otimes \bar{Z}_2 + \mathtt{diag}(D_3, D_2),$$

$\iota_1 = (\bar{d} - \underline{d})$, $\iota_2 = (\underline{d} + 1)$, $v_i = \begin{bmatrix} 0_{n(1\times i-1)n} & I_n & 0_{n(1\times \bar{d}+1-i)n} \end{bmatrix}$ e $d_{kij} = d_{kji}$, $k \in \{1, 2, 3\}$,

!.l., **i=j=l**
d1,; { 2d. - (2i - 3), *i=j>l*
-(!.l.- ('i - 2)), **li-jl=l**
0, *caso contrario,*

211 - (2i - 1), *i=J*
d,,; { -(11 - (i - 1)), **li-jl=l**
0, *caso contrario,*

l2, i = j = 1
212, i = j > 1
$\overline{d}_{3iJ-}$ – -1,2, 1·η - J·1 = 1
{ 0, *caso contrario.*

Prova: A regra de formac;:ao geral, dada por (4.7) permite reescrever (4.3)-(4.5) de forma exata, utilizando um espac;:o aumentado definido a partir de *Xk* : *xr M.fk* ≡ *V(xk)*- Se *V(xk)* e um funcional L-K, entao qualquer condic;:ao inicial correspondente a um vetor *X0* E *JRn(d+l)* verificando *x;JMx0* ::; 77-^{1} garante que *xk, k* 2: 1, pertence ao interior de *£v,* grac;:as a propriedade funcional L-K: *V(xk)* - *V(xo)* = *xrMxk* - *x;JMxo* < 0, significando que, *xrMxk* ::; *x;JMxo* ::; 77-^{1} com *M* dado por (4.7). ■

Observa ao 4.1 *M representa a matriz formada pela expansiio da funr.;iio de L-K* (4.3)-(4.5), *determinada a partir da regra de formar.;iio geral, dada no Lema 4.1 sem sim:plificar.;oes ou maJorar.;oes.*

Observa ao 4.2 *Ressalta-se q·ue* o *n[vel definido em* (4.6), *pertence a ·um espar.;o aumentado. Tal caracter[stica perm.de melhores procedimentos de otimizar.;iio sem aumentar* o *custo comp·utacional das condir.;oes de estabil-izar.;iio, fator* o *q-ual sera demonstrado nas pr6ximas ser.;oes. Dessa form.a, obtem-se ·um.a definir.;iio de regiiio estimada com um volume de dimensiio n(* d + 1).

Observa ao 4.3 *Outras propostas para* o *funcional de L-K tambem podem ·us-ufruir das estrategias pastas no Lema* 4-1, *real-izando-se os aj-ustes necessarios em* M *e suas regras de formar.;iio.*

A determinac;:ao do conjunto de nivel *£v(77),* para (4.6), pode ser feita como apresentado no Lema a seguir, adaptado de Jungers & Castelan (2011, Lemma 4) e que pode ser visto como caso particular do Lema 2 de Figueiredo *et al.* (2021).

Lema 4.2 *Seja* o *conjunto elipsoidal E(Mid,77) dado par*

$$\mathcal{E}(M_{id},\eta) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1)};\ \bar{x}_k^T M_{id} \bar{x}_k \leq \eta^{-1}\},$$

para z E [1,N] *e d* E [1,d]. *Entao, o conj-unto de nfvel .Cv('TJ) de.finido em* (4.6) *pode ser expresso pela intersec;ii,o de confuntos elipsoidais, tal que:*

$$.Cv(TJ) = \underset{\substack{dk \ \mathrm{E} \ [1,d] \\ \mathrm{aEf}}}{\mathrm{n}} £(M(a,dk),TJ) = \underset{\substack{d \ \mathrm{E} \ [1,d] \\ i \ \mathrm{E} \ [1,N]}}{\mathrm{n}} £(Mid,rJ).$$

Os conjuntos de nfvel serao determinados atraves do Lema 4.2, para prover as estimativas da regiao de atrac;ao e da regiao de condic:;6es iniciais admissfveis do sistema (3.6), designadas *RE RA* e *REo* R_0, respectivamente. Neste capftulo sao apresentados os procedimentos de otimizagao aplicados em cada condigao desenvolvida, sendo investigados tres tipos de objetivo. 0 primeiro busca ampliar a regiao estimada de atrac:;ao, descrita por meio do volume estimado e do raio projetado. 0 segundo objetivo define a maxima energia de perturba<:;.ao admissfvel para o sistema. Ja o ultimo, determina o ganho $/l_2$ entre o sinal ex6geno e a saf da regulada do sistema. Por fim, sao apresentados os exemplos numericos, ilustrando assim a eficacia das condic;oes e procedimentos de otimizac;ao desenvolvidos. Dessa forma, a partir do Problema 3.1 sao desenvolvidos os procedimentos de otimizae;ao para os objetivos mencionados.

Atraves do Lema 4.1, e possfvel determinar o volume da regiao no espac;o n(J+i), por meio da matriz *M.* Nesse caso, o volume *V* obedece a seguinte proporcionalidade

$$V \ \mathrm{ex} \ \frac{1}{Jdet(M)} \tag{4.8}$$

Para fins comparativos com os demais resultados da literatura, um corte da regiao estimada e realizado a partir dos estados relacionados ao maximo autovalor ,\ da matriz *M.* Logo, determina-se a maior bola inscrita no elipsoide da regiao estimada de atrac;ao, cujo o raio e fornecido por:

$$r= \frac{1}{-} \tag{4.9}$$

Tal caracterizac;ao do volume e raio tambem e valida para o caso sujeito a parametros incertos invariantes no tempo. Considera-se o menor volume e raio entre as soluc;oes para os *N* vertices do politopo do sistema, ao comparar-se com os demais resultados da literatura. Note que embora a regiao estimada seja maior que a bola, relacionada ao menor raio, essa comparac;ao e adotada para evidenciar a melhoria das estimativas obtidas quando comparadas a abordagens anteriores que nao usam o espa<:;o aumentado.

4.2 Procedimentos de Otimiza ao

As condic;oes convexas desenvolvidas para sfntese dos ganhos de controladores robustos e estimativa da regiao de atrac;ao podem ser aplicadas para explorar a otimizac;ao de algumas caracterfsticas de interesse para o sistema em malha fechada, (3.6), conforme apresentado a seguir.

4.2.1 Maximiza<;ao da estimativa da regiao de atra<;ao

Objetiva-se maximizar a regiao estimada *RE,* aproximando-a da regiao de atra<:;ao *RA-* Nesse caso, os ganhos do controlador sao calculados considerando um sistema sem ac.;ao da perturbac::ao, ou seja, wk = **0**, *'ilk* ?: 0.

Para a condic.;ao apresentada pelo Teorema 3.1 e possfvel utilizar a transformac.;ao, *(M* - W)TM-^{1}(M - W)?: **0**, aplicada a (4.7), ou de forma equivalente

$$\mathbf{0} < \bar{M} = \mathcal{W}^{-1} M \mathcal{W}^{-1} \leq (2\mathcal{W} - M)^{-1} \leq \mathcal{H},$$

para

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\top \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}, \ \mathcal{W}^{-1} = \mathbf{I}_{\bar{d}+1} \otimes W^{-1}.$$

Dessa forma, maximiza-se o conjunto elipsoidal £(1-l,1), para um dado *E,* por meio do procedimento:

$$\mathcal{J}_1 = \begin{cases} \min\limits_{\mathcal{H},W,M,L,G,G_{\underline{d}},G_{d_k},G_{\bar{d}},\mathcal{T},\eta,\gamma \text{ e } \delta} & \mathtt{tr}\Big(\mathcal{H}\Big) \\ \text{sujeito a} \quad & (3.29), \quad (3.30) \text{ e } \begin{bmatrix} \mathbf{2W\text{-}M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 1\text{-}\{ \end{bmatrix} ?: \mathbf{0} \end{cases} \tag{4.10}$$

Se (4.10) apresenta soluc::ao 6tima factfvel, entao 1-{?: *Me* a minimiza<:;ao de tr(H), leva a minimiza<;.ao de tr(M).

Para a condi<;ao apresentada pelo Teorema 3.2, e possfvel utilizar a transforma<;ao, *(M* - *F)T*M-^{1}(M - F)?: **0**, aplicada a (4.7), ou de forma equivalente

$$\mathbf{0} < \bar{M} = \mathcal{F}^{-\top} M \mathcal{F}^{-1} \leq (2\mathcal{F} - M)^{-1} \leq \mathcal{H},$$

para

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\top \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}, \ \mathcal{F}^{-1} = \mathbf{I} \otimes F^{-1}.$$

Logo, maximiza-se o conjunto elipsoidal £(1-l,1) como segue:

$$\text{Jal=} \begin{cases} \underset{1\text{-}l,F,M,L,G,G4,Gdk,GJ,T,TJ,, \text{ e } ,5}{\text{mm}} & \mathtt{tr}\Big(\mathcal{H}\Big) \\ \text{sujeito a} \quad & (3.44), \quad (3.45) \text{ e } \begin{bmatrix} 2F\text{-}M & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 1\text{-}\{ \end{bmatrix} ?: \mathbf{0} \end{cases} \tag{4.11}$$

Se (4.11) apresenta solugao 6tima factfvel, entao *1-{* ?: *M* e a minimizac.;ao do tr(H), levam a minimiza<;ao do tr(M).

4.2.2 Minimizac;ao dos efeitos da perturbac;ao

Para uma dada energia de perturbac;;ao, 5-^{1}, a determinac;;ao dos ganhos robustos do controlador e obtida considerando a mitigac;;ao do ganho £$_2$ entre a perturbac;;ao e a safda regulada do sistema, minimizando o fator 1, para um dado *u*.

$$J_2 = \begin{cases} \underset{W,M,L,G,G4,Gdk,GJ,T \text{ e 'I)}}{\text{mm}} & , \\ \text{sujeito a} & (3.29), (3.30), 6 \text{ e c fixos} \end{cases} \qquad (4.12)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha_2} = \begin{cases} \underset{F,M,L,G,G_{\underline{d}},G_{d_k},G_{\bar{d}},\mathcal{T} \text{ e } \eta}{\min} & r \\ \text{sujeito a} & (3.44), \ (3.45) \text{ e } 6 \text{ fixo} \end{cases} \qquad (4.13)$$

4.2.3 Maximizac;ao da Tolerancia a perturbac;ao

Para um conjunto de condic;;oes iniciais nulas, as perturbac;;oes admissfveis sao maximizadas, portanto, 5-^{1} e o maior possfvel, se o sistema e regulado rp$_0$ = **0** entao J-^{1} = *rJ-^{I}*. Portanto, para o procedimento de otimizac;;ao, o valor de I e fixo, analisando assim a minimizac:;ao do fator *6* para um dado intervalo de fl.

$$J_3 = \begin{cases} \underset{W,M,L,G,G4,Gdk,GJ,Te \text{ 'IJ}}{\text{m}} & 8 \\ \text{sujeito a} & (3.29), (3.30), 1 \text{ e c fixos} \end{cases} \qquad (4.14)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha_3} = \begin{cases} \underset{F,M,L,G,G_{\underline{d}},G_{d_k},G_{\bar{d}},\mathcal{T} \text{ e } \eta}{\min} & 6 \\ \text{sujeito a} & (3.44), \ (3.45) \text{ e I fixo} \end{cases} \qquad (4.15)$$

4.3 Exemplos Numericos

Para ilustrar as condic:;oes e procedimentos desenvolvidos, sao apresentados dois exemplos de sistemas, sendo o primeiro precisamente conhecido com atraso constante, e o segundo com parametros incertos invariantes no tempo, a partir da abordagem polit6-pica, contendo atraso variante. Todos os testes foram executados, atraves do software MATLAB com a implementac:;ao no YALMIP e solugao pelo SeDuMi.

4.3.1 Sistema precisamente conhecido

Considere o sistema discreto no tempo (3.5) com matrizes precisamente conhecidas, conforme a seguir,

$$A = \left[\begin{matrix} 1.1 \\ 0.03 \end{matrix} \ 00\,85'\right] \quad Ad = \text{rn-} \quad .1]' \quad B = [0 \ \backslash] \ '$$

$$Bw = \left[0\backslash\right], C = [0 \ \ 1], \ D = [1], \qquad (4.16)$$

o atraso constante d = d = 5, a entrada saturante limitada em fl, = 15. 0 objetivo e projetar uma lei de controle saturante, com Llk = Kxk, de forma que o sistema em malha fechada tenha o maior conjunto de condi<;oes iniciais, que tendam para origem, possivel.

Maximizar;ao da estimatfoa da regiao de atrar;ao: utilizando-se o Teorema 3.1 e possivel estimar a regiao de atra<;ao, como um volume de dimensao $n(d+ 1)$. Destaca-se que, a titulo de compara<;ao com as demais condic;oes da literatura, foi realizada uma projec;ao do volume da regiao, representada por um circulo de raio r no espa<;o IR^2, em que todos os vetores Xj, da sequencia if!(J,k) com j E [0, - d] possuem llxjll::; r. Alem disso, $E = 1.1$ foi determinado, experimentalmente, atraves de uma grade de pontos uniformemente distribuidos com intervalo de 0.001, os quais levaram a uma soluc;ao factivel com um maior valor para o raio de *RE,* obtido a partir de (4.9).

Os resultados, para aplica<;.ao do Teorema 3.1, com o procedimento de otimiza<;ao .Ji (4.10), sao apresentados na Tabela 4.1 a seguir, a qual estabelece uma compara<;.ao de valores no espac;o IR^2.

Tabela 4.1: Proje<;.ao do raio da *RE* - Teorema 3.1 , procedimento J_1 - *exemplo 1.*

Condic;ao	Projec;ao do raio da *RE*
(de Souza *et al.,* 2019)	112.78
(Teorema 3.1 - J1)c=1.1	97.958
(Teorema 3.1 - Ji)c=1.9052	90.8575
(Castro *et al.,* 2020)c=1.9052	74.558
(Zhang *et al.,* 2011)	73.693
(Chen *et al.,* 2019)	72.596
(Chen *et al.,* 2014)	68.491
(Xu *et al.,* 2012)	63.029

Observa-se que, o resultado obtido a partir do Teorema 3.1 e procedimento de otimizac;ao J_1, apresenta um aumento do raio de aproximadamente 21.86% com $E = 1.9052$ e 29.10% para $E = 1.1$, se comparado a soluc;ao apresentada em Castro *et al.* (2020). Alem disso, uma analise do volume total da regiao *RE,* com dimensao IR^{12}, foi realizada a partir (4.8). Dessa forma, por meio do procedimento J_1 com $E = 1.9052$, obteve-se um volume de 3.3089 x 10^{30}, ou seja, um aumento de 9.0192 x 10^4% em relac;ao ao procedimento apresentado em (Castro *et al.,* 2020), com um valor de 3.6646 x 10^{27}. A comparac;ao em questao foi realizada utilizando as matrizes L-*K* encontradas pela abordagem em (Castro *et al.,* 2020), substituindo-as no conjunto de niveis (4.6). Sendo assim, o aumento do volume da regiao relaciona-se com a escolha da func;ao objetivo, em que a abordagem apresentada no presente trabalho e construida a partir da regra de formac;ao geral (4.7), a qual nao realiza simplificac;oes ou majorac;oes em sua constrrn;:ao.

A projec;ao do raio apresentada em (de Souza *et al.,* 2019), abordagem em sistema aumentado, dependente de todos os estados atrasados, mostrou-se 15% maior que o Teorema

3.1 com procedimento de otimiza<;.iio J_1. Porem, a complexidade numerica despendida para tais soluc,;oes e expressivamente maior, sendo obtida a partir das variaveis e linhas *Kc* e £c, conforme a seguir.

£c = [2n(d + 1) + *m* + *q* + *l]Ni[£2* - *(i* - *f:::.Tmax)(d* - *f:::.Tmax* - 1)] + *[n(d* + 1) + *l]Ntm,*

Kc= 0.5n,2(J + *l)2(Ni* + 2) + *0.5n(d* + *l)Ni* + m[2n(d + **1)** + 1] + 1.

com *i* = *(d* - *d.* + 1), e *l:::.Tmax* o maximo intervalo do atraso.

Nota-se que, *Kc* e £c, (de Souza *et al.,* 2019), tern dependencia direta com *d,* atraso maximo, tornando a complexidade numerica significativamente elevada, comparado a apresentada no Teorema 3.1, especialmente para valores maiores de atraso. Neste exemplo, *Kc*= 247 e £c = 38 enquanto K_1 e $£_1$, apresentados na observac;iio (3.1), siio iguais a 99 e 44 respectivamente. Portanto, a proposta apresentada no Capitulo 3 reduz significativamente o numero de variaveis de otimizac;iio, diminuindo a complexidade computacional para obten<;iio da soluc;iio em rela<;iio a abordagem encontrada em (de Souza *et al.,* 2019).

Adotando-se as solw;:oes as quais proporcionaram a maior projec;iio de raio, ou seja, J_1 com *E* = **1.1,** assume-sea sequencia de estados iniciais rp_0 tal qual

$$y?o= \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 110.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 60 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -60 \\ -30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 63 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -40 \\ 70 \end{bmatrix} \right\}, \tag{4.17}$$

com normas llrpoll = 156.1292 e $ll!:::.rp_0ll$ = 124.4548, obtidas a partir de (4.1) e (4.2), respectivamente.

Embora a maior projec;iio de raio seja para a escolha de *E* = **1.1,** o maior volume de *Rt:* foi obtido com *E* = 1.9052. Logo, nota-se que a variavel *E* interfere diretamente na factibilidade e nos resultados do volume e raio da regiiio estimada de atrac:ao. A figura a seguir representa o corte da regiiio para *xk,* bem como a convergencia dos estados, sujeitos ao vetor de condic;:oes iniciais (4.17), para a origem.

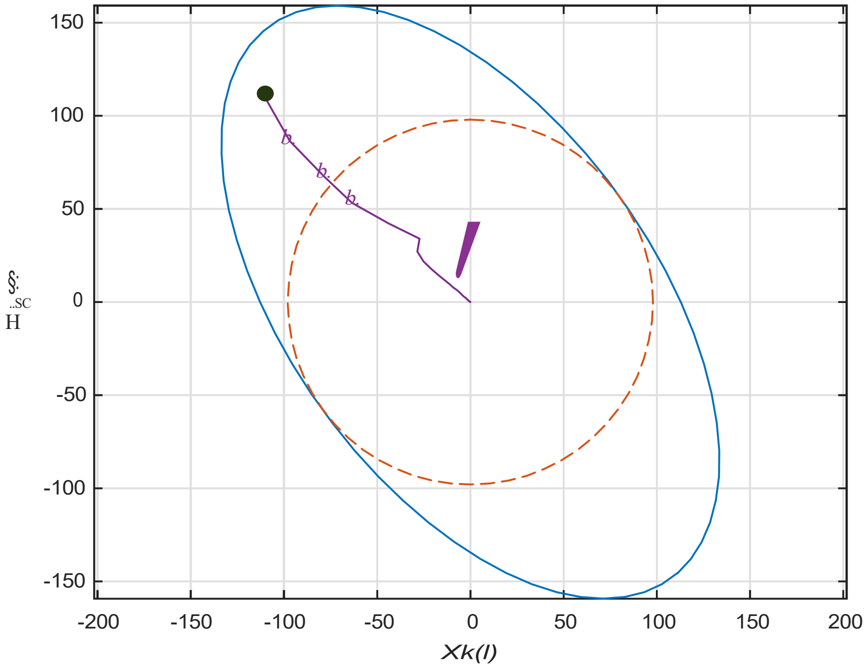

Figura 4.1: Convergencia dos estados para a origem partindo-se da condic:ao inicial cp$_0$. Soluc:ao obtida a partir do procedimento de otimizac:ao J_1 com E = 1.1.

Atraves da Figura 4.1 observa-se que a solrn.;ao, determinada pelo Teorema 3.1, garante a convergencia dos estados para a origem, conforme apresentado pela curva em roxo. Notase tambem que, o vetor x_o = [-110.4 110.4r, da sequencia (4.17), esta localizado fora do cfrculo inscrito na elipse curva tracejada em vermelho. Sendo assim, a analise das condic:oes iniciais restritas apenas a regiao do raio pode ser considerada conservadora. Alem disso, o elipsoide retratado a partir da curva continua em azul, representa os limites dos valores possfveis dos estados para condic:oes iniciais. Por fim, o comportamento da a<_:;ao de controle determinada pelos ganhos K = [-0.7079 -0.3473] , necessaria para levar os estados para origem, pode ser observado a partir da Figura 4.2.

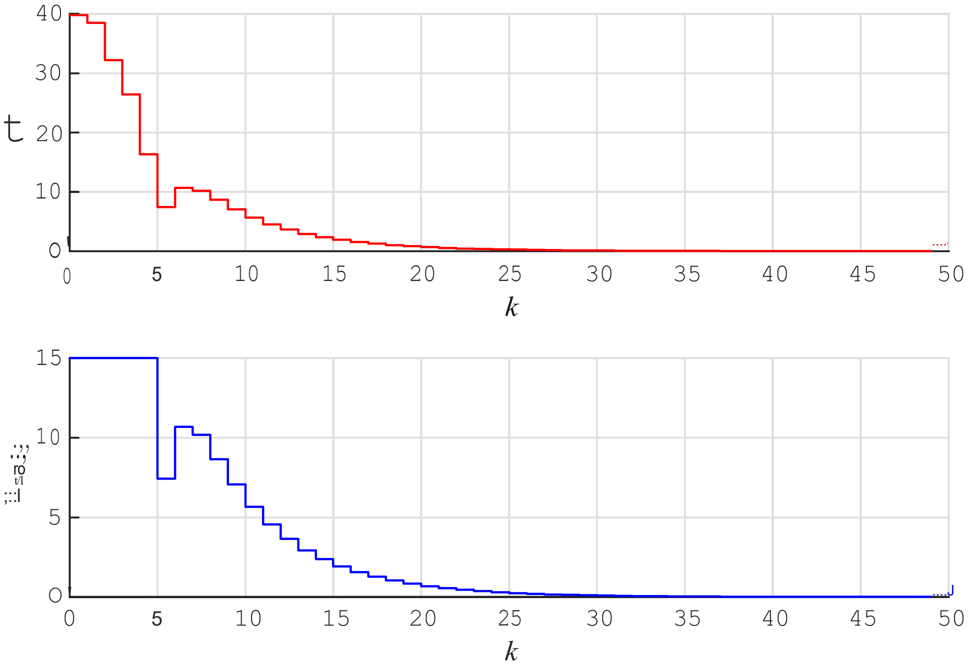

Figura 4.2: Compara<;.iio entre o sinal de controle e sinal de controle saturado. Solrn.;iio obtida a partir do procedimento de otimizac.;iio J_1 com f = 1.1.

A partir da Figura 4.2 nota-se que ha uma maior exigencia do sinal de controle nas 5 primeiras itera<;oes, o que pode ser observado pela curva em vermelho, niio saturada, apresentando valores de *uk* maiores que 15. Tal ac.;iio de controle, mais severa nas primeiras itera<;6es, deve-se ao fato do sistema considerar estados atrasados. Logo, para $d = 5$, os efeitos de uma condic.;iio inicial, com valores de x_0 elevados seriio reverberados ate a 5 interac.;iio, exigindo-se mais da ac.;iio do controlador, durante este intervalo. Devido as limitac.;6es ffsicas impostas a *uk,* o sinal de controle aplicado ao sistema e saturado, conforme observado atraves da curva em azul.

Para uma condic.;iio inicial localizada na borda do elipsoide da projec.;iio de *Ri,* assume-se valores menores para os estados atrasados, devido ao fato de que o volume do elipsoide constitui uma geometria irregular, com representac.;iio visual impraticavel. Desta forma, e necessario que a sequencia de estados atrasados esteja contemplada nas soluc.;6es facti-veis, dentro dos conjuntos contrativos, tal qual (4.6). Logo, uma escolha que atende tais considerac.;6es pode ser observada a partir de

$$lf!o = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 145.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\},$$

com norma IIIf!oll $= 182.5632$, obtida a partir de (4.1).

Outra abordagem relevante consiste em fixar valores de atrasos maiores, consequentemente, niio sera possivel adotar x_0 no limiar da projec.;iio do elipsoide gerado, tal representagao pode ser observada a partir da sequencia de condigoes iniciais a seguir

$$'Po=\left\{ \begin{bmatrix}-103\\ 103\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}37\\ 64\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}37\\ 64\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}37\\ 64\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}37\\ 64\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}37\\ 64\end{bmatrix} \right\}, \tag{4.18}$$

com $\|'Po\| = 145.66$, calculada por meio da equagao (4.1).

Sendo a solugao apresentada no Teorema 3.1 dependente de E, se faz necessaria uma analise elaborada das escolhas desta variavel escalar dentro do intervalo]0,2[, tal discussao sera melhor detalhada a seguir.

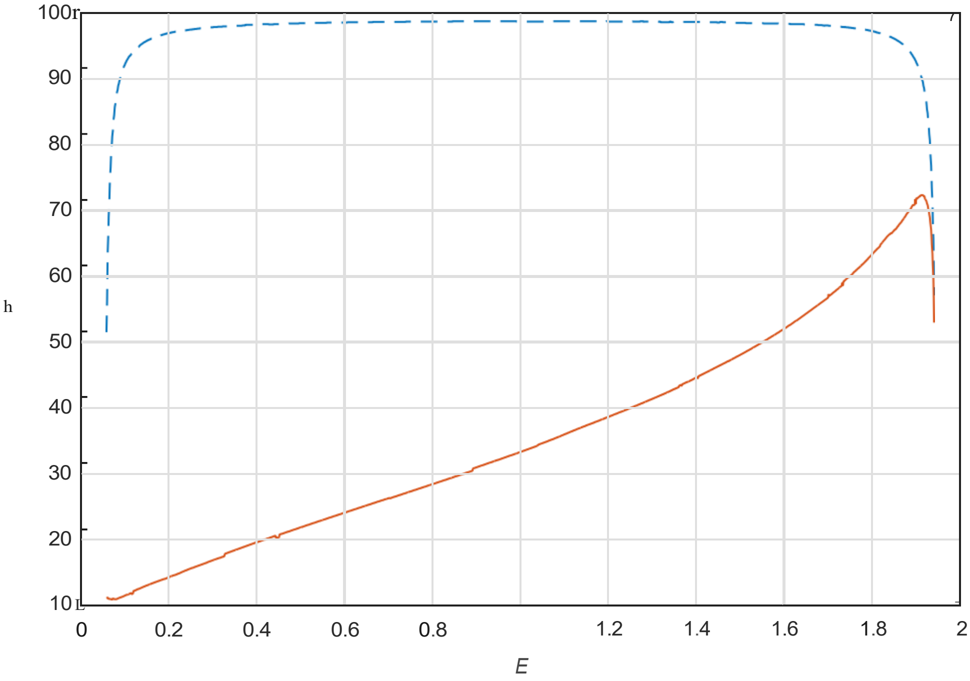

Figura 4.3: Comparagao entre a solug.ao do Teorema 3.1 ea apresentada em (Castro *et al.*, 2020) para o raio da estimativa da regiao de atragao ao longo da variagao de E, para o sistema (4.16).

A partir da Figura 4.3 observa-se que os resultados, para o raio da regiao estimada de atragao, sao dependentes da variavel E. Nota-se que para o Teorema 3.1, curva tracejada em azul, tem-se uma evolug.ao dos valores do raio de 50.59 ate 97.95, no intervalo de 0.005 a 0.6 para E. Em seguida, o valor do raio permanece pr6ximo de 97.95 ate E = 1.4 decaindo no intervalo de 1.4 :S E :S 1.948. Logo, existe um conjunto de valores 6timos de E, para os quais se tern um maior raio da regiao estimada de atragao. Assim, a partir da curva analisada, observa-se que para o exemplo em questao deve-se escolher E entre 0.6 e 1.4.

Para a solugao apresentada em (Castro *et al.*, 2020), curva continua em vermelho, dependente da expansao de *Hj* ponderada por um vetor de variaveis escalares *fJ*, nota-se um crescimento do raio partindo de 10.19 ate 74.558, seguindo um comportamento diferente do apresentado pelo Teorema 3.1. Sendo assim, existem poucos valores de E, para os quais o raio estimado e o melhor possivel.

Portanto, os resultados apresentados na Figura 4.3 corroboram com a regrade formac;:ao geral desenvolvida, reduzindo o conservadorismo das soluc;-oes, por meio da escolha da func;:.ao objetivo e da caracterizac;:ao da regiao de atrac;:ao, o que por sua vez, reduz, os efeitos da escolha de E.

0 Teorema 3.2, que considera as matrizes do funcional de L-K dependentes de parametros incertos invariantes no tempo, pode ser empregado tambem para o caso precisamente conhecido. Dessa forma, a nao dependencia da variavel escalar E reduz o conservadorismo e complexidade para obtenc;:ao das soluc;:oes. A Tabela 4.2 apresenta um comparativo da estimativa da regiao de atrac;:ao para as condic;:oes desenvolvidas neste trabalho.

Tabela 4.2: Regiao de Atrac;:ao - Teoremas 3.2 e 3.1, procedimentos Ja_1 e J_1 *exemplo 1.*

Condic;:ao	Projec;:ao do raio da *RE*	Volume de *RE*
Teorema 3.2 - Ja_1	98.5016	3.1531 x 10^{31}
Teorema 3.1 - J1c:=1.1	97.958	**3.2935** x 10^{30}

A partir da Tabela 4.2, observa-se que ha um aumento de 0.5549%, no valor do raio, entre a soluc;:ao do Teorema 3.2 procedimento Ja_1 ea soluc;:ao do Teorema 3.1 procedimento J_1. Porem, ao comparar-se os resultados em termos do volume de *RE*, e observado um aumento significativo, de 845.9%, calculado, em todos os casos, a partir do volume relativo, em que a solw;ao menos conservadora e apresentada no Teorema 3.2. Logo, a analise do volume mostra-se mais assertiva para descric;:ao da estimativa da regiao de atrac;:ao.

Dessa forma, assume-se a sequencia de estados iniciais cp_0 com atraso fixo tais quais

$$cpo(Jcq) = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 149.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

Com uma norma $\|cpo(Jcq)\| = 186.167$, obtida por meio de (4.1).

Assumindo-se variac;:oes nos estados atrasados e possivel determinar sequencias de condic;:oes iniciais tais como a seguir

$$cpo(Jcq) = \left\{ \begin{bmatrix} -110.4 \\ 131.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 60 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -60 \\ -30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 63 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -40 \\ 70 \end{bmatrix} \right\},$$

com uma norma $\|cpo(Jcq)\| = 171.698$, mantendo-se $\|6.cp_0\| = 124.4548$, calculados a partir de (4.1) e (4.2).

Logo, observa-se que, mantendo-se os estados atrasados dispostos em (4.17) a partir do Teorema 3.2, e possivel aumentar a norma em 9.971%. Alem disso, comparando-se com o vetor de estados aumentados, apresentado em (4.18), e possivel expandir para

$$\varphi_{0(\mathcal{J}_{\alpha_1})} = \left\{ \begin{bmatrix} -106.9 \\ 106.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 \\ 64 \end{bmatrix} \right\}$$

Sendo a norma de 'Po(Ja$_1$), obtida por meio de (4.1), 56.39% maior que a apresentada em (Castro *et al.,* 2020), a saber 96.6615.

A eficacia das solw;oes, em termos da complexidade numerica, foi avaliada comparando-se o numero de variaveis e linhas, *lCc* = 247 e *Le* = 38, respectivamente, apresentados por (de Souza *et al.,* 2019) com JC-7"$_1$ = 40 e £-7"$_1$ = 47, obtidos pelo Teorema 3.2, procedimento de otimizac;iio *Jew* Alem disso, de acordo com Peaucelle *et al.* (2002), a complexidade numerica pode ser expressa, para o software SeDuMi, por 1(^{2}£$^{2.5}$ + [,^{3} ^{5}. Dessa forma, obtem-se boas soluc;oes mantendo-se uma complexidade numerica razoavel, observando-se a complexidade relativa em relac:ao a (de Souza *et al.,* 2019) tem-se uma diferenc;a de 2.078 x 10^3% para uma diferenc;a de 14.49% na projec;iio do raio da *RE-*

Alem da expansiio da regiiio de atrac;iio, e possf vel realizar a analise dos sinais ex6genos, podendo considerar a minimiza<_;;iio dos efeitos da perturbac:.ao alem da maximiza<_;;iio da tolerancia a perturbac:.ao, fatores os quais siio demonstrados a seguir.

Minim:izar;iio dos efeitos da pert·urbar;iio: Sabendo-se a magnitude da energia de perturbac;iio 5-^{1}, e possfvel minimizar os efeitos dos sinais ex6genos na safda regulada a partir do fator *1,* que pode ser determinado atraves do Teorema 3.1 com o procedimento de otimizac;iio J_2, apresentado em (4.12).

Escolhendo-se a energia de perturbac;iio 5-^{1} = 625 aplicada ao sistema (4.16) com o atraso constante *d.* = *d* = 5, a entrada saturante limitada em *u* = 15 e o escalar *E* = 1.884, a safda regulada possui os efeitos da perturbac:.ao mitigados, ponderados por *1,* o qual foi minimizado para o valor de 1.06.

Para uma condic;iio inicial nula, dada pela sequencia *cp*$_0$ = 0, o sinal ex6geno foi aplicado a partir de *k* = 10, sendo limitado por llwll; :::; 625, construfdo a partir de llwll; :::; 5-^{1}, sendo

$$w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,i} & w_{i+1} & w_{i+2} & w_{i+3} & \mathbf{0}_{i+4,k} \end{bmatrix},$$

com wi+1 = cos(0)-JF1, *wi+*$_2$ =5-^{1}- W;+$_1$- *w;+*$_3$, *wi+*$_3$ = sin(0)-JF1 e *0* = - Garante-se assim, um sinal de perturba<_;;iio com amplitude fornecida a partir de *6,* em que os dois instantes, *k* = *i* + 1 e *k* = i +3, siio niio nulos. Dessa forma, i e escolhido para instantes *k,* em que as condic:oes iniciais tenham atingido o regime permanente. Para o presente exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,9} & w_{10} & w_{11} & w_{12} & \mathbf{0}_{13,k} \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

com *W10* = cos(0)v'625, *Wn* =625 - *Wio* - W?$_2$, W12 = sin(0)v'625 e *0* = -

Logo, a ac;iio da perturba<_;;iio aplicada ao sistema (4.16) pode ser observada a partir da figura abaixo.

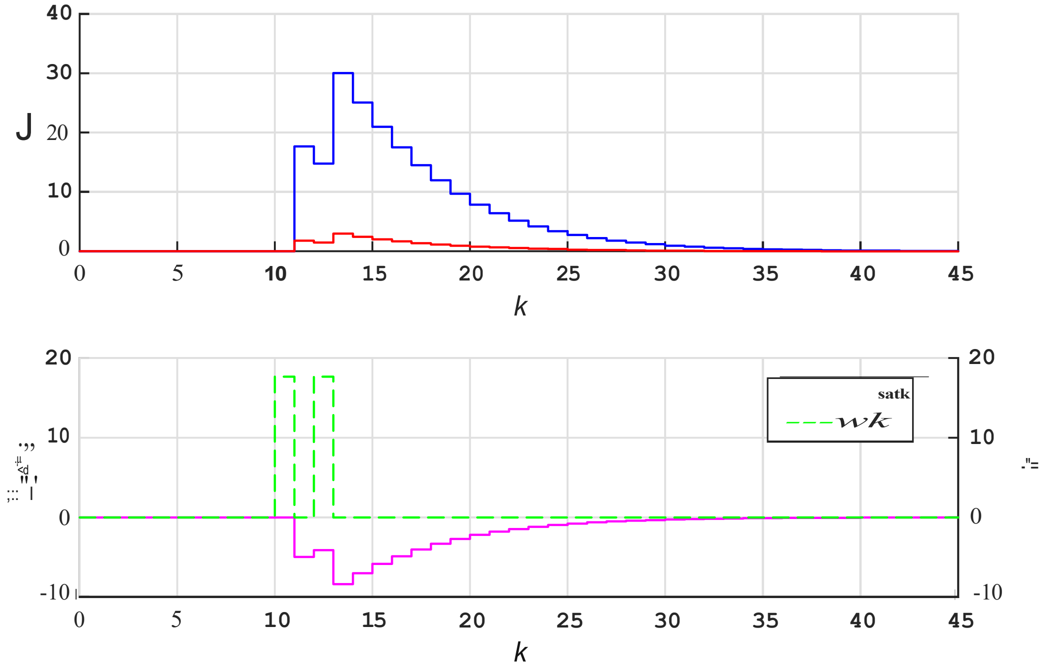

Figura 4.4: Convergencia dos estados para o sistema sujeito ao sinal ex6geno *wk.* Solrn.;ao obtida a partir do Teorema 3.1 e procedimento de otimizac;ao J_2 com f = 1.884.

A partir da Figura 4.4 observa-se que o estado *xk(l),* em azul, sofre maior impacto comparado ao segundo estado, em vermelho, devido a ac;ao de *w* ser ponderada pela matriz *Bw* = [1 0.1r em que *xk(2)* e multiplicado pelo termo 0.1. Observa-se que o sinal de perturbac;ao, curva em verde, construido conforme (4.19), foi aplicado em dois instantes, excitando o sistema com picos determinados a partir de llwll; 625. Alem disso, atraves do sinal de controle, curva em magenta, delimitado pelos ganhos *K* = [-0.2535 0.2568], nota-se que a agao de controle necessaria para rejeitar a perturbac;ao, ocorre entre *k* = 10 e *k* = 35.

Max'im:izar;iio da Tolerancia a pert·urbar;iio: determinou-se a maxima energia de perturbac;ao admissivel do sistema (4.16) minimizando-se 6 atraves da aplicac;ao do Teorema 3.1 com o procedimento J_3, fixando-se 1 = 0.5. Dessa forma, a sintese do controlador robusto e capaz de levar os estados para a origem, garantindo que o sistema atinja o regime permanente, alem de rejeitar os efeitos da perturbagao para um sinal ex6geno limitado pela energia 5-^{1}. Sendo determinada assim uma *Rt:* em *.Cv(/3),* conforme apresentado em (4.6), em que *V(xk)* llwll +*V(x0)* b-^{1} +13-^{1} = TJ-^{1}. Portanto, constr6i-se *w,* a partir do valor de energia otimizado, limitado por llwll; 460, conforme a seguir.

$$w = \left[\mathbf{0}_{1,9} \quad w_{10} \quad w_{11} \quad w_{12} \quad \mathbf{0}_{13,k}\right],$$

sendo *11!10* = cos(0)J465, 11!11 =460 – *Wr0* - Wi2, 11!12 = sin(0)J465 e *0* = -

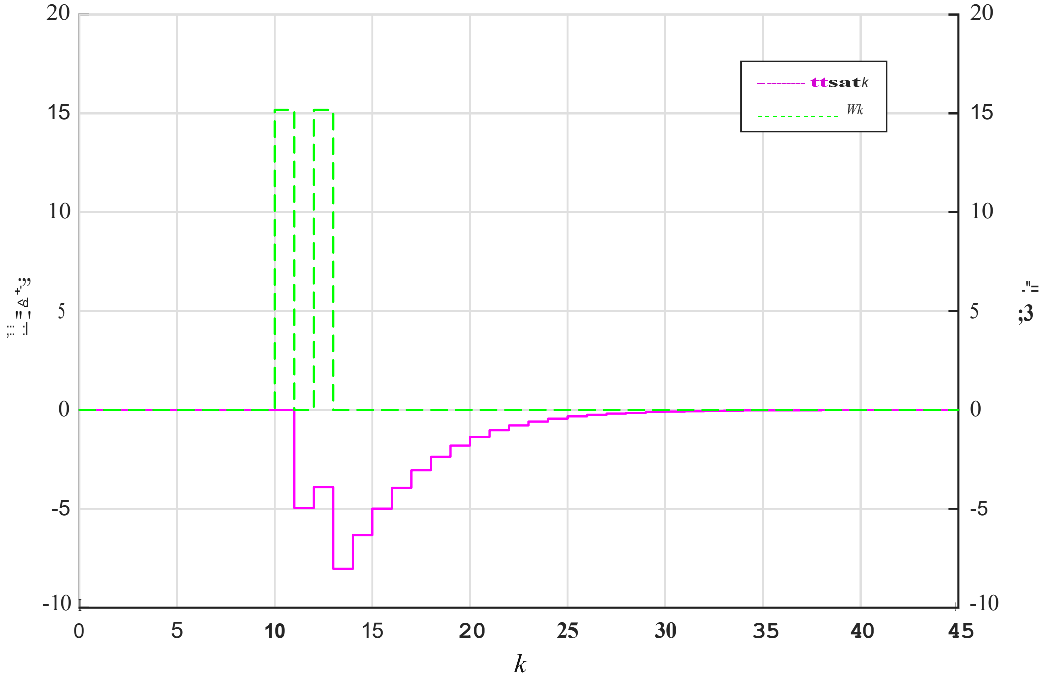

Figura 4.5: Sinal de controle $7_{..lsat}$ e sinal ex6geno w_k - SolU(.;ao obtida a partir do Teorema 3.1 procedimento de otimiza<_;.ao J_3 com E = 1.884.

A partir da Figura 4.5, observa-se que os valores de pico do sinal ex6geno, em w_{10} e w_{12}, curva tracejada em verde, sao iguais a 15.18. Alem disso, os ganhos do controlador robusto K = [-0.3054 0.2132], calculados a partir da Teorema 3.1 e procedimento de otimizac;:ao J_3, promovem a ac;:ao de controle, necessaria para mitigar os efeitos gerados pela energia de perturbac;:ao dew. Por fim, nota-se que a ac;:ao de controle saturada, curva em magenta, age ap6s a aplicac;:ao do sinal de perturbac;:ao, levando os estados novamente para a origem, nao ultrapassando o limite de saturac;:ao $u = 15$.

A analise do ganho £$_2$ e da maxima energia de perturbac;:ao pode ser comparada, estabelecendo uma rela<.;ao entre as escolhas de ɪ e 5^{-1} ao longo das limita<.;6es de energia do controlador. Adotando-se uma varic.;ao de energia 5^{-1} entre 150 e 250 obteve-se os resultados apresentados na Figura 4.12.

Para procedimento J_2, ao fixar-se o valor de 6 nota-se um decaimento de ɪ ao longo da variac.;ao dos limites de saturac;:ao. Dessa forma, quanto maior for u, mais energia o sistema pode empregar para levar os estados do sistema para a origem. Alem disso, para valores de u elevados atinge-se um ponto 6timo para ɪ pr6ximo de 0.1, para qualquer 6 nos intervalos testados. Nota-se atraves da Figura 4.12 que quanto maior for a energia admissfvel de perturbac;:ao, maiores serao os valores mfnimos de ,- Tal fator pode ser observado comparando-se a curva continua em verde com a curva tracejada em vermelho. Ambos resultados buscam mitigar os efeitos da perturbac;:ao na safda regulada porem,

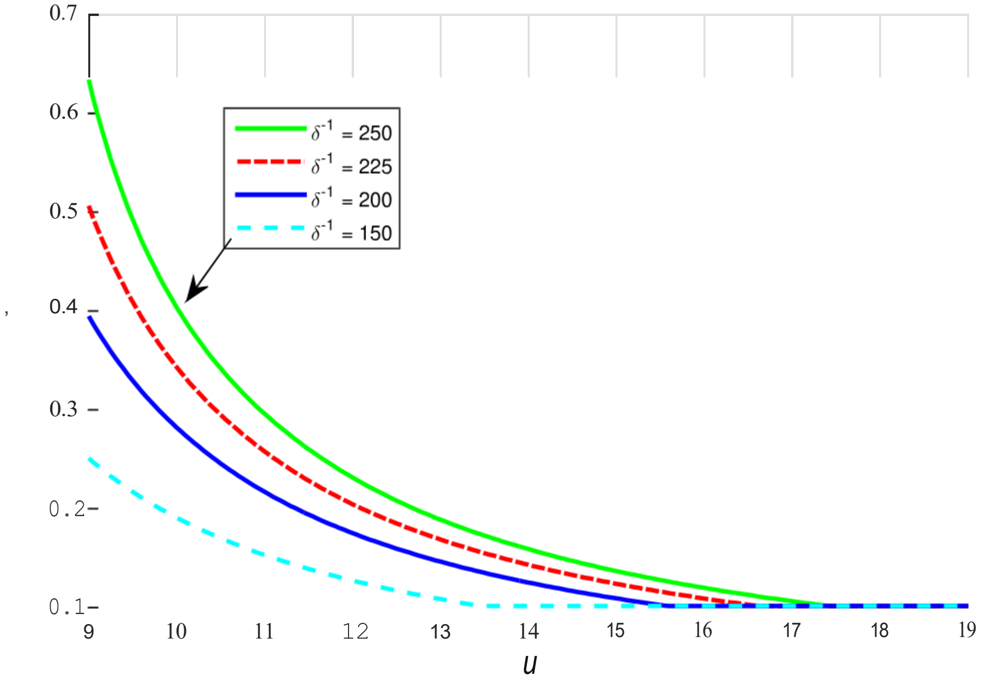

Figura 4.6: Procedimento de otimizac;ao J_3 Teorema 3.1, para valores fixos de *6* ao longo da variac;ao de *ii,* com *E* = 1.1.

para um mesmo limite de saturac;ao, obtem-se valores 6timos menores de I ao fixar-se valores menores de *6.*

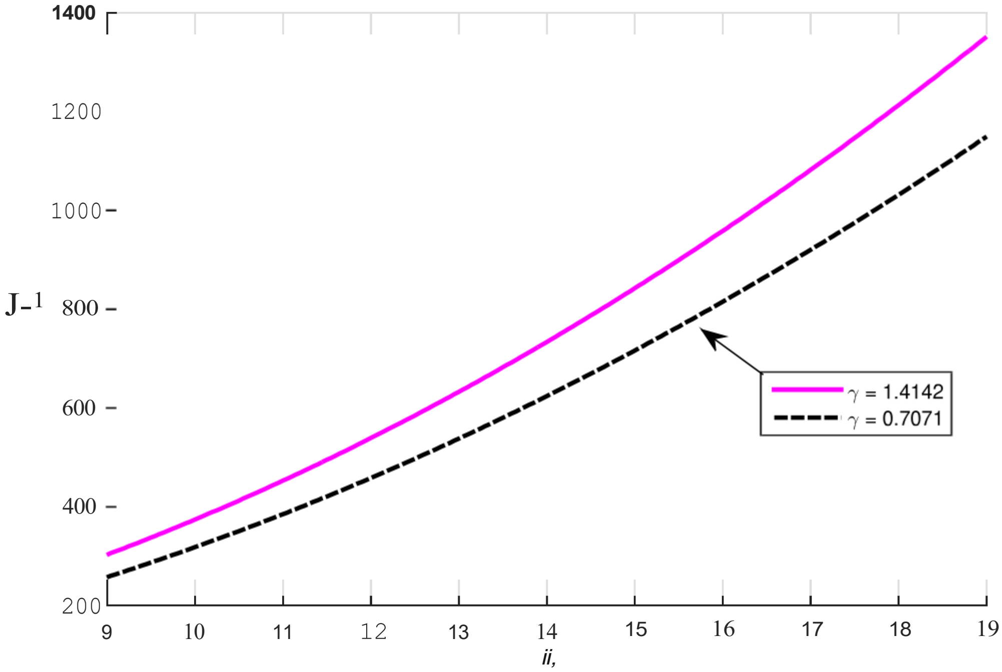

Figura 4.7: Procedimento de otimizac;ao J_2 Teorema 3.1, para valores fixos de I ao longo da variac;ao de *U.* com *E* = 1.1.

A partir da Figura 4.13, fixando-se o valor de I = 0.7071 por meio do procedimento de otimizac,:iio J_3, curva tracejada em preto, nota-se que a energia admissivel aumenta, variando de 250 a 1.1 x 10^3 ao longo do relaxamento da limitac,:iio da ac,:iio de controle para 9 :::; u:::; 19. Para I = 1.4142, curva continua em magenta, observa-se maiores valores de energia, 300 :::; 5^{-1} ::; 1.351 x 10^3 ao longo da variac,:iio de *u*.

Comparando-se os resultados apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13 observa-se que para a variac;iio no limite de saturac,:iio ha um comportamento inversamente proporcional entre I e *6*. A Tabela 4.3 apresenta o comparativo dos resultados obtidos a partir dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Tabela 4.3: Minimizac;iio I e *6* - comparac;iio dos procedimentos *J2*com Ja_2 e *J3* com Ja_3 *exemplo 1.*

Condic,:iio	5^{-1} fixo	r
Teorema 3.1 - J2c:=1.ss4	625	1.06
Teorema 3.2 - Ja_2	625	2.0449
Teorema 3.1 - J2c:=1.ss4	62.5	0.46
Teorema 3.2 - Ja_2	62.5	0.3828
Condic,:iio	I fixo	5-1
Teorema 3.1 - J3c:=1.SS4	1	625
Teorema 3.2 - .:la_3	1	304
Teorema 3.1 - J3c:=1.SS4	0.5	460
Teorema 3.2 - .:la_3	0.5	102

Observa-se que o Teorema 3.2 e mais sensivel as escolhas de *6* e 1. Dessa forma, variando-se I de 1 para 0.5 nota-se uma queda de 198% no valor da energia, para o procedimento Ja_3 enquanto J_3apresenta apenas 36%. Alem disso, e possivel perceber que, fixando-se 5^{-1} em torno de 62.5, I apresenta valores pr6ximos comparando-se os procedimentos Ja_2 e *J2*.

4.3.2 Sistema com varia«;ao de parametros

Exemplo 2: Considere o sistema discreto no tempo (3.5), com os vertices

$$A = \begin{bmatrix}0.38 & 0.2\\ 0.09 & 1.0\end{bmatrix}, \quad A_{di} = \begin{bmatrix}0.01 & -0.03\\ 0.02 & 0\end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix}1.98\\ 0.99\end{bmatrix},$$

$$Bw1 = [t:] ,C1 = [1 \;\; O] ,D1 = 1. \tag{4.20}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix}0.42 & 0.2\\ 0.11 & 1.0\end{bmatrix}, \quad A_{d^2} = \begin{bmatrix}0.05 & 0.09\\ 0.04 & 0.06\end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix}2.02\\ 1.01\end{bmatrix},$$

$$Bw_2 = [:] ,C2 = [0 \;\; 1] ,D2 = 0. \tag{4.21}$$

Com atraso 2 :::; dk :::; 4 ea entrada saturante limitada em $'U = 10$. Dessa forma, deseja-se projetar uma lei de controle saturante, com $uk = Kxk$, para que o sistema em malha fechada possua o maior conjunto de condic;;oes iniciais possfvel.

Maximizar;iio da estimativa da regiiio de atrar;iio: utilizando-se o Teorema 3.1 e o procedimento J_1, estima-se a regiao de atrac;;ao de forma analoga ao *exemplo 1.*

A Tabela 4.4 apresenta uma comparac;;.ao do volume da regiao em IR.^{12}, e dos valores do raio projetado no espac;;.o IR.^{2}, calculado atraves de (4.9).

Tabela 4.4: Regiao de Atrac;;ao - Teorema 3.1, procedimento J_1 - *exemplo* 2.

Condic;;ao	Projec;;ao do raio da *RE*	Volume da *RE*
Teorema 3.1 - J1c:=1.2s1	93.970	9.137 x 10^{24}
Teorema 3.1 - Jic:=l.678	85.590	8.368 x 10^{23}
(Castro *et al.,* 2020)c:=l.678	55.470	2.944 x 10^{22}

Alem disso, nota-se que o raio e volume, obtidos pelo Teorema 3.1, $E = 1.678$, apresentam um aumento de 54.3% e 2.742 x 10^3%, respectivamente, em relac;;ao a soluc;;ao apresentada em (Castro *et al.,* 2020). Adotando-se o Teorema 3.1 com $c = 1.281$, e possfvel notar um aumento de 69.41% para o raio e 3.094 x 10^4% para o volume da regiao estimada de atrac;;ao. A comparac;;ao da superffcie foi realizada utilizando as matrizes de L-K, encontradas pela abordagem em (Castro *et al.,* 2020), substituindo-as no conjunto de nfveis (4.6). Tal melhoria e esperada, uma vez que, as condic;;oes do trabalho referenciado foram expandidas e submetidas a uma nova func;;ao objetiva e caracterizac;;ao da *RE,* sendo ambas determinadas pela regrade formac;;ao geral da candidata de L-K, conforme (4.7). Sendo o Teorema 3.1 dependente de E, analisa-se os efeitos da escolha dessa da variavel escalar no intervalo]0,2[.

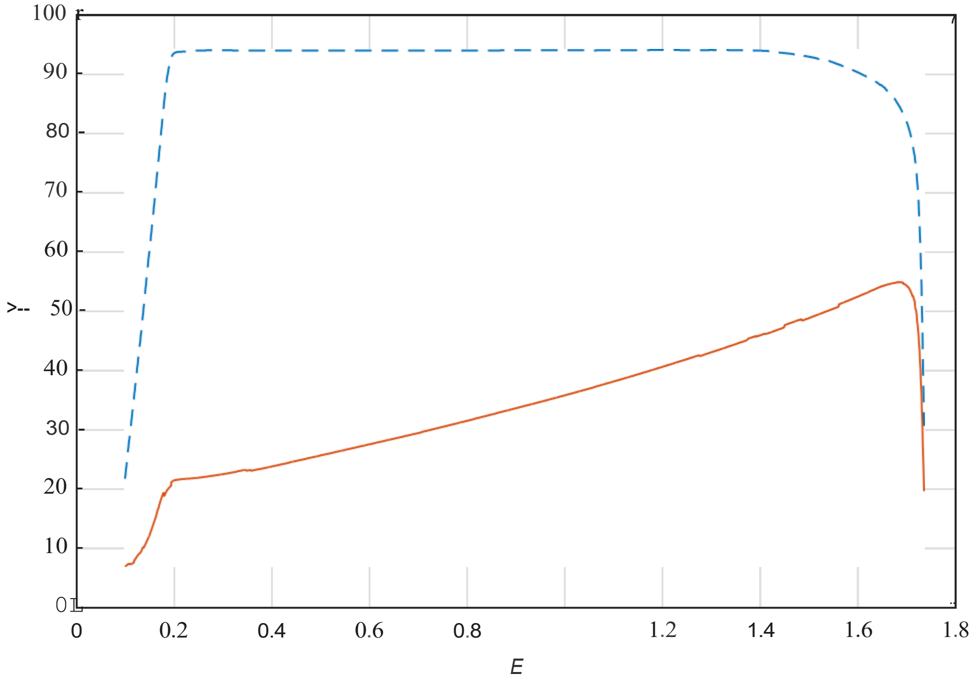

Figura 4.8: Comparac;ao do raio da regiao estimada de atrac;ao, ao longo da variac;ao de E, relacionando o Teorema 3.1 e a soluc;ao apresentada por (Castro *et al.,* 2020).

A partir da Figura 4.8 observa-se que, para o Teorema 3.1, curva tracejada em azul, o valor o raio estimado, varia de 22.380 a 93.970 no intervalo de 0.101 S ES 0.202. .Ja para o intervalo 0.202 < E < 1.4, o valor do raio se mantem pr6ximo de 93.970, apresentando uma diminuic;ao quando E > 1.4. Para a condic;ao apresentada em (Castro *et al.,* 2020), curva contfnua em vermelho, nota-se uma evoluc;ao do raio partindo de 7.870 ate 21.590, no intervalo 0.101 S E S 0.202. Porem, existem poucos valores de E, para os quais o raio estimado e o melhor possfvel, a soluc;ao 6tima pode ser observada em E = 1.678. Logo, nota-se que a utilizac;.ao da regra de formac;ao geral (4.7), na determinac;ao da fun<;ao objetivo e caracterizac;.ao da regiao de atrac;ao, emprega menos conservadorismo comparado a soluc;ao apresentada por Castro *et al.* (2020).

Diferentemente do Teorema 3.1, o Teorema 3.2 apresenta matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parametros incertos e invariantes no tempo, o que reduz o conservadorismo das condic;oes. Alem disso, para este caso, nao ha dependencia com a variavel escalar E, o que reduz a complexidade para obtenc;ao das soluc;oes, uma vez que nao e necessario fixar valores para garantir uma solw;:ao 6tima factfvel. A Tabela 4.5 apresenta o comparativo dos teoremas desenvolvidos.

Comparando-se o Teorema 3.1, procedimento J_1, com o Teorema 3.2 procedimento, Ja_1, observa-se um aumento de 0.246% do valor do raio e de 93.28% para o volume da *Rt:-* 0 Teorema 3.2 apresenta uma soluc;ao menos conservadora, ja que as matrizes

Tabela 4.5: Estimativa da *RE* - Teorema 3.2 , procedimento $.:la_1$, *exemplo 2.*

Condigao	Projegao do raio da *RE*	Volume da *RE*
Teorema 3.2 - $.:la_1$	94.2012	1.766×10^{25}
Teorema 3.1 - .:l1c=L2s1	93.970	9.137×10^{24}
Teorema 3.1 - .:l1c=L678	85.590	8.368×10^{23}
(Castro *et al.,* 2020)c=l.678	55.470	2.944×10^{22}

da candidata a fungao de Lyapunov-Krasovskii, denotadas por *Pi, Q1i,* Q2i, *Z1i,* Z2i, tambem assumem variac;ao de parametro. Dessa forma, a regiao de atrac;ao e composta pela intersecgao de duas regi6es com volume em IR^{12}, o que por sua vez, garante uma melhor representac;:.ao para *RE* *RA-*

Uma analise relevante consiste em observar o comportamento de condigoes iniciais, localizadas na borda da regiao projetada. Sendo assim, as sequencias

$$4?0(1) = \{ [-;is], [\ ], [\ ], [\ ], [\ ], [\ ]\},$$

3 0

$$4?0(^{2}) = \{\_[S\ 2\ 2]'\ [\ ]'\ [\ ]'\ [\ ]'\ [\ ]'\ [\ ]\}'$$

com norma 318.78 e 318.72 respectivamente, calculadas a partir de (4.1), possuem estados atrasados fixados e estados atuais no limiar de *RE.*

A Figura 4.9 apresenta uma projec;:.ao, em IR^2, da estimativa da regiao de atrac;:ao formada pela casca da intersecc;:ao das elipses. Alem disso, apresenta a convergencia dos conjuntos de condig6es iniciais, 4Jo(l) e 4Jo(2). Sendo assim, nota-se que os limites das sequencias de condig6es iniciais, para estados atrasados com valores relativamente pequenos, formam uma regiao convexa, a qual e construida a partir da intersecc;:ao de duas regi6es, geradas por meio dos vertices (4.20) e (4.21) do sistema. Observa-se tambem que, as escolhas de condig6es iniciais fora de *RE,* porem pr6ximas da casca, com a sequencia de estados atrasados nula, apresentam soluc;:6es divergentes, demonstrando que a proje<_:;ao da regiao estimada e uma boa aproximac;:ao para a regiao de atrac;:ao *RA-* Alem disso, a evoluc;:ao das trajet6rias, partindo de 4?o(l), podem ser observadas pelas linhas tracejadas em vermelho e magenta, representando a convergencia dos estados para o sistema na configurac;:ao de cada vertice do politopo. Somado a isto, as trajet6rias geradas por 4Jo(2), linhas tracejadas em preto (vertice (4.20)) e verde (vertice (4.21)), tambem apresentam convergencia para origem.

Alem da expansao da regiao de atragao, devido a nova caracterizagao de *RE,* o Teorema 3.2, tambem e capaz de analisar os sinais ex6genos, podendo considerar a minimizac;:ao dos efeitos e a maxima tolerancia da perturbagao.

Minim:izar;iio dos efeitos da pert-urbar;iio: atraves do Teorema 3.1, procedimento J_2 pode-se mitigar os efeitos da perturbac;ao na saida regulada do sistema. Considerando

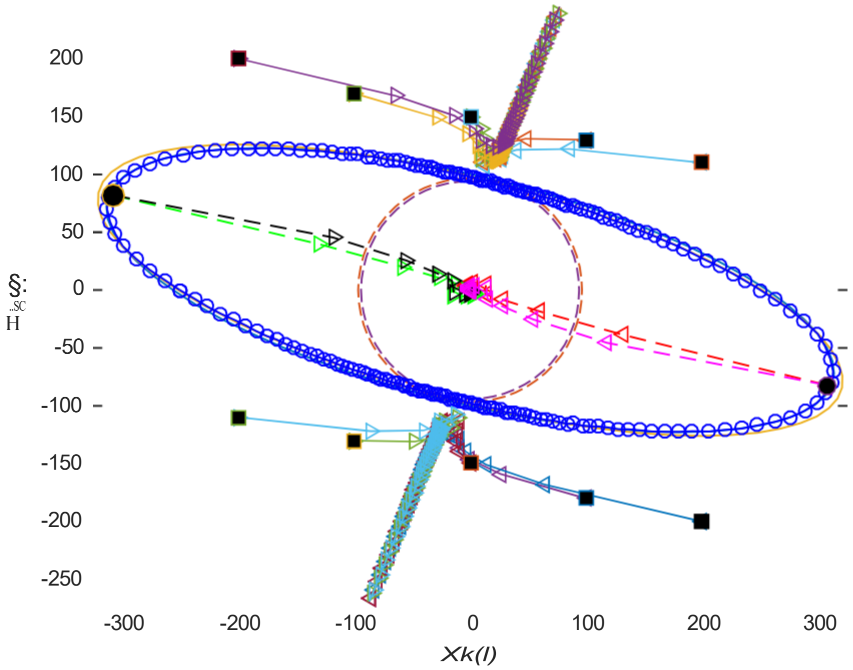

Figura 4.9: Analise dos limites da regiao de atragao e convergencia das sequencias de condigoes iniciais, localizadas na borda do elipsoide.

a magnitude da energia de perturbagao existente 5^{-1} = 250, aplicada ao sistema gerado pelos vertices (4.20) e (4.21), com o atraso 2:::; *dk:::;* 4, a entrada saturante limitada em *U* = 10 e *E* = 0.71, *J* foi minimizado para o valor de 5.2750. As simulagoes foram repetidas sob as mesmas condigoes para a_I E {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}, representando-se o sistema em configuragoes intermediarias em relagao aos vertices (4.20) e (4.21).

Partindo-se de uma condigao inicial nula fornecida pela sequencia cp_0 = 0. Em seguida, o sinal ex6geno foi aplicado a partir de k = 10, sendo limitado por llwll; :::; 250, construido a partir de llwll; :::; 5^{-1}. Para o presente exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1,9} & w_{10} & w_{11} & w_{12} & \mathbf{0}_{13,k} \end{bmatrix}, \qquad (4.22)$$

COm *W10* = COS(0)v'25(), 'W11 = $\overline{\text{J250 - 'Wio - 'Wi2}}$, 'W12 = Sin(0)v'25() e *0* = ;£.

Para os estados iniciais cp_0 do sistema (4.20)-(4.21) localizados na origem, a agao do sinal ex6geno pode ser observada a partir da Figura 4.10.

Nota-se a convergencia dos estados para origem, curvas continuas em vermelho e azul, para cada configuragao do sistema ao longo das combinagoes de a_I e a_2. Dessa forma, uma vez que os dois vertices do politopo possuem valores pr6ximos, os resultados apresentados possuem similaridade. Logo, para todas as configuragoes do sistema (4.20)-(4.21), a agao do sinal ex6geno, curva tracejada em verde, e mitigada a partir da vigesima setima iteragao, dessa forma, a agao de controle em cada configuragao, curva em magenta, apresenta valores nao saturantes.

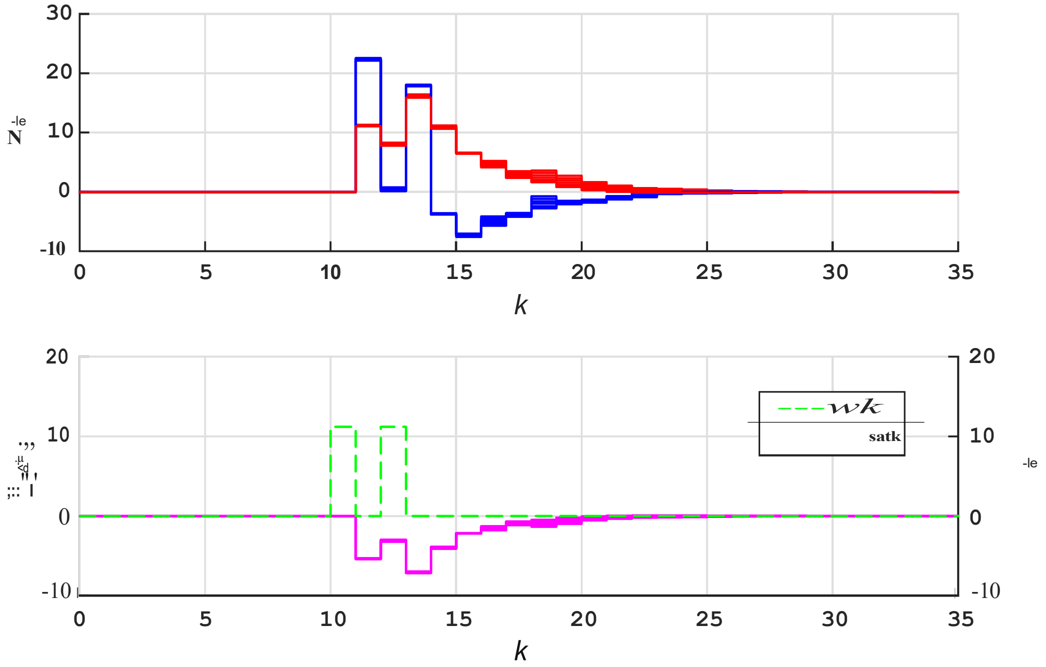

Figura 4.10: Convergencia dos estados e ac.;ao de controle, sistema sujeito ao sinal ex6geno *wk.* Soluc.;ao obtida a partir do Teorema 3.1 e procedimento J_2 com $E = 0.71$.

Sendo as matrizes do funcional de **L-K** do Teorema 3.1, precisamente conhecidas, o Teorema 3.2, procedimento Ja_2 pode ser empregado como uma abordagem menos conservadora para sistemas dependentes de parametros incertos invariantes no tempo.

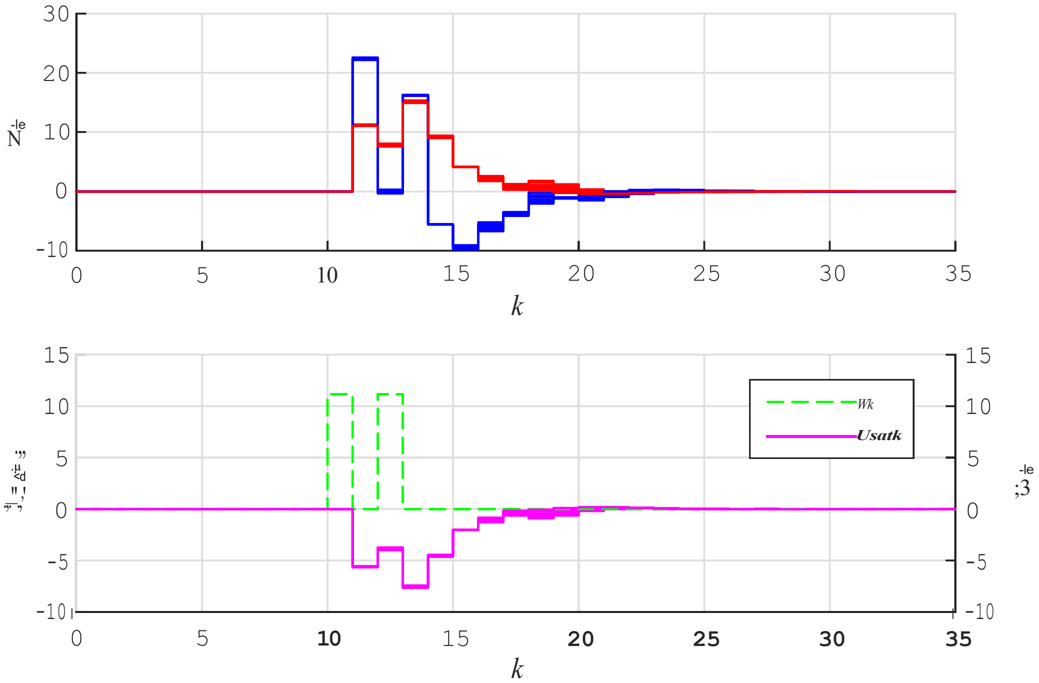

Figura 4.11: Convergencia dos estados e ac;ao de controle, para o sistema incerto. Soluc.;ao obtida a partir do Teorema 3.2 e procedimento $.:la_2\cdot$

A partir da Figura 4.11, percebe-se que a convergencia dos estados para origem, curvas continuas em vermelho e azul, para cada configurac;ao do sistema ao longo das combinac;6es de a_1 e a_2, ocorre por volta de $k = 22$. Alem disso, e possivel notar que, as configurac;oes intermediarias do sistema (4.20)-(4.21), apresentaram soluc;oes pr6ximas, fator esperado uma vez que o Teorema 3.2 e menos conservador em relac;ao aos parametros incertos invariantes no tempo. Por fim, a ac;ao do sinal ex6geno, curva tracejada em verde, e mitigada a partir da vigesima segunda iterac;;ao.

Maximizar;iio da Tolerancia a *perforbar;iio:* A partir do Teorema 3.1, J3 e Teorema 3.2, *:fcJc*$_3$, com $_I$ fixo, a minimizac;;.ao de *6* foi determinada, estabelecendo a maxima energia de perturbac;;ao admissivel do sistema (4.20)-(4.21). Assim sendo, foi determinada uma *RE* em *£v(fJ),* conforme apresentado em (4.6), em que *V(xk):::;* llwll +*V*(x_0)::::; $5\text{-}^1+\{]\text{-}^1$ = *TJ*-^{1}.

A Tabela 4.6 apresenta o comparativo dos resultados obtidos a partir dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Tabela 4.6: Minimizac;;.ao $_I$ e *6* - comparac;;.ao dos procedimentos J2 com *:la*$_2$ e J3 com *:la*$_3$ *exemplo 2.*

Condic;ao	5-1 fixo	*r*
Teorema 3.1 - 320=0 71	250	5.2750
Teorema 3.2 - *:la*$_2$	250	0.8836
Teorema 3.1 - J2e:=o.71	25	3.4370
Teorema 3.2 - *:la*$_2$	25	0.2029
Condic;ao	**, fixo**	**5-1**
Teorema 3.1 - 330=1	8	294.1176
Teorema 3.2 - *:la*$_3$	8	400
Teorema 3.1 - J3e:=1	4	200
Teorema 3.2 - *:la*$_3$	4	384.61

Uma analise pertinente consiste em estabelecer uma relac;ao entre as escolhas de $_I$ e 5-^{1} ao longo das limitac;:6es de energia do controlador. Adotando-se uma varic;;ao de energia 5-^{1}, entre 5000 e 35714 obteve-se os resultados apresentados na Figura 4.12.

Para o procedimento *:la*$_2$, ao fixar-se o valor de *6* nota-se um decaimento de , ao longo da varic;ao dos limites de saturac;ao, para valores de *u* elevados $_I$ estabiliza pr6ximo de 2. Dessa forma, quanto maior for fl, mais energia o sistema pode empregar para levar os estados do sistema para a origem. Nota-se atraves da Figura 4.12 que quanto maior for a energia admissivel de perturbac;;.ao, maiores serao os valores minimos de ,. Tal fator pode ser observado comparando-se a curva continua em verde com a curva tracejada em vermelho. Ambos resultados buscam mitigar os efeitos da perturbac;;ao na saida regulada porem, para um mesmo limite de saturac;ao, obtem-se valores 6timos menores de , ao fixar-se valores menores de *6*.

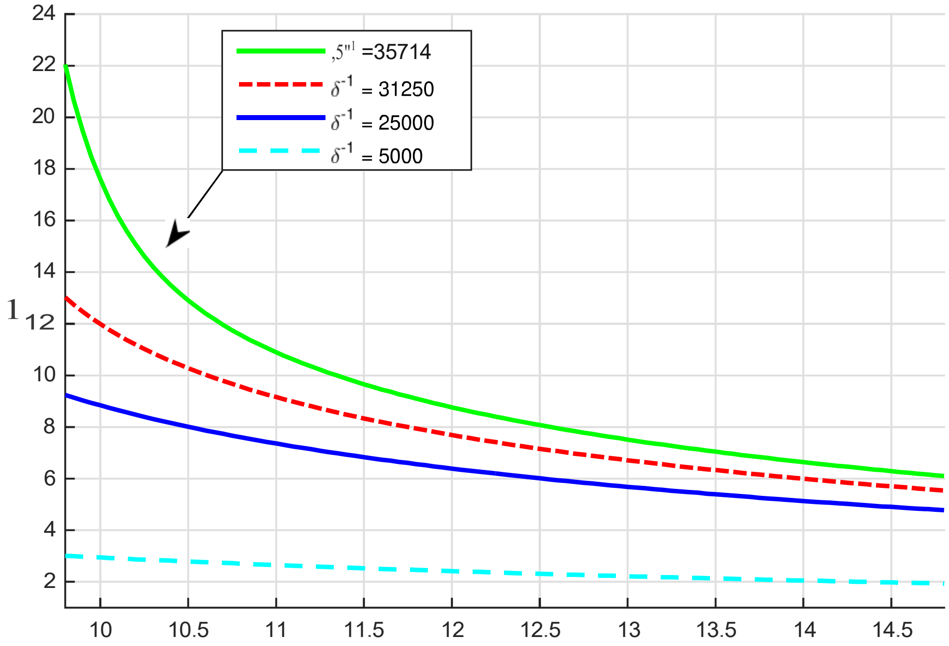

Figura 4.12: Procedimentos de otimizac;ao Ja_3 Teorema 3.2, para valores fixos de *6* ao longo da variac;ao de u.

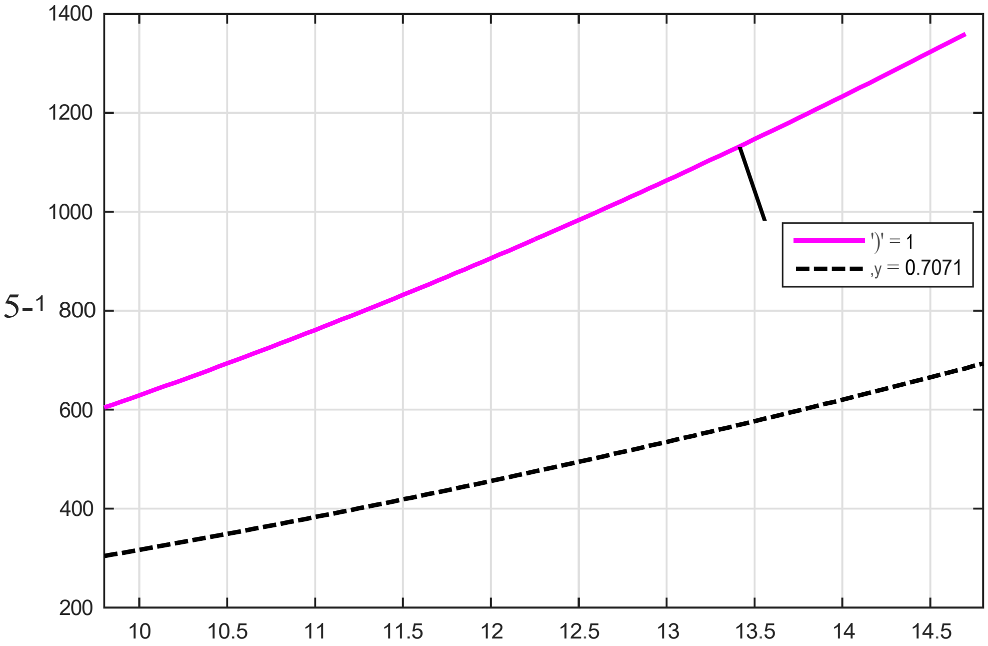

Figura 4.13: Procedimento de otimizac;ao Ja_2 Teorema 3.2, para valores fixos de , ao longo da variac;ao de u.

Observa-se que para do procedimento de otimizac;ao Ja_3, curva tracejada em preto, com , = 0.7071 a energia admissfvel aumenta, variando de 300 a 719 ao longo de 9.8 :s;

'U ::; 14.8. Observa-se que, para 1 = 1, curva continua em magenta, maiores valores de energia, 660 ::; 5^{-1} ::; 1380 siio admitidos ao longo da variac;:iio de *'U*.

Comparando-se os resultados apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13 observa-se que para a variac;:iio no limite de saturac;:iio ha um comportamento inversamente proporcional entre 1 e *5*.

Aumento das incertezas

Considere o sistema modificado a partir dos vertices (4.20) e (4.21), gerando-se um novo sistema com uma maior variac:iio entre os dois vertices, tal qual

$$\begin{bmatrix} 1.45 & 0.55 \\ 0.31 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad A_{di} = \begin{bmatrix} O & 0.05 \\ Q & Q \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2.25 \\ Q.45 \end{bmatrix},$$

$$Bw_1 = \begin{bmatrix} :! \end{bmatrix}, \quad C1 = [1.25 \quad O], \quad D_1 = 1.25. \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ -Q.19 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad A_{d^2} = \begin{bmatrix} O & -0.45 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -Q.05 \end{bmatrix},$$

$$Bw_2 = [\,!0\,g_5], \quad C2 = [0.75 \quad O], \quad D_2 = 0.75. \tag{4.24}$$

Com atraso $d. = d = 5$ e a entrada saturante limitada em fi = 15. A Tabela 4.7 apresenta o comparativo dos teoremas desenvolvidos.

Tabela 4.7: Estimativa da *RE* - *exemplo 2* modificado.

Condic;:iio	Projec;:iio do raio da *RE*	Volume da *RE*
Teorema 3.2 - *Ja.*	43.2	3.63×10^{26}
Teorema 3.1 - :lic:=1.1	42.01	2.5×10^{25}
(Castro *et al.*, 2020)c:=l.1	41.12	**1.9** $\times 10^{25}$

A partir dos resultados obtidos, nota-se que o aumento das incertezas, ou seja, o distanciamento entre dois vertices, reduz a regiiio estimada de atrac;:iio influenciando diretamente na obtenc;:iio de soluc;:oes factfveis principalmente para as soluc:oes mais conservadoras da literatura.

4.4 Considera oes Finais

Neste capftulo foram apresentados os resultados relacionados com a sfntese de controladores robustos por realimentac;:iio de estados. Inicialmente, a regra de formac;:iio geral da candidata a furn;iio de L-K foi definida e aplicada para caracterizac;:iio geometrica da *RE*· Em seguida, foram propostos procedimentos de otimizac:iio com objetivo de maximizar a estimativa da regiiio de atrac;:iio, maximizar a tolerancia a perturbac;:iio e minimizar o ganho /!,$_2$ entre a saida regulada e a entrada de perturbac;:.ao do sistema. A partir dos exemplos numericos foram testadas as eficiencias das condic;:oes desenvolvidas atraves das aplicac;:oes em um exemplo precisamente conhecido e outro dependente de parametro. Os resultados obtidos a partir do Teorema 3.2 apresentaram-se menos conservadores comparados aos obtidos com o Teorema 3.1 por nao depender de E e por utilizar um candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii com matrizes dependentes dos parametros incertos e invariantes no tempo. Dessa forma, foram apresentadas soluc;:oes as quais reduziram o conservadorismo mantendo-se a complexidade numerica relativamente baixa, em comparac;:ao a vigente literatura.

Capitulo 5

Conclus6es

5.1 Considera oes Finais

Neste trabalho, novas condic:oes para a sintese de controladores robustos, por realimentagao de estados, aplicada em sistemas discretos no tempo, com atraso nos estados variantes no tempo, incerteza de parametros, sujeitos a atuadores saturantes e sinais ex6genos foram apresentadas.

No Capftulo 2 foram apresentados trabalhos ja presentes na literatura a respeito do tema tratado neste trabalho. Alem disso, abordou-se os principais conceitos te6ricos e fundamentos matematicos essenciais para o desenvolvimento e compreensao deste trabalho.

No Capftulo 3 foram desenvolvidas condigoes para estabilizagao local de entrada para estado de sistemas discretos no tempo, com atraso nos estados variantes no tempo, sujeitos a atuadores saturantes e a perturbagao limitada em energia. Tais abordagens, adequadas a utilizagao dos procedimentos de otimizagao convexa, empregam a candidata a fungao de Lyapunov-Krasovskii, dependente de parametros em conjunto a condigao de setor generalizada que trata as nao linearidades da saturagao. Dessa forma, o objetivo geral proposto no Capftulo 1 foi alcangado.

No Capf tulo 4 os procedimentos de otimizac;.ao convexa foram propostos para diferentes objetivos, como a maximizac;ao da regiao de atrac;ao, a maximizac;ao da energia de perturbagao permitida e a minimizagao do ganho /!,2. Dois exemplos numericos foram considerados para demonstrar a eficacia das abordagens propostas. No primeiro exemplo, apresenta-se um classe de sistema precisamente conhecido, com atraso fixo, dessa forma, foi analisada a convergencia das sequencias de condigoes iniciais para o origem. Alem disso, demonstrou-se que a dependencia da variavel escalar r:; afeta diretamente a factibilidade e as soluc:oes das formulagoes de sintese propostas. A ac:ao da perturbac:ao foi explorada, relacionando-se a magnitude do sinal ex6geno e a maxima energia admissf vel pelo sistema. .Ja o segundo exemplo, conferiu uma expansao das investigac:oes para o caso dependente de parametros incertos invariantes no tempo com atraso variante. 0 Teorema 3.2 apresentou resultados menos conservadores em rela<_:;ao ao Teorema 3.1, uma vez que o metodo de sintese do mesmo considera incertezas de parametros invariantes no tempo na constrw:;ao do funcional de Lyapunov-Krasovskii. Alem disso, ambos teoremas desenvolvidos apresentaram solu<_:;oes menos conservadoras mantendo-se uma complexidade numerica razoavel em rela<_:;ao a vigente literatura. 0 que atende aos objetivos especificos almejados no Capitulo 1.

5.2 Publicac_;oes cientificas

Durante o desenvolvimento do presente trabalho de disserta<_:;ao os seguintes trabalhos foram public-ados ou aceitos para publicac;:ao:

Silva Jr., R.J., Leite, V.J.S., and Silva, L.F.P., "A General Optimization Approach to Enlarge the Region of Attraction of Saturating Discrete-Time Delayed Systems", em Proceedings of the 15th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing, 2022, pp 463-473 Lecture Notes electrical Engineering.

Nesse artigo, e abordada uma nova caracteriza<_:;ao geometrica de atrac;ao, atraves de um procedimento de otimiza<_:;ao convexa para maximiza<_:;ao da estimativa da regiao de atra<_:;ao. Mais especificamente, e desenvolvida uma reescrita do funcional de L-K em uma matriz com vetor de estados aumentados, por meio de uma regrade forma<_:;ao geral. Dessa forma, ha uma evolu<_:;ao dos resultados apresentados por Castro *et al.* (2020), em que o conjunto de condi<_:;oes iniciais admissiveis e ampliado mantendo-se as mesmas condi<_:;oes de sintese.

Silva Jr., R.J., Leite, V.J.S., and Silva, L.F.P., "Robust Regional ISS Stabilization of Saturating State-Delayed Discrete-Time Systems", aceito para publica<_:;iio no XXIV Congresso Brasileiro de Automatic-a - CBA (2022).

Nesse trabalho sao propostas novas condic;:oes desenvolvidas de sintese de controladores motivadas pelo trabalho de Castro *et al.* (2020). Especificamente, siio tratadas as consequencias de sinais ex6genos limitados em energia. Alem disso, promove um relaxamento das condic;oes considerando a estabilizac;ao entrada-estado em conjunto aos procedimentos de otimiza<_:;ao convexa. Exemplos numericos demonstram a eficiencia dos metodos propostos, aplicados em um sistema dependente de parametros incertos invariantes no tempo.

5.3 Trabalhos Futuros

Varias questoes podem ser colocadas a partir do desenvolvimento realizado neste trabalho. Algumas propostas de continuidade se destacam por interesse te6rico ou pratico e sao apresentadas em sequencia:

1. Investigar a estabilidade entrada-estado para uma classe de sistemas incertos e variantes no tempo, com funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parametros *ak* variantes no tempo.
2. Obter a extensao das condic;oes para tratar a realimentac;ao de estados atrasados dependente de parametros, isto e, considerar a lei de controle *7-lk = K(ak)xk.*
3. Obter a extensao das condi<;oes para sfntese de controladores robustos por realimentac;ao estatica de safda *7-lk = K(ak)Yk·*
4. Tratar o problema de otimizac;ao multiobjetivo, determinando no espac;o objetivo factfvel um subconjunto de soluc;oes pr6ximas da fronteira de Pareto-6tima, relacionando assim os tres problemas de otimizac;ao convexa propostos.

Apilndice **A**

Ferramentas Matematicas

No presente apendice sao apresentadas algumas ferramentas matematicas utilizadas no desenvolvimento desse trabalho, Capitulo 3: Complemento de Schur, procedimento S e Lema de Finsler.

A.1 Complemento de Schur

0 complemento de Schur e uma ferramente util na manipulae;ao de desigualdades matriciais.

Lema A.1 (Complemento de Schur} *Suponha que* $R = RT$, $S = ST$ *e* Q *sao matrizes reais de dimensoes apropriadas. Entao, as seg,uintes afirmar;oes sao equivalentes:*

J. [tT] >**0**

2. $R > 0$ e $S - QR^{-1}QT >$ **O**

A prova completa deste Lema pode ser encontrada em (Tarbouriech *et al.,* 2011, p. 398).

A.2 Procedimento S

A programac;;ao convexa pode apresentar um problema comum, em que a definie;ao em sinal de uma func;;ao quadratica deve verificar-se sempre a definic;;ao em sinal de outra fune;ao quadratica for verificada. Dessa forma, o procedimento S pode ser utilizado para aproximar esta relac;;ao at.raves de uma LMI. A seguir e apresentado o Procedimento S para func;;oes quadraticas e inequac;;oes estritas.

Lema A.2 (Procedimento S - Boyd *et al.* (1994, p. 24,44}} *Sejam Fa,* $\cdots$, *Fp matrizes simetricas sujeitas* a *seg,uinte condir;ao:*

$$(T \; Fa(> 0, \; V(-/- 0 \; \textit{tal que} \; (T \; F(i) \; 2': 0, i = 1, \cdots ,p. \tag{A.1}$$

Demonstra-se que, se existem τ1 2': 0, · · · , *Tp* 2': 0 *tais que*

$$F_{.0} - \overset{p}{\underset{i=1}{zz}} T{\cdot}F\text{-}\_ > \_\, \mathbf{0} \qquad \text{(A.2)}$$

entao (A.1) e *verificada. Alem disso, a condir;iio* (A.2) e *·uma LMI nas variaveis* Fo,T1, ... *'Tp,*

A.3 Lema de Finsler

0 Lema de Finsler e utilizado na demonstrai;ao de estabilidade dos controladores robustos, para transformar as fung6es de energia em LMis, sendo definido conforme a seguir.

Lema A.3 (Lema de Finsler Robert *et al.* (1997); de Oliveira & Skelton (2001)) *Considere r.p* E *IRn, M(a)* = M(a)T E *JRmXn e Q(a)* E *JRmXn tal que rank(Q(a)) <* ***0.*** *Entao as seguintes condir;oes siio eq·uivalentes:*

1. *r.p*T *M(a)r.p<* ***0,*** Vr.p: *Q(a)r.p=* ***0, r.p-/- 0***
2. (Q(a)J_)T *M(a)Q(a)_1≤* ***0***
3. :lμ(a) E IR+: *M(a)* + *X(a)Q(a)* + Q(a)TX(a)T < ***O***

Assirn, a LMI eq·uiualente e *dada pela e:rpress{io:*

$$\psi(\alpha) = \mathcal{M}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{G}(\alpha) + \mathcal{G}(\alpha)^\top \mathcal{X}(\alpha)^\top < 0. \qquad \text{(A.3)}$$

Referencias

Astrom, K. J., & Rundqwist, L. 1989. Integrator windup and how to avoid it. *Pages 1693- 1698 of: American Control Conference.* IEEE.

Binotti, V. 2015. *Estabilidade e estabilizar;fio de sistemas de tempo discreto sujeitos a sat·urw;fio e atraso.* Trabalho de Conclusao de Curso, Universidade de Caxias do Sul RS.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. 1994. *Linear matrix inequalities in system and control theory.* SIAM Studies in Applied Mathematics Philadelphia PA.

Caldeira, A. F., Leite, V. J. S., Miranda, M. F., Castro, M. F. F., & Gon<;alves, E. N. 2011. Convex robust *Hex,* control design to discrete-time systems with time-varying delay. *IFAC Proceedings Volumes,* **44(1),** 10150-10155.

Castro, M. F. F., Seuret, A., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2020. Robust local stabilization of discrete time-varying delayed state systems under saturating actuators. *Automatica,* **122**, 109266.

Chen, Y., Fei, S., & Zhang, K. 2014. Stabilisation for switched linear systems with time-varying delay and input saturation. *International Journal of Systems Science,* 45(3), 532-546.

Chen, Y., Wang, Z., Fei, S., & Han, Q. 2019. Regional stabilization for discrete time-delay systems with actuator saturations via a delay-dependent polytopic approach. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **64(3),** 1257-1264.

de Oliveira, M. C., & Skelton, R. E. 2001. Stability tests for constrained linear systems. *Pages 241-257 of: Perspectives in robust control.* Springer.

de Souza, C., Leite, V. J. S., Silva, L. F. P., & Castelan, E. B. 2019. ISS robust stabilization of state-delayed discrete-time systems with bounded delay variation and saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **64(9),** 3913-3919.

Figueiredo, L. S., Lacerda, M. J., & Leite, V. J. S. 2021. Design of saturating state feedback control laws for discrete-time linear parameter varying systems through homogeneous polynomial parameter-dependent functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* **31(14),** 6585-6601.

Fridman, E. 2014. *Introduction to Time-Delay Systems.* Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser.

Fu, L., & Ma, Y. 2016. Passive control for singular time-delay system with actuator saturation. *Applied Mathematics and Computation,* **289,** 181-193.

Ghiggi, I. M. F. 2008. *Controle de sistemas com atrasos no tempo na preseru;a de atuadores saturantes. Ph.D. thesis.* M.Phil. thesis, UFRGS.

Gomes da Silva Jr., J. M., & Leite, V. J. S. 2007. Encidopedia de automatica, controle & automac;iio - Cap. Sistemas lineares com atrasos de tempo. *Editora Blucher.*

Gomes da Silva Jr., J. M., & Tarbouriech, S. 2005. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **50(1),** 106-111.

Gomes da Silva Jr., J. M., Paim, C., & Castelan, E. B. 2001. Stability and stabilization of linear discrete-time systems subject to control saturation. *!FAG Proceedings Volumes,* **34(13),** 525-530.

Gomes da Silva Jr., J.M., Limon, D., Alamo, T., & Camacho, E. F. 2008. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **53(10),** 2367-2372.

Gu, **K.,** Chen, J., & Kharitonov, V. L. 2003. *Stability of time-delay systems.* Springer Science & Business Media.

Hetel, **L.,** Daafouz, J., & lung, C. 2008. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems,* **2(3),** 697-705.

Hu, **H. Y.,** & Wang, **Z. H.** 2013. *Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback.* Springer Science & Business Media.

Hu, T., & Lin, Z. 2001. *Control systems with actuator saturation: analysis and design.* Springer Science and Business Media.

Jensen, J. L. W. V. 1906. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica,* **30(1),** 175-193.

Jungers, M., & Castelan, E. B. 2011. Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems and Control Letters,* **60(3),** 169-173.

Kapila, V., & Haddad, W. M. 1998. Memoryless *H=* controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica,* **34(9),** 1141-1144.

Khalil, H. K. 1996. *Nonlinear systems.* Vol. 115. Patience Hall.

Kolmanovskii, V., & Myshkis, A. 1992. *State estimates of stochastic systems with delay.* Kluwer Academic Publisher.

Leite, V. J. S., Castelan, E. B., Silva, **L.** F. **P.,** & de Souza, C. 2020. *Control Strategy for Time-Delay Systems: Part i: Concepts and Theories.* Academic Press. Chap. 10.

Lima, T. A., Tarbouriech, S., Gouaisbaut, F., de Almeida Filho, M. P., Garcia, P., Torrico, B. C., & Gonzalez, F. N. 2021. Analysis and experimental application of a dead-time compensator for input saturated processes with output time-varying delays. *JET Control Theory and Applications,* **15(4),** 580-593.

Lin, J. 2012. Exponential estimates and stabilization of discrete time singular time-delay systems subject to actuator saturation. *Discrete dynamics in nature and society.*

Lopes, A. N. D. 2017. *Seguimento de referencia em controle de sistemas niio lineares sob restrir;oes via modelagem Takagi-Sugeno.* M.Phil. thesis, PPGEL, CEFET-MG.

Lu, L., Lin, Z., & Fang, **H.** 2009. £$_2$ Gain analysis for a class of switched systems. *Automatica,* **45(4),** 965-972.

MacDonald, N. 2008. *Biological delay systems: linear stability theory.* Cambridge University Press.

Miranda, M. F., & Leite, V. J. S. 2011. Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying state delay: A convex approach. *Journal of the Franklin Institute,* **348(4)**, 568-588.

Negi, R., Purwar, S., & Kar, **H.** 2012. Delay-dependent stability analysis of discrete time delay systems with actuator saturation. *Intelligent control and automation,* **3(1),** 34-43.

Niculescu, S. I. 2001. *Delay effects on stability: a rob·ust control approach.* Vol. 269. Springer Science & Business Media.

Pal, V. C., & Negi, R. 2018. Delay-dependent stability criterion for uncertain discrete time systems in presence of actuator saturation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control,* **40(6),** 1873-1891.

Park, P., Ko, J. W., & Jeong, C. 2011. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. *Automatica,* **47(1),** 235-238.

Peaucelle, D., Henrion, D., Labit, Y., & Taitz, K. 2002. User's guide for SEDUMI INTERFACE 1.04. *LAAS-CNRS, Toulouse.*

Pepe, P., Pola, G., & Di Benedetto, M. 2017. On Lyapunov-Krasovskii characterizations of stability notions for discrete-time systems with uncertain time-varying time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **63(**6), 1603-1617.

Robert, TI, Skelton, E, & Grigoriadis, KM. 1997. *Aunified algebric approach to control design.*

Silva, J. V. V., Silva, L. F. P., Rubio Scola, I., & Leite, V. J. S. 2018a. Robust local stabilization of discrete-time systems with time-varying state delay and saturating actuators. *Mathematical Problems in Engineering.*

Silva, J.V.V. 2016. *Controle de sistemas discretos no tempo com saforar;fio de atuadores e atraso nos estados.* M.Phil. thesis, PPGEL, CEFET-MG.

Silva, L. F. P., Leite, V. J. S., Castelan, E. B., & Feng, G. 2018b. Delay dependent local stabilization conditions for time-delay nonlinear discrete-time systems using Takagi-Sugeno models. *International Journal of Control, Automation and Systems,* **16(3),** 1435-1447.

Silva Jr., R. J., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2022a. A general optimization approach to enlarge the region of attraction of saturating discrete-time delayed systems. *Pages 463-473 of: APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing.* Springer.

Silva Jr., R. J., Leite, V. J. S., & Silva, L. F. P. 2022b. Robust Regional ISS Stabilization of Saturating State-Delayed Discrete-Time Systems. Congresso Brasileiro de Automatica CBA.

Sontag, E. D. 1989. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **34(4),** 435-443.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., & Queinnec, I. 2011. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.

Xu, S., Feng, G., Zou, Y., & Huang, J. 2012. Robust controller design of uncertain discrete time-delay systems with input saturation and disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control,* **57(10),** 2604-2609.

Xu, S., Lam, J., Zhang, B., & Zou, Y. 2014. A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* **24(16)**, 2512-2521.

Zaccarian, L., & Teel, A. R. 2011. *Modern anti-windup synthesis: control augmentation for actuator saturation.* Vol. 36. Princeton University Press.

Zhang, X., Zhao, J., & Dimirovski, G. M. 2011. frGain analysis and control synthesis of uncertain discrete-time switched linear systems with time delay and actuator saturation. *International Journal of Control,* **84(10),** 1746-1758.

Zheng, Q., & Wu, F. 2008. Output feedback control of saturated discrete-time linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems and Control Letters,* **57(11),** 896-903.