CONTROLE BASEADO EM EVENTOS PARA SISTEMAS LINEARES DISCRETOS NO TEMPO: PROJETO POR EMULAÇÃO.

JOSÉ FABIANO VELLOZO D'ALTERIO MOREIRA

Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia ELétrica CEFET-MG e UFSJ

orientador: Prof. Dr. Márcio Jr Lacerda

São João del-Rei
Agosto 2023

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS PARA SISTEMAS LINEARES DISCRETOS NO TEMPO: PROJETO POR EMULAÇÃO.

JOSÉ FABIANO VELLOZO D'ALTERIO MOREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL CEFET-MG / UFSJ) na Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) como requisito parcial para obter o grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio Jr Lacerda

São João del-Rei
Agosto 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M838c

Moreira, José Fabiano Vellozo DAlterio.
Controle Baseado em Eventos para Sistemas Lineares Discretos no Tempo: Projeto por Emulação / José Fabiano Vellozo DAlterio Moreira ; orientador Márcio Junior Lacerda. -- São João del-Rei, 2023.
75 p.

Dissertação (Mestrado - Engenharia Elétrica) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2023.

1. Controle Baseado em Eventos. 2. Sistemas LPV. 3. Projeto de Controladores por Emulação. 4. Teoria de Lyapunov. 5. Lema de Finsler. I. Lacerda, Márcio Junior, orient. II. Título.

Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia ELétrica CEFET-MG e UFSJ

Dissertação intitulada "*Controle baseado em eventos para sistemas lineares discretos no tempo: projeto por emulação.* ", por José Fabiano Vellozo D'Alterio Moreira, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica CEFET-MG e UFSJ, aprovado pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
Universidade Federal de Sâo João Del-Rei - PPGEL CEFET-MG / UFSJ

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
CEFET-MG - PPGEL CEFET-MG / UFSJ

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira
Universidade Federal do Ceará

Dr. Márcia Luciana da Costa Peixoto
Universidade Federal de Minas Gerais

São João del-Rei
Agosto 2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria de aproveitar este espaço para expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que me apoiaram e tornaram possível a conclusão desta dissertação de mestrado. Sem o suporte incondicional de cada um de vocês, este trabalho não teria se concretizado.

Aos meus amados pais, João e Hilda, agradeço por serem minha fonte constante de inspiração e força ao longo dessa jornada acadêmica. Vocês sempre acreditaram em mim e me incentivaram a seguir em frente, mesmo diante dos desafios. Sua presença amorosa e encorajadora foram essenciais para que eu persistisse e chegasse até aqui. Sou grato por tudo que fizeram por mim ao longo da vida.

Ao meu querido irmão João Fabrício, que esteve ao meu lado em todos os momentos, agradeço por ser meu parceiro inseparável e por me fornecer suporte emocional em cada etapa desta trajetória. Nossas conversas e seu apoio incondicional me deram a motivação necessária para enfrentar cada obstáculo com determinação.

Por fim, ao meu dedicado orientador, Márcio Júnior, agradeço por toda a paciência, orientação e conselhos ao longo deste projeto. Sua expertise e comprometimento foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

ABSTRACT

This work investigates the event-based control problem for discrete-time linear systems, encompassing precisely known systems and systems with time-varying parameters (Linear Parameter-Varying, LPV, systems). In network-controlled systems, it is desirable to save network resources. Thus, event-based control emerges as a strategy to reduce the transmission of control signals and avoid network overload. For precisely known systems, the design was performed through emulation with conditions formulated as Linear Matrix Inequalities (LMIs) and pre-determined control law. Different strategies were employed to trigger the control law to optimize the number of events. Optimization conditions were proposed to maximize the time interval between events. In the case of LPV systems, a potential issue arises in the need to periodically transmit the state vector along with the time-varying parameters that will be utilized by the controller. This periodic procedure can lead to an excess of data transmission, which, in turn, may cause inefficiencies in the process. An alternative approach was suggested by modifying the polynomial degree of the Lyapunov function and the controller, where a more robust controller tends to reduce event occurrences. Furthermore, the proposed emulation design for LPV systems used two different control laws obtained in the literature. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of this approach in providing system stabilization conditions and event reduction.

Keywords: Event-based control, LPV systems, Control Design, Lyapunov Theory.

RESUMO

Este trabalho investiga o problema de controle baseado em eventos para sistemas lineares discretos no tempo, abrangendo tanto sistemas precisamente conhecidos quanto sistemas com parâmetros variantes no tempo (Sistema LPV, do inglês *Linear Parameter-Varying*). Em sistemas de controle via rede, é interessante economizar os recursos de rede. Dessa forma, o controle baseado em eventos surge como uma boa estratégia para diminuir o envio de sinais de controle e evitar a sobrecarga da rede. No caso dos sistemas precisamente conhecidos, o projeto foi realizado por emulação com condições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), e com a lei de controle pré-determinada. Nesse caso, diferentes estratégias foram empregadas para o acionamento da lei de controle, a fim de otimizar o número de eventos. Foram propostas condições de otimização visando maximizar o intervalo de tempo entre eventos. No caso dos sistemas LPV, um possível problema surge na necessidade de enviar periodicamente o vetor de estados, juntamente com os parâmetros variantes no tempo que serão utilizados no controlador. Esse procedimento periódico pode resultar em um excesso de envio de dados, o que, por sua vez, pode causar ineficiência no processo. Uma alternativa proposta foi a modificação do grau polinomial da função de Lyapunov e do controlador, em que um controlador mais robusto tende a reduzir a ocorrência de eventos. Além disso, o projeto por emulação para sistemas LPV foi realizado com duas diferentes leis de controle presentes na literatura. Simulações numéricas comprovam a eficácia dessa abordagem em fornecer condições de estabilização do sistema e redução de eventos.

Palavras Chave: Controle baseado em eventos, Sistemas LPV, Projeto de Controladores, Teoria de Lyapunov.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

ACRÔNIMOS

LMI Linear Matrix Inequalities
LPV Linear Parameter-Varying

NCS Networked Control System

NOTAÇÃO

$\mathbb{R}^n$	Representa o espaço Euclidiano de tamanho de n dimensões;
$P > (<)\ 0$	Indica que P é uma matriz definida positiva (negativa);
I	Indica uma matriz identidade de dimensão apropriada;
0	Indica uma matriz nula de dimensões apropriada;
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$;
$\star$	Representa blocos de matrizes simétricas;
A^T	Indica o transposto da matriz A;
Λ_Z	É o simplex unitário de dimensão Z;
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos inteiros positivos;
$[x_1, x_2[$	Conjunto de números reais que inclui x_1 e exclui x_2.

1 INTRODUÇÃO

A comunicação é essencial para o funcionamento eficiente e seguro dos sistemas de controle conectados em rede (NCS, do inglês *Networked Control Systems*). Antes dos NCS, a comunicação entre dispositivos era limitada e ineficiente. Os sistemas de comunicação eram isolados, inflexíveis e baseados em conexões ponto a ponto, onde os dispositivos eram conectados diretamente por meio de cabos. Isso limitava a escalabilidade e a capacidade de gerenciar de forma centralizada esses sistemas distribuídos [1], resultando em uma troca restrita de informações e dificultando a implementação de estratégias avançadas de controle e monitoramento. Como consequência, a eficiência operacional e a capacidade de resposta dos sistemas eram comprometidas.

Com o avanço da tecnologia, surgiu a necessidade de estabelecer sistemas de comunicação mais robustos e flexíveis. A transição para a comunicação em NCS foi um marco significativo nessa evolução, permitindo a interconexão de dispositivos, como sensores, atuadores e controladores, proporcionando uma comunicação bidirecional e em tempo real [2, 3]. Essa transição revolucionou a maneira como os sistemas são projetados, operados e controlados.

Os NCS fornecem uma infraestrutura comum que permite a integração de dispositivos heterogêneos em um ambiente industrial. Essas redes são projetadas para atender às necessidades específicas dos sistemas de controle, fornecendo recursos como comunicação assíncrona, alta velocidade de transmissão e segurança [4]. Com a adoção de NCS, os sistemas se tornaram mais flexíveis, escaláveis e capazes de lidar com as demandas crescentes de comunicação e controle [5].

Embora NCS tenham oferecido uma série de benefícios, a comunicação em rede também trouxe consigo desafios e problemas exclusivos. A natureza dinâmica e complexa dos ambientes industriais pode levar a retardos no tempo, interferências, perda de pacotes e outros problemas de comunicação que podem comprometer a eficiência e a confiabilidade dos sistemas [5]. Esses problemas podem ser ainda mais acentuados em aplicações de controle em tempo real, onde a latência e a sincronização são críticas e, dessa forma, podem afetar diretamente o desempenho dos sistemas de controle e monitoramento, levando a atrasos na tomada de decisões e à redução da eficiência operacional [6].

Um dos problemas específicos que pode ocorrer em sistemas de controle é o envio excessivo de sinais pelos controladores. Em muitos casos, os controladores enviam sinais em intervalos fixos, mesmo quando não ocorrem mudanças significativas no processo controlado. Esse comportamento gera um tráfego desnecessário na rede, consumindo largura de banda e recursos computacionais, além de sobrecarregar a rede, prejudicando a capacidade de resposta do sistema de controle, sem fornecer benefícios reais para o controle do sistema [3, 6, 7]. Dessa forma, uma grande parte da energia consumida em NCS é devida à transmissão de dados, e o controle baseado em eventos [8–11] pode contribuir para melhorar a eficiência energética do sistema,

reduzir o tráfego de rede e diminuir a latência. Além disso, essa técnica também ajuda a tratar sistemas que consideram a fadiga do atuador [6, 12].

1.1 REVISÃO DE LITERATURA

O controle baseado em eventos é uma abordagem que prioriza a comunicação e a computação do sinal de controle somente quando ocorre uma mudança significativa no sistema ou quando uma condição específica é satisfeita [13, 14]. Essa abordagem se baseia na detecção de eventos e na transmissão seletiva de informações, reduzindo o tráfego desnecessário na rede e otimizando a utilização dos recursos computacionais.

O controle baseado em eventos se baseia em um paradigma assíncrono de comunicação, onde os dispositivos de controle permanecem inativos até que uma condição específica seja atendida [15]. Essa condição pode ser a ocorrência de um evento relevante, como uma mudança nos valores dos sensores ou uma solicitação de controle. A partir da detecção do evento, o dispositivo de controle é ativado e envia apenas as informações necessárias para responder ao evento.

O projeto da lei de controle baseado em eventos, também conhecido como emulação e *co-design* [13], é uma abordagem avançada que visa melhorar a eficiência e o desempenho dos sistemas de controle. Nessa abordagem, a lei de controle é projetada levando em consideração a natureza dos eventos que ocorrem no sistema, em vez de seguir uma abordagem tradicional baseada em tempo fixo.

A emulação [16, 17] refere-se ao projeto do mecanismo de disparo para um controlador já projetado para um sistema com transmissão periódica, permitindo que o vetor de estados seja enviado pela rede apenas quando ocorrem eventos relevantes para o controle. Isso é alcançado por meio da detecção e monitoramento contínuo dos estados do sistema e da resposta a eventos específicos com ações de controle apropriadas. Com esse objetivo, se supõe uma lei de controle projetada anteriormente e então uma amostragem de controle baseada em eventos é considerada [16]. A emulação é particularmente útil em sistemas complexos nos quais os eventos podem ocorrer de forma imprevisível ou em intervalos irregulares.

O *co-design* [18–20], por sua vez, envolve o projeto simultâneo do mecanismo de disparo e o controlador com base nas características e requisitos do sistema. Nessa abordagem, é essencial entender profundamente o comportamento do sistema, identificar os eventos críticos e projetar a lei de controle de forma adaptativa e responsiva a esses eventos. O *co-design* permite a criação de estratégias de controle otimizadas que levam em consideração as particularidades do sistema e as restrições operacionais.

Essa abordagem de controle baseado em eventos, com ênfase na emulação ou no *co-design*, tem sido amplamente estudada e aplicada em diversos domínios [21], como sistemas de energia [22], manufatura avançada [23] e robótica [24]. Os resultados de pesquisa mostram que o controle baseado em eventos pode oferecer benefícios significativos, incluindo redução do consumo de recursos, melhoria da eficiência energética ao reduzir o número de transmissões via rede [6], aumento da capacidade de resposta do sistema e melhor adaptabilidade a mudanças nas condições operacionais.

O controle baseado em eventos é particularmente eficaz em sistemas com parâmetros invariantes no tempo, ou seja, sistemas cujo comportamento não muda ao longo do tempo. Esses sistemas podem se beneficiar da detecção precisa de eventos relevantes e da redução do tráfego de rede, resultando em melhorias significativas na eficiência e na capacidade de resposta do controle.

Em sistemas precisamente conhecidos, o controle baseado em eventos pode ser implementado de forma mais direta e simples. A detecção de eventos relevantes é baseada em comparações de estados ou valores, sem a necessidade de realizar cálculos complexos ou estimativas. Isso permite uma resposta mais rápida do controle, uma vez que os dispositivos são ativados apenas quando necessário, reduzindo a latência e otimizando o uso dos recursos disponíveis [16, 25].

No entanto, a aplicação do controle baseado em eventos em sistemas com parâmetros variantes no tempo [20, 26, 27], ou seja, sistemas cujo comportamento pode mudar ao longo do tempo devido a variações operacionais, apresenta desafios adicionais. Nesses casos, é necessário desenvolver estratégias adaptativas que possam lidar com as mudanças nos parâmetros do sistema e ajustar os critérios de detecção de eventos, permitindo uma comunicação eficiente e confiável mesmo diante de alterações nas condições operacionais, garantindo a capacidade de resposta e a estabilidade do sistema de controle.

Um dos fatores que influenciam a quantidade de eventos em sistemas com parâmetros variantes no tempo é o grau polinomial da função de Lyapunov e do controlador utilizados [28]. A Teoria de Lyapunov é uma ferramenta fundamental para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos, e seu grau polinomial tem um impacto direto na dinâmica do sistema. Da mesma forma, o grau polinomial do controlador afeta a resposta temporal do sistema, influenciando sua capacidade de evitar ou minimizar eventos indesejados. Portanto, compreender o efeito do aumento do grau polinomial da função de Lyapunov e do controlador em relação à existência de eventos é essencial para o projeto adequado de controladores que tendem a tornar os sistemas estáveis com parâmetros variantes no tempo.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo explorar o controle baseado em eventos como uma abordagem promissora para melhorar a comunicação em NCS, investigando seus benefícios, desafios e aplicabilidade em sistemas com parâmetros invariantes e variantes no tempo. Além disso, visa desenvolver técnicas capazes de reduzir a ocorrência de eventos na resposta temporal de sistemas discretos no tempo. Logo, serão exploradas técnicas envolvendo controle baseado em eventos, permitindo que o controlador atue apenas quando necessário, em momentos críticos, reduzindo assim a necessidade de uma atuação contínua. Para alcançar esse objetivo, serão realizados projetos de controle por emulação, nos quais o ganho do controlador será determinado a priori, levando em consideração as características do sistema, e projetos de otimização para encontrar os parâmetros da lei de ativação de eventos que minimiza a ocorrência de eventos indesejados. Como resultado, um novo método baseado em condições na forma de LMI será apresentado, possibilitando a redução significativa de eventos na resposta temporal de sistemas discretos no

tempo, melhorando seu desempenho e estabilidade. Esse estudo contribuirá para o avanço do conhecimento e o aprimoramento dos sistemas de controle em rede acionados por eventos.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

Esse trabalho apresenta novas condições de estabilização de sistemas discretos, de forma a reduzir o envio de sinais de controladores. As principais contribuições são listadas a seguir:

- A proposição de novas condições de análise baseadas em LMI para sistemas precisamente conhecidos. Essas condições utilizam técnicas de otimização visando reduzir o envio de sinais de controle, resultando na diminuição da existência de eventos no sistema. Dessa forma, o trabalho apresenta um avanço na eficiência do controle, proporcionando uma resposta temporal estável.

- A introdução de novas condições de análise baseadas em LMI específicas para sistemas com parâmetros variantes no tempo. Essas condições são desenvolvidas com o objetivo de reduzir a ocorrência de eventos nesse tipo de sistema. Além disso, o estudo analisa o impacto do aumento do grau polinomial das funções de Lyapunov e do controlador em relação ao número de eventos observados. Essa análise fornece *insights* valiosos sobre como ajustar e adaptar o controlador para minimizar a presença de eventos indesejados em sistemas com parâmetros variantes no tempo. Como resultado, a dissertação contribui para a compreensão do controle de sistemas dinâmicos complexos e oferece diretrizes práticas para melhorar seu desempenho e estabilidade.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho é estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 2: apresenta as principais premissas a serem utilizadas no controle baseado em eventos. Desde LMIs, Complemento de Schur a Teoria de Lyapunov, Lema de Finsler, sistemas com parâmetros variantes no tempo e estrutura polinomial da função de Lyapunov de grau arbitrário.

- Capítulo 3: apresenta as propostas de controle baseado em eventos por emulação (ganho do controlador dado a priori), sendo elas com e sem a utilização do Lema de Finsler. Além disso, problemas de otimização são propostos com o objetivo de minimizar ainda mais o envio dos valores do vetor de estados. Exemplos númericos são fornecidos para ilustrar o desempenho do método proposto para diferentes cenários.

- Capítulo 4: De forma análoga ao Capítulo 3, apresenta as propostas de controle baseado em eventos por emulação para sistemas sujeitos a parâmetros variantes no tempo. Além disso, a análise por emulação foi realizada com controladores obtidos por dois projetos diferentes presentes na literatura e o impacto do grau polinomial das funções de Lyapunov e do

controlador foi analisado. Exemplos númericos são fornecidos para ilustrar a performance do método proposto para diferentes cenários.

- Capítulo 5: apresenta as conclusões e trabalhos futuros.

2

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, as premissas necessárias para o desenvolvimento das condições propostas nos próximos capítulos são abordadas.

2.1 LMI - DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

A Teoria de Lyapunov permitiu que problemas de análise e síntese para sistemas de controle fossem escritos na forma de LMIs. Nas últimas décadas, vários avanços na área de controle foram realizados com a ajuda das LMIs [29]. As LMIs são amplamente utilizadas na análise e síntese de sistemas de controle, permitindo resolver problemas de otimização e controle de forma eficiente numericamente. O Lema a seguir apresenta a definição de LMI.

Lema 2.1

Seja $x \in \mathbb{R}^m$ um vetor de variáveis e $F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas. Então, uma LMI pode ser escrita da forma [29]:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0. \tag{2.1}$$

A LMI (2.1) é uma restrição convexa em relação a x, o que significa que o conjunto $x|F(x) > 0$ é um conjunto convexo. Embora a LMI (2.1) possa aparentar ter uma forma especializada, ela pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x. Em particular, é possível expressar desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), desigualdades de norma de matriz e restrições que surgem na teoria de controle, como desigualdades matriciais quadráticas de Lyapunov e desigualdades matriciais convexas, todas na forma de uma LMI. Além disso, a existência de pacotes computacionais como o YALMIP [30], permite estruturar de forma simples, problemas em formato de LMIs.

2.2 COMPLEMENTO DE SCHUR

É uma ferramenta utilizada para converter desigualdades matriciais não lineares em LMI's equivalentes, que podem ser tratadas por métodos computacionais existentes. O Lema 2.2 enuncia o Complemento de Schur [29].

Lema 2.2

Para qualquer matriz simétrica, T, da forma

$$T = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} > 0,$$

se R é invertível então as propriedades a seguir são verdadeiras:

- $T > 0$ se e somente se $R > 0$ e $Q - SR^{-1}S^\top > 0$;
- Se $R > 0$, então $T \geq 0$ se e somente se $Q - SR^{-1}S^\top \geq 0$.

Por outro lado, se Q é invertível, tem-se as seguintes propriedades:

- $T > 0$ se e somente se $Q > 0$ e $R - S^\top Q^{-1}S > 0$;
- Se $Q > 0$, então $T \geq 0$ se e somente se $R - S^\top Q^{-1}S \geq 0$.

2.3 TEORIA DE LYAPUNOV

A Teoria de Lyapunov é uma ferramenta poderosa na área de controle, que permite obter condições para certificar a estabilidade e realizar a síntese de controladores para diversos tipos de sistemas.

A estabilidade de um sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio pode ser caracterizada pela sua energia interna. Se a energia do ponto de equilíbrio do sistema tende a zero quando o tempo se aproxima do infinito, então diz-se que o sistema é assintoticamente estável. O método de Lyapunov utiliza uma função escalar que representa a quantidade de energia no sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio [31].

O procedimento para certificar a estabilidade assintótica de um sistema linear de tempo discreto, utilizando a Teoria de Lyapunov, é descrito a seguir. Considere o sistema discreto no tempo:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{2.2}$$

em que $x(k)$ é o vetor de estados. O sistema (2.2) com entrada $u(k) = Kx(k)$ pode ser reescrito como

$$x(k+1) = \mathscr{A}x(k), \tag{2.3}$$

em que $\mathscr{A} = A + BK$.

O Lema 2.3 apresenta condição de estabilidade para o sistema descrito em (2.3).

Lema 2.3

O sistema discreto no tempo (2.3) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica P definida positiva que satisfaça

$$\mathscr{A}^\top P \mathscr{A} - P < 0. \tag{2.4}$$

Prova. Multiplicando (2.4) por $x(k)^\top$ na esquerda e $x(k)$ na direita

$$x(k)^\top (\mathscr{A}^\top P \mathscr{A} - P) x(k) < 0. \tag{2.5}$$

Reescrevendo a desigualdade (2.5)

$$x(k)^\top \mathscr{A}^\top P \mathscr{A} x(k) - x(k)^\top P x(k) < 0. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.3) em (2.6)

$$x(k+1)^\top P x(k+1) - x(k)^\top P x(k) < 0. \tag{2.7}$$

Seja a função candidata de Lyapunov $V(x(k)) = x(k)^\top P x(k)$, então (2.7) pode ser reescrito como

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0. \tag{2.8}$$

Sendo P definida positiva

$$V(x(k)) > 0, \quad \forall x(k) \neq 0. \tag{2.9}$$

Por fim, tem-se $V(0) = 0$. □

2.4 LEMA DE FINSLER

O Lema de Finsler [32] é utilizado para expressar condições de estabilidade por meio de desigualdades matriciais lineares. Neste trabalho, o objetivo de empregar o Lema de Finsler, é explorar possíveis vantagens devido a adição de variáveis de folga X às condições de projeto.

Lema 2.4

Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\beta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\beta^{\perp}$ uma base para espaço nulo de β, ou seja, $\beta\beta^{\perp} = 0$, então as seguintes condições são equivalentes:

- $w^{\top}Qw < 0, \quad \beta w = 0 : \forall w \neq 0,$
- ${\beta^{\perp}}^{\top}Q\beta^{\perp} < 0,$
- $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu\beta^{\top}\beta < 0,$
- $\exists X \in \mathbb{R}^{n\times m} : Q + X\beta + \beta^{\top}X^{\top} < 0.$

A prova das equivalências pode ser encontrada em [32].

2.5 SISTEMAS COM PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO - LPV

Nos últimos anos, tem havido um extenso avanço na pesquisa sobre sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo na comunidade de controle [33]. Esse tipo de modelo é capaz de descrever a dinâmica de sistemas lineares que são afetados por parâmetros variantes no tempo, e também pode ser utilizado para representar sistemas não lineares por meio de uma família de modelos LPV [34]. As primeiras abordagens de programação de ganhos no contexto de sistemas LPV foram propostas por [35] em 1988. Desde então, ao longo dos últimos 30 anos, a teoria de sistemas LPV tem sido amplamente aplicada em diversas áreas de engenharia para o projeto de controladores, abrangendo aplicações em sistemas robóticos [36], controle tolerante a falhas [37], sistemas de geração de energia [38] e sistemas de turbinas eólicas [39].

Considere o sistema LPV discreto no tempo a seguir

$$x(k+1) = A(\alpha_k)x(k) + B(\alpha_k)u(k), \tag{2.10}$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de controle do sinal. O vetor de parâmetros variantes no tempo $\alpha_k \in \Lambda_Z$, $\forall k \geq 0$. O simplex unitário Λ_N é definido como

$$\Lambda_N \triangleq \{\alpha_k = [\alpha_{k,1} \dots \alpha_{k,N}]^{\top} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{N} \alpha_{k,i} = 1, \forall\ \alpha_{k,i} \geq 0\}. \tag{2.11}$$

As matrizes do sistema $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ dependem linearmente do vetor α_k. Além disso, as matrizes do sistema podem ser escritas na forma politópica com a combinação convexa de N vértices

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{Z} \alpha_{k_i} A_i, \quad \forall \alpha_k \in \Lambda_Z. \tag{2.12}$$

A principal vantagem de considerar sistemas LPV na forma politópica é que, com base na teoria de estabilidade de Lyapunov [40], as condições para análise de estabilidade e projeto de controladores podem ser formuladas como problemas de otimização convexa, representados por LMI.

Em [41] foi apresentado uma nova condição de estabilização em tempo discreto para sistemas LPV politópicos por meio de LMI. De forma diferente de outros métodos, a condição proposta permite o tratamento de representações de espaço de estados com parâmetros variantes no tempo em todas as matrizes, proporcionando resultados menos conservadores do que os encontrados em [42]. Considerando os resultados obtidos para a condição de estabilização em tempo discreto, os mesmos autores estenderam essa contribuição para o problema de controle de realimentação de estados H_∞ em tempo discreto em [43]. Outra abordagem baseada em funções de Lyapunov com termos não monotônicos foi apresentada em [44], com novas condições de análise e de projeto para a síntese de controle por realimentação de estados, e realimentação de saída para sistemas LPV politópicos em tempo discreto.

2.6 ESTRUTURA POLINOMIAL DA FUNÇÃO DE LYAPUNOV DE GRAU ARBITRÁRIO

A estrutura polinomial será de grande importância nas análises realizadas no Capítulo 4. Portanto, definindo uma matriz de Lyapunov conforme apresentado em [28] tal que

$$P_g(\alpha) = \sum_{k\in\kappa(g)} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_N^{k_N} P_k, \tag{2.13}$$

sendo $\alpha \in \Lambda_N$, $k_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \dots, N$ são os monômios. Os coeficientes da função são dados por $P_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\kappa(g)$ é o conjunto de todas as combinações de todos os inteiros positivos e $k_1 + k_2 + \dots + k_N = g$. O número de elementos em $\kappa(g)$ é dado por

$$J(N, g) = \frac{(N + g - 1)!}{g!(N - 1)!}. \tag{2.14}$$

Em [28] um exemplo de aplicação de uma função com grau $g = 4$ e $N = 2$ variáveis (vértices) é apresentado. Dessa forma, a partir da definição e aplicação de (2.14), tem-se que

$$\kappa(4) = 04, 13, 22, 31, 40, \quad J(4) = 5.$$

E, a função de Lyapunov utilizando (2.13) de grau 4 é

$$P_4(\alpha) = a_2^4 P_{04} + a_1 a_2^3 P_{13} + a_1^2 a_2^2 P_{22} + a_1^3 a_2 P_{31} + a_1^4 P_{40}.$$

Uma outra forma de exemplificar a aplicação de uma estrutura polinomial de grau arbitrário é considerando o Lema 2.3 para sistemas LPV. Portanto

$$A(\alpha_k)^\top P(\alpha_k) A(\alpha_k) - P(\alpha_k) < 0. \tag{2.15}$$

Ou de forma equivalente

$$P(\alpha_k) - A(\alpha_k)^\top P(\alpha_k) A(\alpha_k) > 0. \tag{2.16}$$

Aplicando complemento de Schur em (2.16)

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k) & A(\alpha_k)^\top P(\alpha_k) \\ P(\alpha_k)A(\alpha_k) & P(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0. \tag{2.17}$$

Por meio de (2.13) e (2.14) e considerando grau $g = 1$ e número de vértices $N = 2$, tem-se que:

$$A(\alpha_k) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \quad P(\alpha_k) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2. \tag{2.18}$$

Substituindo (2.18) em (2.17) resulta em

$$P(\alpha_k)A(\alpha_k) = \alpha_1^2 P_1 A_1 + \alpha_1\alpha_2(P_2 A_1 + P_1 A_2) + \alpha_2^2 P_2 A_2. \tag{2.19}$$

Reorganizando algebricamente

$$\alpha_1^2 \begin{bmatrix} P_1 & A_1^\top P_1 \\ P_1 A_1 & P_1 \end{bmatrix} + \alpha_1\alpha_2 \begin{bmatrix} (P_1 + P_2) & (A_1^\top P_2 + A_2^\top P_1) \\ (P_2 A_1 + P_1 A_2) & (P_1 + P_2) \end{bmatrix} + \alpha_2^2 \begin{bmatrix} P_2 & A_2^\top P_2 \\ P_2 A_2 & P_2 \end{bmatrix} > 0. \tag{2.20}$$

É importante destacar que para obter (2.20), foi preciso realizar uma manipulação de homogeneização, baseada na definição do simplex unitário que garante $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$$P(\alpha_k)(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1^2 P_1 + \alpha_1\alpha_2(P_1 + P_2) + \alpha_2^2 P_2. \tag{2.21}$$

Portanto, para assegurar a estabilidade de Lyapunov com o polinômio de grau aumentado desse exemplo, conclui-se que:

$$\begin{bmatrix} P_1 & A_1^\top P_1 \\ P_1 A_1 & P_1 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} (P_1 + P_2) & (A_1^\top P_2 + A_2^\top P_1) \\ (P_2 A_1 + P_1 A_2) & (P_1 + P_2) \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P_2 & A_2^\top P_2 \\ P_2 A_2 & P_2 \end{bmatrix} > 0. \tag{2.22}$$

3

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS PARA SISTEMAS PRECISAMENTE CONHECIDOS

Os NCS são áreas de grande concentração de estudo na última década. Esses sistemas proporcionam flexibilidade e custo reduzido em sistemas distribuídos espacialmente, o que tem levado ao aumento do uso de dispositivos em sensoriamento, comunicação e módulos de controle. No entanto, o uso desses dispositivos com amostragem periódica resulta em um consumo desnecessário de recursos de comunicação. Como solução, a técnica de controle baseado em eventos surgiu com o objetivo de reduzir o uso de recursos de comunicação em comparação com o controle periódico [7, 16, 20]. As condições de disparo de um evento são, geralmente, baseadas no valor atual do estado da planta [45].

O conceito principal é o uso de geradores de eventos para determinar os instantes de tempo k_i, nos quais as informações sobre $x(k)$ serão enviadas ao controlador. O objetivo é reduzir a quantidade de informações enviadas entre controladores e atuadores. A formulação do problema é apresentada a seguir.

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte sistema linear precisamente conhecido discreto no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{3.1}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados e $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle. Com uma lei de realimentação de estados dada por:

$$u(k) = Kx(k_i). \tag{3.2}$$

Então o sistema em malha fechada pode ser reescrito, substituindo o valor de (3.2) em (3.1), como:

$$x(k+1) = Ax(k) + BKx(k_i). \tag{3.3}$$

Definindo o erro de medição no intervalo $[k_i, k_{i+1})$ como:

$$e(k) = x(k_i) - x(k),$$

então, o sistema em malha fechada pode ser reeescrito como:

$$x(k+1) = \mathscr{A}x(k) + \nu(k), \tag{3.4}$$

em que

$$\nu(k) = BKe(k), \quad \mathscr{A} = A + BK.$$

Desta forma, a cada instante k, uma decisão deve ser tomada em relação ao envio do sinal do estado da planta. Essa decisão é baseada em uma função de disparo $f(e(k), x(k)) > 0$. Portanto, a comunicação entre a planta e o controlador não é periódica. Isso pode ser observado na Figura 3.1, em que $x(k_i)$ recebe os valores de $x(k)$ somente quando um novo evento ocorre. Com esse objetivo, é utilizado um segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *zero-order hold*) para manter o sinal de saída constante entre os instantes de amostragem. Nesse cenário, a formulação do problema tem como base a comunicação entre a planta e o controlador. O Algoritmo 1 [16] define a estratégia discutida para o controle baseado em eventos, em que i é um contador de eventos.

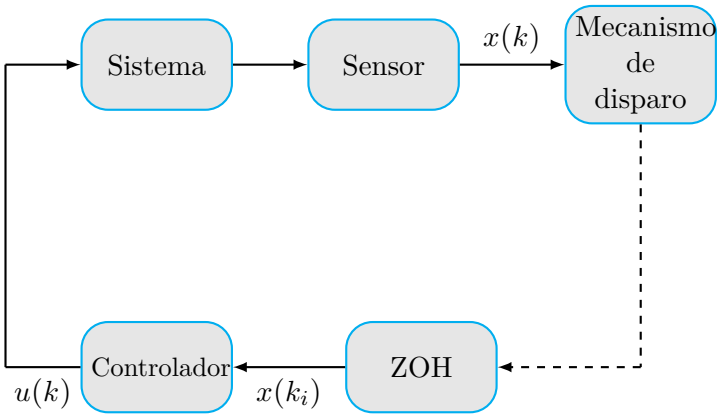


Figura 3.1: Mecanismo de controle baseado em eventos para sistemas precisamente conhecidos.

Algoritmo 1 Estratégia de controle baseado em eventos

se $k = 0$ **então**
  $u(0) \leftarrow Kx(0)$
  $i \leftarrow 1$
  $k_i \leftarrow 0$
senão
  se $f(e(k), x(k)) > 0$ **então**
    $u(k) \leftarrow Kx(k)$
    $i \leftarrow i + 1$
    $k_i \leftarrow k$
  senão
    $u(k) \leftarrow u(k_i)$
  fim se
  $k \leftarrow k + 1$
fim se

3.2 PRINCIPAIS RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados projetos de emulação (ganho do controlador pré-determinado). O Lema 3.1 apresenta o projeto de acordo com [16]. O Teorema 3.1 é uma adaptação da abordagem descrita em [20], e a função de disparo é definida por $\nu(k)$ e $x(k)$. Por outro lado, o Teorema 3.2 é uma adaptação de [46], e a função de disparo depende de $e(k)$, $x(k)$, um escalar θ, e da própria função de Lyapunov. Por fim, o Teorema 3.3 é uma condição que utiliza Finsler, e a função de disparo é definida da mesma forma que no Teorema 3.2.

3.2.1 *Condição de análise 1*

Lema 3.1

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas P, Q_σ e Q_δ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathscr{A}^\top P\mathscr{A} - P + Q_\sigma & \mathscr{A}^\top PBK \\ * & (BK)^\top PBK - Q_\delta \end{bmatrix} < 0, \tag{3.5}$$

então o sistema em malha fechada (3.4) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos, onde a função de disparo é definida por

$$f(e(k), x(k)) = e(k)^\top Q_\delta e(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k). \tag{3.6}$$

Prova. A partir do sistema

$$x(k+1) = \mathscr{A}x(k) + BKe(k), \tag{3.7}$$

considere a seguinte função de Lyapunov associada ao sistema (3.7):

$$V(x(k)) = x(k)^\top Px(k). \tag{3.8}$$

Como $P > 0$, a função de Lyapunov é definida positiva. Calculando $\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$, tem-se:

$$\Delta V(x) = x(k+1)^\top Px(k+1) - x(k)^\top Px(k). \tag{3.9}$$

Substituindo (3.7) em (3.9)

$$\begin{aligned}\Delta V(x) = x(k)^\top \mathscr{A}^\top P\mathscr{A}x(k) - x(k)^\top Px(k) + x(k)^\top \mathscr{A}^\top PBKe(k) \\ + e(k)^\top K^\top B^\top P\mathscr{A}x(k) + e(k)^\top K^\top B^\top PBKe(k).\end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir do vetor

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} x(k)^\top & e(k)^\top \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

(3.10) pode ser reescrita como

$$\Delta V(x) = \xi_0 \begin{bmatrix} \mathscr{A}^\top P \mathscr{A} - P & \mathscr{A}^\top PBK \\ * & (BK)^\top PBK \end{bmatrix} \xi_0^\top. \tag{3.12}$$

Para garantir $\Delta V(x) < 0$, a função de disparo será utilizada. Visto que $f(e(k), x(k)$ deve ser negativa para que o mecanismo de disparo não seja acionado, tem-se que

$$\Delta V(x(k)) < f(e(k), x(k)). \tag{3.13}$$

Note que, sempre que $f(e(k), x(k)) > 0$, um disparo será realizado. Portanto,

$$\Delta V(x(k)) - e(k)^\top Q_\delta e(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) < 0. \tag{3.14}$$

Observe que (3.14) pode ser reescrito como

$$\xi_0^\top \Psi_0 \xi_0 < 0, \tag{3.15}$$

com

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \mathscr{A}^\top P \mathscr{A} - P + Q_\sigma & \mathscr{A}^\top PBK \\ * & (BK)^\top PBK - Q_\delta \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

concluindo a prova. □

Ao considerar $f(e(k), x(k)) > 0$ (condição para ocorrência de eventos) com $f(e(k), x(k))$ descrita em (3.6) resulta em:

$$e(k)^\top Q_\delta e(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k) > 0, \tag{3.17}$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{e(k)^\top Q_\delta e(k)}{x(k)^\top Q_\sigma x(k)} > 1. \tag{3.18}$$

Portanto, a função de disparo foi escolhida conforme (3.6) para verificar a ocorrência de eventos, comparando o erro normalizado pelo próprio vetor de estados.

3.2.2 *Condição análise 2*

Teorema 3.1

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Q_\sigma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Q_\delta \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, e matriz $X \in \mathbb{R}^{3n_x \times 3n_x}$ tais que

$$Q + X\beta + \beta^\top X^\top < 0, \tag{3.19}$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} -P + Q_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & -Q_\delta \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathscr{A} & -I & I \end{bmatrix},$$

então o sistema em malha fechada (3.4) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos, onde a função de disparo é definida por

$$f(\nu(k), x(k)) = \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k).$$

Prova. Usando o Lema de Finsler, note que:

$$\beta\beta^\perp = 0,$$

em que

$$\beta^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathscr{A} & I \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Multiplicando (3.19) na direita por (3.20) e na esquerda pelo seu transposto, resulta em:

$$\begin{bmatrix} -P + Q_\sigma + \mathscr{A}^\top P \mathscr{A} & \mathscr{A}^\top P \\ P\mathscr{A} & P - Q_\delta \end{bmatrix} < 0. \tag{3.21}$$

Multiplicando (3.21) na esquerda por $\begin{bmatrix} x(k)^\top & v(k)^\top \end{bmatrix}$ e na direita pelo seu transposto

$$\begin{aligned} x(k)^\top(-P + Q_\sigma + \mathscr{A}^\top P \mathscr{A})x(k) + x(k)^\top \mathscr{A}^\top P\nu(k) + \nu(k)^\top P\mathscr{A}x(k) \\ + \nu(k)^\top P\nu(k) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0. \end{aligned}$$

Reorganizando algebricamente

$$\begin{aligned} -x(k)^\top Px(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) + x(k)^\top(\mathscr{A}^\top P\mathscr{A}x(k) + x(k)^\top \mathscr{A}^\top P\nu(k) \\ + \nu(k)^\top P\mathscr{A}x(k) + \nu(k)^\top P\nu(k)) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0. \end{aligned}$$

Que pode ser reescrito como:

$$-x(k)^\top Px(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) + (\mathscr{A}x(k) + \nu(k))^\top P(\mathscr{A}x(k) + \nu(k)) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0. \tag{3.22}$$

Substituindo o valor de (3.4) em (3.22), tem-se que

$$-x(k)^\top Px(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) + x(k+1)^\top Px(k+1) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0.$$

Considerando a função de Lyapunov $V(x(k)) = x(k)^\top Px(k)$, definida positiva, uma vez que $P > 0$, pode-se escrever

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k) < 0,$$

pois ao garantir que $V(x(k+1)) - V(x(k)) < f(\nu(k), x(k))$, pela Teoria de Lyapunov, certifica-se que o sistema é assintóticamente para $f(\nu(k), x(k)) < 0$, concluindo a prova. □

3.2.3 *Condição de análise com θ*

Teorema 3.2

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Q_\sigma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Q_\delta \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, e um escalar $\theta \in [0, 1[$ tais que

$$\begin{bmatrix} (1-\theta)\mathscr{A}^\top P\mathscr{A} - P + \theta P + Q_\sigma & (1-\theta)\mathscr{A}^\top PBK + \theta P \\ (1-\theta)K^\top B^\top P\mathscr{A} + \theta P & (1-\theta)K^\top B^\top PBK + \theta P - Q_\delta \end{bmatrix} < 0. \tag{3.23}$$

então o sistema em malha fechada (3.4) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos, onde a função de disparo é definida por

$$f(e(k), x(k)) = -x(k)^\top Q_\sigma x(k) + e(k)^\top Q_\delta e(k) + \theta(V(x(k+1))) - V(x(k_i))). \tag{3.24}$$

Prova.

Considere a seguinte função candidata de Lyapunov associada ao sistema (3.7):

$$V(x(k)) = x(k)^\top Px(k). \tag{3.25}$$

Como $P > 0$, a função é definida positiva. Para garantir $\Delta V(x) < 0$ tem-se

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < f(e(k), x(k)) < 0. \tag{3.26}$$

Substituindo o valor de $f(e(k), x(k))$ em (3.26):

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < -x(k)^\top Q_\sigma x(k) + e(k)^\top Q_\delta e(k) + \theta(V(x(k+1))) - V(x(k_i))).$$

Reorganizando algebricamente, tem-se que:

$$(1-\theta)V(x(k+1)) + \theta V(x(k_i)) - V(x(k)) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) - e(k)^\top Q_\delta e(k) < 0. \tag{3.27}$$

Substituindo (3.25) em (3.27) e usando as relações $e(k) + x(k) = x(k_i)$,

$$V(x(k+1)) = ((x(k)^\top \mathscr{A}^\top) + \nu(k)^\top)P(\mathscr{A}x(k) + \nu(k)), \tag{3.28}$$

$$V(x(k_i)) = x(k_i)^\top P x(k_i), \tag{3.29}$$

resulta em

$$\begin{aligned}(1-\theta)x(k+1)^\top Px(k+1) + \theta(e(k)+x(k))^\top P(e(k)+x(k)) - x(k)^\top Px(k)\\ + x(k)^\top Q_\sigma x(k) - e(k)^\top Q_\delta e(k) < 0.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Utilizando (3.7) em (3.30), obtém-se que

$$\begin{aligned}(1-\theta)\left(\mathscr{A}x(k) + BKe(k)\right)^\top P\left(\mathscr{A}x_k + BKe_k\right) + \theta(e(k)+x(k))^\top P(e(k)+x(k))\\ - x(k)^\top Px(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) - e(k)^\top Q_\delta e(k) < 0.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Reescrevendo a equação (3.31)

$$\begin{aligned}(1-\theta)x(k)^\top \mathscr{A}^\top P\mathscr{A}x(k) + \theta x(k)^\top Px(k) - x(k)^\top Px(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k)\\ + (1-\theta)e(k)^\top K^\top B^\top PBKe(k) - e(k)^\top Q_\delta e(k) + \theta e(k)^\top Pe(k)\\ + (1-\theta)x(k)^\top \mathscr{A}^\top PBKe(k) + \theta x(k)^\top Pe(k)\\ + (1-\theta)e(k)^\top K^\top B^\top P\mathscr{A}x(k) + \theta e(k)^\top Px(k) < 0.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por fim, (3.32) pode ser apresentada como

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} (1-\theta)\mathscr{A}^\top P\mathscr{A} - P + \theta P + Q_\sigma & (1-\theta)\mathscr{A}^\top PBK + \theta P \\ (1-\theta)K^\top B^\top P\mathscr{A} + \theta P & (1-\theta)K^\top B^\top PBK + \theta P - Q_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} < 0. \tag{3.33}$$

Portanto, retorna a (3.23), concluindo a prova. □

Ao analisar a função de disparo dada na Equação (3.24), percebe-se que foi adicionada uma parcela negativa referente à derivada da função candidata de Lyapunov. Dessa forma, a função de disparo fica mais negativa, tendendo a reduzir o número de eventos. O escalar θ, que atua como peso, não pode ser igual a 1, pois (3.23) com $\theta = 1$, resulta em $Q_\sigma < 0$, o que não é possível.

3.2.4 *Condição de análise θ com Finsler*

Teorema 3.3

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Q_\sigma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Q_\delta \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matriz $X \in \mathbb{R}^{3n_x \times n_x}$ e um escalar $\theta \in [0, 1[$ tais que

$$Q + X\beta + \beta^\top X^\top < 0, \tag{3.34}$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} \theta P - P + Q_\sigma & 0 & \theta P \\ 0 & (1-\theta)P & 0 \\ \theta P & 0 & -Q_\delta + \theta P \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathscr{A} & -I & BK \end{bmatrix},$$

então o sistema em malha fechada (3.7) é assintoticamente estável sob a estratégia baseada em eventos, em que a função de disparo é definida por

$$f(e(k), x(k)) = -x(k)^\top Q_\sigma x(k) + e(k)^\top Q_\delta e(k) + \theta(V(x(k+1))) - V(x(k_i)))$$

.

Prova. Considere a seguinte função de Lyapunov associada ao sistema (3.7):

$$V(x(k)) = x(k)^\top P x(k), \tag{3.35}$$

com

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < f(e(k), x(k)). \tag{3.36}$$

Substituindo o valor de $f(e(k), x(k))$ em (3.36):

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < -x(k)^\top Q_\sigma x(k) + e(k)^\top Q_\delta e(k) + \theta(V(x(k+1))) - V(x(k_i))).$$

Reorganizando algebricamente, tem-se que:

$$(1-\theta)V(x(k+1)) + \theta V(x(k_i)) - V(x(k)) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) - e(k)^\top Q_\delta e(k) < 0. \tag{3.37}$$

Substituindo (3.35) em (3.37) e usando a relação $e(k) + x(k) = x(k_i)$, resulta em

$$\begin{aligned}(1-\theta)x(k+1)^\top P x(k+1) + \theta(e(k) + x(k))^\top P(e(k) + x(k)) - x(k)^\top P x(k) \\ + x(k)^\top Q_\sigma x(k) - e(k)^\top Q_\delta e(k) < 0.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Reescrevendo a equação (3.38)

$$\begin{aligned}(1-\theta)x(k+1)^\top P x(k+1) + \theta x(k)^\top P x(k) - x(k)^\top P x(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) \\ - e(k)^\top Q_\delta e(k) + \theta e(k)^\top P e(k) + \theta x(k)^\top P e(k) + \theta e(k)^\top P x(k) < 0.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Pode ser reescrito como:

$$w^\top Q w < 0, \tag{3.40}$$

com

$$w^\top = \begin{bmatrix} x(k)^\top & x(k+1)^\top & e(k)^\top \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \theta P - P + Q_\sigma & 0 & \theta P \\ 0 & (1-\theta)P & 0 \\ \theta P & 0 & -Q_\delta + \theta P \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Note que, por meio da utilização do Lema de Finsler:

$$\beta w = 0, \quad \beta\beta^\perp = 0, \tag{3.42}$$

sendo

$$\beta = \begin{bmatrix} \mathscr{A} & -I & BK \end{bmatrix}, \quad \beta^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathscr{A} & BK \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Portanto, multiplicando Q na direita por $\beta^\perp$ e na esquerda pelo seu transposto, tem-se que

$$\begin{bmatrix} (1-\theta)\mathscr{A}^\top P\mathscr{A} - P + \theta P + Q_\sigma & (1-\theta)\mathscr{A}^\top PBK + \theta P \\ (1-\theta)K^\top B^\top P\mathscr{A} + \theta P & (1-\theta)K^\top B^\top PBK + \theta P - Q_\delta \end{bmatrix} < 0, \tag{3.44}$$

retomando assim a condição (3.23). □

3.3 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO PROPOSTOS

A redução do envio de informações entre o sensor e o atuador, e a consequente redução do uso da rede, é uma das principais vantagens do controle baseado em eventos. Para alcançar este objetivo, é necessário empregar problemas de otimização em conjunto com as condições apresentadas na seção anterior.

Um novo evento ocorre sempre que a função de disparo é definida positiva, ou seja

$$f(\delta(k), x(k)) > 0,$$

em que $\delta(k)$ pode ser definido como $e(k)$ ou $\nu(k)$ a depender do teorema a ser aplicado. Considerando a função de disparo

$$f(\delta(k), x(k)) = \delta(k)^\top Q_\delta \delta(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k). \tag{3.45}$$

deve-se garantir que

$$\delta(k)^\top Q_\delta \delta(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k) \leq \delta(k)^\top \delta(k)\lambda_{\max}(Q_\delta) - x(k)^\top x(k)\lambda_{\min}(Q_\sigma) \leq 0. \tag{3.46}$$

Para reduzir a quantidade de eventos, idealmente no pior caso, a seguinte condição deve ser respeitada de acordo com (3.46)

$$\delta(k)^\top \delta(k)\lambda_{\max}(Q_\delta) - x(k)^\top x(k)\lambda_{\min}(Q_\sigma) \leq 0. \tag{3.47}$$

Somando $x(k)^\top x(k)\lambda_{min}(Q_\sigma)$ em ambos os lados de (3.47)

$$\delta(k)^\top \delta(k)\lambda_{\max}(Q_\delta) \leq x(k)^\top x(k)\lambda_{\min}(Q_\sigma), \tag{3.48}$$

e multiplicando ambos os lados de (3.48) por $(x(k)^\top x(k)\lambda_{\min}(Q_\sigma))^{-1}$

$$\frac{\delta(k)^\top \delta(k)\lambda_{\max}(Q_\delta)}{x(k)^\top x(k)\lambda_{\min}(Q_\sigma)} \leq 1. \tag{3.49}$$

Portanto, deve-se $min\left[\lambda_{\max}(Q_\delta)\right]$ e $max\left[\lambda_{\min}(Q_\sigma)\right]$ para que o sistema demore para violar a restrição.

A seguir, quatro condições de otimização serão apresentadas, sendo que as três primeiras foram retiradas de [16].

3.3.1 *Otimização 1*

$$\begin{gathered}\text{minimizar } -\sigma \\ \text{sujeito a: (3.5), (3.19), (3.23) ou (3.34).}\end{gathered}$$

Se $Q_\delta = I$ e $Q_\sigma = \sigma I$ em (3.49)

$$\frac{\delta(k)^\top \delta(k)}{x(k)^\top x(k)\lambda_{\min}(Q_\sigma)} \leq 1,$$

então

$$\frac{\delta(k)^\top \delta(k)\lambda_{\max}(Q_\sigma^{-1})}{x(k)^\top x(k)} \leq 1.$$

Por fim, tem-se que minimizar $\left[\lambda_{max}(Q_\sigma^{-1})\right]$. Dado que

$$Q_\sigma^{-1} = \frac{I}{\sigma},$$

o interesse é maximizar σ, ou seja, minimizar $-\sigma$. Dessa forma encontrará um valor maior de σ que diminui o autovalor de Q_σ^{-1} [16].

3.3.2 *Otimização 2*

$$\begin{gathered}\text{minimizar } -\text{traço}(Q_\sigma)\\ \text{sujeito a: (3.5), (3.19), (3.23) ou (3.34)}, \quad Q_\sigma \geq \sigma_0 I\end{gathered}$$

Esse método considera o valor de σ computado no método anterior como o menor valor admissível de Q_σ, ou seja, o valor de σ_0 no problema de otimização atual. Além disso, essa otimização visa maximizar o traço de Q_σ, o que permite que alguns estados desviem mais do que no caso anterior e, consequentemente, reduzindo o número de transmissões [16].

Embora esses dois métodos anteriores sejam mais simples e intuitivos, eles são conservadores, pois os valores de Q_σ e Q_δ são fixos na Otimização 1, e apenas Q_δ é fixado na Otimização 2. Uma abordagem mais genérica é permitir que tanto Q_σ e Q_δ sejam matrizes definidas positivas que possam assumir valores em um determinado intervalo, reduzindo o conservadorismo. Dessa forma, uma nova abordagem é introduzida na Otimização 3.

3.3.3 *Otimização 3*

$$\begin{gathered}\text{minimizar traço}(Q_\delta - Q_\sigma)\\ \text{sujeito a: (3.5), (3.19), (3.23) ou (3.34)}, \quad Q_\sigma \geq \sigma_0 I, \quad Q_\delta \leq I\end{gathered}$$

Esse método abrange os resultados das duas otimizações anteriores, uma vez que Otimização 1 e Otimização 2 são casos particulares de Otimização 3, com o objetivo de reduzir o número de transmissões de dados. No entanto, o esforço computacional da Otimização 3 é maior, pois a cada instante é necessário calcular as formas quadráticas $\delta(k)^\top Q_\delta \delta(k)$ e $x(k)^\top Q_\sigma x(k)$. Portanto, nesse caso, há uma relação direta entre a redução no número de transmissões de dados e o aumento do esforço computacional [16].

3.3.4 *Otimização 4*

$$\begin{gathered}\text{minimizar } \sigma\\ \text{sujeito a: (3.5), (3.19), (3.23) ou (3.34)},\\ \begin{bmatrix} X - Q_\delta & I \\ I & Q_\sigma \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{traço}(X) < \sigma, \quad Q_\delta > 0, \quad Q_\sigma > 0.\end{gathered}$$

Considere a função de disparo

$$f(\delta(k), x(k)) = \delta(k)^\top Q_\delta \delta(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k).$$

Para diminuir a ocorrência de eventos, é necessário reduzir Q_δ e aumentar Q_σ. Portanto, o seguinte problema de otimização pode ser aplicado, considerando uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$:

$$\text{traço}(Q_\delta + Q_\sigma^{-1}) \leq \text{traço}(X). \tag{3.50}$$

A partir do conceito de traço de uma matriz, que é a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada, (3.50) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Q_\delta + Q_\sigma^{-1} \leq X. \tag{3.51}$$

Reorganizando algebricamente, obtém-se:

$$X - Q_\delta - Q_\sigma^{-1} \geq 0. \tag{3.52}$$

Aplicando o Complemento de Schur em (3.52), resulta em:

$$\begin{bmatrix} X - Q_\delta & I \\ I & Q_\sigma \end{bmatrix} \geq 0, \tag{3.53}$$

com

$$\text{traço}(X) < \sigma, \quad Q_\sigma > 0, \quad Q_\delta > 0,$$

de forma que σ seja o menor escalar positivo que satisfaça essas condições.

3.4 EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o seguinte sistema instável em malha aberta discreto no tempo apresentado em [16]

$$A = \begin{bmatrix} 1,0050 & 0,0501 \\ 0,2003 & 1,0050 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,0501 \\ 0,0050 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -6 & -3 \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

Para analisar o desempenho dos diferentes métodos de otimização projetados, o sistema em malha fechada foi simulado com as seguintes condições iniciais

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1,125 \\ 2,75 \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

A seguir, esse sistema será utilizado com os Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3, com o auxílio do YALMIP [30] no MATLAB e o SEDUMI [47].

3.4.1 *Aplicação no Teorema 3.1*

O Teorema 3.1 foi aplicado nos quatro cenários de otimização e os seguintes valores foram encontrados para σ, Q_σ e Q_δ:

- Otimização 1: $\sigma = 0,003251$.
- Otimização 2: $Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,04479 & 0,01026 \\ 0,01026 & 0,00579 \end{bmatrix}$.

- Otimização 3: $Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,00326 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00326 \end{bmatrix}$, $Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,26784 & 0,38153 \\ 0,38153 & 0,80013 \end{bmatrix}$.
- Otimização 4: $Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,25489 & 0,05941 \\ 0,05941 & 0,07438 \end{bmatrix}$, $Q_\delta = \begin{bmatrix} 7,26569 & 6,11529 \\ 6,11529 & 14,06854 \end{bmatrix}$, $\sigma = 42,67466$.

Além disso, os valores de σ, Q_σ e Q_δ também foram encontrados para o Lema 3.1:

- Otimização 1: $\sigma = 0,0888$.
- Otimização 2: $Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,42854 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,08880 \end{bmatrix}$.
- Otimização 3: $Q_\sigma = \begin{bmatrix} 0,42854 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,08880 \end{bmatrix}$, $Q_\delta = \begin{bmatrix} 0,80000 & 0,40000 \\ 0,40000 & 0,20000 \end{bmatrix}$.
- Otimização 4: $Q_\sigma = \begin{bmatrix} 1,61801 & -0,00006 \\ -0,00006 & 0,32632 \end{bmatrix}$, $Q_\delta = \begin{bmatrix} 2,95016 & 1,47494 \\ 1,47494 & 0,73775 \end{bmatrix}$, $\sigma = 7,37065$.

A Tabela 3.1 apresenta o número de eventos ocorridos durante o intervalo de tempo da simulação para cada método. Observa-se que, em um intervalo de 201 instantes de tempo, os métodos de otimização propostos foram capazes de reduzir a quantidade de eventos, resultando em 23 eventos na Otimização 4 e o Teorema 3.1, enquanto o resultado do Lema 3.1 apresentou 27 eventos.

Um outro teste realizado foi considerar que a função de disparo não vai criar um evento apenas quando $f(k) > 0$, mas sim quando $\text{round}(f(k) \times 10^{16})/10^{16} > 0$. Isso ocorre porque o MATLAB tem 16 dígitos de precisão e a função round é utilizada para arredondar e levar em conta a precisão do MATLAB. No caso da Otimização 4, ao considerar essa função de ativação, o número de eventos reduziu de 23 para 21.

Tabela 3.1: Comparativo de número de eventos de acordo com o Teorema 3.1 e o problema de Otimização utilizado para sistemas precisamente conhecidos.

Otimização	Lema 3.1	Teorema 3.1
1	67	27
2	50	26
3	27	24
4	27	23

As Figuras 3.2 e 3.3 apresentam a evolução do estado x_1 e x_2, respectivamente, para o Teorema 3.1. Enquanto a Figura 3.4 apresenta a evolução do sinal de controle para cada método. É possível observar algumas diferenças na resposta temporal entre os métodos, porém, em todos eles, os estados x_1 e x_2 tendem a zero após aproximadamente 60 instantes de tempo. Isso comprova a efetividade do controle baseado em eventos proposto, pois mesmo que um novo sinal de controle seja enviado apenas após a ocorrência de um evento, o sinal de controle contendo o vetor de

estados enviado anteriormente é capaz de estabilizar o sistema. A curva da Otimização 4 não está presente nas Figuras, pois ela segue uma trajetória muito próxima da Otimização 3.

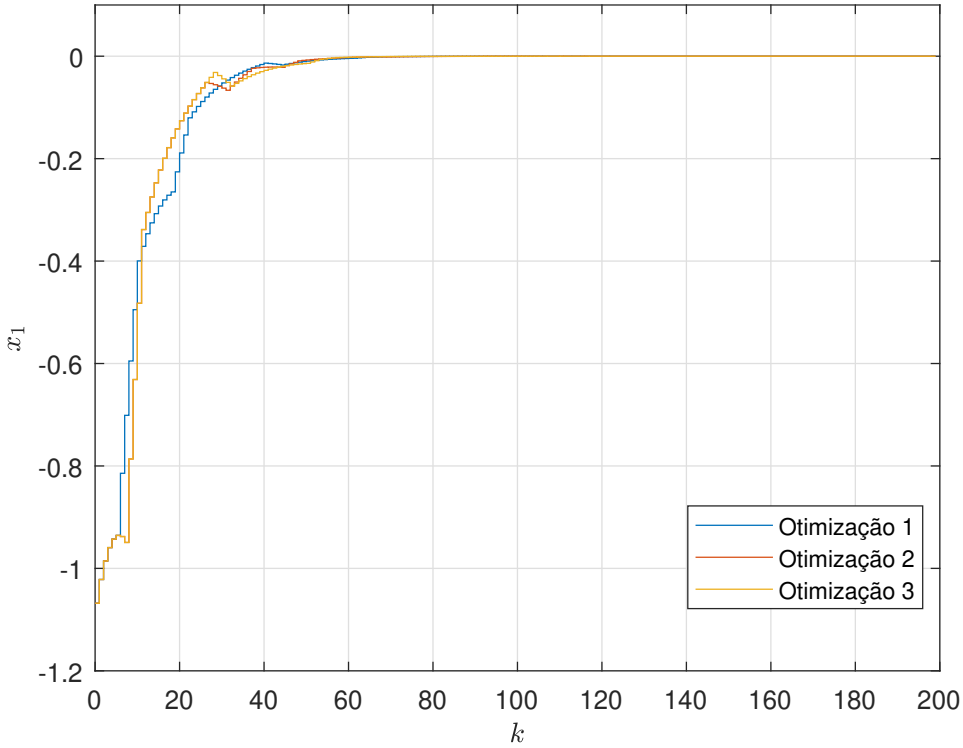


Figura 3.2: Evolução do estado x_1.

A Figura 3.5 mostra o intervalo de tempo entre eventos, onde cada ponto representa um evento e o eixo y representa o tempo entre os eventos. Essa ilustração combinada com a Figura 3.4, é útil para analisar a relação entre existência de eventos e a transição do sinal de controle. Como esperado, a Otimização 4 proporciona um maior intervalo entre eventos. Percebe-se que ocorrem eventos mesmo quando os estados estão em regime permanente. Isso ocorre porque, em sistemas de controle baseados em eventos, os estados se aproximam de zero, mas ainda existe um valor residual, o qual é suficiente para acionar a função de disparo e desencadear um evento.

3.4.2 *Aplicação no Teorema 3.2*

A seguir, o sistema descrito pelos parâmetros em (3.54) será utilizado para aplicar o Teorema 3.2 em diferentes cenários de otimização: 1, 2, 3 e 4. Os resultados mostram a aplicabilidade do método.

3.4.2.1 *Otimização* 1

A Figura 3.6 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que os valores de θ igual a $0,12$, $0,13$ e $0,15$ resultaram no menor número de eventos, totalizando 32 ocorrências.

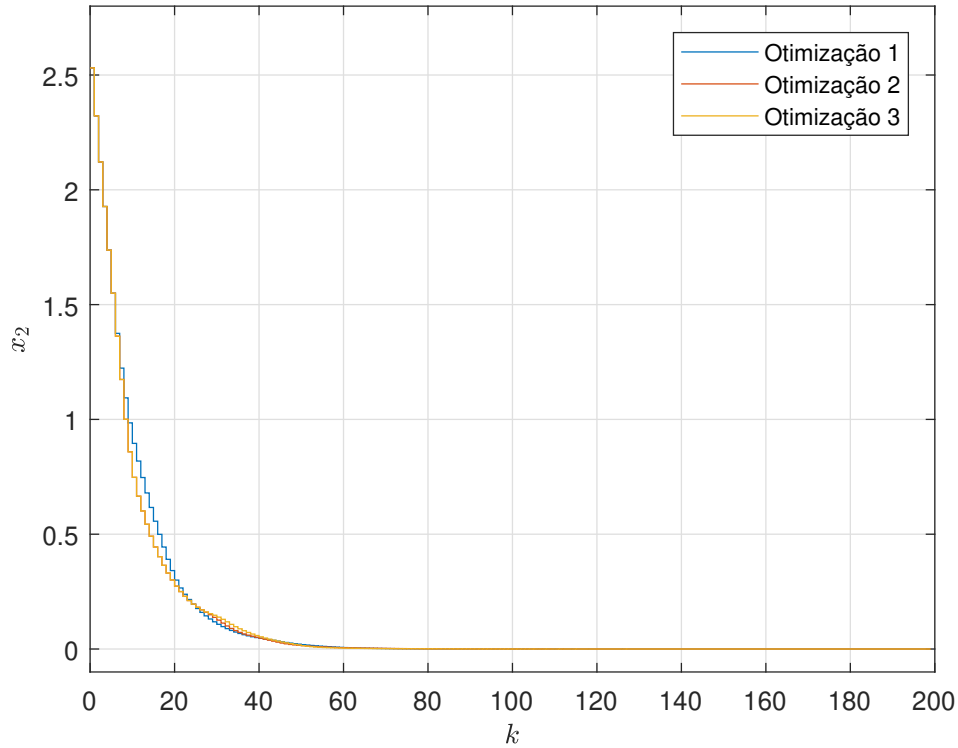


Figura 3.3: Evolução do estado x_2.

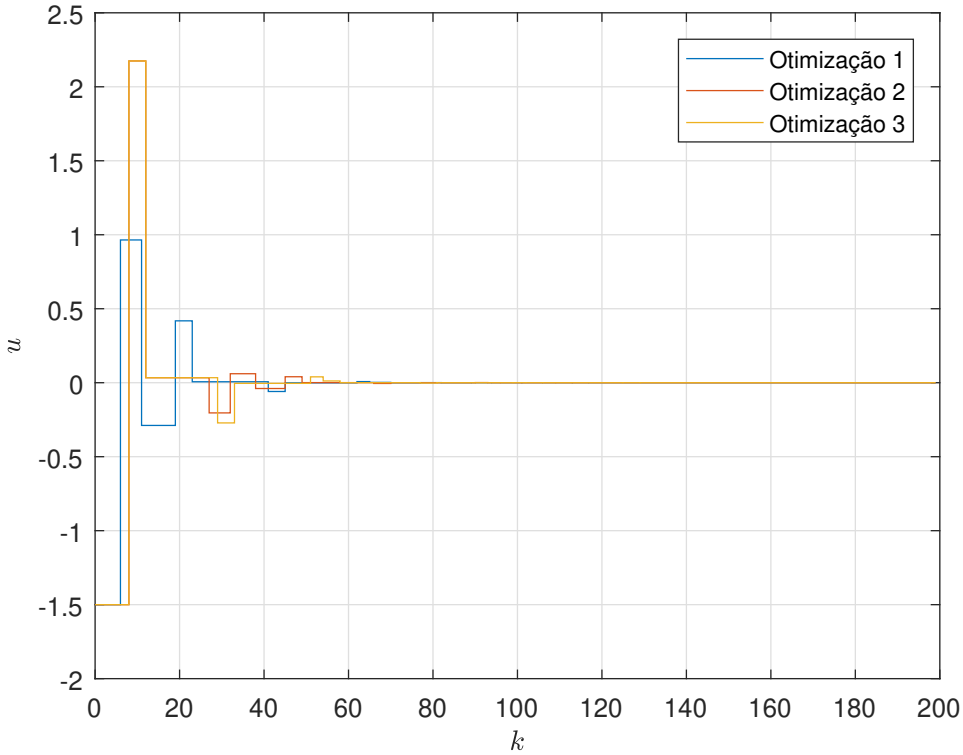
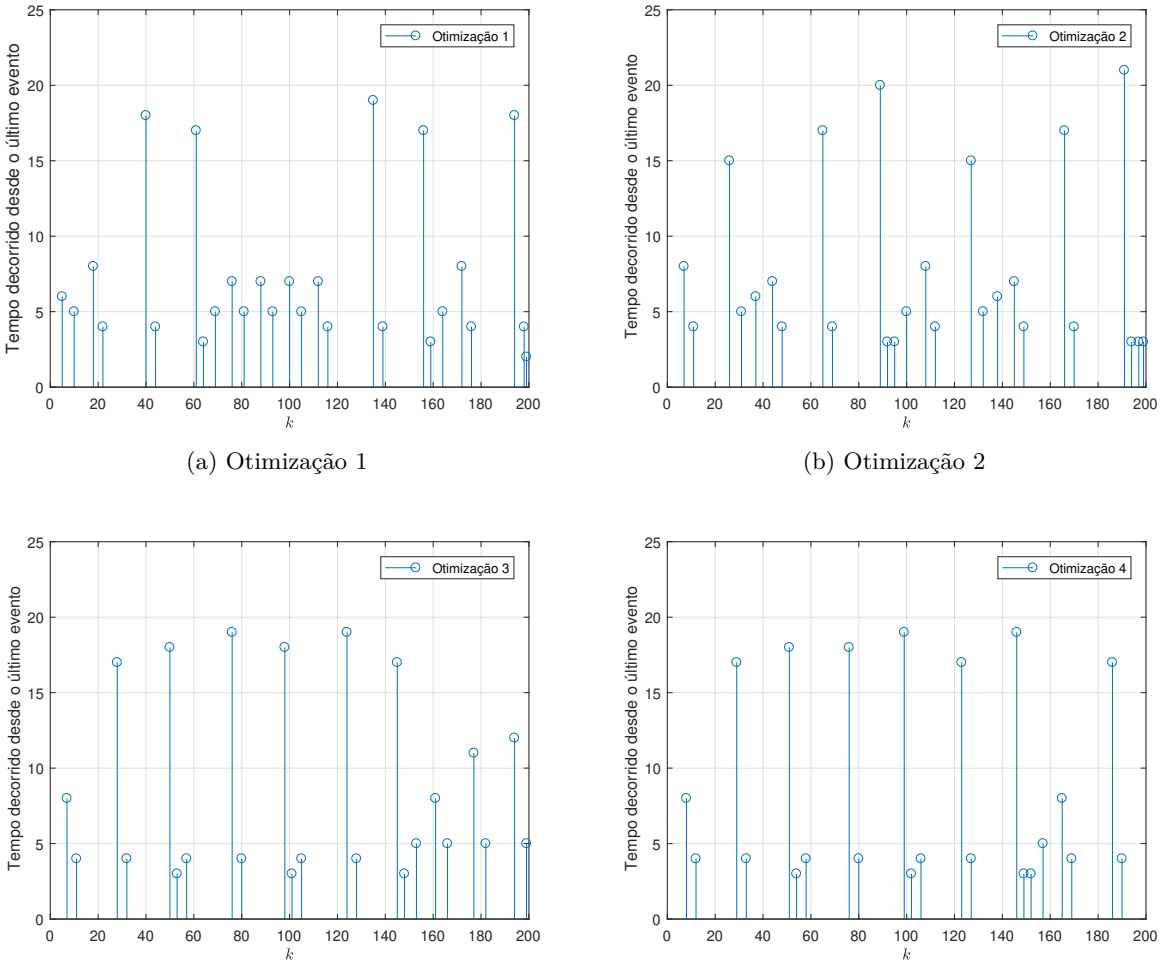


Figura 3.4: Evolução do sinal de controle u.



(a) Otimização 1

(b) Otimização 2

(c) Otimização 3

(d) Otimização 4

Figura 3.5: Tempo entre eventos de acordo com o Teorema 3.1

.

A Figura 3.7 apresenta a evolução dos estados $x(k)$ em relação aos instantes de tempo k. Várias curvas estão plotadas no gráfico para representar a evolução dos estados em diferentes valores de θ. Os resultados mostram que, independentemente do valor de θ, os estados convergem para zero, indicando que o sistema é assintoticamente estável.

3.4.2.2 *Otimização* 2

A Figura 3.6 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ para a Otimização 2, bem como Otimização 1, Otimização 3 e 4. Os resultados indicaram que os valores de θ igual a $0,12$, $0,13$ e $0,15$ resultaram no menor número de eventos, totalizando 32 ocorrências. Além disso, os resultados desse caso diferem-se dos resultados da Otimização 1 apenas para $\theta = 0$, quando os eventos reduziram de 67 para 50.

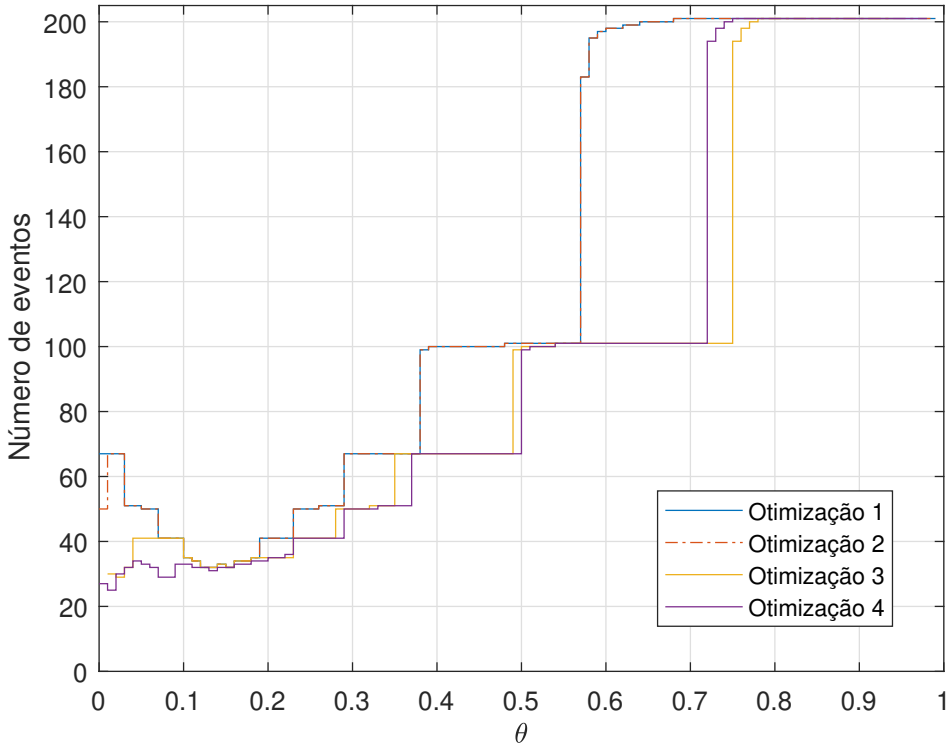


Figura 3.6: Comparativo de número de eventos de acordo com θ, usando Teorema 3.2 e os diferentes tipos de Otimização.

3.4.2.3 *Otimização* 3

A Figura 3.6 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que o valor de θ igual a $0,02$ resultou no menor número de eventos, totalizando 29 ocorrências. Além disso, a condição não foi capaz de encontrar a solução para $\theta = 0$ e $\theta \in [0,95, 0,99]$.

3.4.2.4 *Otimização* 4

A Figura 3.6 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que o valor de θ igual a $0,01$ resultou no menor número de eventos, totalizando 25 ocorrências. Além disso, a condição não foi capaz de encontrar a solução para $\theta = 0,99$.

3.4.3 *Aplicação no Teorema 3.3*

A seguir, o sistema descrito pelas matrizes dadas em (3.54) será utilizado para aplicar o Teorema 3.3 em diferentes cenários de otimização: 1, 2, 3 e 4. Os resultados mostram a aplicabilidade do método.

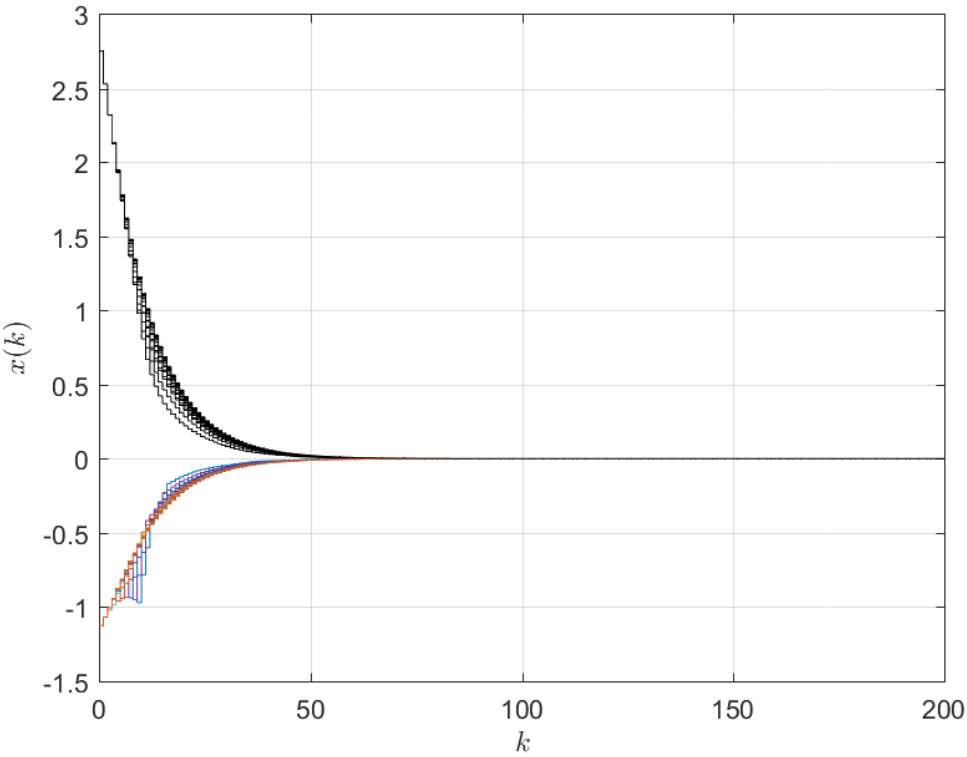


Figura 3.7: Evolução da resposta temporal do estado $x(k)$ para diferentes θ, usando Teorema 3.2 e Otimização 1.

3.4.3.1 *Otimização* 1 *com Finsler*

A Tabela 3.2 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que os valores de $\theta \in [0,16, 0,19]$ resultaram no menor número de eventos, totalizando 35 ocorrências. Uma possível aplicação de um método que visa otimizar a escolha do escalar θ não foi implementada. Portanto, o melhor valor para θ foi selecionado por meio de um método iterativo. As dificuldades relacionadas à implementação desse método estão refletidas na condição LMI do Teorema 3.3, uma vez que a condição envolve o produto entre θ e P.

3.4.3.2 *Otimização* 2 *com Finsler*

A Tabela 3.3 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que o valor de θ igual a $0,12$ resultou no menor número de eventos, totalizando 32 ocorrências. Além disso, a condição não foi capaz de encontrar a solução para $\theta \in [0,52, 0,99]$.

3.4.3.3 *Otimização* 3 *com Finsler*

A Tabela 3.4 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que o valor de θ igual a $0,01$ resultou no menor número de eventos,

Tabela 3.2: Comparativo de número de eventos de acordo com o valor de θ e Teorema 3.3 aplicado na Otimização 1 com Finsler.

θ	Número de eventos	θ	Número de eventos	θ	Número de eventos
0	67	0,14	41	0,28	51
0,01	67	0,15	41	0,29 a 0,36	67
0,02	67	0,16	35	0,37	99
0,03	67	0,17	35	0,38 a 0,45	100
0,04	51	0,18	35	0,48 a 0,52	101
0,05	51	0,19	35	0,53	183
0,06	51	0,20	41	0,54	196
0,07	50	0,21	41	0,55	197
0,08	50	0,22	41	0,56	198
0,09	50	0,23	41	0,57	198
0,10	50	0,24	50	0,58	199
0,11	41	0,25	50	0,59	199
0,12	41	0,26	51	0,60 a 0,63	200
0,13	41	0,27	51	0,64 a 0,99	201

Tabela 3.3: Comparativo de número de eventos de acordo com o valor de θ e Teorema 3.3 aplicado na Otimização 2 com Finsler.

θ	Número de eventos	θ	Número de eventos
0	50	0,12	32
0,01	50	0,13	67
0,02	50	0,14 a 0,20	51
0,03	50	0,21 a 0,38	67
0,04	50	0,39	98
0,05	41	0,40	99
0,06	41	0,41	100
0,07	41	0,42	100
0,08	41	0,43	100
0,09	35	0,44	100
0,10	35	0,45 a 0,51	101
0,11	34	0,52 a 0,99	-

totalizando 28 ocorrências. Além disso, a condição não foi capaz de encontrar a solução para $\theta = 0$ e $\theta \in [0,13, 0,99]$.

3.4.3.4 *Otimização 4 com Finsler*

A Tabela 3.5 mostra o número de eventos em função do parâmetro θ, onde $\theta \in [0, 1[$. Os resultados indicaram que o valor de θ igual a 0.01 resultou no menor número de eventos,

Tabela 3.4: Comparativo de número de eventos de acordo com o valor de θ e Teorema 3.3 aplicado na Otimização 3 com Finsler.

θ	Número de eventos	θ	Número de eventos
0	-	0,07	30
0,01	28	0,08	31
0,02	33	0,09	44
0,03	32	0,10	46
0,04	31	0,11	32
0,05	30	0,12	32
0,06	33	0,13 a 0,99	-

totalizando 25 ocorrências. Além disso, a condição não foi capaz de encontrar a solução para $\theta \in [0.33, 0.99]$.

Tabela 3.5: Comparativo de número de eventos de acordo com o valor de θ e Teorema 3.3 aplicado na Otimização 4 com Finsler.

θ	Número de eventos	θ	Número de eventos
0	27	0,13	31
0,01	25	0,14	32
0,02	30	0,15	32
0,03	32	0,16	33
0,04	34	0,17 a 0,18	34
0,05	33	0,20 e 0,21	35
0,06	32	0,22	36
0,07	29	0,23 a 0,28	41
0,08	29	0,29 a 0,32	50
0,09 e 0,10	33	0,33 a 0,99	-
0,11 e 0,12	32	-	-

3.5 COMENTÁRIOS FINAIS

Este capítulo discutiu as condições de emulação (ganho do controlador dado a priori) do controle baseado em eventos para sistemas discretos no tempo por realimentação de estados. Foram introduzidas três novas condições com o objetivo de reduzir a quantidade de eventos em comparação com outros métodos descritos na literatura. A primeira condição, apresentada no Teorema 3.1, baseia-se na aplicação do Lema de Finsler e nas condições apresentadas em [16, 20]. A segunda condição, do Teorema 3.2, é baseada na aplicação de uma função de disparo dependente da própria função de Lyapunov, conforme apresentado em [16, 20, 46]. Por fim, o Teorema 3.3 utiliza a mesma função de disparo do Teorema 3.2, mas também faz uso do Lema

de Finsler. Além disso, foram propostos métodos de otimização com o objetivo de reduzir ainda mais as transmissões do sinal de controle. As vantagens do método proposto foram ilustradas por meio de exemplo numérico retirado da literatura. Dessa forma, o Teorema 3.1, associado às Otimizações 3 e 4, obteve melhores resultados do que as Otimizações 1 e 2. Os resultados demonstraram que o Teorema 3.2 obteve melhores resultados para o parâmetro θ com valores menores. Essa observação pode parecer contraditória inicialmente, já que isso tenderia a anular a parcela adicionada à função de disparo. No entanto, o ajuste do parâmetro θ na LMI faz com que as parcelas que envolvem o ganho do controlador também tendam a zero conforme θ se aproxima de 1, o que não é favorável para a análise de estabilidade.

4

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS PARA SISTEMAS COM PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPOS

Sistemas com parâmetros variantes no tempo apresentam desafios significativos para o projeto de controladores tradicionais, uma vez que suas características dinâmicas mudam ao longo do tempo, impactando diretamente no desempenho do sistema.

Neste capítulo, será abordado o desenvolvimento de controladores para sistemas com parâmetros variantes no tempo, utilizando o controle baseado em eventos. Portanto, uma nova metodologia para a análise da estabilidade do sistema de controle baseado em eventos por emulação será desenvolvida, considerando a variabilidade dos parâmetros do sistema ao longo do tempo, com o objetivo de otimizar o desempenho do sistema em diferentes condições operacionais. A seguir, será apresentada a formulação do problema.

4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a abordagem descrita em [16, 20], onde existe o seguinte sistema linear em tempo discreto:

$$x(k+1) = A(\alpha_k)x(k) + B(\alpha_k)u(k), \tag{4.1}$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados e $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle.

A lei de controle de realimentação de estados sujeito a condição de disparo é

$$u(k) = K(\alpha_{k_i})x(k_i), \quad k \in [k_i, k_{i+1}). \tag{4.2}$$

Portanto, substituindo (4.2) em (4.1), tem-se que o sistema em malha fechada pode ser escrito como

$$x(k+1) = A(\alpha_k)x(k) + B(\alpha_k)K(\alpha_{k_i})x(k_i). \tag{4.3}$$

O principal conceito envolvendo controle baseado em eventos é que o sinal do vetor de estados só será enviado para o controlador quando acontecer uma violação de uma condição de disparo. Dessa forma, a comunicação entre a planta e o controlador não é periódica. Isso pode ser observado na Figura 4.1, onde α_{k_i} e $x(k_i)$ recebem os valores de α_k e $x(k)$ somente quando um novo evento acontece.

O erro de medição de estados é dado por:

$$e(k) = x(k_i) - x(k).$$

O sistema em malha fechada pode ser reeescrito como:

$$x(k+1) = \mathscr{A}(\alpha_k)x(k) + \nu(k), \tag{4.4}$$

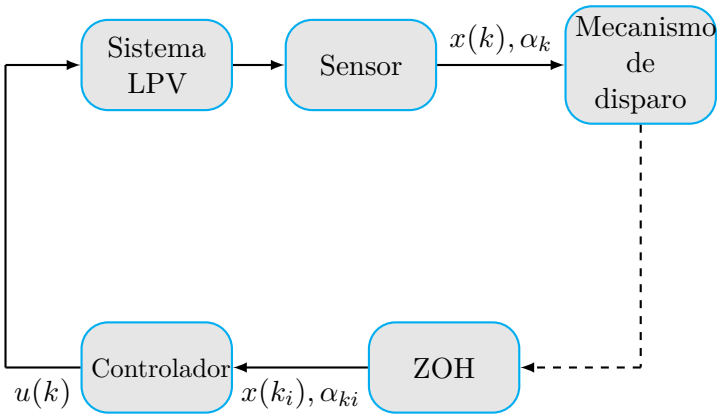


Figura 4.1: Mecanismo de controle baseado em eventos para sistemas LPV.

sendo

$$\nu(k) = B(\alpha_k)K(\alpha_k)e(k) + B(\alpha_k)\Delta K(\alpha_{k_i}, \alpha_k)x(k_i),$$
$$\mathscr{A}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k), \quad \Delta K(\alpha_{k_i}, \alpha_k) = K(\alpha_{k_i}) - K(\alpha_k). \quad (4.5)$$

O Algoritmo 2 define a estratégia discutida para o controle baseado em eventos para sistemas com parâmetros variantes no tempo, em que i é um contador de eventos.

Algoritmo 2 Estratégia de controle baseado em eventos para sistemas LPV

se $k = 0$ **então**
  $i \leftarrow 1$
  $k_i \leftarrow 0$
  $K(\alpha_{k_i}) \leftarrow K(\alpha_k)$
  $u(0) \leftarrow K(\alpha_{k_i})x(0)$
senão
  se $f(e(k), x(k)) > 0$ **então**
    $i \leftarrow i + 1$
    $k_i \leftarrow k$
    $K(\alpha_{k_i}) \leftarrow K(\alpha_k)$
    $u(k_i) \leftarrow K(\alpha_{k_i})x(k_i)$
  senão
    $u(k) \leftarrow u(k_i)$
  fim se
  $k \leftarrow k + 1$
fim se

4.2 PRINCIPAIS RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados projetos de emulação para sistemas com parâmetros variantes no tempo. Os Lemas 4.1 e 4.2 descrevem o projeto de acordo com a referência [48]. Posteriormente,

os resultados obtidos nesses lemas serão aplicados no Teorema 4.1, que é uma adaptação do Teorema 3.1 para sistemas LPV.

4.2.1 *Projeto de controle 1*

Lema 4.1

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $X(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u\times n}$, $Y(\alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $L(\alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{n_u\times n_u}$ tal que

$$\begin{bmatrix} X(\alpha_k)+X(\alpha_k)^\top - P(\alpha_k) & X(\alpha_k)^\top A(\alpha_k)^\top & -Z(\alpha_k)^\top \\ * & P(\alpha_k)-R(\alpha_k,\alpha_{k+1}) & B(\alpha_k)L(\alpha_{k+1})-Y(\alpha_{k+1})^\top \\ * & * & L(\alpha_{k+1})+L(\alpha_{k+1})^\top \end{bmatrix} > 0, \tag{4.6}$$

com $R(\alpha_k,\alpha_{k+1}) = B(\alpha_k)Y(\alpha_{k+1}) + Y(\alpha_{k+1})^\top B(\alpha_k)^\top$. Então o controlador dependente de parâmetros é dado por

$$K(\alpha_k) = Z(\alpha_k)X(\alpha_k)^{-1}. \tag{4.7}$$

Prova. Substituindo (4.7) em (4.6) e usando a relação $(P(\alpha_k)-X(\alpha_k))^\top P(\alpha_k)^{-1}(P(\alpha_k)-X(\alpha_k)) \geq 0 \Rightarrow X(\alpha_k)^\top P(\alpha_k)^{-1}X(\alpha_k) \geq X(\alpha_k)^\top + X(\alpha_k) - P(\alpha_k)$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} X(\alpha_k)^\top P(\alpha_k)^{-1}X(\alpha_k) & X(\alpha_k)^\top A(\alpha_k)^\top & -X(\alpha_k)^\top K(\alpha_k)^\top \\ * & P(\alpha_k)-R(\alpha_k,\alpha_{k+1}) & B(\alpha_k)L(\alpha_{k+1})-Y(\alpha_{k+1})^\top \\ * & * & L(\alpha_{k+1})+L(\alpha_{k+1})^\top \end{bmatrix} > 0. \tag{4.8}$$

Multiplicando (4.8) a esquerda por

$$\begin{bmatrix} X(\alpha_k)^{-\top} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

e à direita pelo transposto, resulta em

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k)^{-1} & A(\alpha_k)^\top & -K(\alpha_k)^\top \\ * & P(\alpha_k)-R(\alpha_k,\alpha_{k+1}) & B(\alpha_k)L(\alpha_{k+1})-Y(\alpha_{k+1})^\top \\ * & * & L(\alpha_{k+1})+L(\alpha_{k+1})^\top \end{bmatrix} > 0. \tag{4.10}$$

Considerando $H(\alpha_k) = L(\alpha_k)^{-\top}$ e $F(\alpha_k) = P(\alpha_k)^{-1}Y(\alpha_k)H(\alpha_k)$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k)^{-1} & A(\alpha_k)^\top & -K(\alpha_k)^\top \\ * & P(\alpha_k) - R(\alpha_k, \alpha_{k+1}) & B(\alpha_k)H(\alpha_{k+1})^{-\top} - P(\alpha_{k+1})F(\alpha_{k+1})H(\alpha_{k+1})^{-1} \\ * & * & H(\alpha_{k+1})^{-1} + H(\alpha_{k+1})^{-\top} \end{bmatrix} > 0. \tag{4.11}$$

Pré e pós multiplicando (4.11) por

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H(\alpha_{k+1}) \\ 0 & P(\alpha_{k+1})^{-1} & F(\alpha_{k+1}) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

e seu transposto, respectivamente, resulta em

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_k)^{-1} & -K(\alpha_k)^\top H(\alpha_{k+1})^\top & A(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})^{-1} - K(\alpha_k)^\top F(\alpha_{k+1})^\top \\ * & H(\alpha_{k+1}) + H(\alpha_{k+1})^\top & B(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})^{-1} + F(\alpha_{k+1})^\top \\ * & * & P(\alpha_{k+1})^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{4.13}$$

Multiplicando (4.13) a esquerda por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & P(\alpha_{k+1}) \\ I & K(\alpha_k)^\top & 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

e à direita pelo seu transposto, obtém

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & \mathscr{A}(\alpha_k) \\ \mathscr{A}(\alpha_k)^\top & P(\alpha_k)^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{4.15}$$

Aplicando o Complemento de Schur e multiplicando a esquerda por $x_k^\top$ e à direita pelo transposto, resulta em

$$x_{k+1}^\top P(\alpha_{k+1})^{-1} x_{k+1} - x_k^\top P(\alpha_k)^{-1} x_k < 0. \tag{4.16}$$

Por fim, considerando uma equação de Lyapunov como $V(x_k, \alpha_k) = x_k^\top P(\alpha_k)^{-1} x_k$, (4.16) pode ser reescrita como $\Delta V(x_k, \alpha_k) < 0$. □

4.2.2 *Projeto de controle 2*

Lema 4.2

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $X(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u\times n}$, tal que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k)X(\alpha_k) + B(\alpha_k)Z(\alpha_k) \\ * & -P(\alpha_k)^\top + X(\alpha_k) + X(\alpha_k)^\top \end{bmatrix} > 0. \tag{4.17}$$

Então o controlador dependente de parâmetros é dado por $K(\alpha_k) = Z(\alpha_k)X(\alpha_k)^{-1}$.

Prova. Substituindo (4.7) em (4.17) e usando a relação $(P(\alpha_k) - X(\alpha_k))^\top P(\alpha_k)^{-1}(P(\alpha_k) - X(\alpha_k)) \geq 0 \Rightarrow X(\alpha_k)^\top P(\alpha_k)^{-1}X(\alpha_k) \geq X(\alpha_k)^\top + X(\alpha_k) - P(\alpha_k)$ em (4.17), tem-se que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k)X(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k)X(\alpha_k) \\ * & X(\alpha_k)^\top P(\alpha_k)^{-1}X(\alpha_k) \end{bmatrix} > 0. \tag{4.18}$$

Multiplicando (4.18) a esquerda por

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X(\alpha_k)^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

e à direita pelo seu transposto, resulta em

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k) \\ * & P(\alpha_k)^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{4.20}$$

Aplicando o Complemento de Schur e multiplicando a esquerda por $x_k^\top$ e à direita por x_k, obtém-se (4.16) e, portanto, conclui-se a prova. □

4.2.3 *Condição análise LPV*

Teorema 4.1

Se existirem matrizes $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X \in \mathbb{R}^{3n_x \times 3n_x}$, $Q_\sigma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ definida positiva e $Q_\delta \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tal que

$$Q + X\beta + \beta^\top X^\top < 0, \tag{4.21}$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} -P(\alpha_k) + Q_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & P(\alpha_{k+1}) & 0 \\ 0 & 0 & -Q_\delta \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathscr{A}(\alpha_k) & -I & I \end{bmatrix},$$

então o sistema em malha fechada (4.1) é assintoticamente estável e σ é uma lei de geração de eventos quando há a violação de $f(\nu(k), x(k)) = \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) - x(k)^\top Q_\sigma x(k)$.

Prova. Usando o Lema de Finsler, note que:

$$\beta\beta^\perp = 0,$$

em que

$$\beta^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathscr{A}(\alpha_k) & I \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Multiplicando (4.21) na direita por (4.22) e na esquerda pelo seu transposto, resulta em:

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha_k) + Q_\sigma + \mathscr{A}(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})\mathscr{A}(\alpha_k) & \mathscr{A}(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1}) \\ P(\alpha_{k+1})\mathscr{A}(\alpha_k) & P(\alpha_{k+1}) - Q_\delta \end{bmatrix} < 0. \tag{4.23}$$

Multiplicando (4.23) na esquerda por $\begin{bmatrix} x(k)^\top & v(k)^\top \end{bmatrix}$ e na direita pelo seu transposto

$$\begin{aligned} x(k)^\top(-P(\alpha_k) + Q_\sigma + \mathscr{A}(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})\mathscr{A}(\alpha_k))x(k) + x(k)^\top \mathscr{A}(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})\nu(k) \\ + \nu(k)^\top P(\alpha_{k+1})\mathscr{A}(\alpha_k)x(k) + \nu(k)^\top P(\alpha_{k+1})\nu(k) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0. \end{aligned}$$

Reorganizando algebricamente

$$\begin{aligned} &- x(k)^\top P(\alpha_k)x(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) + x(k)^\top \mathscr{A}(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})\mathscr{A}(\alpha_k)x(k) + \\ &x(k)^\top \mathscr{A}(\alpha_k)^\top P(\alpha_{k+1})\nu(k) + \nu(k)^\top P(\alpha_{k+1})\mathscr{A}(\alpha_k)x(k) + \nu(k)^\top P(\alpha_{k+1})\nu(k) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0. \end{aligned}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} &- x(k)^\top P(\alpha_k)x(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) \\ &\quad + (\mathscr{A}(\alpha_k)x(k) + \nu(k))^\top P(\alpha_{k+1})(\mathscr{A}(\alpha_k)x(k) + \nu(k)) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Substituindo o valor de (4.4) em (4.24), tem-se que

$$-x(k)^\top P(\alpha_k)x(k) + x(k)^\top Q_\sigma x(k) + x(k+1)^\top P(\alpha_{k+1})x(k+1) - \nu(k)^\top Q_\delta \nu(k) < 0.$$

□

4.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

As rotinas para exemplos numéricos serão desenvolvidas com o auxílio do YALMIP [30] no MATLAB e o SEDUMI [47]. Além disso, foi utilizado o ROLMIP [49] para tratar condições LMI dependentes de parâmetros variantes no tempo.

4.3.1 *Exemplo 1:*

Considere o sistema (4.1) escolhido para análise apresentado em [50], onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9520 & 0,0936 \\ -0,9358 & 0,8584 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \lambda \begin{bmatrix} 0,9996 & 0,0824 \\ -0,0082 & 0,6699 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

De acordo com [50], o valor máximo de λ para o qual o sistema em malha aberta é estável é de $1,00245$.

A seguir, serão apresentados alguns casos em que os Lemas 4.1 e 4.2 foram utilizados como projetos de controlador, juntamente com a análise realizada no Teorema 4.1 para o caso de Otimização 1 proposto no Capítulo 3, onde $Q_\sigma = \sigma I$ e $Q_\delta = I$. Para ilustrar a efetividade do método, o sistema em malha fechada foi simulado com as seguintes condições iniciais.

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0,20 \\ 1,93 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

4.3.1.1 *Caso $\lambda = 1,0025$ - K constante*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K_{CLM4.1}$ e $K_{CLM4.2}$.

$$K_{CLM4.1} = \begin{bmatrix} -0,60045 & -0,05942 \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

$$K_{CLM4.2} = \begin{bmatrix} -0,64805 & -0,11959 \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Aplicando os valores de (4.27) e (4.28) no Teorema 4.1, foram obtidos os valores de σ de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$. Esses valores estão apresentados na Tabela 4.1, juntamente com os números de eventos para cada controlador. O número de eventos foi analisado em uma média

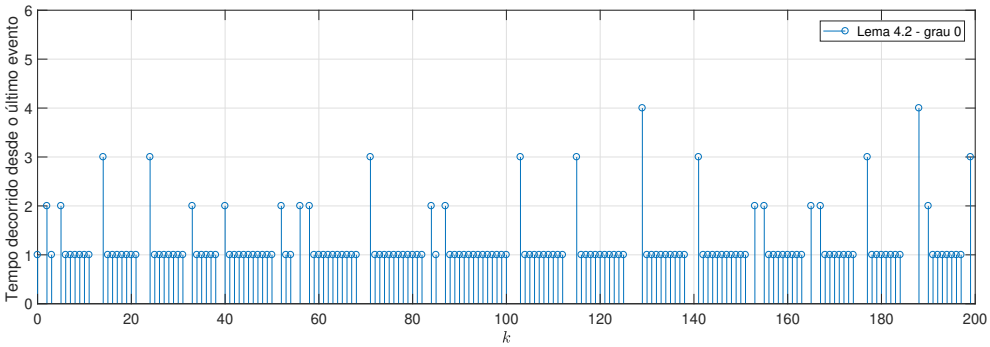


Figura 4.2: Intervalo entre eventos para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 0.

de 500 iterações para diferentes valores de α_k, escolhidos aleatoriamente, em um intervalo de 201 instantes.

Tabela 4.1: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 1 com $\lambda = 1,0025$ e K constante.

grau	σ (4.27)	σ (4.28)	Número de eventos (4.27)	Número de eventos (4.28)
0	0,000125	0,000270	181	165
1	0,001472	0,001624	150	138
2	0,001604	0,001833	148	135
3	0,001604	0,001833	148	135

A análise da Tabela 4.1 permite concluir que a combinação do Lema 4.2, para o projeto do controlador sem considerar a teoria de eventos, e o Teorema 4.1 para o projeto por emulação baseado em eventos, resultou em valores maiores de σ e, consequentemente, na redução do número de eventos em comparação com o Lema 4.1 e o Teorema 4.1. Além disso, aumentar o grau da estrutura polinomial das matrizes $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ diminui o conservadorismo e contribui para a redução de eventos.

A Figura 4.2 mostra o intervalo entre eventos para o caso de grau 0 da Tabela 4.1, onde o número de eventos foi 165. É importante ressaltar que essa figura foi um resultado obtido para essa condição com parâmetros (α_k) aleatórios. Nota-se que o maior intervalo entre eventos foi de 4 instantes de tempo. Enquanto na Figura 4.3, o número de eventos foi 135, obtidos para o caso de grau 3. Percebe-se que a Figura 4.3 possui um intervalo maior entre os eventos, indicando assim uma redução na presença dos mesmos.

Para ilustrar a eficiência do método, as Figuras 4.4 e 4.5 apresentam, respectivamente, a evolução dos estados x_1 e x_2 para o caso utilizando o Lema 4.2 e o grau 3 das matrizes $P(\alpha_k)$ e $X(\alpha_k)$ para diferentes valores de α_k. Enquanto a Figura 4.6 mostra a evolução do sinal de controle. Nota-se que o sistema, que possui em sua resposta temporal 135 eventos, consegue estabilizar satisfatoriamente o sistema em torno de 20 instantes de tempo, mesmo não enviando o sinal do vetor de estados a todo instante.

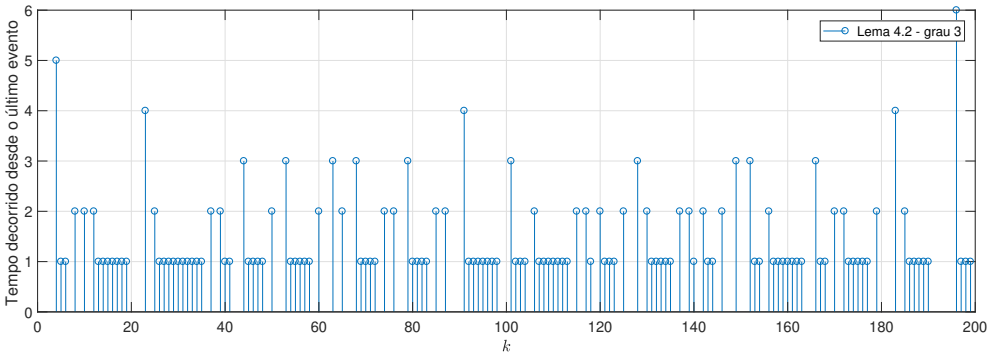


Figura 4.3: Intervalo entre eventos para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3.

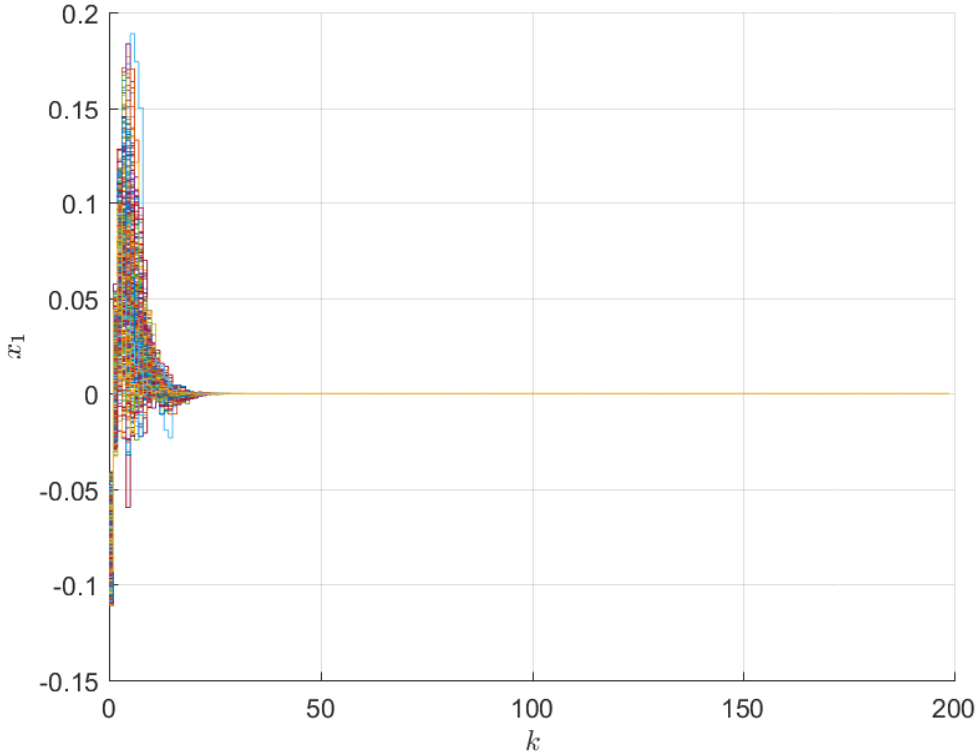


Figura 4.4: Evolução do estado x_1 para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3 e K com grau 0.

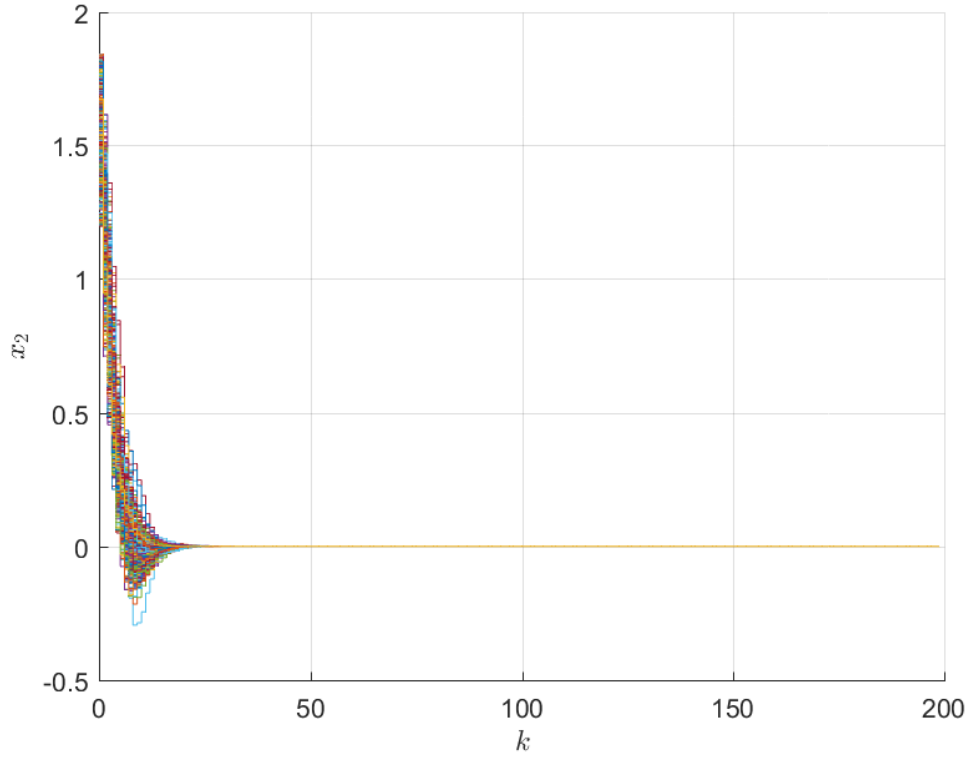


Figura 4.5: Evolução do estado x_2 para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3 e K com grau 0.

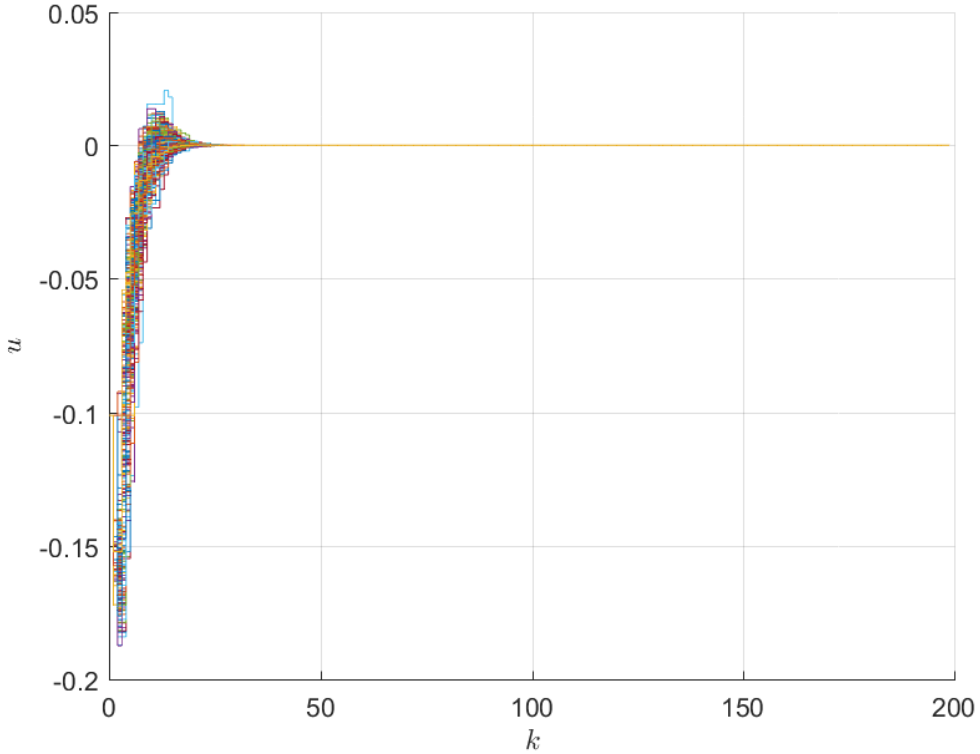


Figura 4.6: Evolução do sinal de controle u para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3 e K com grau 0.

4.3.1.2 *Caso $\lambda = 1,0025$ e K grau 1*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K(\alpha_k)_{CLM4.1}$ e $K(\alpha_k)_{CLM4.2}$.

$$K(\alpha_k)_{CLM4.1} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -0,81589 & -0,03256 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -0,51269 & -0,20255 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

$$K(\alpha_k)_{CLM4.2} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -0,78477 & -0,13676 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -0,72810 & -0,20365 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

Aplicando os valores de (4.29) e (4.30) no Teorema 4.1, o valor de σ encontrado de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ é apresentado na Tabela 4.2, juntamente com os números de eventos para cada controlador. O número de eventos foi analisado em uma média de 500 iterações para diferentes α_k em um intervalo de 201 instantes.

Tabela 4.2: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 1 com $\lambda = 1,0025$ e K grau 1.

grau	σ (4.29)	σ (4.30)	Número de eventos (4.29)	Número de eventos (4.30)
0	0,000012	0,000298	198	178
1	0,001200	0,001804	170	145
2	0,001891	0,002250	162	139
3	0,002120	0,002309	160	139

Conclusões semelhantes podem ser extraídas da seção 4.3.1.1; no entanto, neste caso, há a presença de K dependente de parâmetros. A robustez do controlador nesse cenário resultou em um aumento no número de eventos, o que pode parecer paradoxal. No entanto, uma análise de (4.5) permite concluir que a presença de $\Delta K(\alpha_{k_i}, \alpha_k)$ aumenta o valor de $\nu(k)$ quando K é dependente de parâmetros. Além disso, por meio da função geradora de eventos, um aumento em $\nu(k)$ resulta em um aumento no número de eventos.

De forma semelhante ao caso anterior, para ilustrar a eficiência do método, as Figuras 4.7 e 4.8 apresentam, respectivamente, a evolução dos estados x_1 e x_2 para o caso utilizando o Lema 4.2 e o grau 3 das matrizes $P(\alpha_k)$ e $X(\alpha_k)$ para diferentes α_k. Enquanto a Figura 4.9 mostra a evolução do sinal de controle. Nota-se que o sistema, que possui em sua resposta temporal 139 eventos, consegue estabilizar satisfatoriamente o sistema em torno de 20 instantes de tempo, mesmo não enviando o sinal de controle a todo instante. Além disso, os valores de x_1 e x_2 nas Figuras 4.7 e 4.8 atingem valores próximos a zero mais rapidamente do que os valores apresentados pelas Figuras 4.4 e 4.5.

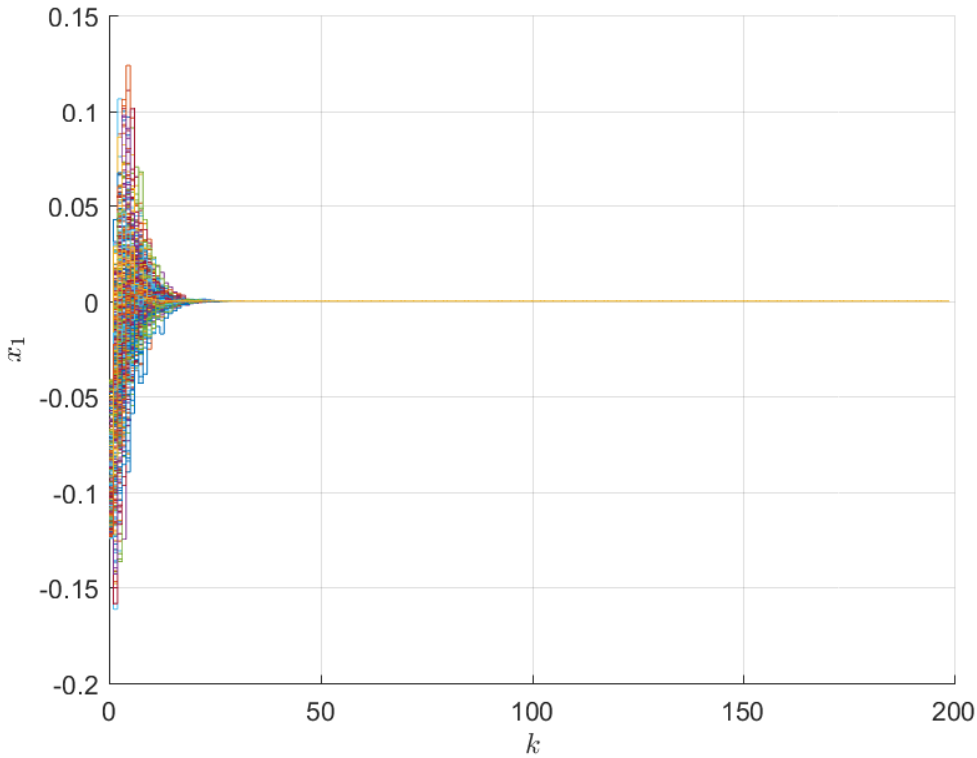


Figura 4.7: Evolução do estado x_1 para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3 e K com grau 1.

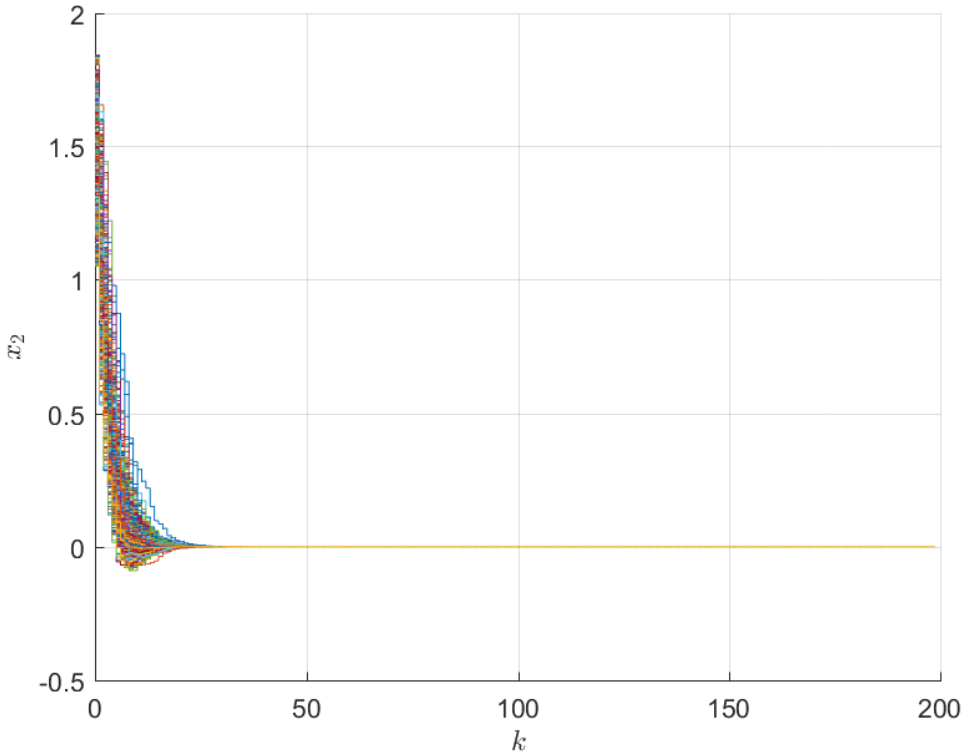


Figura 4.8: Evolução do estado x_2 para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3 e K com grau 1.

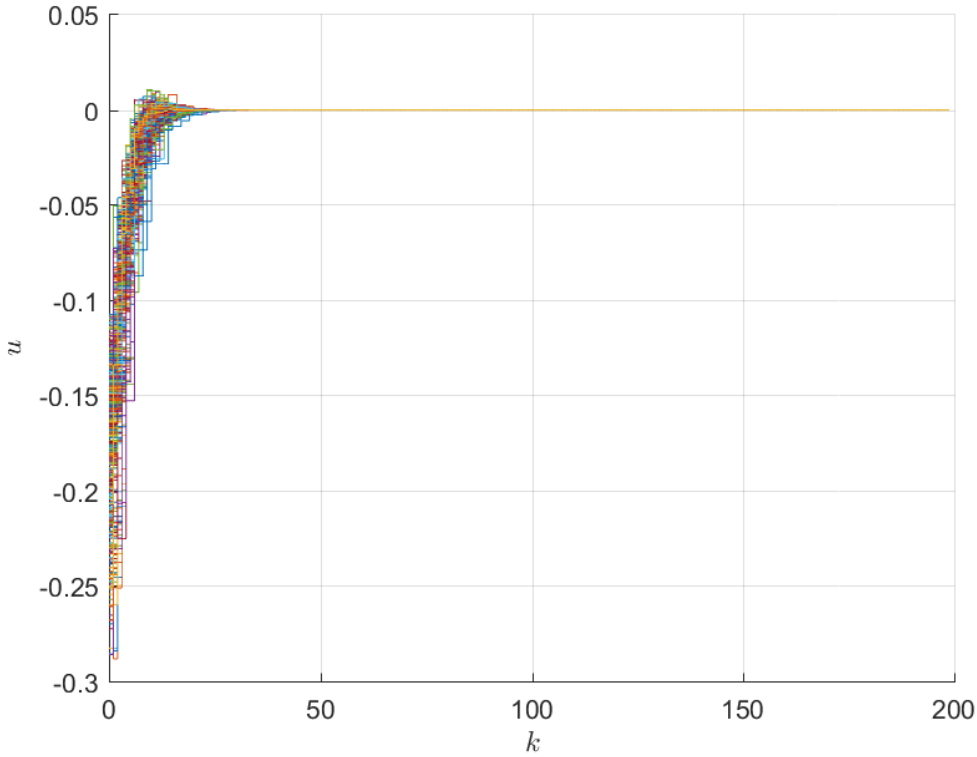


Figura 4.9: Evolução do sinal de controle u para o Exemplo 1 utilizando Lema 4.2 e grau 3 e K com grau 1.

4.3.1.3 *Caso $\lambda = 1,0025$ e K grau 2*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K(\alpha_k)_{CLM4.1}$ e $K(\alpha_k)_{CLM4.2}$.

$$K(\alpha_k)_{CLM4.1} = \alpha_1^2 \begin{bmatrix} -0,85997 & -0,02757 \end{bmatrix} + \alpha_1\alpha_2 \begin{bmatrix} -1,27290 & -0,24820 \end{bmatrix} + \alpha_2^2 \begin{bmatrix} -0,55050 & -0,22618 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

$$K(\alpha_k)_{CLM4.2} = \alpha_1^2 \begin{bmatrix} -0,83663 & -0,13870 \end{bmatrix} + \alpha_1\alpha_2 \begin{bmatrix} -1,74110 & -0,42424 \end{bmatrix} + \alpha_2^2 \begin{bmatrix} -0,72810 & -0,24582 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Aplicando os valores de (4.31) e (4.32) no Teorema 4.1, o valor de σ encontrado de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ é apresentado na Tabela 4.3, juntamente com os números de eventos para cada controlador. O número de eventos foi analisado em uma média de 500 iterações para diferentes valores de α_k em um intervalo de 201 instantes.

Nesse caso, o grau da estrutura polinomial do controlador é maior e, em geral, o número de eventos foi maior em comparação com o cenário do controlador de grau 1. No entanto, houve uma exceção para o Lema 4.2, nos casos em que o grau era 2 e 3 para as estruturas de $X(\alpha_k)$ e

Tabela 4.3: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 1 com $\lambda = 1,0025$ e K grau 2.

grau	σ (4.31)	σ (4.32)	Número de eventos (4.31)	Número de eventos (4.32)
0	0,000003	0,000290	200	179
1	0,001198	0,001810	172	146
2	0,002025	0,002408	164	138
3	0,002246	0,002527	162	137

$P(\alpha_k)$, em que houve uma redução e mecanismo de disparo obteve maior sucesso na diminuição de eventos. A diferença entre os dois casos foi pequena, o que pode ser explicado também pelo número de iterações realizadas, que poderia ter sido maior para realizar uma média e reduzir erros. No entanto, mesmo assim, isso indica a eficiência do método.

4.3.1.4 *Caso $\lambda = 1,3$ K grau 1*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K(\alpha_k)_{CLM4.1}$ e $K(\alpha_k)_{CLM4.2}$.

$$K(\alpha_k)_{CLM4.1} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1,11880 & -0,20090 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2,91090 - 0,60519 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

$$K(\alpha_k)_{CLM4.2} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -0,83008 & -0,20457 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2,88810 & -0,56926 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Aplicando o valor de (4.33) e (4.34) no Teorema 4.1, o valor de σ encontrado de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ é apresentado na Tabela 4.4. O número de eventos foi analisado em uma média de 500 iterações para diferentes valores de α_k em um intervalo de 201 instantes.

Tabela 4.4: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 1 com $\lambda = 1,3$ e K grau 1.

grau	σ (4.33)	σ (4.34)	Número de eventos (4.33)	Número de eventos (4.34)
0	-	0,000019	-	184
1	0,000129	0,000127	185	160
2	0,000157	0,000129	183	159
3	0,000161	0,000129	183	159

A diferença desse exemplo está presente no parâmetro λ. Na seção 4.3.1, foi apresentado que o valor máximo de λ para garantir a estabilidade do sistema em malha aberta é de $1,00245$. Portanto, aumentar o valor de λ torna o sistema mais instável e, consequentemente, aumenta o número de eventos em comparação com o caso da seção 4.3.1.2. No entanto, é importante notar que, mesmo assim, o número de eventos é reduzido quando aumenta o grau das matrizes $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$.

4.3.2 *Exemplo 2*

Considere o sistema (4.1) escolhido para análise apresentado em [48], onde

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8w & 0,5w & 0,2 & 0,03-w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1-\beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w > 0, \quad 0 \leq \beta \geq 1. \tag{4.35}$$

A seguir, serão apresentados alguns casos em que os Lemas 4.1 e 4.2 foram utilizados como projetos de controlador, juntamente com a análise realizada no Teorema 4.1. Para ilustrar a efetividade do método, o sistema em malha fechada foi simulado com as seguintes condições iniciais.

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0,45968 \\ -0,25378 \\ 2,01656 \\ 1,02011 \end{bmatrix}. \tag{4.36}$$

4.3.2.1 *Caso $w = 0,55$ e K grau 0*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K_{CLM4.1}$ e $K_{CLM4.2}$.

$$K_{CLM4.1} = \begin{bmatrix} -0,0398 & 0,0072 & -0,6233 & -0,2154 \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

$$K_{CLM4.2} = \begin{bmatrix} -0,0182 & -0,0324 & -0,3529 & -0,0906 \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Aplicando os valores de (4.37) e (4.38) no Teorema 4.1, o valor de σ encontrado de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ é apresentado na Tabela 4.5, juntamente com os números de eventos para cada controlador. O número de eventos foi analisado em uma média de 500 iterações para diferentes valores de α_k em um intervalo de 201 instantes.

Tabela 4.5: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 2 com $w = 0,55$ e K constante.

grau	σ (4.37)	σ (4.38)	Número de eventos (4.37)	Número de eventos (4.38)
0	-	0,000001	-	199
1	0,000022	0,000214	198	177
2	0,000022	0,000214	198	177
3	-	-	-	-

Semelhante ao Exemplo 1, os resultados são mais satisfatórios para a combinação do Lema 4.2 e do Teorema 4.1. Além disso, o número de eventos é reduzido quando $P(\alpha_k)$ e $X(\alpha_k)$ são

consideradas dependendentes de parâmetros. Por fim, para esse exemplo, o Teorema 4.1 não apresentou resultados factíveis para o grau 3.

4.3.2.2 *Caso $w = 0,55$ e K grau 1*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K(\alpha_k)_{CLM4.1}$ e $K(\alpha_k)_{CLM4.2}$.

$$\begin{aligned} K(\alpha_k)_{CLM4.1} = \alpha_1 &\begin{bmatrix} -0,10907 & 0,06443 & -0,54072 & -0,28199 \end{bmatrix} + \\ \alpha_2 &\begin{bmatrix} -0,27705 & 0,13655 & -0,58574 & -0,55287 \end{bmatrix} + \\ \alpha_3 &\begin{bmatrix} 0,15802 & -0,12028 & -0,58422 & 0,04305 \end{bmatrix} + \\ \alpha_4 &\begin{bmatrix} -0,19214 & 0,07475 & -0,65178 & -0,46696 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} K(\alpha_k)_{CLM4.2} = \alpha_1 &\begin{bmatrix} -0,30062 & 0,08909 & -0,47535 & -0,43479 \end{bmatrix} + \\ \alpha_2 &\begin{bmatrix} -0,35280 & 0,09463 & -0,6560 & -0,55634 \end{bmatrix} + \\ \alpha_3 &\begin{bmatrix} -0,02323 & -0,05841 & -0,36498 & -0,08949 \end{bmatrix} + \\ \alpha_4 &\begin{bmatrix} -0,05188 & -0,04003 & -0,40448 & -0,14939 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Aplicando os valores de (4.39) e (4.40) no Teorema 4.1, o valor de σ encontrado de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ é apresentado na Tabela 4.6, juntamente com os números de eventos para cada controlador. O número de eventos foi analisado em uma média de 500 iterações para diferentes valores de α_k em um intervalo de 201 instantes.

Tabela 4.6: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 2 com $w = 0,55$ e K grau 1.

grau	σ (4.39)	σ (4.40)	Número de eventos (4.39)	Número de eventos (4.40)
0	-	0,000011	-	197
1	0,000126	0,000345	194	179
2	0,000287	0,000346	190	179
3	-	-	-	-

As conclusões são semelhantes aos exemplos anteriores, no entanto, neste caso, o Lema 4.1 mostrou-se capaz de reduzir o número de eventos quando aumentou o grau das matrizes $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$.

4.3.2.3 *Caso $w = 0,55$ e K grau 2*

Nesse caso, os valores dos controladores encontrados para cada Lema 4.1 e 4.2 são, respectivamente, $K(\alpha_k)_{CLM4.1}$ e $K(\alpha_k)_{CLM4.2}$.

$$\begin{aligned}
K(\alpha_k)_{CLM4.1} = \alpha_1^2 &\begin{bmatrix}-0,09819 & 0,06041 & -0,54298 & -0,26689\end{bmatrix} + \\
\alpha_1\alpha_2 &\begin{bmatrix}-0,38489 & 0,20476 & -1,23610 & -0,86648\end{bmatrix} + \\
\alpha_1\alpha_3 &\begin{bmatrix}0,07370 & -0,06736 & -1,14330 & -0,21092\end{bmatrix} + \\
\alpha_1\alpha_4 &\begin{bmatrix}-0,20220 & 0,07791 & -1,28450 & -0,65473\end{bmatrix} + \\
\alpha_2^2 &\begin{bmatrix}-0,27525 & 0,13510 & -0,58858 & -0,54896\end{bmatrix} + \\
\alpha_2\alpha_3 &\begin{bmatrix}-0,17852 & 0,06211 & -1,2830 & -0,61663\end{bmatrix} + \\
\alpha_2\alpha_4 &\begin{bmatrix}-0,50354 & 0,22450 & -1,22940 & -1,06050\end{bmatrix} + \\
\alpha_3^2 &\begin{bmatrix}0,16449 & -0,12633 & -0,60140 & 0,04368\end{bmatrix} + \\
\alpha_3\alpha_4 &\begin{bmatrix}-0,00723 & -0,05544 & -1,35040 & -0,42553\end{bmatrix} + \\
\alpha_4^2 &\begin{bmatrix}-0,19619 & 0,07667 & -0,65893 & -0,47767\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
K(\alpha_k)_{CLM4.2} = \alpha_1^2 &\begin{bmatrix}-0,30961 & 0,10396 & -0,45344 & -0,45113\end{bmatrix} + \\
\alpha_1\alpha_2 &\begin{bmatrix}-0,85680 & 0,30637 & -1,23580 & -1,30850\end{bmatrix} + \\
\alpha_1\alpha_3 &\begin{bmatrix}-0,23755 & -0,04405 & -0,95923 & -0,39493\end{bmatrix} + \\
\alpha_1\alpha_4 &\begin{bmatrix}-0,45400 & 0,04195 & -1,2910 & -0,82436\end{bmatrix} + \\
\alpha_2^2 &\begin{bmatrix}-0,53801 & 0,18917 & -0,76943 & -0,84029\end{bmatrix} + \\
\alpha_2\alpha_3 &\begin{bmatrix}-0,28606 & -0,02949 & -1,07270 & -0,55508\end{bmatrix} + \\
\alpha_2\alpha_4 &\begin{bmatrix}-0,56741 & 0,09217 & -1,46010 & -1,06990\end{bmatrix} + \\
\alpha_3^2 &\begin{bmatrix}0,00606 & -0,07838 & -0,38612 & -0,06103\end{bmatrix} + \\
\alpha_3\alpha_4 &\begin{bmatrix}-0,05917 & -0,10314 & -0,78560 & -0,22726\end{bmatrix} + \\
\alpha_4^2 &\begin{bmatrix}-0,06843 & -0,03381 & -0,42128 & -0,17345\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Aplicando os valores de (4.41) e (4.42) no Teorema 4.1, o valor de σ encontrado de acordo com o grau de $X(\alpha_k)$ e $P(\alpha_k)$ é apresentado na Tabela 4.7, juntamente com o os números de eventos para cada controlador. O número de eventos foi analisado em uma média de 500 iterações para diferentes valores de α_k em um intervalo de 201 instantes.

Esse último exemplo reforça o que foi observado na maioria dos casos analisados: o Lema 4.2 é mais eficiente do que o Lema 4.1 na redução de eventos, o aumento do grau das matrizes $P(\alpha_k)$ e

Tabela 4.7: Número de eventos de acordo com a condição proposta para sistemas LPV - Exemplo 2 com $w = 0,55$ e K grau 2.

grau	σ (4.41)	σ (4.42)	Número de eventos (4.41)	Número de eventos (4.42)
0	-	0,000015	-	197
1	0,000117	0,000380	195	183
2	0,000297	0,000435	191	181
3	-	-	-	-

$X(\alpha_k)$ contribui para a diminuição da ocorrência de eventos. No entanto, neste caso específico, o aumento do grau da estrutura polinomial do controlador não foi suficiente para reduzir o número de eventos em comparação com controladores de graus menores, conforme mencionado na seção 4.3.1.2.

4.4 COMENTÁRIOS FINAIS

Este capítulo discutiu as condições de emulação (lei de controle dada a priori) para o controle baseado em eventos por realimentação de estados em sistemas LPV discretos no tempo. Uma nova condição foi introduzida, a qual é capaz de reduzir a quantidade de eventos mesmo com a presença de parâmetros variantes no tempo. A redução poderia ser mais significativa com a utilização das Otimizações 3 e 4. Essa condição, apresentada no Teorema 4.1, permite a implementação do controle baseado em eventos por meio do projeto de controle por emulação, representando uma adaptação do Teorema 3.1 para sistemas LPV. Os controladores obtidos nos Lemas 4.1 e 4.2 foram utilizados nessa emulação. As vantagens do método proposto foram ilustradas por meio de exemplos numéricos encontrados na literatura.

5

CONCLUSÕES E POSSÍVEIS TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foram abordados diversos temas relacionados ao controle baseado em eventos, com foco no projeto por emulação para sistemas precisamente conhecido e sistemas com parâmetros variantes no tempo. O objetivo principal foi propor condições de projeto por emulação para tais sistemas, visando a redução do número de eventos. O conceito de grau polinomial da função de Lyapunov e do controlador foi introduzido nas análises, visando maximizar o tempo entre eventos.

No Capítulo 1, foi introduzido o controle baseado em eventos, abordando desde a criação de sistemas conectados em redes até o envio de sinais de controladores. Foi destacada a necessidade de redução no envio de informações e apresentada a estratégia de controle baseado em eventos. Também foram discutidos o projeto por emulação e co-design, ressaltando a importância da redução de eventos. Além disso, foi mencionada a presença de parâmetros variantes no tempo, enfatizando a necessidade de considerá-los no projeto do controlador. Foi abordada a importância da teoria de Lyapunov para garantir a estabilidade do sistema e a influência do grau da estrutura polinomial no controle, destacando como o aumento desse grau pode afetar o desempenho e a redução de eventos.

No Capítulo 2, foram apresentados os conceitos preliminares necessários para o desenvolvimento do trabalho, incluindo as LMIs (Linear Matrix Inequalities), o complemento de Schur, a teoria de Lyapunov, o lema de Finsler, os sistemas LPV (Linear Parameter-Varying) e a estrutura polinomial de grau arbitrário.

O Capítulo 3 apresentou a proposta de controle baseado em eventos para sistemas com parâmetros precisamente conhecidos. Foram apresentados projetos de emulação com o ganho do controlador definido a priori. Destaca-se o Lema 3.1, que apresenta o projeto de acordo com método já existente na literatura. O Teorema 3.1 é uma adaptação da abordagem descrita em [20], e a função de disparo é definida por $\nu(k)$ e $x(k)$. Por outro lado, o Teorema 3.2 é uma adaptação de [46], e a função de disparo depende de $e(k)$, $x(k)$, um escalar θ, e da própria função de Lyapunov. Por fim, o Teorema 3.3 é uma condição que utiliza Finsler, e a função de disparo é definida da mesma forma que no Teorema 3.2. Além disso, foram propostas quatro condições de otimização para aumentar a eficiência do método. Os resultados demonstraram que a Otimização 4 resultou em um menor número de eventos, seguida pelas Otimização 3, 2 e 1, respectivamente. Comparado com resultados de exemplos da literatura, o método proposto obteve resultados ainda melhores em termos de redução de eventos.

No Capítulo 4, foram abordadas as condições de controle por emulação baseado em eventos para sistemas LPV. Para realizar a emulação, foram empregados dois métodos presentes na literatura: Lema 4.1 e Lema 4.2, que desconsideram a existência de eventos. Em seguida, o teorema apresentado no Capítulo 3 foi adaptado para aplicar a emulação em sistemas LPV. Dois exemplos foram utilizados para ilustrar a eficiência do projeto. Em ambos os casos, foi

constatado que o Lema 4.2 contribuiu para uma redução no número de eventos, e o aumento do grau das funções $X(\theta_k)$ e $P(\theta_k)$ também contribuiu para a redução de eventos. No entanto, verificou-se que o aumento do grau do controlador nem sempre resultou em uma redução de eventos. Isso pode ser explicado pela presença do termo $\Delta(K)$ na função $\nu(k)$, que faz parte da função geradora de eventos. Assim, um aumento em $\nu(k)$ contribui para o aumento do número de eventos, o que explica a falta de eficiência na redução do número de eventos ao aumentar o grau do controlador.

De forma geral, este trabalho contribuiu com a proposição de condições de projeto por emulação para sistemas precisamente conhecidos e sistemas com parâmetros variantes no tempo baseados em eventos. A eficiência das condições propostas foi ilustrada por meio de exemplos e comparada com resultados da literatura. O controle baseado em eventos por emulação demonstrou-se promissor na redução do número de eventos em ambos os tipos de sistemas abordados, sendo que para sistemas com parâmetros variantes no tempo são possíveis alternativas de aplicação para melhorar ainda mais o desempenho.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

- **Projeto de controle baseado em eventos por co-design:** A estratégia aplicada neste trabalho, para reduzir o envio de sinal de controle, pode ser adaptada futuramente para o desenvolvimento de um projeto de controle baseado em eventos, tanto para sistemas precisamente conhecidos quanto para sistemas com parâmetros variantes no tempo.
- **Problemas de comunicação:** considerar a possibilidade de os sistemas enfrentarem problemas de comunicação ou ataques, como a perda de pacotes ou o ataque de repetição, e verificar a eficiência da estratégia de controle baseado em eventos diante dessas circunstâncias.
- **Saturação do atuador:** fazer uma extensão dos resultados obtidos nesse trabalho para sistemas sujeitos a saturação do atuador.
- **Observador de estados:** Utilizar a estratégia de observador de estados no controle baseado em eventos para o caso em que os estados da planta não são diretamente acessíveis.

5.2 PUBLICAÇÕES

Artigo em preparação:

- J. F. V. D. Moreira, M. J. Lacerda, “Event-based control for discrete-time linear systems: exploring strategies in the design by emulation.”

Artigo relacionado:

- J. F. V. D. Moreira, M. J. Lacerda, "State-Feedback Control for Cyber-Physical Discrete-Time Systems under Replay Attacks: An LMI Approach", In *Mathematical Problems*, (2022). https://doi.org/10.1155/2022/7946710.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. Liu, A. Selivanov, and E. Fridman. "Survey on time-delay approach to networked control." In: *Annual Reviews in Control* 48 (2019), pp. 57–79. ISSN: 1367-5788. DOI: https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2019.06.005.

[2] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. "A survey of recent results in networked control systems." In: *Proceedings of the IEEE* 95.1 (Jan. 2007), pp. 138–162.

[3] Q. Gao, B. Li, and R. Dou. "Stability Conditions for Event-triggered Control Systems with Limited Bandwidth and Network Delay." In: *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*. 2018, pp. 4644–4649. DOI: 10.1109/CCDC.2018.8407934.

[4] T. Yang. "Networked Control System: A brief survey." In: *Control Theory and Applications, IEE Proceedings* - 153 (Aug. 2006), pp. 403 –412. DOI: 10.1049/ip-cta:20050178.

[5] P. H. S. Coutinho. "Dynamic Event-Triggered Control of Nonlinear Systems: a quasi-LPV approach." PhD thesis. Belo Horizonte, MG: Universidade Federal de Minas Gerais, 2021.

[6] L. C. Moreira. "Event-Triggered Control for Rational and Lur'e Type Nonlinear Systems." PhD thesis. Porto Alegre, RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2018.

[7] H. Li, Y. Fan, G. Pan, and C. Song. "Event-Triggered Remote Dynamic Control for Network Control Systems." In: *2020 16th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*. 2020, pp. 483–488.

[8] B. Bernhardsson and K. Åström. "Comparison of Periodic and Event Based Sampling for First-Order Stochastic Systems." English. In: 14th IFAC World Congress (1999) ; Conference date: 05-07-1999 Through 09-07-1999. 1999.

[9] K.-E. Årzén. "A Simple Event-Based PID Controller." English. In: 14th IFAC World Congress (1999) ; Conference date: 05-07-1999 Through 09-07-1999. 1999.

[10] P. Tabuada. "Event-Triggered Real-Time Scheduling of Stabilizing Control Tasks." In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.9 (2007), pp. 1680–1685. DOI: 10.1109/TAC.2007.904277.

[11] W. Heemels, K. Johansson, and P. Tabuada. "An introduction to event-triggered and self-triggered control." In: *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2012, pp. 3270–3285. DOI: 10.1109/CDC.2012.6425820.

[12] U. Tiberi, C. Lindberg, and A. Isaksson. "Dead-band self-triggered PI control for processes with dead-time." In: *IFAC Proceedings Volumes* 45.3 (2012). 2nd IFAC Conference on Advances in PID Control, pp. 442–447. ISSN: 1474-6670. DOI: https://doi.org/10.3182/20120328-3-IT-3014.00075.

[13] P. H. S. Coutinho and R. M. Palhares. "Dynamic periodic event-triggered gain-scheduling control co-design for quasi-LPV systems." In: *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 41 (2021), p. 101044. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101044.

[14] S. Yoshikawa, K. Kobayashi, and Y. Yamashita. "Quantized event-triggered control of discrete-time linear systems with switching triggering conditions." In: *2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*. 2017, pp. 313–316. DOI: 10.23919/SICE.2017.8105650.

[15] C. Peng and F. Li. "A survey on recent advances in event-triggered communication and control." In: *Information Sciences* 457-458 (2018), pp. 113–125. ISSN: 0020-0255. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.04.055.

[16] L. B. Groff. "Controle baseado em eventos para sistemas em tempo discreto." M.S. tese. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.

[17] A. Eqtami, D. V. Dimarogonas, and K. J. Kyriakopoulos. "Event-triggered control for discrete-time systems." In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. 2010, pp. 4719–4724. DOI: 10.1109/ACC.2010.5531089.

[18] S. Li and B. Xu. "Co-design of event generator and controller for event-triggered control system." In: *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. 2011, pp. 175–179.

[19] M. Abdelrahim, R. Postoyan, J. Daafouz, and D. Nešić. "Co-design of output feedback laws and event-triggering conditions for linear systems." In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. 2014, pp. 3560–3565. DOI: 10.1109/CDC.2014.7039942.

[20] A. Golabi, N. Meskin, R. Tóth, J. Mohammadpour, and T. Donkers. "Event-triggered control for discrete-time linear parameter-varying systems." In: *2016 American Control Conference (ACC)*. 2016, pp. 3680–3685.

[21] X.-M. Zhang, Q.-L. Han, X. Ge, D. Ding, L. Ding, D. Yue, and C. Peng. "Networked Control Systems: A Survey of Trends and Techniques." In: *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* 7.JAS-2019-0200 (2020), p. 1. ISSN: 2329-9266. DOI: 10.1109/JAS.2019.1911651.

[22] M. Mahmoud, S. Azher Hussain, and M. Abido. "Modeling and control of microgrid: An overview." In: *Journal of the Franklin Institute* 351.5 (2014), pp. 2822–2859. ISSN: 0016-0032. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.01.016.

[23] O. Duca, E. Minca, A. Filipescu, D. Cernega, R. Solea, and C. Bidica. "Event-Based PID Control of a Flexible Manufacturing Process." In: *Inventions* 7.4 (2022). ISSN: 2411-5134. DOI: 10.3390/inventions7040086. URL: https://www.mdpi.com/2411-5134/7/4/86.

[24] W. Zuo, A. Chakravarthy, M. Malisoff, and Z. Chen. "Event-Triggered Control of Robotic Fish With Reduced Communication Rate." In: *IEEE Robotics and Automation Letters* 7.4 (2022), pp. 9405–9412. DOI: 10.1109/LRA.2022.3190612.

[25] K. Kitamura, K. Kobayashi, and Y. Yamashita. "Decentralized Event-Triggered Control of Discrete-Time Linear Systems via Output Feedback." In: *2021 IEEE 30th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. 2021, pp. 1–6. DOI: 10.1109/ISIE45552.2021.9576253.

[26] J. S. Shamma. "An Overview of LPV Systems." In: *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Ed. by J. Mohammadpour and C. W. Scherer. Boston, MA: Springer US, 2012, pp. 3–26. ISBN: 978-1-4614-1833-7. DOI: 10.1007/978-1-4614-1833-7_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1833-7_1.

[27] C. de Souza, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and E. B. Castelan. "Emulation-Based Dynamic Output-Feedback Control of Saturating Discrete-Time LPV Systems." In: *IEEE Control Systems Letters* 5.5 (2021), pp. 1549–1554. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3040683.

[28] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. "Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations." In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.7 (July 2007), pp. 1334–1340.

[29] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[30] J. Löfberg. "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB." In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan, 2004, pp. 284–289. DOI: 10.1109/CACSD.2004.1393890.

[31] L. A. L. Oliveira. "State feedback control for discrete-time LPV systems under magnitude and rate saturating actuators." M.S. tese. Universidade Federal de São João del Rei, 2021.

[32] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. "Stability tests for constrained linear systems." In: *Perspectives in Robust Control*. Ed. by S. O. Reza Moheimani. Vol. 268. Lecture Notes in Control and Information Science. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, pp. 241–257.

[33] M. L. C. Peixoto. "Static Output-Feedback Control Design for Nonlinear Systems - Polytopic Based Approaches." PhD thesis. Universidade Federal de São João del Rei, 2023.

[34] W. J. Rugh and J. S. Shamma. "Research on gain scheduling." In: *Automatica* 36.10 (Oct. 2000), pp. 1401–1425.

[35] J. S. Shamma. "Analysis and design of gain scheduled control systems." PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology, 1988.

[36] Z. Yu, H. Chen, and P.-y. Woo. "Gain Scheduled LPV H_∞ Control Based on LMI Approach for a Robotic Manipulator." In: *Journal of Robotic Systems* 19.12 (2002), pp. 585–593. DOI: https://doi.org/10.1002/rob.10062.

[37] B. Rabaoui, M. Rodrigues, H. Hamdi, and N. BenHadj Braiek. "A model reference tracking based on an active fault tolerant control for LPV systems." In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 32.6 (2018), pp. 839–857. DOI: https://doi.org/10.1002/acs.2871.

[38] F. Bianchi, R. Mantz, and C. Christiansen. "Gain scheduling control of variable-speed wind energy conversion systems using quasi-LPV models." In: *Control Engineering Practice* 13.2 (2005), pp. 247–255. ISSN: 0967-0661. DOI: https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2004.03.006.

[39] B. Ibáñez, F. Inthamoussou, and H. De Battista. "Wind turbine load analysis of a full range LPV controller." In: *Renewable Energy* 145 (2020), pp. 2741–2753. DOI: https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.08.016.

[40] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[41] A. P. Pandey and M. C. de Oliveira. "A New Discrete-Time Stabilizability Condition for Linear Parameter-Varying Systems." In: *Automatica* 79 (2017), pp. 214–217. ISSN: 0005-1098. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.02.006. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109817300602.

[42] J. Caigny, J. Camino, R. Oliveira, P. Peres, and J. Swevers. "Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems." In: *Control Theory & Applications, IET* 4 (Apr. 2010), pp. 362 –380. DOI: 10.1049/iet-cta.2008.0364.

[43] A. Pandey and M. Oliveira. "Discrete-Time H_∞ Control of Linear Parameter-Varying Systems." In: *International Journal of Control* 92 (Apr. 2018), pp. 1–25. DOI: 10.1080/00207179.2018.1459855.

[44] M. Peixoto, P. Pessim, M. Lacerda, and R. Palhares. "Stability and stabilization for LPV systems based on Lyapunov functions with non-monotonic terms." In: *Journal of the Franklin Institute* 357.11 (2020), pp. 6595–6614. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2020.04.019.

[45] M. Zhu, Y. Fan, and J. Chen. "Event-Triggered and Self-Triggered Control for Linear System Based on New Event Condition." In: *2019 Chinese Control Conference (CCC)*. 2019, pp. 4265–4269.

[46] S. Yan, Z. Gu, and J. H. Park. "Lyapunov-Function-Based Event-Triggered Control of Nonlinear Discrete-Time Cyber–Physical Systems." In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 69.6 (2022), pp. 2817–2821. DOI: 10.1109/TCSII.2022.3144354.

[47] J. F. Sturm. "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones." In: *Optimization Methods and Software* 11.1–4 (1999). http://sedumi.ie.lehigh.edu/, pp. 625–653.

[48] L. Figueiredo, M. Lacerda, and V. Leite. "Design of saturating state feedback control laws for discrete-time linear parameter varying systems through homogeneous polynomial parameter-dependent functions." In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 31 (June 2021). DOI: 10.1002/rnc.5625.

[49] C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. "Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems." In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 45.3 (Aug. 2019), 36:1–36:25.

[50] P. S. P. Pessim and M. J. Lacerda. "State-feedback control for Cyber-physical LPV systems under DoS attacks." In: *IEEE Control Systems Letters* 5.3 (2021), pp. 1043–1048.