



Universidade Federal
de São João del-Rei

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEL
ASSOCIAÇÃO AMPLA UFSJ / CEFET-MG

RAFAEL SANTANA DE MESQUITA

**FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO VIA *UNSCENTED TRANSFORM*
APLICADO NA ANÁLISE DE RISCOS OPERATIVOS EM SISTEMAS ELÉTRICOS**

SÃO JOÃO DEL-REI - MG
2026

RAFAEL SANTANA DE MESQUITA

**FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO VIA *UNSCENTED TRANSFORM*
APLICADO NA ANÁLISE DE RISCOS OPERATIVOS EM SISTEMAS ELÉTRICOS**

Dissertação apresentada à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador(a): Prof. Dr. Fernando Aparecido de Assis
Coorientador(a): Prof. Dr. Rodolfo Antônio Ribeiro de Moura

SÃO JOÃO DEL-REI - MG

2026

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M582f Mesquita, Rafael Santana de.
Fluxo de Potência Probabilístico via Unscented Transform Aplicado na Análise de Riscos Operativos em Sistemas Elétricos / Rafael Santana de Mesquita ; orientador Fernando Aparecido de Assis; coorientador Rodolfo Antônio Ribeiro de Moura. -- São João del Rei, 2026.
133 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2026.

1. Fluxo de potência probabilístico. 2. Unscented Transform. 3. reconstrução de distribuições de probabilidade. 4. simulação Monte Carlo. 5. análise de riscos sob incertezas. I. Assis, Fernando Aparecido de, orient. II. Moura, Rodolfo Antônio Ribeiro de, co-orient. III. Título.

RAFAEL SANTANA DE MESQUITA

**FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO VIA *UNSCENTED TRANSFORM*
APLICADO NA ANÁLISE DE RISCOS OPERATIVOS EM SISTEMAS ELÉTRICOS**

Dissertação apresentada à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre a Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador(a): Prof. Dr. Fernando Aparecido de Assis
Coorientador(a): Prof. Dr. Rodolfo Antônio Ribeiro de Moura

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO APARECIDO DE ASSIS**
Data: 23/07/2026 16:20:01-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Data de aprovação: 22 de junho de 2026.

Prof. Dr. Fernando Aparecido de Assis - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Rodolfo Antônio Ribeiro de Moura - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Rafael Silva Alípio - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. José Filho da Costa Castro - Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. André Milhorange de Castro - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho aos meus amigos e orientadores Fernando Assis, Rodolfo Moura e Alex Coelho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder a saúde, a força e a resiliência necessárias para percorrer este longo caminho e superar todos os obstáculos que surgiram durante esta jornada.

Ao meu pai, Raimundo, e ao meu irmão, Arthur, pelo amor incondicional, pelo incentivo constante e por serem o meu porto seguro. A base que vocês me deram foi essencial para que eu pudesse alçar esses voos. Um agradecimento especial ao meu cachorro, Bonito, cuja companhia fiel e alegria genuína trouxeram leveza aos dias mais tensos e exaustivos de estudo.

Ao meu amigo e orientador, professor Fernando Assis, pela confiança depositada em mim e no meu trabalho. Obrigado pela paciência, pelas orientações precisas e por todas as portas abertas. Sua mentoria foi fundamental para o meu crescimento profissional e pessoal.

Ao meu amigo e coorientador, professor Rodolfo Moura, por todo o suporte técnico e estrutural, pelas discussões enriquecedoras e pela dedicação constante. Suas contribuições elevaram imensamente o nível desta pesquisa.

Aos meus amigos e coorientadores de consideração, Alex Coelho e Gleison Amaral. O apoio, as ideias trocadas e a generosidade de vocês em compartilhar conhecimento foram peças-chave para que este trabalho tomasse forma.

À minha amiga Danielly, por ter sido uma verdadeira parceira de trincheira ao longo de todo esse processo. Sua companhia constante foi um dos maiores privilégios dessa jornada. Dividimos as angústias, as incertezas, as horas intermináveis de estudo e as alegrias de cada pequena vitória. Muito obrigado por ter sido um pilar essencial nessa trajetória e por fazer com que o fardo acadêmico sempre parecesse mais leve quando compartilhado.

Ao meu amigo Gabriel, pelo companheirismo ímpar, pela escuta atenta e por estar sempre lá nos momentos em que a caminhada exigiu clareza e apoio moral e emocional. Sua amizade é um dos grandes presentes que levarei desta etapa.

Aos amigos Allison e Maria Clara, por toda a parceria, pelos momentos de descontração e pelas risadas que ajudaram a manter a sanidade durante as fases de maior pressão do mestrado.

Aos amigos de laboratório, Arthur, Bárbara, Cadu, Camily, Carlos, Daniel, Gabriel Lodi, Gutenberg, Hudson, João Álvaro, João Gabriel, João Lucas, João Nóbrega, João Pedro, José Fabiano, Pedro e Rodrigo. Obrigado por transformarem o ambiente de pesquisa em um local de colaboração, companheirismo e muitas histórias compartilhadas.

Aos amigos agregados, Andréa, Bruno, Bruno Manso, Fernanda, Isabela, Juliana, Lucas Nardo, Pedro e Sthéfany, e às cachorrinhas Brisa e Kiara, por tornarem os dias em São João del-Rei mais acolhedores, divertidos e repletos de boas memórias.

À equipe da secretaria, Fernanda, Carol, Claudete e Katia, pela paciência, pela presteza e por toda a ajuda com as burocracias que viabilizaram não só a minha passagem, mas o funcionamento de todo o PPGEL.

Às colaboradoras de asseio e conservação, Ângela, Sônia, Sandra e Tuane, pelo carinho diário e por manterem o nosso ambiente de trabalho sempre acolhedor e impecável. O sorriso e a

simpatia de vocês fizeram toda a diferença na nossa rotina.

A todos os professores, técnicos e servidores do programa, pelos ensinamentos transmitidos, pelo suporte diário e por contribuírem diretamente para a minha formação acadêmica.

Aos amigos que dividiram comigo o trajeto semanal entre Divinópolis e São João del-Rei, em especial à Bruna e ao Rafael, por tornarem as horas de estrada muito mais leves e divertidas.

Estendo minha gratidão a todas as pessoas que, de alguma forma, participaram desta trajetória, seja com palavras, gestos ou ações, contribuindo para o desenvolvimento e a realização deste trabalho.

Por fim, à Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte institucional e pelo financiamento concedido, essenciais para a realização deste trabalho.

*"O que a memória ama fica eterno."
(Adélia Prado, Bagagem)*

RESUMO

A integração massiva de fontes renováveis intermitentes e o comportamento estocástico da demanda, impulsionados pela transição energética, têm inserido elevados níveis de incerteza no planejamento e na operação de sistemas elétricos de potência. Nesse cenário, a análise de fluxo de potência probabilístico (FPP) consolida-se como uma ferramenta de grande relevância para a quantificação de riscos operativos. Métodos tradicionais para solução deste problema, como a simulação Monte Carlo (SMC), embora acurados, exigem elevado esforço computacional para representar adequadamente eventos raros, localizados nas caudas das distribuições. Diante desse cenário, esta dissertação investiga uma metodologia eficiente para a solução do FPP baseada na *unscented transform* (UT) acoplada a técnicas de reconstrução de distribuições de probabilidade, nomeadamente a expansão de Cornish-Fisher e os sistemas Johnson e Pearson. A proposta fundamenta-se na capacidade da UT em propagar incertezas através das equações não lineares do sistema por meio de um conjunto reduzido de avaliações, aproximando os momentos estatísticos das grandezas de saída com boa acurácia. Complementarmente, as técnicas de reconstrução convertem esses momentos em funções de probabilidade contínuas, viabilizando estimar de forma quantitativa os riscos operativos. A avaliação da metodologia é realizada nos sistemas teste IEEE 6 barras e IEEE RTS 24 barras, confrontando-se os resultados com a SMC na identificação de violações de limites de tensão, fluxo de potência e de níveis de potência suprida pela rede de transmissão. Os resultados evidenciam a viabilidade e a eficácia da metodologia proposta, permitindo identificar estratégias mais adequadas para a modelagem probabilística e para a discretização das variáveis aleatórias. Adicionalmente, verifica-se que o método apresenta desempenho promissor na quantificação de violações operativas pouco frequentes, com ganhos computacionais e diretrizes para a aplicação das abordagens conforme o contexto de análise.

Palavras-chave: Fluxo de potência probabilístico; *unscented transform*; reconstrução de distribuições de probabilidade; análise de riscos operativos; simulação Monte Carlo; análise sob incertezas.

ABSTRACT

The massive integration of intermittent renewable sources and the stochastic behavior of demand, driven by the energy transition, have introduced high levels of uncertainty into the planning and operation of electric power systems. In this scenario, probabilistic power flow (PPF) analysis consolidates itself as a highly relevant tool for the quantification of operational risks. However, traditional methods for solving this problem, such as Monte Carlo simulation (MCS), although accurate, demand high computational effort to adequately represent rare events located in the distribution tails. Given this scenario, this dissertation investigates an efficient methodology for solving the PPF based on the *unscented transform* (UT) coupled with probability distribution reconstruction techniques, namely the Cornish-Fisher expansion and the Johnson and Pearson systems. The proposal is based on the UT's ability to propagate uncertainties through the system's non-linear equations using a reduced set of evaluations, approximating the statistical moments of the output variables with good accuracy. Additionally, the reconstruction techniques convert these moments into continuous probability functions, making it possible to quantitatively estimate operational risks. The evaluation of the methodology is performed on the IEEE 6-bus and IEEE RTS 24-bus test systems, confronting the results with the MCS in identifying violations of voltage limits, power flows, and power levels supplied by the transmission network. The results evidence the feasibility and effectiveness of the proposed methodology, enabling the identification of the most suitable strategies for probabilistic modeling and random variable discretization. Additionally, it is verified that the method presents a promising performance in quantifying infrequent operational violations, providing significant computational gains and guidelines for applying the approaches according to the analysis context.

Keywords: Probabilistic power flow; *unscented transform*; probability distribution reconstruction; operational risk analysis; monte carlo simulation; uncertainty analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação de aplicação do FPD.	28
Figura 2 – Representação de aplicação do FPP.	29
Figura 3 – Representação de aplicação da SMC.	33
Figura 4 – Representação da discretização via UT.	37
Figura 5 – Representação da amostragem realizada pela UT via Quadratura Gaussiana.	39
Figura 6 – Fluxograma iterativo do procedimento de Stieltjes.	42
Figura 7 – Domínio de validade da expansão de Cornish-Fisher no plano assimetria-curtose.	47
Figura 8 – Regiões de cobertura das subfamílias do sistema Johnson no plano assimetria-curtose.	50
Figura 9 – Regiões de cobertura das subfamílias do sistema Pearson no plano assimetria-curtose.	51
Figura 10 – Macrofluxo metodológico para a aplicação do FPP via UT.	54
Figura 11 – Detalhamento da macroetapa de Modelagem das Incertezas.	54
Figura 12 – Detalhamento da macroetapa de Aplicação da UT.	55
Figura 13 – Detalhamento da macroetapa de Reconstrução das DPs.	56
Figura 14 – Fluxograma do algoritmo do FPP via UT.	58
Figura 15 – Diagrama unifilar do sistema IEEE 6 barras.	63
Figura 16 – Diagrama unifilar do sistema IEEE RTS 24 barras.	65
Figura 17 – Plano assimetria e curtose ($\gamma \times \kappa$) para as grandezas analisadas no Cenário I.1.	73
Figura 18 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.1).	74
Figura 19 – Histogramas das DPs para as grandezas selecionadas (Cenário I.1).	75
Figura 20 – Histograma da potência ativa injetada pelo gerador eólico (Cenário I.2).	77
Figura 21 – Plano assimetria e curtose ($\gamma \times \kappa$) para as grandezas analisadas no Cenário I.2.	79
Figura 22 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.2).	80
Figura 23 – Histogramas das DPs para as grandezas selecionadas (Cenário I.2).	81
Figura 24 – Histograma da potência ativa injetada pelo gerador eólico (Cenário I.3).	83
Figura 25 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.3).	85
Figura 26 – Histogramas das DPs para as grandezas selecionadas (Cenário I.3).	86
Figura 27 – Histograma da potência ativa injetada pelo gerador eólico (Cenário I.4).	89
Figura 28 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.4).	91
Figura 29 – Potências ativas nas barras de conexão MUST (Cenário II.1).	96
Figura 30 – Perfis de probabilidade para as grandezas representativas (Cenário II.1).	97
Figura 31 – Potências ativas nas barras de conexão MUST (Cenário II.2).	99
Figura 32 – Perfis de probabilidade corrigidos para as grandezas representativas (Cenário II.2).	100
Figura 33 – Potências ativas nas barras de conexão MUST (Cenário II.3).	102
Figura 34 – Perfis de probabilidade para as grandezas representativas (Cenário II.3).	103

Figura 35 – Potências ativas nas barras de conexão sob risco afrouxado de 5% (Cenário II.1).	107
Figura 36 – Inter-relação entre eventos.	121
Figura 37 – Mapeamento de um espaço amostral (Ω) para obtenção de uma VA (X). . .	125
Figura 38 – Função Massa de Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta. . . .	126
Figura 39 – Função Densidade de Probabilidade de uma Variável Aleatória Contínua. . .	127
Figura 40 – Função Distribuição Acumulada de uma Variável Aleatória Discreta. . . .	129
Figura 41 – Função Distribuição Acumulada de uma Variável Aleatória Contínua. . . .	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados das barras do sistema IEEE 6 barras.	63
Tabela 2 – Dados dos circuitos do sistema IEEE 6 barras.	63
Tabela 3 – Dados dos circuitos do sistema IEEE RTS 24 barras.	66
Tabela 4 – Dados das barras do sistema IEEE RTS 24 barras.	67
Tabela 5 – Configuração e modelagem estocástica por cenário.	70
Tabela 6 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.1).	71
Tabela 7 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.1).	71
Tabela 8 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.1).	72
Tabela 9 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.1).	76
Tabela 10 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.1).	76
Tabela 11 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.2).	78
Tabela 12 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.2).	78
Tabela 13 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.2).	79
Tabela 14 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.2).	82
Tabela 15 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.2).	82
Tabela 16 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.3).	83
Tabela 17 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.3).	84
Tabela 18 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.3).	85
Tabela 19 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.3).	87
Tabela 20 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.3).	87
Tabela 21 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.4).	89
Tabela 22 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.4).	90
Tabela 23 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.4).	90
Tabela 24 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.4).	91
Tabela 25 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.4).	92
Tabela 26 – Configuração operativa base e risco regulatório de referência.	94
Tabela 27 – Comparativo da eficiência computacional (Cenário II.1).	94
Tabela 28 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário II.1).	95
Tabela 29 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário II.1).	96
Tabela 30 – Comparativo da eficiência computacional (Cenário II.2).	98
Tabela 31 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário II.2).	98
Tabela 32 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário II.2).	99
Tabela 33 – Comparativo da eficiência computacional (Cenário II.3).	101
Tabela 34 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário II.3).	101
Tabela 35 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário II.3).	102
Tabela 36 – Configuração operativa e risco regulatório afrouxado (Sensibilidade à Raridade).	104

Tabela 37 – Comparativo transversal de eficiência computacional: Risco de 2% vs. Risco de 5%.	104
Tabela 38 – Probabilidade de violação do limite regulatório afrouxado.	106
Tabela 39 – Comparativo transversal de eficiência computacional sob expansão dimensional.	108
Tabela 40 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST frente à expansão dimensional.	109
Tabela 41 – Comparativo global de características e viabilidade metodológica (SMC vs. UT+SP).	110

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CA/CC	Corrente Alternada / Corrente Contínua
CF	Expansão de Cornish-Fisher
CV	Coeficiente de Variação
DP	Distribuição de Probabilidade
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FDA	Função Distribuição Acumulada
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FDPC	Função Densidade de Probabilidade Conjunta
FMP	Função Massa de Probabilidade
FOR	<i>Forced Outage Rate</i> (Taxa de Indisponibilidade Forçada)
FPD	Fluxo de Potência Determinístico
FPP	Fluxo de Potência Probabilístico
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
MM	Método dos Momentos
MUST	Montante de Uso do Sistema de Transmissão
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PEM	<i>Point Estimate Method</i> (Método de Estimativa por Ponto)
QG	Quadratura Gaussiana
RTS	<i>Reliability Test System</i>
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SJ	Sistema Johnson
SMC	Simulação Monte Carlo
SP	Sistema Pearson
UT	<i>Unscented Transform</i>
VA	Variável Aleatória

LISTA DE SÍMBOLOS

a_{km}	Relação de transformação (<i>tap</i>) do transformador
b_{km}	Susceptância série do ramo $k - m$
B_{km}	Susceptância do elemento km da matriz admitância nodal
b_{km}^{sh}	Susceptância <i>shunt</i> (carregamento) da linha de transmissão
D_{max}	Desvio máximo absoluto
$F(x)$	Função distribuição acumulada
$f(x)$	Função densidade de probabilidade
g_{km}	Condutância série do ramo $k - m$
G_{km}	Condutância do elemento km da matriz admitância nodal
J_k	Matriz de Jacobi
M_k	Valor do contrato de montante de uso do sistema de transmissão
N	Número de simulações da SMC
P_d, Q_d	Potências ativa e reativa de demanda (carga)
P_k, Q_k	Potências ativa e reativa líquidas injetadas na barra k
P_{km}, Q_{km}	Fluxos de potência ativa e reativa no ramo $k - m$
$p_j(x)$	Polinômio ortogonal de ordem j
S_{cr}	Fluxo de potência aparente crítico do ramo
S_i	Ponto sigma
S_p	<i>Speedup</i> (ganho de eficiência computacional relativa)
V_k	Magnitude de tensão na barra k
v	Velocidade do vento
w_i	Peso associado ao ponto sigma S_i
α, β, δ	Parâmetros de forma (distribuição Beta e sistema Johnson)
β	Coefficiente de variação (critério de parada da simulação Monte Carlo)
γ	Assimetria (<i>skewness</i>)
ϵ_a	Desvio absoluto
ϵ_r	Desvio relativo percentual
θ_{km}	Diferença angular entre as tensões das barras k e m
κ	Curtose (<i>kurtosis</i>)
λ	Taxa de falha de equipamentos
μ	Valor esperado (média estatística) ou taxa de reparo
ν, ξ	Parâmetros de escala e forma do sistema Johnson
σ	Desvio padrão
σ^2	Variância
ϕ	Ângulo de defasagem do transformador defasador
ω_m	Pesos auxiliares da regra de Fejér
Ω	Espaço amostral ou conjunto de possibilidades

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Considerações Iniciais	20
1.2	Revisão da Literatura	21
1.3	Objetivos	25
1.3.1	Objetivo Geral	25
1.3.2	Objetivos Específicos	25
1.4	Estrutura do Trabalho	25
2	FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO	27
2.1	Fundamentos do Fluxo de Potência	27
2.2	Modelagem de Incertezas	29
2.2.1	Cargas Convencionais	30
2.2.2	Fontes Renováveis Intermitentes	30
2.2.2.1	Geração Eólica	30
2.2.2.2	Geração Fotovoltaica	31
2.2.3	Indisponibilidade de Equipamentos	32
2.3	Solução do FPP via SMC	32
3	UNSCENTED TRANSFORM	35
3.1	Formulação Geral	35
3.2	<i>Unscented Transform</i> via Quadratura Gaussiana	38
3.3	Procedimento de Stieltjes	40
3.4	Aplicação Multidimensional	42
4	RECONSTRUÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE	45
4.1	Expansão de Cornish-Fisher	45
4.2	Método dos Momentos	47
4.2.1	Sistema Johnson	48
4.2.2	Sistema Pearson	50
4.3	Considerações Finais	52
5	FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO VIA UNSCENTED TRANSFORM	53
5.1	Solução do FPP via UT	53
5.1.1	Modelagem das Incertezas	54
5.1.2	Aplicação da UT	55
5.1.3	Reconstrução das DPs	56
5.2	Análises de Riscos Operativos	59
5.2.1	Riscos de Subtensão e Sobretenção nos Barramentos	59
5.2.2	Risco de Sobrecarga nos Ramos	60
5.2.3	Risco de Violação Contratual do MUST	60
5.3	Considerações Finais	61

6	RESULTADOS	62
6.1	Metodologia de Avaliação	62
6.1.1	Sistemas Elétricos Teste	62
6.1.1.1	Sistema IEEE 6 Barras	62
6.1.1.2	Sistema IEEE RTS 24 Barras	64
6.1.2	Métricas de Desempenho	67
6.1.3	Análises de Desempenho	68
6.2	Estudo I: Comparativo entre as Técnicas de Reconstrução de DPs	69
6.2.1	Cenário I.1	70
6.2.2	Cenário I.2	77
6.2.3	Cenário I.3	82
6.2.4	Cenário I.4	88
6.3	Estudo II: Análise de Sensibilidades	92
6.3.1	Sensibilidade à Densidade de Discretização	94
6.3.1.1	Cenário II.1	94
6.3.1.2	Cenário II.2	97
6.3.1.3	Cenário II.3	100
6.3.2	Sensibilidade à Raridade do Evento	103
6.3.3	Sensibilidade à Dimensionalidade do Problema	107
6.3.4	Considerações Finais do Estudo II	109
7	CONCLUSÕES	111
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
APÊNDICE A CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE		119
A.1	Considerações Iniciais	119
A.2	Definições Fundamentais	119
A.3	Eventos Aleatórios	119
A.4	Probabilidade	120
A.4.1	Probabilidade Condicional	122
A.4.2	Independência Probabilística	123
A.4.3	Regra do Produto	123
A.4.4	Teorema da Probabilidade Total	123
A.4.5	Teorema de Bayes	124
A.5	Variáveis Aleatórias	124
A.6	Funções de Probabilidade	125
A.6.1	Função Massa de Probabilidade	126
A.6.2	Função Densidade de Probabilidade	127
A.6.3	Função Distribuição Acumulada	128
A.6.3.1	FDA - Variável Aleatória Discreta	128
A.6.3.2	FDA - Variável Aleatória Contínua	128

A.7	Medidas Resumo	129
A.7.1	Medidas de Posição	130
A.7.2	Medidas de Dispersão	131
A.8	Momentos Estatísticos	131
A.8.1	Momentos Brutos	131
A.8.2	Momentos Centrais	132
A.8.3	Momentos Centrais Padronizados	132
A.8.4	Momentos Estatísticos Fundamentais	133

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O planejamento e a operação de sistemas elétricos de potência (SEPs) exigem tomadas de decisão constantes sob diferentes níveis de incerteza. Tradicionalmente, o fluxo de potência é a principal ferramenta empregada para mapear o estado operativo da rede, permitindo verificar se o sistema opera dentro de regiões de segurança, como limites térmicos de linhas de transmissão e faixas adequadas de magnitude de tensão nos barramentos. Quando formulado de maneira determinística, o algoritmo fixa os valores das grandezas de entrada e, para o cenário sob avaliação, fornece apenas um valor para cada variável de saída do problema (i.e., para cada grandeza elétrica de interesse do sistema).

Embora o fluxo de potência determinístico (FPD) seja amplamente consolidado, sua principal limitação reside na incapacidade de considerar o impacto de incertezas relacionadas às variáveis de entrada do sistema. Historicamente, os SEP foram projetados baseando-se em uma lógica centrada em recursos controláveis. Contudo, o cenário global de transição energética tem impulsionado uma integração massiva de fontes renováveis intermitentes, especialmente as energias eólica e solar. Se por um lado essa mudança diversifica a matriz e reduz a emissão de gases poluentes, por outro, introduz altos níveis de volatilidade e reduz margens de segurança e controle. Aliado a isso, o comportamento estocástico da demanda, impulsionado por novas tecnologias emergentes como veículos elétricos e geração distribuída, torna o ambiente operativo ainda mais incerto (TILLMANNS; SCHÖTTLER; PRAKTIKNJO, 2026; ENERGY SYSTEMS INTEGRATION GROUP, 2021; NORTH AMERICAN ELECTRIC RELIABILITY CORPORATION, 2023).

Nesse contexto, avaliar o sistema elétrico sob a ótica de risco (e.g., a partir da estimativa de probabilidades de violação de limites de segurança) vem se tornando uma prática cada vez mais necessária. A partir dessa perspectiva, decisões estratégicas podem ser fundamentadas em índices que quantificam a probabilidade e a frequência de eventos de risco. Para que medidas mitigadoras sejam adotadas de forma eficiente, é necessário estimar essas probabilidades com elevada exatidão e em tempo computacional hábil.

O fluxo de potência probabilístico (FPP) apresenta-se como uma metodologia notoriamente adequada para análise de riscos operativos de sistemas elétricos, incorporando e propagando essas diversas fontes de incertezas até as variáveis de saída do problema. No entanto, a solução do FPP é um problema não linear de alta complexidade. A simulação Monte Carlo (SMC) é a técnica mais consolidada para solucionar esta classe de problemas, visto que não exige linearizações e simplificações na sua aplicação, o que a torna altamente acurada (TILLMANNS; SCHÖTTLER; PRAKTIKNJO, 2026; AIEN; HAJEBRAHIMI; FOTUHI-FIRUZABAD, 2016; VILLANUEVA; PAZOS; FEIJOO, 2011; LEITE DA SILVA; MILHORANCE, 2018). Contudo, por sua abordagem baseada em amostragem aleatória (i.e., sorteios), a SMC frequentemente demanda um número massivo de cálculos repetitivos, resultando em um elevado esforço computacional que inviabiliza

sua aplicação em problemas complexos. Esse cenário torna-se ainda mais desafiador pelo fato de que os eventos que provocam falhas ou violações operativas costumam estar localizados nas "caudas" das distribuições de probabilidade, o que exige um volume amostral massivo para garantir a convergência estatística e aumenta consideravelmente o custo computacional do método.

Como alternativa ao custo computacional da SMC e às restrições matemáticas dos métodos analíticos clássicos, metodologias baseadas em formas mais eficientes de amostragem, como a *unscented transform* (UT), têm ganhado relevância na literatura (OKE et al., 2011; AIEN; FOTUHI-FIRUZABAD; AMINIFAR, 2012; PERES, 2024; PENG et al., 2024). A UT seleciona um conjunto reduzido e estratégico de pontos (i.e., pontos sigma) para propagar a incerteza através das equações não lineares do fluxo de potência. No entanto, o potencial desta ferramenta ainda é subutilizado. Majoritariamente, a UT tem sido aplicada no FPP apenas para estimar os primeiros momentos estatísticos (i.e., média e variância) das variáveis de saída. Essa limitação impede a quantificação das probabilidades de violação nas caudas das distribuições, fator crítico para a análise de risco operativo. Embora alguns trabalhos já tenham se dedicado à reconstrução das distribuições de probabilidade, carecem de estudos que apliquem essa abordagem na quantificação efetiva de riscos em contextos práticos.

Para preencher essa lacuna, este trabalho propõe a aplicação do FPP via UT em conjunto com técnicas robustas de reconstrução paramétrica de distribuições (Cornish-Fisher, Johnson e Pearson). O intuito central é quantificar os riscos de violação de limites operativos em sistemas elétricos submetidos a elevadas incertezas. Para isto, a metodologia busca estimar as funções de probabilidade das grandezas elétricas com acurácia comparável à SMC, porém com custo computacional significativamente menor. Desta forma, viabiliza-se uma avaliação de risco ágil e confiável para tomadas de decisão.

1.2 Revisão da Literatura

A necessidade de incluir o comportamento estocástico das variáveis de entrada na análise de redes elétricas impulsionou a concepção do FPP. Introduzido pioneiramente por Borkowska (BORKOWSKA, 1974), o FPP estabeleceu a premissa de que injeções de potência (i.e., geração e carga) deveriam ser tratadas como variáveis aleatórias com distribuições conhecidas, resultando em variáveis de saída (i.e., tensões e fluxos) também caracterizadas por funções densidade de probabilidade (FDP).

Nas décadas que se seguiram à proposição de Borkowska, os esforços da comunidade científica concentraram-se essencialmente em duas vertentes clássicas de solução: os métodos analíticos e os métodos numéricos. O primeiro método de solução analítica, introduzido pela própria Borkowska e expandido em trabalhos subsequentes, baseou-se na operação de convolução matemática das funções de probabilidade (ALLAN; BORKOWSKA; GRIGG, 1974). Devido ao massivo esforço analítico requerido, esse método inicial dependia de simplificações severas,

como a linearização das equações de fluxo de potência e a desconsideração de perdas. Buscando contornar a dificuldade das convoluções analíticas diretas, técnicas baseadas na transformada de Laplace (ALLAN; AL-SHAKARCHI, 1976) e na transformada rápida de Fourier (ALLAN; LEITE DA SILVA; BURCHETT, 1981) foram introduzidas para manipular as funções no domínio da frequência.

Posteriormente, um salto significativo na vertente analítica ocorreu com o uso dos cumulantes estatísticos combinados com a expansão de Gram-Charlier, propostos por Zhang e Lee (2004). A técnica permitiu estimar as distribuições através de uma soma ponderada de distribuições normais, embora ainda dependesse da linearização do modelo elétrico. Para contornar os erros associados a essa aproximação frente a variáveis altamente assimétricas (e.g., geração eólica), Usaola (2009) introduziu a expansão de Cornish-Fisher na solução analítica do FPP, obtendo estimativas muito mais robustas e aderentes às caudas das distribuições, mesmo mantendo a formulação baseada na linearização da rede.

Por outro lado, a SMC (LEITE DA SILVA; ARIENTI, 1990; BILLINTON; ALLAN, 1996), classificada como um método numérico, consolidou-se como a metodologia de referência na literatura para FPP, fornecendo os parâmetros de *benchmark* para a validação de qualquer outra técnica. A SMC avalia a rede elétrica utilizando as equações não lineares completas em um amplo espaço de estados gerado por amostras pseudoaleatórias. Apesar da consolidada exatidão e da capacidade de avaliar adequadamente as regiões de risco (i.e., as caudas das distribuições), o método exige milhares de iterações para convergir a depender das características do sistema sob avaliação. Para sistemas de grande porte ou análises em tempo real, a SMC clássica é frequentemente proibitiva em termos computacionais.

As limitações inerentes a essas duas abordagens clássicas, a extrema rigidez e simplificação matemática dos métodos analíticos, e o oneroso custo computacional dos métodos de simulação (em especial a SMC), motivaram o desenvolvimento de novas abordagens. Atualmente, a literatura moderna expandiu essa taxonomia, classificando as técnicas de solução do FPP em quatro grandes famílias: aos métodos analíticos e numéricos, somaram-se os métodos por aproximação e os métodos híbridos (PRUSTY; JENA, 2017; FATTAHI et al., 2022).

Dentre os métodos por aproximação, ganharam grande relevância os métodos de estimativa por pontos (PEM - *Point Estimate Methods*), inicialmente aplicados em SEP por Su (2005) e expandidos por Morales e Perez-Ruiz (2007). Paralelamente, técnicas advindas da teoria de controle começaram a ser importadas para os sistemas de potência. Visando superar as limitações do filtro de Kalman estendido, notadamente a instabilidade de linearizações e o custo computacional das matrizes Jacobianas para propagar incertezas, Julier, Uhlmann e Durrant-Whyte (1995) propuseram uma técnica fundamentada no princípio de que é estatisticamente mais viável aproximar uma distribuição de probabilidade do que uma função não linear arbitrária. Esta abordagem, formalizada como *unscented transform* (UT) em (JULIER; UHLMANN, 1997), utiliza um conjunto estratégico de pontos, conhecidos como pontos sigma, para mapear diretamente as não linearidades do sistema, permitindo propagar a estatística das variáveis com

alta fidelidade sem recorrer às simplificações analíticas exigidas pelo filtro de Kalman.

Adicionalmente, a flexibilidade e a robustez da UT na propagação de incertezas têm motivado a sua adoção em diversas outras vertentes da engenharia de sistemas de potência. Fora do escopo do fluxo de potência, a técnica tem sido aplicada com sucesso na avaliação estatística do desempenho de linhas de transmissão e distribuição frente a descargas atmosféricas, permitindo a estimação de sobretensões e das respectivas taxas de desligamento (COELHO et al., 2023; COELHO et al., 2024; COELHO; MOURA; ASSIS, 2025; COELHO et al., 2025). Esse panorama ratifica a capacidade do método em tratar transformações altamente não lineares e probabilísticas no setor elétrico.

No contexto específico do FPP, os métodos via *unscented transform* clássica (SIGE et al., 2006; AIEN; FOTUHI-FIRUZABAD; AMINIFAR, 2012) ganharam notório destaque. Tanto a UT quanto o PEM possuem uma abordagem conceitual semelhante, aproximando os momentos estatísticos requerendo apenas um número reduzido de cálculos determinísticos de fluxo de potência (sendo $2m + 1$ para a UT clássica, em que m é o número de variáveis incertas). Apesar de muito eficientes em termos de custo computacional e de não requererem linearização das equações de fluxo de potência, esses métodos baseados em aproximação clássica apresentam grave degradação de acurácia quando as variáveis de entrada possuem distribuições assimétricas, o que é uma característica intrínseca de sistemas elétricos. Ademais, fornecem como resultado apenas os primeiros momentos (i.e., média e variância) das variáveis de saída, não permitindo quantificar de forma adequada riscos operativos.

Os métodos híbridos surgiram da combinação de diferentes técnicas para potencializar vantagens e mitigar desvantagens mútuas. Dentre estas abordagens, destaca-se o acoplamento da SMC com a entropia cruzada (LEITE DA SILVA; MILHORANCE, 2018), visando aplicar técnicas de redução de variância para acelerar a convergência de eventos raros e reduzir o custo computacional. Adicionalmente, relevantes estudos buscaram melhorar a acurácia das técnicas de aproximação, mantendo a eficiência computacional. Nos estudos desenvolvidos por Oke et al. (2011) e Oke (2013), foi apresentada uma nova abordagem para a UT em conjunto com a expansão de Cornish-Fisher. Esta nova metodologia visou aumentar a acurácia da estimativa dos momentos estatísticos e convertê-los em funções de probabilidade, produzindo ótimos resultados, mas ainda com um domínio de validade restrito.

A literatura recente vem expandindo a aplicação da UT para lidar com novos desafios operativos, restrições e complexidades de modelagem em redes modernas. No âmbito de sistemas integrados e tratamento de dependências, Peng et al. (2022) propuseram uma formulação de FPP para redes híbridas CA/CC que aborda as incertezas correlacionadas em suas fronteiras. Sob a ótica de redes de distribuição, Peres (2024) adaptou a técnica da UT para a análise estocástica de microrredes desequilibradas operando em modo ilhado. Mais recentemente, o foco voltou-se também para a otimização matemática, com Wu et al. (2026) propondo um método acelerado para a solução do fluxo de potência ótimo estocástico.

Em paralelo, metodologias focadas especificamente no refinamento matemático do

processo de amostragem e reconstrução probabilística também avançaram. Peng et al. (2024) apresentaram uma evolução considerável para a abordagem da UT, propondo uma forma adaptativa de definição dos pontos amostrados e a utilização do método de máxima entropia para a reconstrução das funções de probabilidade.

Contudo, ao avaliar o estado da arte dessas publicações, observa-se uma importante lacuna metodológica. Apesar dos significativos avanços na eficiência de amostragem, tratamento de correlações e modelagem de restrições específicas apresentados nos trabalhos recentes (PENG et al., 2022; PERES, 2024; PENG et al., 2024; WU et al., 2026), a grande maioria dessas abordagens concentra-se predominantemente na obtenção isolada dos momentos estatísticos ou em avaliações do comportamento sistêmico global. A literatura técnica ainda carece de estudos que investiguem e comparem sistematicamente o desempenho de diferentes métodos de reconstrução analítica contínua quando acoplados à UT, avaliando a exatidão dessas aproximações com foco prático na análise quantitativa e regulatória de riscos na operação.

Para consolidar a análise histórica apresentada, ressalta-se que a literatura dispõe de trabalhos de revisão dedicados a mapear a evolução metodológica do FPP. Os estágios iniciais de desenvolvimento e a transição metodológica entre as abordagens clássicas foram sumarizados por Schilling et al. (1990) e, posteriormente, atualizados por Chen, Chen e Bak-Jensen (2008). Mais recentemente, impulsionados pela crescente complexidade dos sistemas de potência, estudos como os de Prusty e Jena (2017), Fattahi et al. (2022) e Song e Li (2025) forneceram um panorama crítico contemporâneo. Estes trabalhos de síntese consolidam a classificação moderna e evidenciam o grande desafio atual do FPP: equilibrar a exatidão estocástica com a eficiência computacional necessária para o suporte à tomada de decisões.

No contexto do planejamento e da operação de sistemas elétricos, determinar o valor esperado de grandezas como tensão, fluxo de potência aparente ou potência ativa em fronteiras de contratação é uma informação útil para o acompanhamento sistêmico, mas, em certos casos, insuficiente para a tomada de decisão sob risco. Ocorrências como a violação severa de tensão em um barramento, a operação de um circuito em sobrecarga ou a penalização de um agente por ultrapassagem de limites regulatórios ou contratuais constituem eventos críticos, localizados estritamente nas caudas das distribuições de probabilidade. Dessa forma, a avaliação de segurança do sistema requer uma representação fidedigna das extremidades dessas curvas.

É exatamente nesta lacuna que a presente dissertação se insere. Este trabalho propõe a aplicação eficiente do FPP via UT, expandindo o método para além da obtenção de parâmetros estatísticos discretos. Para tanto, investiga-se e valida-se a capacidade desta abordagem quando acoplada a técnicas paramétricas de reconstrução de distribuições (expansão de Cornish-Fisher e sistemas Johnson e Pearson). O objetivo central é quantificar riscos operativos e regulatórios com acurácia e baixo custo computacional, fornecendo indicadores diretos para orientar as ações de planejadores e operadores de sistemas elétricos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Avaliar e validar a aplicação da técnica *unscented transform*, acoplada a ferramentas de reconstrução paramétrica de distribuições de probabilidade, na solução do FPP, com foco direto na quantificação acurada de riscos operativos (i.e., probabilidade de violação de limites) em SEP sujeitos a incertezas inerentes.

1.3.2 Objetivos Específicos

Para o alcance do objetivo primário proposto, definem-se os seguintes objetivos específicos a serem cumpridos ao longo deste trabalho:

- Comparar o desempenho, a acurácia matemática e a fidelidade nas "caudas" das distribuições geradas pelas técnicas de reconstrução de Cornish-Fisher, Johnson e Pearson;
- Investigar a sensibilidade da metodologia proposta frente à variação de parâmetros da técnica UT, variabilidade da dimensionalidade do problema e grau de raridade do evento operativo avaliado;
- Aplicar a ferramenta proposta em topologias consolidadas na literatura (i.e., sistemas IEEE 6 barras e IEEE RTS 24 barras), avaliando sua escalabilidade e identificando cenários nos quais sua aplicação se mostra vantajosa em estudos de planejamento e operação.

1.4 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está organizada em sete capítulos, estruturados de forma a guiar o leitor desde os fundamentos conceituais até a aplicação prática e análise crítica da metodologia proposta.

O presente capítulo introduz o contexto da pesquisa, delinea o histórico evolutivo dos métodos de fluxo de potência probabilístico, evidencia a lacuna na literatura científica que justifica este trabalho e estabelece os objetivos a serem alcançados.

O Capítulo 2 dedica-se à fundamentação teórica do fluxo de potência probabilístico. Inicialmente, o capítulo revisa a formulação matemática do fluxo de potência determinístico, estabelecendo a base analítica do problema. Em seguida, a formulação evolui para a abordagem probabilística, detalhando o tratamento estocástico e a modelagem das incertezas inerentes às flutuações da demanda, à integração de fontes renováveis e à indisponibilidade de equipamentos. O capítulo é finalizado com a apresentação e discussão dos diferentes métodos de solução para o FPP.

O Capítulo 3 apresenta a ferramenta central da abordagem proposta, detalhando os fundamentos da *unscented transform* e a formulação para a propagação de incertezas por meio da parametrização estratégica da técnica.

O Capítulo 4 descreve as técnicas de reconstrução paramétrica de distribuições de probabilidade empregadas nesta pesquisa, a saber: a expansão de Cornish-Fisher e os Sistemas de Johnson e Pearson. O foco deste capítulo é demonstrar como essas técnicas permitem converter os momentos estatísticos estimados pela UT em uma função de probabilidade.

O Capítulo 5 dedica-se a integrar a teoria fundamentada nos capítulos anteriores em uma única metodologia estruturada. Este capítulo detalha a implementação do FPP via UT em conjunto com as técnicas de reconstrução de distribuições de probabilidade, consolidando o emprego da ferramenta para a análise quantitativa de riscos operativos em sistemas elétricos.

O Capítulo 6 destina-se à validação e à avaliação de desempenho da metodologia por meio de simulações computacionais. O texto estrutura-se desde a definição das métricas e dos sistemas teste até a execução de análises comparativas e de sensibilidade, consolidando a metodologia proposta mediante a quantificação direta de riscos operativos.

Por fim, o Capítulo 7 reúne as conclusões gerais extraídas da pesquisa, sintetizando as contribuições acadêmicas e propondo direcionamentos para trabalhos futuros.

2 FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO

Este capítulo dedica-se à fundamentação teórica e matemática do problema de FPP, conceito essencial para o desenvolvimento desta dissertação. Inicialmente, o texto formaliza o problema clássico do fluxo de potência determinístico, estabelecendo as premissas para a sua modelagem estocástica. Nas seções subsequentes, detalham-se as modelagens estatísticas das principais fontes de incerteza inerentes aos SEPs, explorando o comportamento da demanda convencional, a intermitência das fontes renováveis (eólica e solar) e a indisponibilidade topológica dos equipamentos. Por fim, apresenta-se a SMC como o método numérico de referência (*benchmark*) para a resolução do FPP, estabelecendo a base comparativa necessária para a metodologia central abordada neste estudo.

2.1 Fundamentos do Fluxo de Potência

O principal objetivo do sistema elétrico de potência é proporcionar um atendimento contínuo à demanda de carga, assegurando níveis adequados de qualidade, estabilidade e confiabilidade ao longo do fornecimento (KUNDUR, 1994). Para o cumprimento desses requisitos, a análise de fluxo de potência constitui ferramenta fundamental de avaliação, tanto para o planejamento quanto para a operação do sistema (MONTICELLI, 1983). Por meio desta análise, determina-se o estado elétrico da rede em regime permanente, obtendo as magnitudes e os ângulos de tensão nas barras, bem como os fluxos de potência ativa e reativa nos ramos. As Equações (2.1) a (2.6) representam a formulação matemática clássica do problema de fluxo de potência, cuja dedução completa e particularidades podem ser consultadas em Monticelli (1983).

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos(\theta_{km}) + B_{km} \sin(\theta_{km})) , \quad (2.1)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin(\theta_{km}) - B_{km} \cos(\theta_{km})) , \quad (2.2)$$

$$P_{km} = a_{km} V_k [a_{km} V_k g_{km} - V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \phi) - V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \phi)] , \quad (2.3)$$

$$Q_{km} = a_{km} V_k [-a_{km} V_k (b_{km} + b_{km}^{sh}) + V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \phi) - V_m g_{km} \sin(\theta_{km} + \phi)] , \quad (2.4)$$

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{mk} - \phi) + b_{km} \sin(\theta_{mk} - \phi)] , \quad (2.5)$$

$$Q_{mk} = -V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + a_{km} V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_{mk} - \phi) - g_{km} \sin(\theta_{mk} - \phi)] , \quad (2.6)$$

em que:

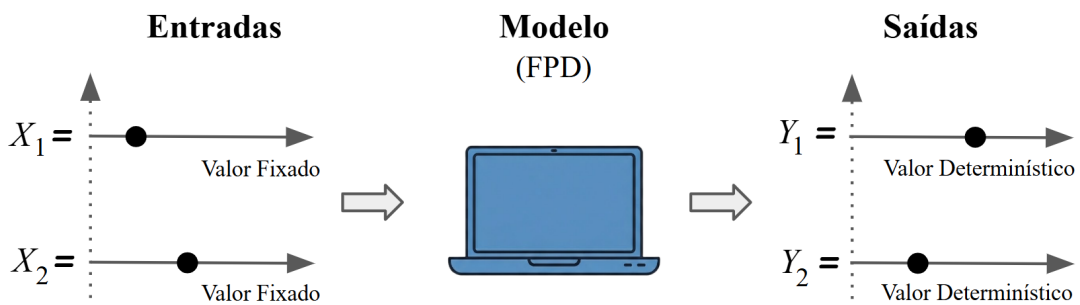
- P_k, Q_k : Potências ativa e reativa líquidas injetadas na barra k ;
- V_k, V_m : Magnitudes de tensão nas barras k e m , respectivamente;
- Ω_k : Conjunto das barras conectadas à barra k (incluindo a própria barra k);

- P_{km}, Q_{km} : Fluxos de potência ativa e reativa no ramo $k-m$;
- θ_{km} : Diferença angular entre as tensões das barras k e m ($\theta_k - \theta_m$);
- G_{km}, B_{km} : Condutância e susceptância do elemento km da matriz admitância nodal;
- g_{km}, b_{km} : Parâmetros série (condutância e susceptância) do ramo $k-m$;
- b_{km}^{sh} : Susceptância *shunt* (carregamento) da linha de transmissão;
- a_{km} : Relação de transformação (*tap*) do transformador;
- ϕ : Ângulo de defasagem do transformador defasador.

Cabe ressaltar que, em relação aos parâmetros de transformação (a_{km}) e defasagem (ϕ), a presente formulação adota o modelo em que o transformador possui uma relação ideal $1 : t$ a partir do lado de envio (barra k), onde o *tap* complexo é definido como $t = a_{km}e^{j\phi}$.

É importante notar que a abordagem clássica para a resolução do problema de fluxo de potência fundamenta-se em métodos determinísticos (i.e., FPD). Desta forma, as grandezas de entrada, como despacho de geração, topologia da rede e demanda de carga, possuem valores fixados para uma certa avaliação definida. Consequentemente, as grandezas de saída calculadas também assumem valores determinísticos, refletindo em apenas uma condição operativa do sistema como resultado. Assim, embora o FPD seja uma abordagem eficaz para avaliar cenários específicos, sua aplicação mostra-se limitada por não considerar as incertezas da natureza estocástica intrínseca à operação de sistemas reais (BILLINTON; ALLAN, 1996). A Figura 1 ilustra o processo de solução do FPD. Inicialmente, estabelecem-se valores fixos e determinísticos para as variáveis de entrada. Em seguida, resolve-se o modelo matemático do sistema para esta condição operativa específica. Por fim, obtêm-se resultados pontuais e únicos para as variáveis de saída, os quais refletem apenas o cenário simulado, desconsiderando quaisquer incertezas.

Figura 1 – Representação de aplicação do FPD.

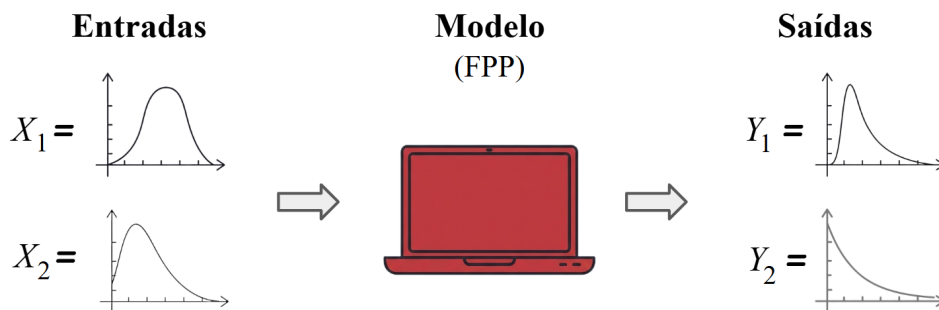


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o objetivo de superar essas limitações e permitir a incorporação das incertezas na análise do sistema, Borkowska (1974) propôs o conceito de FPP. Diferentemente da abordagem

determinística, o FPP modela as grandezas de entrada como variáveis aleatórias (VAs)¹, definidas por funções de probabilidade que representam suas características estocásticas. Como resultado, as grandezas de saída também são obtidas na forma de VAs, abrangendo uma faixa de valores admissíveis. Desta forma, a análise deixa de se restringir a um único ponto de operação para fornecer um conjunto de soluções possíveis, ponderadas por suas respectivas probabilidades de ocorrência. A Figura 2 ilustra o processo de solução do FPP. Inicialmente, representam-se as variáveis de entrada por meio de FDPs. Em seguida, aplicam-se essas incertezas como entradas no modelo do sistema. Como resultado, obtêm-se as variáveis de saída também na forma de distribuições de probabilidade, fornecendo um espectro de ocorrências possíveis em vez de um único ponto de operação.

Figura 2 – Representação de aplicação do FPP.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2 Modelagem de Incertezas

A transição de uma abordagem determinística para uma abordagem probabilística requer a modelagem adequada das variáveis estocásticas que compõem o sistema elétrico de potência (BILLINTON; ALLAN, 1996). Na prática, as grandezas do sistema estão sujeitas a perturbações contínuas e desvios em relação a seus valores previstos, os quais podem impactar significativamente o estado operativo planejado. Dentre as principais fontes de incerteza modeladas nos estudos de FPP, destacam-se a variabilidade da demanda e da geração e a indisponibilidade dos componentes da rede (ABBASI, 2022). Nas subseções seguintes são apresentadas as principais modelagens encontradas na literatura, para as quais, maiores detalhes, análises comparativas de abordagens alternativas e formulações para outras incertezas podem ser consultados em Zobaa e Aleem (2020) e Wang et al. (2025).

¹ Uma revisão detalhada dos conceitos fundamentais de estatística e probabilidade, incluindo a definição e propriedades de variáveis aleatórias, encontra-se compilada no Apêndice A.

2.2.1 Cargas Convencionais

A demanda de consumo proveniente das cargas do sistema, sendo potência ativa (P_d) e reativa (Q_d), é tradicionalmente tratada como uma variável aleatória contínua. O comportamento dinâmico dessa demanda é influenciado por diversos fatores, como sazonalidade, variações climáticas e ciclos socioeconômicos. No entanto, devido ao efeito de agregação de um número massivo de consumidores independentes vistos pela subestação de conexão, a modelagem estatística fundamenta-se no teorema do limite central (BILLINTON; ALLAN, 1996). Por este motivo, a literatura amplamente adota a distribuição Normal (ou Gaussiana) para representar a incerteza associada à previsão de carga convencional. Matematicamente, a função densidade de probabilidade da carga é expressa por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] , \quad (2.7)$$

em que μ representa o valor esperado da demanda (obtido via modelos de previsão determinísticos ou históricos de operação) e σ é o desvio padrão, que quantifica a incerteza ou o erro da previsão. Tipicamente, em estudos de FPP, o desvio padrão é assumido como um percentual da média (por exemplo, de 5% a 10%), a depender dos níveis de confiança no horizonte de planejamento (PRUSTY; JENA, 2017; WANG et al., 2020).

2.2.2 Fontes Renováveis Intermitentes

As matrizes elétricas tradicionais, baseadas predominantemente em usinas hidrelétricas e termelétricas, possuem reservatórios de água ou combustível, o que permite um planejamento e controle mais robustos da geração de energia. Já as fontes renováveis intermitentes, como eólica e solar, apresentam uma natureza não despachável. Assim, a potência injetada por essas fontes é estritamente condicionada às condições meteorológicas locais. Consequentemente, uma elevada penetração desses recursos introduz um alto grau de estocasticidade no balanço de potência do SEP, tornando imprescindível uma modelagem que inclua essa variabilidade para análises de segurança e confiabilidade nos contextos de planejamento e operação.

2.2.2.1 Geração Eólica

A modelagem estocástica da geração eólica é tipicamente dividida em duas etapas: a caracterização da velocidade do vento e a conversão dessa energia cinética em potência elétrica. Na literatura especializada, a variabilidade da velocidade do vento (v) em um determinado local é classicamente modelada por meio de uma função densidade de probabilidade de Weibull (ZOBAA; ALEEM, 2020), expressa matematicamente como:

$$f(v) = \frac{k}{c} \left(\frac{v}{c} \right)^{k-1} \exp \left[-\left(\frac{v}{c} \right)^k \right] , \quad (2.8)$$

em que $k > 0$ e $c > 0$ representam, respectivamente, o fator de forma (relacionado à dispersão dos dados) e o fator de escala (velocidade média, em m/s). Segundo o *Atlas do Potencial Eólico Brasileiro* (CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA, 2013), valores de k entre 2,0 e 3,0, aliados a um $c > 7,5$ m/s, são tipicamente adotados para refletir a forte constância dos ventos alísios na região Nordeste brasileira.

A potência elétrica de saída (P_e) fornecida por um aerogerador não apresenta uma relação linear com a velocidade do vento. Esta conversão é regida pela curva de potência do equipamento, que atua como uma função de transformação da variável aleatória de entrada. A representação analítica usual da curva de potência é dada por uma função definida por partes, conforme estabelecido em Zobaa e Aleem (2020):

$$P_e(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v < v_{ci} \\ P_r \left(\frac{v-v_{ci}}{v_r-v_{ci}} \right), & \text{se } v_{ci} \leq v < v_r \\ P_r, & \text{se } v_r \leq v \leq v_{co} \\ 0, & \text{se } v > v_{co} \end{cases}, \quad (2.9)$$

em que P_r é a potência nominal do aerogerador; v_{ci} é a velocidade de partida (*cut-in*); v_r é a velocidade nominal (*rated*); e v_{co} é a velocidade de corte (*cut-out*), limite a partir do qual as pás da turbina são embandeiradas por razões de segurança estrutural.

2.2.2.2 Geração Fotovoltaica

De forma análoga à geração eólica, a potência gerada por sistemas fotovoltaicos (P_{pv}) depende intrinsecamente da irradiância solar incidente nos painéis. O comportamento estocástico da irradiância solar para um intervalo de tempo específico é amplamente modelado pela distribuição Beta (ATWA et al., 2010). Assumindo a irradiância solar s (em kW/m²) como uma variável aleatória, a sua FDP é definida por:

$$f_b(s) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1}, & \text{para } 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.10)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ representa a função Gama; e os parâmetros de forma da distribuição, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, são calculados a partir da média (μ) e do desvio padrão (σ) dos dados históricos de irradiância do local, conforme as Equações (2.11) e (2.12) (ATWA et al., 2010):

$$\beta = (1 - \mu) \left(\frac{\mu(1 + \mu)}{\sigma^2} - 1 \right), \quad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{\mu\beta}{1 - \mu}. \quad (2.12)$$

Após a determinação estatística da irradiância incidente s , a injeção de potência ativa na barra de conexão é comumente obtida através de uma função de transferência não linear. O modelo adotado deve refletir a eficiência do sistema de conversão, que decai acentuadamente para níveis muito baixos de irradiância (ZOBAA; ALEEM, 2020). Assim, a potência de saída é expressa por:

$$P_{pv}(s) = \begin{cases} P_{sr} \left(\frac{s^2}{G_{std} X_c} \right), & \text{para } 0 < s \leq X_c \\ P_{sr} \left(\frac{s}{G_{std}} \right), & \text{para } s > X_c \end{cases}, \quad (2.13)$$

em que P_{sr} denota a potência nominal do sistema fotovoltaico; G_{std} é a irradiância sob condições padrão de ambiente (usualmente 1000 W/m^2 ou 1 kW/m^2); e X_c representa o ponto específico de irradiância a partir do qual a relação de conversão de energia torna-se estritamente linear.

2.2.3 Indisponibilidade de Equipamentos

Enquanto as variabilidades das cargas e fontes renováveis caracterizam-se como incertezas contínuas, a ocorrência de falhas nos equipamentos de potência é uma característica topológica que introduz incertezas de natureza discreta no SEP. Saídas forçadas de componentes sensíveis, como linhas de transmissão, transformadores e unidades geradoras, podem alterar abruptamente os elementos da matriz admitância nodal (Y_{bus}) ou os limites de injeção de potência no sistema (BILLINTON; ALLAN, 1996). Em análises de FPP, o estado de um componente i pode ser modelado como uma variável aleatória discreta de dois estados (disponível ou indisponível). A probabilidade do i -ésimo componente estar em falha é regida pelo seu índice de indisponibilidade forçada (*Forced Outage Rate* - FOR), calculado pela relação entre a sua taxa de falha (λ) e a sua taxa de reparo (μ), conforme:

$$FOR_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (2.14)$$

Assim, o estado operativo de cada equipamento segue uma distribuição de Bernoulli, onde a probabilidade de falha é $P(X_i = 0) = FOR_i$ e a probabilidade de operação normal é $P(X_i = 1) = 1 - FOR_i$. Esta característica mista do problema de fluxo de potência probabilístico, que envolve de forma simultânea variáveis aleatórias contínuas (e.g., geração e demanda de potência) e discretas (e.g., topologia da rede), evidencia a complexidade matemática da avaliação sistêmica e justifica o uso de ferramentas avançadas, como a simulação Monte Carlo ou técnicas de aproximação robustas.

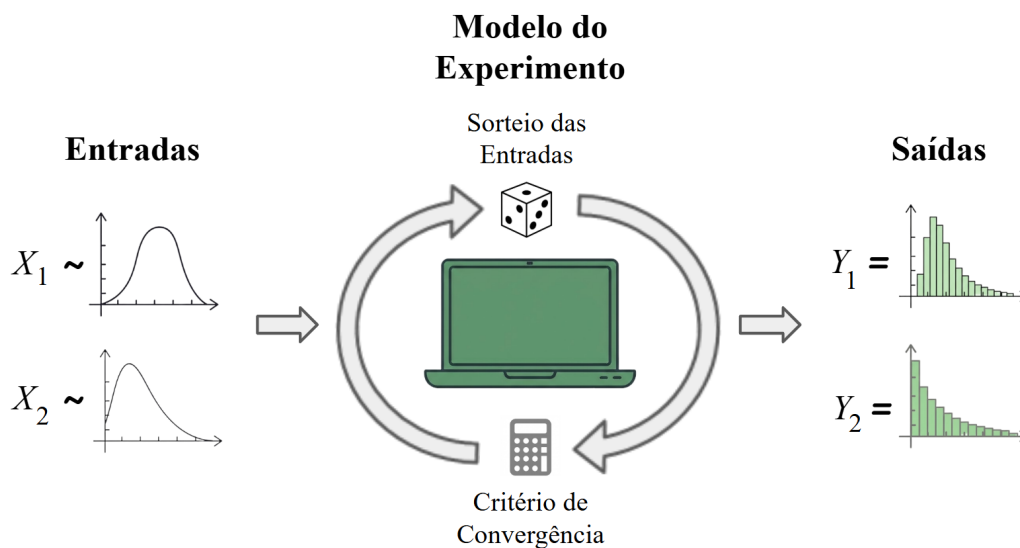
2.3 Solução do FPP via SMC

Dentre as diversas técnicas aplicadas para solução de problemas estocásticos, conforme discutido no capítulo introdutório, a simulação Monte Carlo é o método numérico mais

consolidado, sendo amplamente reconhecida como a abordagem de referência para o FPP (BILLINTON; LI, 1994). Essencialmente, o método fundamenta-se na lei dos grandes números, a qual estabelece que a probabilidade de ocorrência de um evento pode ser aproximada por sua frequência relativa, obtida através da repetição do experimento uma quantidade suficiente de vezes (RUBINSTEIN, 1981).

Na prática, a aplicação da SMC envolve a execução iterativa de um modelo determinístico até que as estimativas estatísticas das variáveis de saída atinjam uma convergência satisfatória. Sob o ponto de vista computacional, esse processo é viabilizado pela amostragem das VAs de entrada por meio de números pseudoaleatórios, os quais são sorteados seguindo as respectivas FDPs das variáveis de entrada do sistema. Portanto, a sua acurácia é diretamente dependente de uma boa modelagem das VAs de entrada, bem como, de um bom critério de convergência. A Figura 3 ilustra o fluxo de execução da SMC. Inicialmente, realiza-se a amostragem das VAs de entrada conforme suas distribuições de probabilidade. Em seguida, aplica-se o modelo determinístico do problema para o cenário sorteado. Posteriormente, verifica-se a convergência estatística e, uma vez atingido o critério de parada, obtêm-se as distribuições de probabilidade das VAs de saída.

Figura 3 – Representação de aplicação da SMC.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Existem diversos critérios para verificar a convergência estatística da SMC, sendo a utilização do coeficiente de variação β uma das abordagens mais robustas e consolidadas na literatura (BILLINTON; ALLAN, 1996). Esse índice avalia a acurácia da estimativa do valor esperado (média estatística) em relação ao próprio valor calculado, permitindo definir um critério de parada adimensional e independente da magnitude da grandeza analisada. Matematicamente, seja $F(x_i)$ o valor da variável de saída obtida na iteração i e $\tilde{E}[F(X)]$ o estimador do valor esperado após N simulações. A variância do estimador $\tilde{E}(F(X))$ pode ser obtida por:

$$V[\tilde{E}(F(X))] = \frac{V[F(X)]}{N} \quad , \quad (2.15)$$

em que $V[F(X)]$ representa a variância amostral da simulação, calculada iterativamente conforme:

$$V[F(X)] = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ F(x_i) - \tilde{E}[F(X)] \right\}^2}{N - 1} \quad . \quad (2.16)$$

O coeficiente de variação β é então definido como a razão entre o desvio padrão do estimador e o próprio valor esperado estimado. A Equação (2.17) apresenta a formulação utilizada para cálculo do β a cada iteração:

$$\beta = \frac{\sqrt{V[\tilde{E}(F(X))]}{\tilde{E}(F(X))} \quad . \quad (2.17)$$

O processo iterativo da SMC encerra-se quando o valor de β atende à uma tolerância pré-estabelecida ε (tipicamente adotada como 5% ou 1%, dependendo da exatidão requerida), indicando que o desvio estatístico da simulação está dentro de limites aceitáveis. Desta forma, assegura-se que o número de simulações N foi suficiente para que a média amostral represente a média populacional real com o nível de confiança desejado.

A grande vantagem da utilização da SMC está na sua acurácia e robustez. Diferentemente de métodos analíticos, a SMC preserva o modelo completo e não linear da análise de fluxo de potência, dispensando linearizações ou simplificações matemáticas que poderiam comprometer a exatidão dos resultados (BILLINTON; LI, 1994). Contudo, essa exatidão frequentemente impõe um custo computacional significativo para assegurar representatividade da amostra (i.e., a convergência estatística), sendo muitas vezes necessário um número elevado de simulações, o que pode onerar o tempo de processamento e o custo computacional (LEITE DA SILVA; MILHORANCE, 2018). Devido a essas características, justifica-se a adoção da SMC neste trabalho como método de referência (*benchmark*) para a validação da metodologia apresentada.

3 UNSCENTED TRANSFORM

Este capítulo dedica-se ao aprofundamento teórico e à formulação matemática da técnica *unscented transform*, abordada nesta dissertação como parte da metodologia central de solução do fluxo de potência probabilístico. Esta técnica atua como uma alternativa estatisticamente robusta, podendo ser computacionalmente mais eficiente em relação à SMC, discutida no capítulo anterior. Para fundamentar essa abordagem, o texto inicia-se com a apresentação dos princípios básicos do método, detalhando o mecanismo pelo qual a UT discretiza e propaga incertezas. Em seguida, explora-se a variação da técnica baseada em quadratura Gaussiana (UT-QG) e a aplicação do procedimento de Stieltjes, fundamentais para tratar as distribuições de probabilidade assimétricas características dos sistemas elétricos (OKE, 2013). A seção final é reservada à expansão multidimensional do método, requisito indispensável para a análise de múltiplas variáveis estocásticas presentes no SEP.

3.1 Formulação Geral

A *unscented transform*, proposta inicialmente por Julier, Uhlmann e Durrant-Whyte (1995), é um método de amostragem utilizado para discretizar variáveis contínuas, preservando suas características estatísticas originais (i.e., momentos estatísticos). A fundamentação central da UT baseia-se na premissa de que é mais fácil (e produz resultados mais acurados) simplificar uma distribuição de probabilidade do que simplificar uma função ou transformação não linear arbitrária (JULIER; UHLMANN, 2004). Nesse sentido, no contexto do fluxo de potência probabilístico, a UT destaca-se como uma alternativa robusta à SMC, uma vez que reduz significativamente o esforço computacional, mantendo a exatidão dos resultados (PENG et al., 2019). Essa eficácia decorre do fato de que a UT, assim como a SMC, propaga as incertezas diretamente através da formulação não linear do fluxo de potência, não necessitando de simplificações e linearizações típicas dos métodos analíticos.

Vale ressaltar que, diferentemente dos métodos numéricos que permitem estimar diretamente as distribuições de probabilidade, a aplicação da UT fornece como saída apenas os momentos estatísticos das grandezas de interesse (e.g., magnitudes de tensão nas barras e fluxos de potência nos ramos). Consequentemente, para viabilizar sua utilização em contextos práticos de tomada de decisão sob incertezas, torna-se necessário o emprego de técnicas complementares que permitam a reconstrução dessas distribuições (OKE, 2013), tema do Capítulo 4 desta dissertação.

Conforme apresentado no escopo deste trabalho, o FPP consiste na avaliação de um sistema submetido a variáveis de entrada com incertezas. Do ponto de vista estocástico, o comportamento de grandezas como a velocidade do vento ou a demanda de carga pode ser agrupado em um vetor de n variáveis $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$, definido em um domínio viável Ω_X . A propagação dessas incertezas pelas equações de balanço do sistema elétrico representa uma transformação não linear, aqui denotada de forma genérica por $Y = g(\mathbf{X})$.

A caracterização estatística das variáveis de saída pode ser realizada por meio de

seus momentos estatísticos¹, que fornecem informações essenciais sobre as suas distribuições. Assumindo o conhecimento da função densidade de probabilidade conjunta (FDPC) das entradas, denotada por $f(x)$, o valor esperado da saída Y ($\mu_Y = \mathbb{E}\{Y\}$) é definido através de (PAPOULIS; PILLAI, 2002):

$$\mu_Y = \mathbb{E}\{Y\} = \int_{\Omega_X} g(x) \cdot f(x) dx \quad . \quad (3.1)$$

A principal barreira prática do FPP reside na impossibilidade de solucionar esta integral analiticamente para sistemas de grande porte. Como visto anteriormente, a SMC contorna esse obstáculo amostrando o espaço de probabilidades com um número suficientemente grande de estados (N estados) e calculando a média aritmética das respostas por meio de (RUBINSTEIN, 1981):

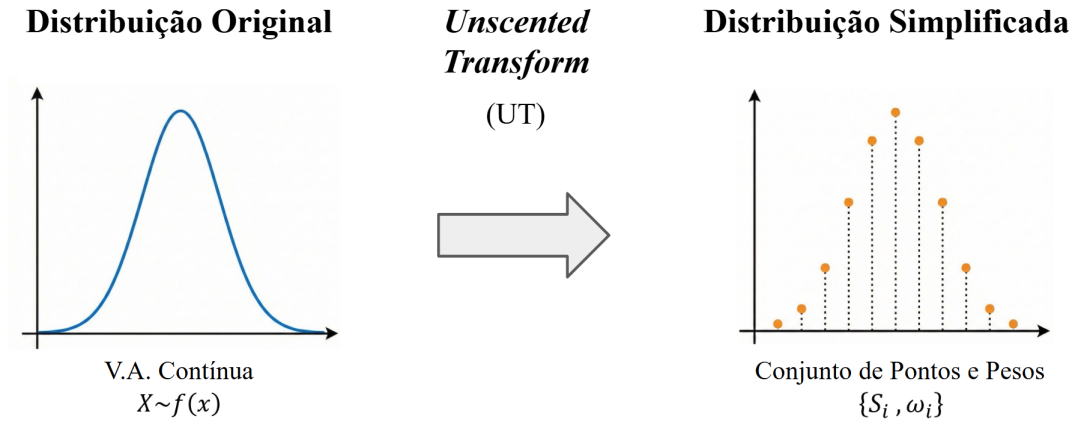
$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad . \quad (3.2)$$

Apesar de sua reconhecida robustez, a natureza aleatória de amostragem da SMC exige que N seja substancialmente elevado para garantir convergência, o que frequentemente inviabiliza sua aplicação em tempo real ou em cenários complexos de planejamento.

É exatamente nesta lacuna de eficiência que a UT se insere. Em alternativa à lógica de sorteios aleatórios, a UT propõe que a integral contínua pode ser aproximada com alta fidelidade por um conjunto extremamente reduzido de pontos de avaliação ($k \ll N$), desde que escolhidos de forma estratégica (JULIER; UHLMANN; DURRANT-WHYTE, 1995). Em termos práticos, a UT aproxima a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua por meio de uma distribuição discreta (i.e., função massa de probabilidade), preservando suas propriedades estatísticas fundamentais. Esse processo é viabilizado pela definição de um conjunto de pontos, denominados pontos sigma (S_i), aos quais são associados pesos (w_i) que permitem a reconstituição das características estatísticas originais. A Figura 4 ilustra esse processo de discretização, no qual uma distribuição Gaussiana é aproximada por um conjunto de 11 pontos sigma e seus respectivos pesos.

¹ As formulações matemáticas detalhadas para a obtenção e interpretação dos momentos estatísticos estão disponíveis para consulta no Apêndice A.

Figura 4 – Representação da discretização via UT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez definido o conjunto de pares $\{S_i, w_i\}$, a propagação das incertezas é realizada submetendo cada ponto sigma como entrada no modelo em análise, ponderando os resultados obtidos por seus respectivos pesos. No contexto do FPP, esse procedimento consiste na solução de múltiplos fluxos de potência determinísticos, em que o conjunto de pontos sigma é inserido como entrada na formulação não linear do problema. Assim, a estimativa do valor esperado passa a ser computada por uma soma ponderada simples, reduzindo drasticamente as chamadas ao modelo não linear $g(\cdot)$:

$$\hat{\mu}_Y = \sum_{i=1}^k g(s_i) \cdot w_i \quad . \quad (3.3)$$

Sob a ótica probabilística, o conjunto de pesos atua como uma função massa de probabilidade (FMP). Desta forma, para que a transformação seja matematicamente válida, é imprescindível que o somatório total dos pesos respeite o axioma fundamental das probabilidades, equivalendo à integral da FDP em todo o seu domínio, isto é, a unidade, conforme (JULIER; UHLMANN; DURRANT-WHYTE, 1995; PAPOULIS; PILLAI, 2002):

$$\int_{\Omega_X} f(x) dx = \sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad . \quad (3.4)$$

O rigor da UT fundamenta-se na forma como esses pares $\{s_i, w_i\}$ são definidos. Para que o somatório (Equação (3.3)) convirja para o valor analítico da integral (Equação (3.1)), o conjunto discreto deve emular a informação estocástica da variável contínua original. Isso é assegurado mediante a correspondência dos momentos estatísticos da distribuição, conforme formalizado por:

$$\mathbb{E}\{X^r\} = \int_{\Omega_X} x^r \cdot f(x) dx \approx \sum_{i=1}^k s_i^r \cdot w_i \quad , \quad (3.5)$$

em que r indica a ordem do momento analisado.

É importante enfatizar que a exatidão do método depende diretamente da ordem dos momentos r preservada e, consequentemente, da seleção dos pontos sigma utilizados para a representação das variáveis contínuas. Portanto, a formulação de algoritmos eficientes para a definição destes pontos e pesos torna-se o pilar fundamental para o sucesso da aplicação da UT no FPP, motivando o uso de abordagens avançadas como a quadratura Gaussiana (QG), discutida na seção a seguir.

3.2 Unscented Transform via Quadratura Gaussiana

A eficácia da discretização promovida pela UT está intrinsecamente condicionada à estratégia de seleção dos pontos sigma e dos seus respectivos pesos. Dentre as formulações disponíveis na literatura, a abordagem baseada nos princípios da quadratura Gaussiana tem se consolidado devido à sua notável exatidão na conservação de momentos estatísticos de ordem superior (OKE, 2013).

A QG é um método numérico clássico concebido para estimar a integral definida de uma função de forma otimizada. O teorema fundamental desta técnica postula que as abscissas ideais para uma aproximação de k pontos correspondem exatamente às raízes do polinômio ortogonal associado ao intervalo de integração e à função peso em questão (GOLUB; WELSCH, 1967). No contexto estocástico, esta função peso contínua corresponde à própria FDP da variável aleatória analisada.

A Figura 5 ilustra este processo de amostragem fundamentada na QG. É possível notar que o método substitui a integral contínua da FDP ($f(x)$) por um somatório ponderado de k barras discretas. Os pesos (w_i) e os pontos sigma (S_i) são selecionados de forma ótima para conservar as propriedades estatísticas da distribuição original.

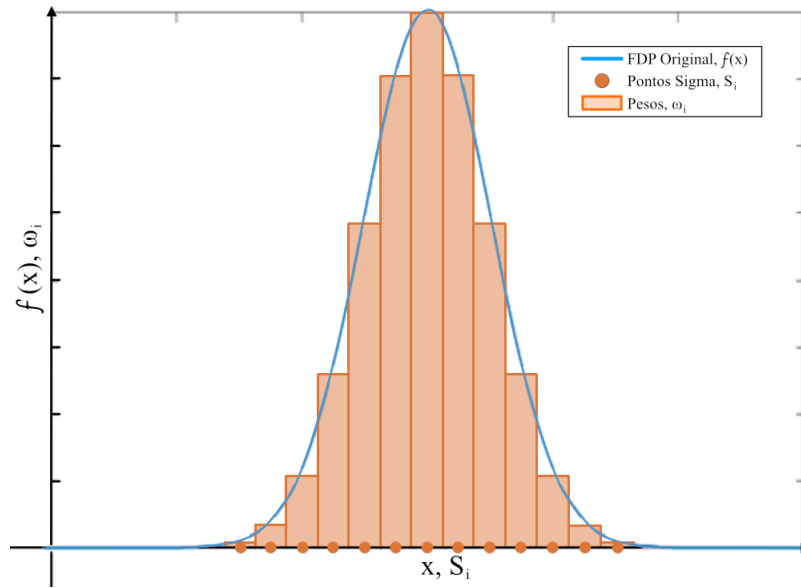
A robustez da QG resulta da sua capacidade de integrar com acurácia polinômios de grau até $2k - 1$ utilizando apenas k pontos de avaliação (GOLUB; WELSCH, 1967). Transpondo esta propriedade para o contexto estocástico, ao se determinarem k pontos sigma por meio desta quadratura, assegura-se que o conjunto discreto resultante propagará com exatidão os primeiros $2k - 1$ momentos estatísticos da distribuição original através do modelo físico ou matemático em estudo (COELHO, 2024).

Para que esta formulação seja aplicável a uma VA X , define-se um espaço de polinômios ortogonais $\mathcal{P} = \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_k(x)\}$ com respeito à sua FDP $f(x)$. A literatura estabelece que qualquer família de polinômios ortogonais satisfaz necessariamente uma relação de recorrência de três termos (GOLUB; WELSCH, 1967), formalizada pelas Equações (3.6) a (3.8):

$$p_{j+1}(x) = (x - a_j) \cdot p_j(x) - b_j \cdot p_{j-1}(x) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

$$p_0(x) = 1 \quad , \quad (3.7)$$

Figura 5 – Representação da amostragem realizada pela UT via Quadratura Gaussiana.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$p_{-1}(x) = 0 \quad , \quad (3.8)$$

em que a_j e b_j representam os coeficientes de recorrência, valores intrinsecamente dependentes do formato da FDP analisada.

Para que a relação de recorrência seja matematicamente válida, os coeficientes a_j e b_j devem ser extraídos diretamente das propriedades da FDP analisada. Na teoria clássica da quadratura, esses termos são obtidos através da razão dos produtos internos dos polinômios ortogonais. Assumindo a FDP $f(x)$ como a função peso no domínio Ω_X , as definições analíticas e contínuas dos coeficientes de recorrência são expressas pelas Equações (3.9) a (3.11):

$$a_j = \frac{\langle x \cdot p_j, p_j \rangle dF}{\langle p_j, p_j \rangle dF} = \frac{\int_{\Omega_X} x \cdot p_j(x) \cdot p_j(x) \cdot f(x) dx}{\int_{\Omega_X} p_j(x) \cdot p_j(x) \cdot f(x) dx} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad (3.9)$$

$$b_j = \frac{\langle p_j, p_j \rangle dF}{\langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle dF} = \frac{\int_{\Omega_X} p_j(x) \cdot p_j(x) \cdot f(x) dx}{\int_{\Omega_X} p_{j-1}(x) \cdot p_{j-1}(x) \cdot f(x) dx} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots \quad , \quad (3.10)$$

$$b_0 = \langle p_0, p_0 \rangle dF = \int_{\Omega_X} 1 \cdot 1 \cdot f(x) dx = 1 \quad \text{para } j = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Com os conjuntos de coeficientes $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_j]$ e $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_j]$ devidamente calculados, a QG converte a busca pelos pontos sigma em um problema canônico de álgebra linear. As abscissas desejadas correspondem aos autovalores de uma matriz tridiagonal simétrica, conhecida como matriz de Jacobi (J_k) (GOLUB; WELSCH, 1967), cuja estrutura é definida como:

$$J_k = \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_2} & a_2 & \sqrt{b_3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{b_{j-2}} & a_{j-2} & \sqrt{b_{j-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{b_{j-1}} & a_{j-1} & \sqrt{b_j} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{b_j} & a_j \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

A solução espectral da matriz J_k fornece diretamente os parâmetros requeridos pela UT. Os pontos sigma (S_i) são os autovalores da matriz, enquanto os pesos da quadratura (w_i) são derivados da primeira componente ($v_{i,1}$) dos seus respectivos autovetores normalizados, conforme:

$$w_i = v_{i,1}^2 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.13)$$

onde $v_{i,1}$ denota a primeira componente do i -ésimo autovetor ortonormal da matriz de Jacobi.

Nas situações em que a VA segue uma distribuição estatística clássica (como a Normal ou a Uniforme), os coeficientes de recorrência são analiticamente conhecidos e tabelados, derivando das famílias de polinômios de Hermite e Legendre, respectivamente. No entanto, o problema do FPP lida com incertezas modeladas por distribuições assimétricas que não possuem polinômios clássicos associados (e.g., distribuição Weibull para a velocidade do vento e Beta para a radiação solar). Ademais, fenômenos físicos frequentemente são modelados por meio de distribuições clássicas truncadas, devido à presença de regiões com valores não factíveis (e.g., valores negativos para demanda de cargas).

Para transpor essa limitação e viabilizar a construção da matriz de Jacobi, faz-se necessário o emprego de métodos avançados de integração, sendo o procedimento numérico de Stieltjes a abordagem recomendada por garantir estabilidade numérica no cálculo de polinômios ortogonais para distribuições arbitrárias, permitindo a derivação dos coeficientes adaptados a este cenário, conforme discutido na próxima seção.

3.3 Procedimento de Stieltjes

A aplicação direta da QG pressupõe que as integrais definidas nas Equações (3.9) e (3.10) possuam soluções analíticas conhecidas, o que se verifica apenas para distribuições probabilísticas clássicas (como a Normal ou Uniforme). No entanto, a modelagem estocástica de sistemas elétricos de potência frequentemente demanda o uso de distribuições empíricas e assimétricas, como a de Weibull para a velocidade dos ventos, ou até mesmo distribuições clássicas truncadas. Nestes casos, a resolução analítica dos coeficientes de recorrência torna-se inviável, exigindo abordagens de integração numérica.

Para contornar essa impossibilidade de solução direta, o procedimento de Stieltjes atua como um método iterativo capaz de estimar os coeficientes a_j e b_j com elevada exatidão (GAUTSCHI, 1968). A premissa da técnica consiste em substituir as formulações integrais contínuas por somatórios discretos, valendo-se de uma regra de quadratura auxiliar de alta densidade.

O procedimento de Stieltjes exige, inicialmente, a adequação do domínio de integração. O intervalo original de definição da VA, $\Omega_X = [\psi_1, \psi_2]$, deve ser mapeado para o domínio padronizado $[-1, 1]$. Esta conversão de limites é regida por uma função de transformação $x = \phi(\tau)$, associada à sua derivada diferencial $dx = \phi'(\tau)d\tau$. As formulações exatas para a determinação de $\phi(\tau)$ e $\phi'(\tau)$ dependem da natureza do domínio original avaliado (finito, semi-infinito ou infinito) e encontram-se rigorosamente detalhadas no trabalho de Gautschi (1968).

Uma vez transposto o domínio, as integrais exatas são aproximadas pela primeira regra de quadratura de Fejér. Esta regra aloca uma malha contendo h nós de interpolação (τ_m), estrategicamente posicionados nas raízes dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie, ponderados por pesos auxiliares ω_m . Analiticamente, as abscissas e os respectivos pesos desta quadratura interpolatória são obtidos pelas Equações (3.14) e (3.15):

$$\tau_m = \cos(\theta_m) \quad \text{em que} \quad \theta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h} \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, h, \quad (3.14)$$

$$\omega_m = \frac{2}{h} \left(1 - 2 \sum_{j=1}^{\lfloor h/2 \rfloor} \frac{\cos(2j\theta_m)}{4j^2 - 1} \right) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, h, \quad (3.15)$$

em que $\lfloor h/2 \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual a $h/2$. Ao aplicar a aproximação discreta da malha de Fejér, os coeficientes analíticos de recorrência são aproximados por estimativas numéricas ($a_j \approx \hat{a}_j$ e $b_j \approx \hat{b}_j$), conforme denotado pelas Equações (3.16) e (3.17):

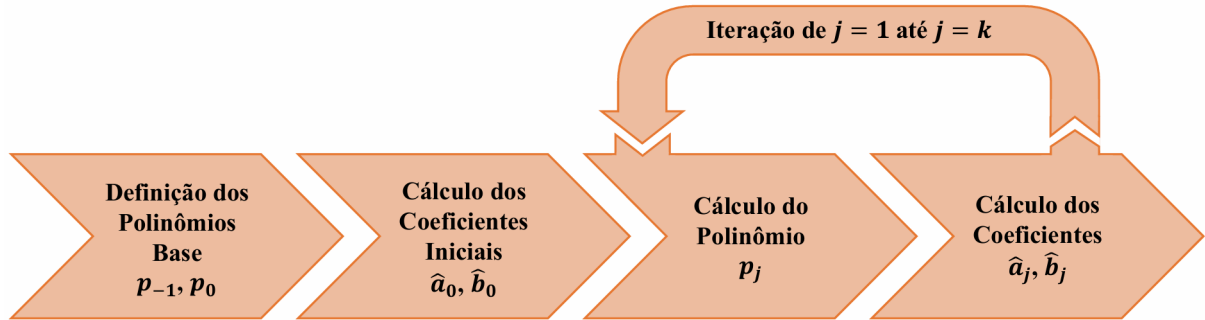
$$\hat{a}_j = \frac{\sum_{m=1}^h \omega_m \cdot \phi(\tau_m) \cdot [p_j(\phi(\tau_m))]^2 \cdot f(\phi(\tau_m)) \cdot \phi'(\tau_m)}{\sum_{m=1}^h \omega_m \cdot [p_j(\phi(\tau_m))]^2 \cdot f(\phi(\tau_m)) \cdot \phi'(\tau_m)} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

$$\hat{b}_j = \frac{\sum_{m=1}^h \omega_m \cdot [p_j(\phi(\tau_m))]^2 \cdot f(\phi(\tau_m)) \cdot \phi'(\tau_m)}{\sum_{m=1}^h \omega_m \cdot [p_{j-1}(\phi(\tau_m))]^2 \cdot f(\phi(\tau_m)) \cdot \phi'(\tau_m)} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots. \quad (3.17)$$

A lógica computacional do procedimento de Stieltjes opera de forma sequencial e recursiva. A partir da definição dos polinômios base ($p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$), os somatórios de Fejér computam os coeficientes iniciais ($\hat{a}_0$ e $\hat{b}_0$). Estes resultados alimentam a relação de recorrência, dando início a um ciclo iterativo que varia de $j = 1$ até k . A cada iteração, calcula-se o polinômio $p_j(x)$ e, na sequência, extraem-se os novos coeficientes $\hat{a}_j$ e $\hat{b}_j$. O processo avança

progressivamente até que todos os k pares de coeficientes, necessários para estruturar a matriz de Jacobi (J_k), sejam obtidos. A Figura 6 esquematiza este encadeamento iterativo.

Figura 6 – Fluxograma iterativo do procedimento de Stieltjes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para assegurar a validade desta aproximação e mitigar o erro de truncamento introduzido por Fejér em comparação ao modelo contínuo, faz-se necessária a utilização de uma malha de discretização suficientemente densa (GAUTSCHI, 1996). Avaliações empíricas demonstram que adotar um número de nós $h = 400k$ (sendo k o número de pontos sigma desejados pela UT) assegura uma convergência robusta, mantendo o desvio de estimação em patamares inferiores a 0,5% (COELHO, 2024).

3.4 Aplicação Multidimensional

As seções anteriores detalharam o processo de discretização e a obtenção de pontos sigma e pesos para uma variável aleatória univariada. Contudo, a avaliação prática do FPP impõe a modelagem de um vetor estocástico composto por múltiplas fontes de incerteza atuando de forma simultânea no sistema (e.g., demandas de carga, irradiação solar e velocidade do vento). Para acomodar essa dimensionalidade, a UT deve ser expandida para o seu caso multivariável.

Seja $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ o vetor das variáveis aleatórias de entrada definido no espaço multidimensional Ω_X . A obtenção dos momentos estatísticos para este conjunto depende da FDPC do sistema, $f(x)$. Sob a premissa de que as variáveis aleatórias modeladas são estatisticamente independentes entre si, a teoria das probabilidades assegura que a FDPC pode ser fatorada no produto das FDPs marginais de cada variável individual (PAPOULIS; PILLAI, 2002), conforme a Equação (3.18):

$$f(x) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \quad , \quad (3.18)$$

em que $f_{X_i}(x_i)$ denota a FDP marginal da i -ésima variável aleatória do vetor X .

Esta propriedade de fatoração é o pilar que permite a aplicação independente do procedimento de Stieltjes (ou da QG clássica) para cada variável isolada. Ao discretizar cada variável X_i em um conjunto próprio de k_i pontos sigma e pesos associados, a integração multidimensional é aproximada por um arranjo combinatório fundamentado no produto tensorial (ou produto de Kronecker) (OKE, 2013).

Neste arranjo, o conjunto de pontos sigma multidimensionais é formado pela combinação fatorial (produto cartesiano) de todas as amostras individuais. Em contrapartida, o peso equivalente de cada combinação multidimensional é obtido pelo produto aritmético dos pesos individuais correspondentes a cada ponto que compõe a tupla avaliada (OKE, 2013). A Equação (3.19) formaliza a aproximação dos momentos brutos da variável de saída Y para o caso n -dimensional:

$$\mathbb{E}\{Y^r\} \approx \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} (w_{1,j_1} \otimes w_{2,j_2} \otimes \cdots \otimes w_{n,j_n}) \cdot [g(s_{1,j_1}, s_{2,j_2}, \dots, s_{n,j_n})]^r, \quad (3.19)$$

em que w_{i,j_m} e s_{i,j_m} correspondem, respectivamente, ao j_m -ésimo peso e ponto sigma da i -ésima variável aleatória isolada.

É importante ressaltar que as propriedades fundamentais da UT são estritamente preservadas nesta expansão: o somatório global dos pesos combinados permanece unitário, garantindo a coerência estatística do método espacial.

No contexto da simulação do FPP, cada tupla de pontos sigma combinados $(s_{1,j_1}, \dots, s_{n,j_n})$ representa um cenário determinístico de operação da rede. A função $g(\cdot)$ atua resolvendo o FPD para este cenário específico. O esforço computacional total demandado por esta abordagem é ditado pelo número total de combinações possíveis (N_c), expresso por:

$$N_c = \prod_{i=1}^n k_i. \quad (3.20)$$

A análise da Equação (3.20) evidencia que o número de avaliações (N_c) cresce exponencialmente em função da quantidade de variáveis aleatórias em estudo. Esta característica é uma particularidade inerente à formulação tensorial da abordagem UT-QG, sendo necessária a sua discussão. A metodologia baseada na QG apresenta vantagens expressivas em relação a outras variações da UT, como a capacidade de propagar incertezas de diferentes distribuições contínuas e uma acurácia consideravelmente mais elevada. Tais características justificam a aplicação desta técnica em problemas complexos, como os encontrados nos SEPs. No entanto, o custo computacional desta formulação é criticamente sensível à dimensionalidade do problema, o que pode inviabilizar a sua aplicação em determinados contextos. Portanto, a definição das variáveis a serem modeladas e da quantidade de pontos sigma a serem utilizados por VA impõe um dilema direto entre esforço computacional e exatidão dos resultados, exigindo uma avaliação criteriosa e particular para cada aplicação.

Cabe destacar que a formulação apresentada na Equação (3.19) fornece os momentos brutos ($\mathbb{E}\{Y^r\}$) das grandezas de saída, calculados a partir da ponderação de cada amostra por seu respectivo peso global. A partir destes, os quatro indicadores estatísticos fundamentais (i.e., média, variância, assimetria e curtose) são obtidos por meio de relações algébricas diretas, conforme apresentado no Apêndice A.

A extração paramétrica destes quatro momentos encerra o processo de propagação de incertezas da UT-QG. Contudo, devido à natureza discreta da técnica, para que estes indicadores forneçam uma representação contínua do perfil estocástico do sistema, faz-se necessário o emprego de metodologias de reconstrução de distribuições de probabilidade. O equacionamento e a aplicação destas técnicas de reconstrução compõem o escopo do Capítulo 4.

4 RECONSTRUÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

A aplicação da UT na solução do FPP tem se provado altamente eficaz para a redução do esforço computacional na estimativa dos momentos estatísticos. No entanto, por sua natureza de discretização, o método fornece apenas um mapeamento discreto e ponderado das variáveis de saída. Sob a ótica do planejamento e operação de SEP, a ausência de FDPs e funções distribuição acumulada (FDA) impossibilita análises críticas para tomadas de decisão, tais como a quantificação do risco de violação de limites operativos em barramentos e circuitos.

Para transpor essa barreira e extrair o máximo potencial analítico da UT, é estritamente necessário acoplar técnicas complementares de reconstrução de distribuições de probabilidade (OKE, 2013). O presente capítulo descreve as formulações matemáticas escolhidas para este fim. O texto introduz a expansão em séries de Cornish-Fisher (CF) e, em seguida, detalha a estimação paramétrica via método dos momentos (MM), fundamentada nos sistemas de Johnson e Pearson. Um fator decisivo abordado ao longo das seções é o domínio de validade de cada ferramenta, uma métrica que pauta e justifica a seleção definitiva dos métodos mais adequados para as análises práticas desta dissertação.

4.1 Expansão de Cornish-Fisher

A CF é uma técnica analítica concebida para aproximar a função quantil de uma distribuição de probabilidade desconhecida. Em sua essência matemática, o método utiliza a função quantil de uma distribuição Normal padrão como base, adicionando sucessivos termos de distorção (baseados nos polinômios de Hermite) que são ajustados de acordo com os momentos estatísticos de ordem superior da variável de interesse (MAILLARD, 2018).

Considerando uma variável aleatória X do sistema elétrico (e.g., magnitude de tensão em uma barra ou fluxo de potência em um circuito) cujos quatro primeiros momentos (μ_x , σ_x^2 , γ_x e κ_x) foram estimados via UT, a sua função quantil aproximada $x(q)$ é expressa por (MAILLARD, 2018):

$$\begin{aligned} x(q) = \hat{\mu}_x + \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2}}{\sigma_{CF}} & \left\{ \Phi^{-1}(q) + \frac{1}{6}[(\Phi^{-1}(q))^2 - 1]\gamma_{CF} \right. \\ & + \frac{1}{24}[(\Phi^{-1}(q))^3 - 3\Phi^{-1}(q)](\kappa_{CF} - 3) \\ & \left. - \frac{1}{36}[2(\Phi^{-1}(q))^3 - 5\Phi^{-1}(q)]\gamma_{CF}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que $\Phi^{-1}(q)$ é a função quantil da distribuição Normal padrão avaliada no quantil $q \in [0,1]$, enquanto σ_{CF} , γ_{CF} e κ_{CF} são, respectivamente, o desvio padrão, a assimetria e a curtose da expansão de CF.

Um aspecto crítico na aplicação da expansão de CF é que os parâmetros de ajuste da curva (σ_{CF} , γ_{CF} e κ_{CF}) não correspondem de forma direta aos momentos originais estimados pela UT

$(\hat{\sigma}_x, \hat{\gamma}_x$ e $\hat{\kappa}_x)$. Na realidade, a teoria matemática da expansão estabelece que os momentos reais do sistema relacionam-se aos parâmetros de CF através de um sistema de equações altamente acoplado e não linear.

A estruturação matemática deste modelo fundamenta-se em um conjunto de equações fortemente dependentes. Inicialmente, o desvio padrão de CF (σ_{CF}) é definido analiticamente como:

$$\sigma_{CF} = \sqrt{1 + \frac{1}{96}(\kappa_{CF} - 3)^2 + \left(\frac{25}{1296}\right)\gamma_{CF}^4 - \frac{1}{36}(\kappa_{CF} - 3)\gamma_{CF}^2} \quad (4.2)$$

Por sua vez, as relações que impõem a igualdade para a assimetria real ($\hat{\gamma}_x$) e a curtose real ($\hat{\kappa}_x$) assumem formulações polinomiais extensas, representadas pelas Equações (4.3) e (4.4). Para evitar o uso de denominadores redundantes, estas expressões são aqui apresentadas parametrizadas em função do desvio padrão σ_{CF} previamente calculado:

$$\hat{\gamma}_x = \frac{1}{\sigma_{CF}^3} \left[\gamma_{CF} - \left(\frac{76}{216}\right)\gamma_{CF}^3 + \left(\frac{85}{1296}\right)\gamma_{CF}^5 + \frac{1}{4}(\kappa_{CF} - 3)\gamma_{CF} - \frac{13}{144}(\kappa_{CF} - 3)\gamma_{CF}^3 + \frac{1}{32}(\kappa_{CF} - 3)^2\gamma_{CF} \right] \quad (4.3)$$

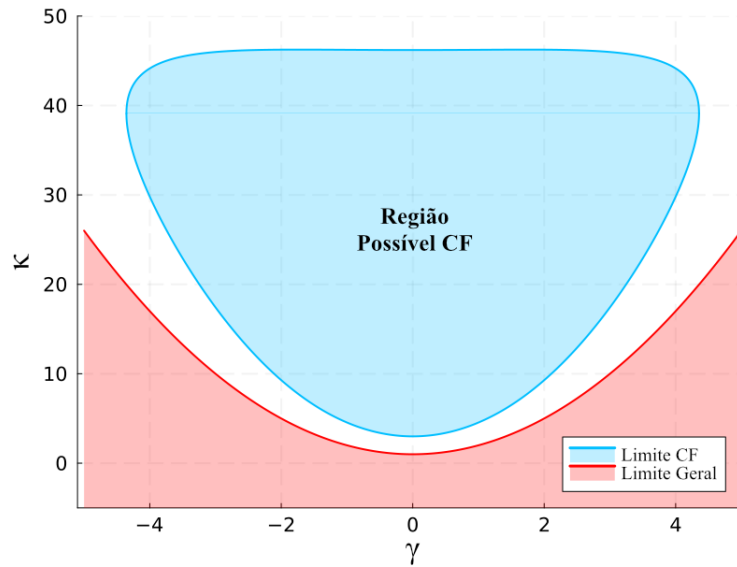
$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_x = \frac{1}{\sigma_{CF}^4} & \left[3 + (\kappa_{CF} - 3) + \frac{7}{16}(\kappa_{CF} - 3)^2 + \frac{3}{32}(\kappa_{CF} - 3)^3 \right. \\ & + \frac{31}{3072}(\kappa_{CF} - 3)^4 - \left(\frac{7}{216}\right)\gamma_{CF}^4 - \left(\frac{25}{486}\right)\gamma_{CF}^6 \\ & + \left(\frac{21665}{559872}\right)\gamma_{CF}^8 - \frac{7}{12}(\kappa_{CF} - 3)\gamma_{CF}^2 + \frac{113}{432}(\kappa_{CF} - 3)\gamma_{CF}^4 \\ & - \frac{5155}{46656}(\kappa_{CF} - 3)\gamma_{CF}^6 - \frac{7}{24}(\kappa_{CF} - 3)^2\gamma_{CF}^2 \\ & \left. + \frac{2455}{20736}(\kappa_{CF} - 3)^2\gamma_{CF}^4 - \frac{65}{1152}(\kappa_{CF} - 3)^3\gamma_{CF}^2 \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

A extração dos parâmetros de CF demanda, invariavelmente, o emprego de algoritmos iterativos de busca de raízes, como o método de Newton-Raphson ou metaheurísticas de otimização. O processo iterativo avalia a matriz Jacobiana a cada passo para atualizar os parâmetros e minimizar os resíduos entre as estimativas da UT e os momentos calculados pelas Equações (4.3) e (4.4). No entanto, a elevada sensibilidade numérica, devido a alta natureza não linear destes polinômios, faz com que o método possua um domínio de validade estrito.

Embora possua a vantagem de não exigir o conhecimento do formato da distribuição *a priori*, a viabilidade analítica da expansão de CF esbarra exatamente nesta fronteira restritiva matemática. Para que a função quantil reconstruída represente uma probabilidade fisicamente coerente, ela deve satisfazer a condição de ser estritamente monotônica crescente. Essa premissa

impõe limites rígidos aos valores que o método consegue acomodar. A Figura 7 ilustra este limite no plano definido pela assimetria (eixo γ) e curtose (eixo κ).

Figura 7 – Domínio de validade da expansão de Cornish-Fisher no plano assimetria-curtose.



Fonte: Adaptado de Mesquita et al. (2024).

Como é evidenciado na discussão de resultados deste trabalho, a forte presença de incertezas assimétricas no SEP faz com que grande parte das grandezas de saída recaia fora da região possível, demarcada em azul na Figura 7. Na prática, a matriz Jacobiana empregada no ajuste do CF tende à singularidade nestas situações, inviabilizando a reconstrução das curvas. Por esta razão, constata-se que o CF possui aplicação prática demasiadamente restrita para estudos complexos de fluxo de potência. Ele é abordado inicialmente apenas como um parâmetro de constatação teórica, justificando a adoção preferencial das abordagens baseadas no método dos momentos (MM-SP e MM-SJ) para todos os demais cenários operativos avaliados.

4.2 Método dos Momentos

Para superar as severas restrições de domínio impostas por aproximações de quantis como o CF, a reconstrução das curvas pode ser conduzida por intermédio de modelagens paramétricas. Dentre estas, o MM destaca-se pela sua sinergia direta com a UT. Uma vez que a UT propaga os momentos estatísticos da distribuição original com elevada acurácia, o MM utiliza justamente estas métricas para parametrizar famílias de distribuições contínuas pré-definidas (DANG; XU, 2019).

A essência do método consiste em escolher uma FDP baseada em quatro parâmetros intrínsecos (a_1, a_2, a_3, a_4). A parametrização ocorre igualando-se as funções analíticas que definem os momentos da FDP escolhida (m_1, m_2, m_3, m_4) às estimativas numéricas obtidas pela UT ($\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\gamma}, \hat{\kappa}$), originando o sistema denotado em:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = m_1(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \hat{\sigma}^2 = m_2(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \hat{\gamma} = m_3(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \hat{\kappa} = m_4(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \end{cases} . \quad (4.5)$$

A escolha de FDPs definidas por quatro parâmetros não é arbitrária. Em estatística, os dois primeiros momentos (média e variância) garantem o escalonamento da curva (i.e., posição e dispersão), enquanto a assimetria e a curtose definem estritamente o seu formato (*shape parameters*). Para que a reconstrução seja robusta em um cenário de fluxo de potência, a família de distribuições escolhida deve ser flexível o suficiente para mapear qualquer par coordenado no plano $\gamma - \kappa$.

É importante ressaltar que existe uma fronteira teórica absoluta neste plano dimensional. Conforme o limite matemático clássico demonstrado por Wilkins (1944), para qualquer variável aleatória contínua ou discreta, a relação entre assimetria e curtose é delimitada pela distribuição de Bernoulli, impondo a restrição universal denotada por:

$$\kappa \geq \gamma^2 + 1 \quad . \quad (4.6)$$

Qualquer combinação paramétrica que viole a Equação (4.6) recai em uma "região impossível", matematicamente inconsistente. A resolução do sistema paramétrico (Equação (4.5)) dentro da região factível fornece a FDP e a respectiva FDA da grandeza avaliada (DANG; XU, 2019).

No entanto, para garantir que o método não sofra das mesmas limitações de domínio do CF, as famílias de distribuições escolhidas devem possuir a capacidade intrínseca de cobrir integralmente este domínio viável. É exatamente neste contexto que os Sistemas de Johnson e de Pearson surgem como robustas bases teóricas para a reconstrução probabilística.

4.2.1 Sistema Johnson

O sistema Johnson (SJ) baseia-se na premissa de que uma variável aleatória contínua Y pode ser normalizada, mediante transformações algébricas e logarítmicas estruturadas (JOHNSON, 1949). A forma geral desta conversão é dada por:

$$Z = \alpha + \delta f\left(\frac{Y - \xi}{\nu}\right) \quad , \quad (4.7)$$

em que α e δ atuam como parâmetros de forma (responsáveis por moldar a assimetria e a curtose), ξ é o parâmetro de locação (posição), ν é o parâmetro de escala (dispersão) e $f(\cdot)$ dita a lei de transformação aplicável. A presença simultânea destes quatro parâmetros $(\alpha, \delta, \xi, \nu)$ é o que confere ao SJ os graus de liberdade matemáticos necessários para satisfazer o sistema do MM.

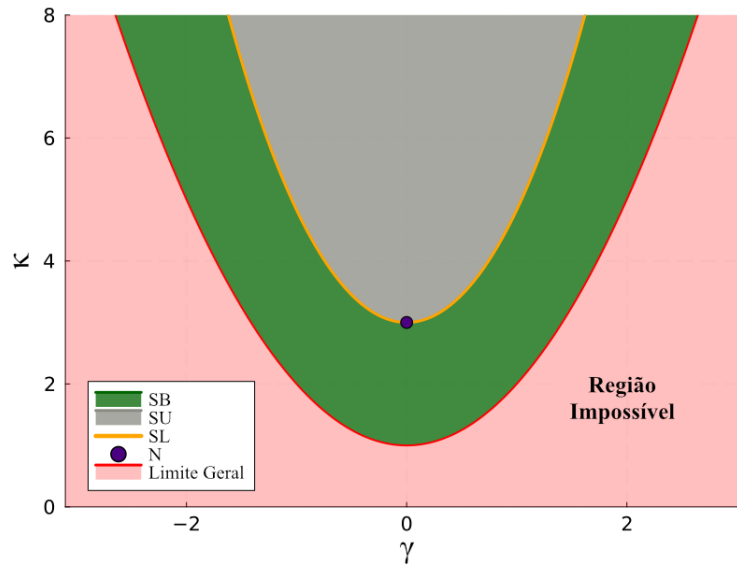
O grande diferencial do SJ para a reconstrução de distribuições no FPP reside na versatilidade de suas funções de transformação contínuas. A formulação proposta por Johnson particiona o mapeamento probabilístico em quatro regiões principais, cujas leis de formação $f(\cdot)$ são selecionadas dinamicamente com base nas coordenadas de assimetria e curtose da variável analisada:

- **Sistema Normal (S_N):** Corresponde ao ponto singular no plano paramétrico que representa a distribuição Normal ($\gamma = 0$ e $\kappa = 3$). Ocorre quando os parâmetros de forma assumem $\alpha = 0$ e $\delta = 1$, resultando na transformação linear: $f(x) = x$;
- **Sistema Lognormal (S_L):** Aplicado a variáveis associadas à linha de fronteira lognormal do plano paramétrico. A transformação é regida pela função logarítmica: $f(x) = \ln(x)$, sendo válida para variáveis restritas ao domínio $Y > \xi$;
- **Sistema Ilimitado (S_U):** Engloba grandezas que não apresentam saturação física em suas caudas superior e inferior ($-\infty < Y < +\infty$). A transformação fundamenta-se na forma explícita do arco-seno hiperbólico: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;
- **Sistema Limitado (S_B):** Dedicado a incertezas confinadas em limites operativos rígidos (e.g., injeções de potência limitadas fisicamente pelos geradores). A variável é estritamente delimitada no intervalo $\xi < Y < \xi + \nu$, e a transformação assume a forma: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

A parametrização da curva pelo sistema Johnson consiste inicialmente em determinar qual destas quatro regiões contém o par de assimetria e curtose ($\hat{\gamma}_x, \hat{\kappa}_x$) estimado pela UT. Uma vez identificada a transformação correspondente, os parâmetros de conformação (α, δ) e de escalonamento (ξ, ν) são calculados numericamente. O processo exige a solução computacional de um sistema de equações que iguala os momentos teóricos da transformação de Johnson aos momentos estatísticos reais da grandeza analisada.

A Figura 8 apresenta as fronteiras de cobertura dessas subfamílias no plano $\gamma - \kappa$. A principal vantagem analítica de se empregar a abordagem combinada MM-SJ é que a união destas quatro regiões garante uma cobertura ininterrupta de todas as coordenadas factíveis no plano assimetria-curtose (JOHNSON, 1949). Desta forma, o MM-SJ assegura, sem exceções, a existência de uma representação de FDP possível para qualquer variável de saída do fluxo de potência.

Figura 8 – Regiões de cobertura das subfamílias do sistema Johnson no plano assimetria-curtose.



Fonte: Adaptado de Mesquita et al. (2024).

4.2.2 Sistema Pearson

Consolidado como o primeiro sistema genérico de distribuições probabilísticas sistematizado na literatura, o sistema Pearson (SP) atua como uma ferramenta alternativa e tão robusta quanto o SJ. Diferentemente das transformações para o domínio Normal, o SP fundamenta a reconstrução das FDPs através da solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), regida por (PEARSON, 1895):

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} = -\frac{a + x}{c_0 + c_1x + c_2x^2} \quad . \quad (4.8)$$

A principal vantagem metodológica do SP reside no fato de que não são necessários processos de otimização complexos para a parametrização inicial da EDO. Os coeficientes analíticos (a , c_0 , c_1 e c_2) são determinados algebricamente e de forma exata a partir da variância ($\hat{\sigma}^2$), assimetria ($\hat{\gamma}$) e curtose ($\hat{\kappa}$) extraídas da UT. Estas relações diretas são formalizadas pelas Equações (4.9) a (4.11):

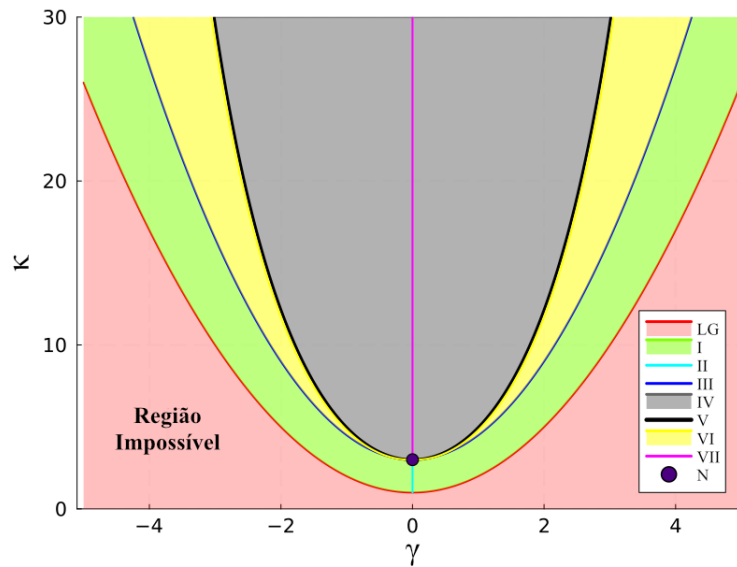
$$c_0 = \frac{(4\hat{\kappa} - 3\hat{\gamma}^2)}{(10\hat{\kappa} - 12\hat{\gamma}^2 - 18)} \hat{\sigma}^2 \quad , \quad (4.9)$$

$$a = c_1 = \frac{\hat{\gamma}(\hat{\kappa} + 3)}{(10\hat{\kappa} - 12\hat{\gamma}^2 - 18)} \hat{\sigma} \quad , \quad (4.10)$$

$$c_2 = \frac{(2\hat{\kappa} - 3\hat{\gamma}^2 - 6)}{(10\hat{\kappa} - 12\hat{\gamma}^2 - 18)} \quad . \quad (4.11)$$

A depender da configuração discriminante das raízes do termo quadrático ($c_0 + c_1x + c_2x^2$), a integração da EDO divide-se em diferentes leis de formação. Conforme ilustrado na Figura 9, o SP mapeia o plano de assimetria-curtose gerando sete funções densidade principais (Tipos I a VII)¹, além da distribuição Normal padrão, que atua como ponto de convergência universal das soluções (PEARSON, 1895).

Figura 9 – Regiões de cobertura das subfamílias do sistema Pearson no plano assimetria-curtose.



Fonte: Adaptado de Mesquita et al. (2024).

A aplicação do modelo MM-SP no contexto de FPP, busca converter os momentos estatísticos estimados via UT em PDFs concretas, garantindo a cobertura paramétrica de toda a região factível. Essa etapa requer que inicialmente o algoritmo avalie o par assimetria-curtose e identifique qual tipo de função do SP a ser utilizada, o que pode não ser uma tarefa trivial devido às diversas regiões fronteiriças. Por essa razão, neste trabalho, esse processo foi automatizado por meio do pacote *PearsonDS* (BECKER; KLÖBNER; HEINRICH, 2023), executado no ecossistema da linguagem R. O pacote recebe os momentos estimados pela UT, identifica o tipo de curva adequada e resolve analiticamente a EDO², retornando a PDF de interesse. Como a rotina principal deste trabalho é desenvolvida em Julia, a comunicação computacional com esse pacote em R é estabelecida utilizando a interface de interoperabilidade *RCall* (RCall, 2024).

¹ A formulação original de Pearson define 12 funções distintas. No entanto, frequentemente são utilizadas apenas as sete principais, pois englobam as três macro-regiões do plano (Tipos I, IV e VI) e suas fronteiras primárias (Tipos II, III, V e VII). Os demais tipos consistem em subcasos específicos ou limites extremos que já são acomodados por essa parametrização principal.

² Cabe destacar que, conforme a documentação do pacote *PearsonDS*, a estimação paramétrica via MM (i.e., a obtenção dos coeficientes da curva) é realizada de forma algébrica e direta. No entanto, a posterior reconstrução contínua das curvas para certas subfamílias do SP pode demandar elevado esforço computacional. Notadamente para o Tipo IV, o pacote requer a solução de integrais numéricas, o cálculo de constantes de normalização complexas e o uso de métodos iterativos para a avaliação de suas funções quantis, o que justifica eventuais elevações no tempo de processamento desta técnica.

4.3 Considerações Finais

Em síntese, a análise comparativa das técnicas de reconstrução revela que, enquanto a expansão de Cornish-Fisher apresenta restrições de domínio de validade que limitam sua aplicação generalizada, os métodos fundamentados nos sistemas Johnson e Pearson fornecem a base matemática necessária para cobrir todo o espectro viável. Ao acoplar os momentos estatísticos acurados obtidos via UT a estas abordagens, viabiliza-se a reconstrução rigorosa das PDFs das variáveis de estado do SEP.

Por fim, é importante ressaltar uma limitação metodológica intrínseca às três técnicas de reconstrução abordadas neste capítulo. Tanto a expansão de Cornish-Fisher quanto os sistemas Johnson e Pearson partem da premissa de parametrização baseada em funções unimodais, o que implica que as curvas reconstruídas também apresentarão comportamento estritamente unimodal. Em cenários operativos específicos onde as variáveis do sistema apresentem naturezas multimodais, a aplicação direta destas ferramentas representará a distribuição de forma unimodal equivalente (i.e., preservando os momentos originais), desconsiderando a ocorrência de múltiplos picos. Para a reconstrução analítica fidedigna de funções multimodais, é necessária a prévia decomposição do espaço amostral em subproblemas unimodais ou a adoção de métodos alternativos/complementares.

5 FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO VIA *UNSCENTED TRANSFORM*

Com a fundamentação teórica consolidada nos capítulos anteriores, este capítulo dedica-se à apresentação formal da metodologia abordada nesta dissertação. O objetivo central é detalhar como as ferramentas matemáticas apresentadas foram integradas em uma sistemática unificada para a avaliação probabilística de SEP em contextos operativos práticos.

Para viabilizar a aplicação do FPP via UT na avaliação de cenários reais, propõe-se um roteiro metodológico estruturado em quatro macroetapas sequenciais. Este encadeamento estabelece o caminho necessário para mapear as incertezas físicas do sistema e traduzi-las em indicadores de risco para a tomada de decisões. Essas etapas são sintetizadas a seguir:

- Inicialmente, a **Modelagem das Incertezas** estabelece a relação entre os fenômenos estocásticos reais (e.g., intermitência dos ventos, flutuação da demanda e disponibilidade topológica) e o modelo matemático do sistema;
- Na sequência, a **Aplicação da UT** atua como a ferramenta central de propagação de incertezas, responsável por amostrar estrategicamente o espaço de probabilidades e resolver os cenários de fluxo de potência para extrair os momentos estatísticos;
- A terceira etapa, **Reconstrução das DPs**, converte os momentos calculados em curvas de probabilidade contínuas, fornecendo uma representação completa do comportamento estocástico do sistema;
- Por fim, o ciclo culmina na **Análise de Riscos Operativos**, etapa de aplicação prática que utiliza as curvas reconstruídas para quantificar as probabilidades de violação de limites técnicos e contratuais.

Seguindo esta estrutura, o capítulo divide-se em duas frentes complementares. A Seção 5.1 concentra-se no detalhamento algorítmico, destrinchando as três primeiras macroetapas. Adicionalmente, a Seção 5.2 consolida a quarta e última macroetapa, formalizando as formulações matemáticas utilizadas para a quantificação das violações operativas consideradas nos estudos de caso realizados nessa dissertação.

5.1 Solução do FPP via UT

Nesta seção, apresenta-se o detalhamento algorítmico desenvolvido para a solução do FPP via UT. A formulação proposta atua como ferramenta central de propagação estocástica, unindo a eficiência de amostragem da UT à robustez dos métodos de reconstrução de distribuições de probabilidade.

Para organizar as fases de aplicação e guiar o escopo lógico, o macrofluxo metodológico da rotina computacional é apresentado na Figura 10. Os blocos operacionais que integram essa estrutura serão fundamentados detalhadamente em suas respectivas subseções.

Figura 10 – Macrofluxo metodológico para a aplicação do FPP via UT.



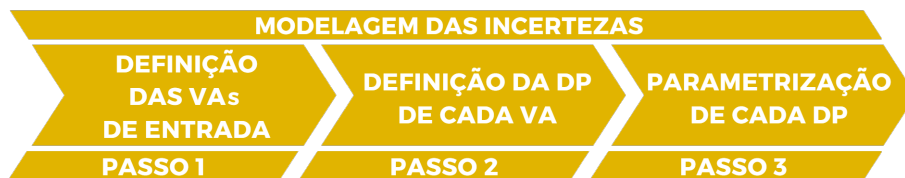
Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1.1 Modelagem das Incertezas

A primeira macroetapa da rotina computacional consiste na modelagem estocástica do sistema, fase na qual as grandezas físicas e operativas da rede são mapeadas e traduzidas para o domínio das probabilidades. Como o FPP é um método de simulação, a exatidão da propagação de incertezas é estritamente dependente da correta caracterização das variáveis que alimentam o algoritmo.

Para fins de organização metodológica e computacional, esta etapa de preparação dos dados de entrada foi estruturada em três passos sequenciais. A Figura 11 ilustra este encadeamento interno de dados, cujo detalhamento fundamenta a execução do código.

Figura 11 – Detalhamento da macroetapa de Modelagem das Incertezas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o encadeamento apresentado, a preparação das incertezas no algoritmo segue as seguintes diretrizes:

- **Passo 1 - Definição das VAs de entrada:** Inicialmente, o algoritmo realiza a leitura dos dados topológicos do sistema teste. Nesta etapa, selecionam-se quais elementos da rede atuarão como fontes de incerteza (e.g., flutuação da demanda de carga, inserção de geração eólica e taxa de falha de equipamentos), fixando-se os demais parâmetros topológicos como determinísticos;
- **Passo 2 - Definição da DP de cada VA:** Em seguida, associa-se um modelo probabilístico adequado a cada fenômeno físico mapeado, conforme a fundamentação teórica estabelecida na Seção 2.2. A demanda convencional é modelada por uma distribuição Gaussiana, a velocidade do vento por uma distribuição Weibull, e a disponibilidade topológica dos equipamentos por uma distribuição de Bernoulli;

- **Passo 3 - Parametrização de cada DP:** Por fim, os modelos probabilísticos definidos na etapa anterior são parametrizados para representar fielmente os fenômenos físicos reais modelados. Isso inclui as médias e variâncias (para as cargas), os fatores de forma e escala (para os ventos) e as taxas de reparo e falha para a obtenção dos índices de indisponibilidade (FOR).

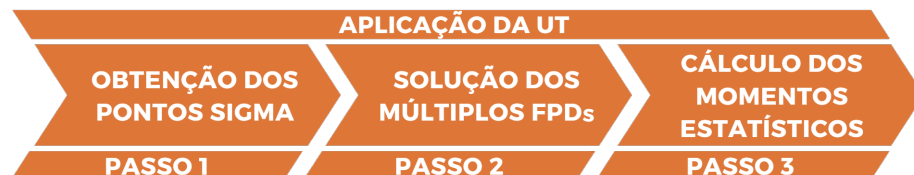
Uma vez consolidadas e parametrizadas todas as distribuições de probabilidade, o vetor de entrada multivariável é estruturado e repassado à etapa de Aplicação da UT.

5.1.2 Aplicação da UT

Após a correta parametrização das variáveis aleatórias de entrada, o algoritmo avança para a sua etapa central de cálculo: a aplicação da UT. É importante ressaltar que, ao longo de todo este trabalho, as menções à técnica referem-se estritamente à sua variação UT-QG. Esta macroetapa atua como a ferramenta central de inferência estocástica, sendo responsável por propagar as incertezas mapeadas através do modelo não linear do sistema, buscando reduzir a quantidade de estados avaliados.

Assim como na etapa de modelagem, a aplicação da UT foi dividida em três subetapas sequenciais. A Figura 12 ilustra o detalhamento deste encadeamento de processamento, guiando o escopo lógico dos passos a seguir.

Figura 12 – Detalhamento da macroetapa de Aplicação da UT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A execução do núcleo algorítmico da UT orienta-se pelos seguintes passos:

- **Passo 1 - Obtenção dos pontos sigma:** O algoritmo aplica o procedimento de Stieltjes (ou polinômios clássicos, quando aplicável) para converter as distribuições contínuas parametrizadas no passo anterior em conjuntos discretos. Nesta etapa, definem-se os pontos sigma e os seus respectivos pesos para cada variável aleatória de forma isolada;
- **Passo 2 - Solução dos múltiplos FPDs:** Por meio do produto tensorial, as amostras individuais são combinadas para formar o espaço amostral multidimensional. Para cada combinação resultante, que representa um cenário determinístico a ser avaliado, o algoritmo executa o FPD, ponderando o resultado pelo peso equivalente global (i.e., produto dos pesos individuais);

- **Passo 3 - Cálculo dos momentos estatísticos:** Com todos os cenários estocásticos resolvidos, os resultados das grandezas de saída (e.g., magnitudes de tensão e fluxos de potência nos ramos) são agregados. Utilizando os pesos equivalentes globais obtidos no passo anterior, o código calcula os quatro primeiros momentos estatísticos (i.e., média, variância, assimetria e curtose) para cada variável de interesse.

Os momentos estatísticos extraídos nesta fase representam de forma paramétrica a resposta do sistema face às incertezas, sendo então repassados à última etapa algorítmica para a reconstrução contínua do comportamento probabilístico.

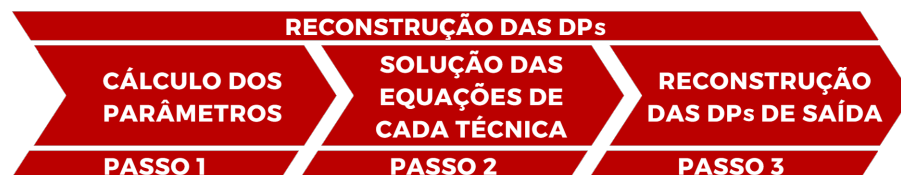
Cabe destacar uma importante característica desta etapa central: a flexibilidade de sua formulação. De maneira análoga à SMC, o núcleo de cálculo do algoritmo atua de forma modular. Isso significa que o FPD clássico utilizado para avaliar os cenários amostrados pode ser substituído por qualquer outra ferramenta de análise de regime permanente, como o fluxo de potência ótimo ou rotinas de manobras topológicas, sem exigir alterações na arquitetura estocástica de propagação apresentada.

5.1.3 Reconstrução das DPs

A terceira e última macroetapa da rotina de simulação do FPP consiste na reconstrução paramétrica das distribuições de probabilidade. Embora a UT-QG seja altamente eficiente na propagação das incertezas, a sua natureza discreta fornece apenas os momentos estatísticos das variáveis de saída. Para viabilizar a tomada de decisões e a quantificação de riscos operativos, é estritamente necessário converter esses momentos em curvas de probabilidade contínuas.

Mantendo a padronização metodológica, esta etapa algorítmica também foi estruturada em três passos sequenciais. A Figura 13 ilustra este encadeamento interno, o qual é executado de forma independente para as três técnicas matemáticas abordadas neste estudo.

Figura 13 – Detalhamento da macroetapa de Reconstrução das DPs.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o encadeamento apresentado, a rotina de reconstrução orienta-se pelas seguintes diretrizes:

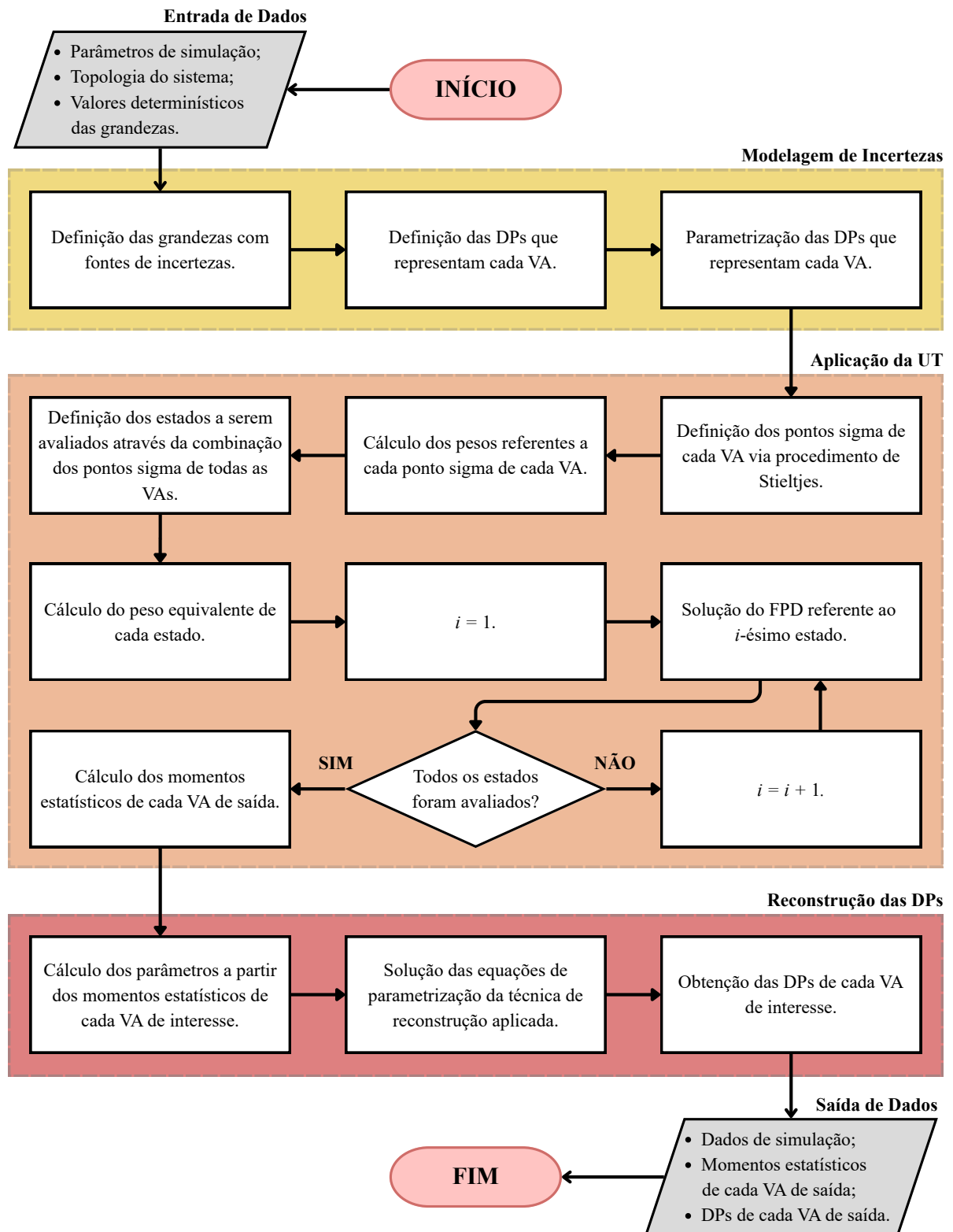
- **Passo 1 - Cálculo dos parâmetros:** O algoritmo recebe os quatro primeiros momentos estatísticos globais (i.e., média, variância, assimetria e curtose) de cada variável de saída obtidos na etapa anterior. Estes momentos atuam como entrada para cálculo dos parâmetros

de ajuste para os métodos de reconstrução, definidos de forma individual seguindo o descrito no Capítulo 4;

- **Passo 2 - Solução das equações de cada técnica:** Neste ponto, a rotina computacional ramifica-se para aplicar as três metodologias fundamentadas no Capítulo 4. Para a expansão de CF e para o SJ, o código resolve analiticamente os sistemas de equações não lineares partindo dos parâmetros obtidos na etapa anterior. Simultaneamente, para o método do SP, o algoritmo classifica a família da distribuição estatística e soluciona analiticamente a equação diferencial ordinária correspondente;
- **Passo 3 - Reconstrução das DPs de saída:** Com os parâmetros e as equações de formação de cada técnica devidamente definidos, o código calcula e fornece como saída as FDPs e as FDAs contínuas para cada grandeza elétrica avaliada.

A fim de sintetizar a lógica de implementação descrita ao longo desta seção, a Figura 14 apresenta o fluxograma detalhado do algoritmo. Esta representação consolida o encadeamento sequencial entre a Modelagem das Incertezas, a Aplicação da UT e a Reconstrução das DPs, cujo encerramento marca a conclusão do algoritmo do FPP via UT. As curvas contínuas obtidas representam a resposta estocástica completa do sistema elétrico, configurando a base de dados necessária para que a macroetapa subsequente realize a análise de riscos e a verificação da violação de limites.

Figura 14 – Fluxograma do algoritmo do FPP via UT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Análises de Riscos Operativos

A obtenção das funções contínuas de probabilidade, consolidadas na fase anterior, encerra a etapa de processamento estocástico do FPP via UT. Contudo, em aplicações práticas, a importância destas distribuições reside na sua capacidade de fornecer informações quantitativas para a tomada de decisões. É neste contexto que se insere a análise de riscos operativos.

A operação segura de um SEP exige que as grandezas físicas da rede permaneçam dentro de faixas regulatórias preestabelecidas. A ocorrência de incertezas na geração, demanda e disponibilidade de equipamentos impõe o risco de que variáveis ultrapassem suas faixas seguras de operação. Ao dispor das FDAs das grandezas de interesse reconstruídas na etapa anterior, a probabilidade de ocorrência destas violações pode ser estimada de forma analítica e direta, de forma a embasar ações preventivas ou corretivas de planejamento operacional.

Nesta dissertação, a quantificação de riscos foi estruturada em três frentes de interesse prático. As duas primeiras dedicam-se à segurança física do sistema: a violação de tensão nos barramentos (i.e., sobretensão e subtensão), detalhada na Subseção 5.2.1, e a sobrecarga nos ramos (i.e., circuitos e transformadores), apresentada na Subseção 5.2.2. Ademais, a terceira frente aborda a análise de risco econômico e regulatório do acesso à rede, avaliando o risco de violação contratual do montante de uso do sistema de transmissão (MUST), discutida na Subseção 5.2.3.

5.2.1 Riscos de Subtensão e Sobretensão nos Barramentos

Para garantir a qualidade da energia fornecida e a estabilidade da rede, a magnitude da tensão V_k em cada barra k deve operar dentro de um limite inferior (V_{min}) e um limite superior (V_{max}). No Brasil, essas fronteiras são regulamentadas pelos procedimentos de rede do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) (OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO, 2026).

A probabilidade de ocorrência de uma subtensão corresponde à probabilidade da variável aleatória V_k assumir um valor abaixo do limite inferior admissível. Matematicamente, esta condição é obtida pela avaliação direta da FDA da tensão no ponto V_{min} , conforme:

$$P(V_k < V_{min}) = F_{V_k}(V_{min}) \quad . \quad (5.1)$$

Por outro lado, o risco de sobretensão é definido pela probabilidade de V_k exceder o limite superior. Uma vez que a FDA retorna a probabilidade acumulada até um determinado ponto, a probabilidade do evento complementar (ultrapassar o limite) é calculada por:

$$P(V_k > V_{max}) = 1 - F_{V_k}(V_{max}) \quad , \quad (5.2)$$

em que $F_{V_k}(\cdot)$ representa a FDA contínua da magnitude da tensão na barra k .

5.2.2 Risco de Sobrecarga nos Ramos

Os elementos de linha do sistema (e.g., circuitos e transformadores) possuem um limite máximo de transferência de potência aparente (S_{max}), determinado por restrições térmicas (i.e., capacidade de dissipação de calor dos condutores) ou operativas.

Devido às perdas e à injeção de potência reativa capacitiva (i.e., efeito Ferranti e reatância *shunt*) ao longo das linhas, os fluxos de potência aparente nas duas extremidades de um ramo $k - m$ (i.e., de k para m e de m para k) não são idênticos. Para assegurar uma avaliação fisicamente coerente, a verificação de sobrecarga deve ser pautada pelo terminal que apresentar o fluxo mais severo.

Desta forma, define-se primeiramente o fluxo crítico do ramo (S_{cr}) como o valor máximo absoluto entre os fluxos longitudinais das duas extremidades, conforme denotado por:

$$S_{cr} = \max(|S_{km}|, |S_{mk}|) \quad . \quad (5.3)$$

Com a variável crítica estabelecida, o risco de sobrecarga do elemento é quantificado pela probabilidade de o fluxo mais severo ultrapassar a capacidade limite do equipamento. A formulação analítica utilizando a curva de probabilidade correspondente é expressa como:

$$P(S_{cr} > S_{max}) = 1 - F_{S_{cr}}(S_{max}) \quad , \quad (5.4)$$

em que $F_{S_{cr}}(\cdot)$ representa a FDA da potência aparente associada ao terminal com maior fluxo do ramo avaliado.

5.2.3 Risco de Violação Contratual do MUST

O MUST consiste em um contrato firmado entre os agentes do setor elétrico (e.g., distribuidoras e usinas) e o ONS, o qual estabelece os limites de transferência de potência ativa em cada ponto de conexão do contratante com a rede básica. Atualmente, essas diretrizes de contratação são regulamentadas pela Resolução Normativa ANEEL nº 1.017/2022, recentemente atualizada pela Resolução Normativa nº 1.107/2024 (AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA, 2022). É importante ressaltar que a avaliação desta grandeza nesta dissertação tem como intuito servir apenas de exemplo prático para a aplicação da metodologia proposta, permitindo a transposição dos conceitos estatísticos para um cenário de relevância operativa e regulatória.

A definição do MUST representa um desafio intrinsecamente estocástico, visto que, conforme discutido detalhadamente por Milhorce (2021), o fluxo nestas fronteiras é severamente impactado por fatores aleatórios, como a variabilidade de demanda e a intermitência de geração, exigindo abordagens probabilísticas para a sua correta avaliação. Divergências entre o montante contratado e a real necessidade operativa resultam em ineficiências de custo e penalidades regulatórias. A legislação brasileira vigente prevê duas naturezas de infração: a sobrecontratação,

avaliada anualmente, que ocorre quando a máxima transferência verificada não atinge 90% do valor contratado; e a subcontratação (denominada ultrapassagem), avaliada mensalmente, devida quando a máxima transferência excede 110% do montante contratado. Maiores detalhes e especificidades sobre a formulação e aplicação destas penalidades podem ser consultados na Resolução Normativa ANEEL nº 1.017/2022 (AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA, 2022).

Dentre estas, a penalidade por ultrapassagem configura-se como o risco operativo mais crítico e frequente na operação do sistema. Nesse contexto, a análise estocástica permite quantificar o risco de penalização com base na FDA da potência ativa fluindo no ponto de conexão (P_k). O risco regulatório de ultrapassagem é definido pela probabilidade de o fluxo exceder a margem de tolerância de 10% acima do limite contratado (M_k), o qual pode ser calculado analiticamente como:

$$P(P_k > 1,1M_k) = 1 - F_{P_k}(1,1M_k) \quad , \quad (5.5)$$

em que $F_{P_k}(\cdot)$ representa a FDA contínua da potência ativa no ponto de conexão avaliado, e M_k é o valor do contrato de MUST.

A obtenção desta probabilidade de violação fornece um indicador quantitativo direto para que o agente avalie o seu cenário, possibilitando a busca pelo equilíbrio entre a exposição ao risco de multas por ultrapassagem e os custos fixos associados a uma sobrecontratação.

5.3 Considerações Finais

Este capítulo consolida a arquitetura metodológica do FPP via UT, estabelecendo o roteiro algorítmico e matemático que fundamenta os estudos desta dissertação. A estrutura proposta demonstra o encadeamento lógico necessário para capturar as incertezas inerentes à operação do sistema, propagá-las de forma computacionalmente eficiente e convertê-las em funções contínuas de probabilidade.

Contudo, o principal diferencial dessa metodologia vai além da simples obtenção desses modelos estatísticos. Ao invés de se restringir à estimação de parâmetros de saída, o roteiro transpõe esses resultados para a quantificação direta dos riscos operativos. A integração das formulações de violação de limites físicos (i.e., tensão e sobrecarga) e contratuais (i.e., MUST) evidencia a capacidade da ferramenta em traduzir os modelos em indicadores quantitativos de grande relevância para a tomada de decisão no ambiente de planejamento e operação de sistemas elétricos.

Com as etapas metodológicas estruturadas e os índices de risco formalizados, o estudo avança para a sua fase de aplicação prática. O próximo capítulo dedica-se à execução desta rotina computacional, avaliando o desempenho e viabilidade de sua implementação para estudos probabilísticos em redes elétricas sob condições de incerteza.

6 RESULTADOS

Este capítulo dedica-se à aplicação da metodologia de FPP via UT detalhada nos capítulos anteriores. O objetivo central é avaliar a eficácia, a acurácia e o ganho de desempenho computacional da metodologia proposta quando submetida a diferentes cenários e níveis de incerteza em SEP.

Para estruturar a análise, os resultados são apresentados e analisados em etapas progressivas de avaliação. Inicialmente, a Seção 6.1 estabelece a metodologia de testes, definindo o ambiente computacional, os sistemas elétricos utilizados e as métricas e análises de desempenho. Em seguida, a Seção 6.2 promove uma análise comparativa entre as técnicas de reconstrução paramétrica de distribuições (i.e., Cornish-Fisher, Johnson e Pearson) aplicadas no contexto de FPP. Por fim, a Seção 6.3 atesta o FPP via UT aplicado na avaliação quantitativa de riscos operativos. É nesta etapa final que se conduz, de forma integrada, a análise de sensibilidade do modelo frente à densidade de discretização, à raridade dos eventos e à dimensionalidade do problema, comparando a solução do FPP via UT e SMC.

6.1 Metodologia de Avaliação

A metodologia proposta nesta dissertação é aplicada a topologias comumente utilizadas na literatura relacionada, e seus resultados foram sistematicamente confrontados com a SMC, consolidada como o modelo de referência (*benchmark*) para validação.

Em todas as simulações, a SMC foi executada com um número de sorteios definido pelo critério de convergência fundamentado na Subseção 2.3. Assim, é assegurada a acurácia dos resultados estocásticos, sendo então considerados como os valores de referência. Tanto o método proposto (via UT) quanto a simulação de referência (via SMC) foram integralmente desenvolvidos e executados no ecossistema da linguagem de programação Julia. Todas as simulações foram processadas em um computador com sistema operacional Windows 11 (versão 25H2), equipado com um processador Intel Core i7-7700HQ CPU @ 2.80 GHz e 32 GB de memória RAM.

6.1.1 Sistemas Elétricos Teste

A fim de avaliar o comportamento da metodologia em diferentes níveis de exigência e diferentes contextos, os ensaios foram conduzidos em duas redes de teste padrão adaptadas: o sistema IEEE 6 barras e o sistema IEEE RTS 24 barras, detalhados nas subseções seguintes.

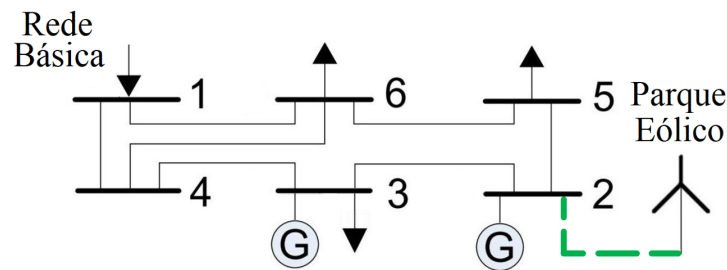
6.1.1.1 Sistema IEEE 6 Barras

O sistema teste IEEE 6 barras (frequentemente referenciado como *IEEE 6-Bus Test System*), cuja topologia baseia-se no clássico sistema de Ward e Hale (WARD; HALE, 1956), foi selecionado para a validação inicial da metodologia proposta. A rede original é composta por 6 barramentos, 2 unidades geradoras (alocadas nas Barras 1 e 2) e 7 ramos de transmissão.

Apesar de seu porte reduzido, o sistema apresenta uma configuração malhada que proporciona um ambiente rigoroso e adequado para atestar a convergência, o desempenho e a acurácia do algoritmo frente às não linearidades das equações de fluxo de potência e às incertezas da modelagem estocástica.

Para realizar as análises estocásticas, o caso base determinístico sofreu adaptações visando incorporar o perfil de incertezas desejado, de forma a emular cenários operativos e condições reais de variação. Nesta dissertação, o sistema utilizado foi adaptado conforme apresentado em Mesquita et al. (2025), onde foi adicionada uma usina despachável na Barra 3 e um parque eólico na Barra 2, conforme a Figura 15. As Tabelas 1 e 2 apresentam, respectivamente, os dados topológicos base do sistema.

Figura 15 – Diagrama unifilar do sistema IEEE 6 barras.



Fonte: Adaptado de Ward e Hale (1956).

Tabela 1 – Dados das barras do sistema IEEE 6 barras.

Barra	Tipo	P_d [pu]	Q_d [pu]	B_{sh} [pu]	V [pu]	θ [°]	P_g [pu]
01	SW	0,00	0,00	0,00	1,05	0,00	0,00
02	PV	0,00	0,00	0,00	1,07	-	0,27
03	PV	0,55	0,13	0,00	1,00	-	0,30
04	PQ	0,00	0,00	0,00	1,00	-	0,00
05	PQ	0,30	0,18	0,30	1,00	-	0,00
06	PQ	0,60	0,15	0,00	1,00	-	0,00

Fonte: Adaptado de Ward e Hale (1956).

Tabela 2 – Dados dos circuitos do sistema IEEE 6 barras.

De	Para	R [pu]	X [pu]	B_{sh} [pu]	Cap. [pu]
01	04	0,0800	0,3700	0,020	1,00
01	06	0,1230	0,5180	0,060	1,00
02	03	0,0723	1,0500	0,044	1,00
02	05	0,2820	0,0640	0,240	0,50
03	04	0,0000	0,1330	0,660	1,00
04	06	0,0970	0,4070	0,020	1,00
05	06	0,0000	0,3000	0,050	1,00

Fonte: Adaptado de Ward e Hale (1956).

As incertezas do sistema são modeladas conforme fundamentado na Seção 2.2, considerando as variáveis aleatórias independentes, demanda de potência ativa das cargas seguindo distribuição Normal e velocidade do vento seguindo distribuição Weibull. Especificidades de cada modelagem de incerteza adotada são apresentadas a cada cenário analisado.

6.1.1.2 Sistema IEEE RTS 24 Barras

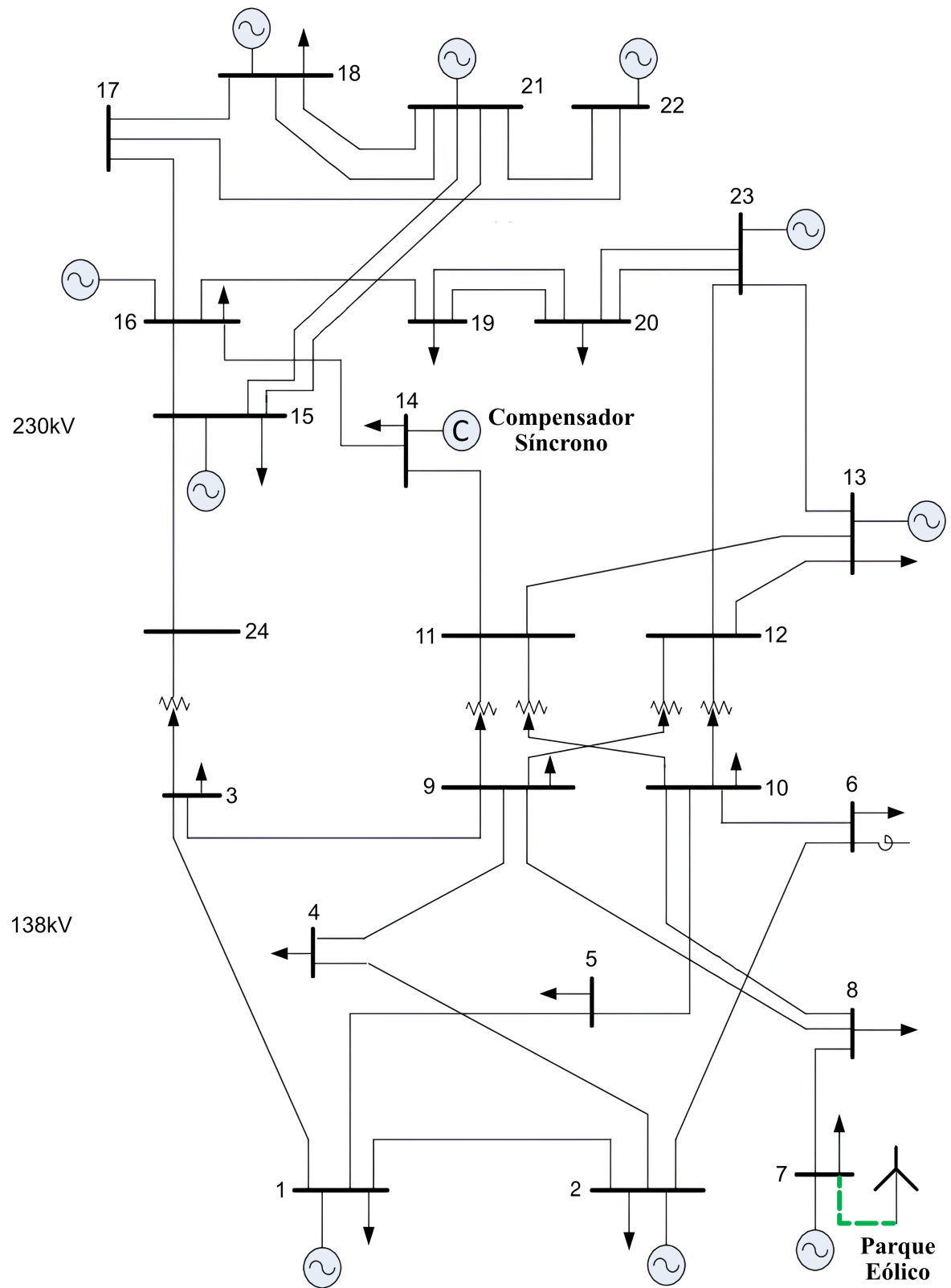
Visando avaliar a escalabilidade e a robustez do modelo proposto frente a cenários de maior complexidade e dimensionalidade, utilizou-se o *IEEE Reliability Test System* (RTS) de 24 barras (IEEE Probability Methods Subcommittee, 1979). Este sistema é um consolidado *benchmark* para estudos de confiabilidade, planejamento, operação e análises estocásticas de sistemas elétricos, sendo composto por 38 ramos de transmissão, 10 barras de geração, 13 barras de carga e 1 barra de carga com compensador síncrono, operando em dois níveis de tensão (138 kV e 230 kV) de forma interligada.

Assim como no sistema anterior, o caso base determinístico do RTS-24 foi adaptado para incorporar um perfil de incertezas operativas condizente com as redes modernas. A modelagem estocástica contempla flutuações na demanda e a presença de intermitência na geração de energia renovável. Seguindo os preceitos metodológicos estabelecidos na Seção 2.2, as variáveis de demanda ativa e reativa de todas as cargas da região de subtransmissão são modeladas como variáveis aleatórias independentes seguindo distribuições de probabilidade Normal.

Adicionalmente, para representar a integração de fontes renováveis, foi adicionado um parque eólico na Barra 7, modelando a incerteza relacionada à velocidade do vento através da distribuição Weibull e considerando a taxa de conversão de potência dos aerogeradores, conforme descrito na Subseção 2.2.2.1. Os parâmetros das distribuições variam conforme o ensaio realizado, sendo devidamente detalhados no escopo de cada cenário analisado.

O diagrama unifilar do sistema RTS-24 é ilustrado na Figura 16. Por sua vez, as Tabelas 3 e 4 apresentam os dados topológicos base do sistema.

Figura 16 – Diagrama unifilar do sistema IEEE RTS 24 barras.



Fonte: Adaptado de IEEE Probability Methods Subcommittee (1979).

Tabela 3 – Dados dos circuitos do sistema IEEE RTS 24 barras.

De	Para	Circ.	R [pu]	X [pu]	B_{sh} [pu]	Tap [pu]	Def. [°]	Cap. [pu]
01	02	01	0,0026	0,0139	0,4611	-	-	1,75
01	03	02	0,0546	0,2112	0,0572	-	-	1,75
01	05	03	0,0218	0,0845	0,0229	-	-	1,75
02	04	04	0,0328	0,1267	0,0343	-	-	1,75
02	06	05	0,0497	0,1920	0,0520	-	-	1,75
03	09	06	0,0308	0,1190	0,0322	-	-	1,75
03	24	07	0,0023	0,0839	0,0000	1,00	0,00	4,00
04	09	08	0,0268	0,1037	0,0281	-	-	1,75
05	10	09	0,0228	0,0883	0,0239	-	-	1,75
06	10	10	0,0139	0,0605	2,4590	-	-	1,75
07	08	11	0,0159	0,0614	0,0166	-	-	1,75
08	09	12	0,0427	0,1651	0,0447	-	-	1,75
08	10	13	0,0427	0,1651	0,0447	-	-	1,75
09	11	14	0,0023	0,0839	0,0000	1,00	0,00	4,00
09	12	15	0,0023	0,0839	0,0000	1,00	0,00	4,00
10	11	16	0,0023	0,0839	0,0000	1,00	0,00	4,00
10	12	17	0,0023	0,0839	0,0000	1,00	0,00	4,00
11	13	18	0,0061	0,0476	0,0999	-	-	5,00
11	14	19	0,0054	0,0418	0,0879	-	-	5,00
12	13	20	0,0061	0,0476	0,0999	-	-	5,00
12	23	21	0,0124	0,0966	0,2030	-	-	5,00
13	23	22	0,0111	0,0865	0,1818	-	-	5,00
14	16	23	0,0050	0,0389	0,0818	-	-	5,00
15	16	24	0,0022	0,0173	0,0364	-	-	5,00
15	21	25	0,0063	0,0490	0,1030	-	-	5,00
15	21	26	0,0063	0,0490	0,1030	-	-	5,00
15	24	27	0,0067	0,0519	0,1091	-	-	5,00
16	17	28	0,0033	0,0259	0,0545	-	-	5,00
16	19	29	0,0030	0,0231	0,0485	-	-	5,00
17	18	30	0,0018	0,0144	0,0303	-	-	5,00
17	22	31	0,0135	0,1053	0,2212	-	-	5,00
18	21	32	0,0033	0,0259	0,0545	-	-	5,00
18	21	33	0,0033	0,0259	0,0545	-	-	5,00
19	20	34	0,0051	0,0396	0,0833	-	-	5,00
19	20	35	0,0051	0,0396	0,0833	-	-	5,00
20	23	36	0,0028	0,0216	0,0455	-	-	5,00
20	23	37	0,0028	0,0216	0,0455	-	-	5,00
21	22	38	0,0087	0,0678	0,1424	-	-	5,00

Fonte: Adaptado de IEEE Probability Methods Subcommittee (1979).

Tabela 4 – Dados das barras do sistema IEEE RTS 24 barras.

Barra	Tipo	P_d [pu]	Q_d [pu]	B_{sh} [pu]	V [pu]	θ [°]	P_g [pu]
01	PV	1,08	0,22	0,00	1,02	-	1,55
02	PV	0,97	0,20	0,00	1,02	-	1,92
03	PQ	1,80	0,37	0,00	1,00	-	0,00
04	PQ	0,74	0,15	0,00	1,00	-	0,00
05	PQ	0,71	0,14	0,00	1,00	-	0,99
06	PQ	1,36	0,28	0,80	1,00	-	0,00
07	PV	1,25	0,25	0,00	1,02	-	2,40
08	PQ	1,71	0,35	0,00	1,00	-	0,00
09	PQ	1,75	0,36	0,00	1,00	-	0,00
10	PQ	1,95	0,40	0,00	1,00	-	0,00
11	PQ	0,00	0,00	0,00	1,00	-	0,00
12	PQ	0,00	0,00	0,00	1,00	-	0,00
13	PV	2,65	0,54	0,00	1,02	-	4,75
14	PV	1,94	0,39	0,00	1,00	-	0,00
15	PV	3,17	0,64	0,00	1,02	-	2,15
16	PV	1,00	0,20	0,00	1,02	-	1,55
17	PQ	0,00	0,00	0,00	1,00	-	0,00
18	PV	3,33	0,68	0,00	1,02	-	4,00
19	PQ	1,81	0,37	0,00	1,00	-	0,00
20	PQ	1,28	0,26	0,00	1,00	-	0,00
21	PV	0,00	0,00	0,00	1,02	-	4,00
22	PV	0,00	0,00	0,00	1,02	-	3,00
23	SW	0,00	0,00	0,00	1,03	0,00	3,18
24	PQ	0,00	0,00	0,00	1,00	-	0,00

Fonte: Adaptado de IEEE Probability Methods Subcommittee (1979).

6.1.2 Métricas de Desempenho

As comparações de desempenho entre a metodologia proposta (via UT) e o método de referência (via SMC) são realizadas por meio de métricas que avaliam a acurácia estatística e a eficiência computacional.

A primeira métrica adotada visa à avaliação comparativa da aderência das curvas reconstruídas em relação à distribuição empírica de referência. Para isto, utiliza-se a métrica de Máximo Desvio Absoluto entre as FDAs, fundamentada na estatística do teste não paramétrico de Kolmogorov-Smirnov. Esta métrica quantifica a maior divergência vertical entre a curva estimada e a curva de referência ao longo de todo o domínio da variável aleatória, conforme:

$$D_{max} = \max_x |F_{UT}(x) - F_{SMC}(x)| \quad , \quad (6.1)$$

em que D_{max} é o desvio máximo absoluto, $F_{UT}(x)$ representa a FDA contínua reconstruída pelas técnicas paramétricas baseadas nos momentos da UT, e $F_{SMC}(x)$ é a FDA empírica

obtida via SMC. Valores de D_{max} próximos de zero indicam alta fidelidade na representação do comportamento estocástico global da grandeza.

Complementarmente, a validação paramétrica dos momentos estatísticos de saída, bem como dos valores estimados de probabilidade de violações operativas (i.e., subtensão, sobretensão, e violações de limites de fluxo de potência), foi avaliada por meio do desvio relativo percentual $(\epsilon_r)^1$, calculado como:

$$\epsilon_r[\%] = \frac{\psi_{UT} - \psi_{SMC}}{\psi_{SMC}} \times 100 \quad , \quad (6.2)$$

em que ψ_{UT} e ψ_{SMC} representam, respectivamente, o valor do parâmetro avaliado estimado pela UT e o valor de referência obtido pela SMC.

Ademais, em situações nas quais o parâmetro de referência (ψ_{SMC}) tende a zero, o desvio relativo apresenta instabilidade numérica. Sob tais condições, a divisão pode resultar em percentuais desproporcionalmente elevados, comprometendo a correta interpretação do desvio associado à estimativa. Para estes casos, foi adotada complementarmente a métrica de desvio absoluto $(\epsilon_a)^1$, que quantifica a diferença direta entre a estimativa e o valor de referência, mitigando distorções de escala. O seu cálculo é expresso por:

$$\epsilon_a = \psi_{UT} - \psi_{SMC} \quad . \quad (6.3)$$

Por fim, o desempenho algorítmico foi medido diretamente através do tempo total de simulação requerido a partir de cada método para obter a solução final. A partir destes tempos, a eficiência computacional relativa da abordagem proposta é avaliada quantitativamente por meio da métrica de *speedup* (S_p), dada por:

$$S_p = \frac{\text{Tempo total requerido via SMC}}{\text{Tempo total requerido via UT}} \quad . \quad (6.4)$$

Desta forma, valores de $S_p > 1$ indicam o ganho direto de velocidade (em número de vezes) que a metodologia proposta apresenta em relação à simulação tradicional.

6.1.3 Análises de Desempenho

Com as métricas quantitativas devidamente estabelecidas, a análise de desempenho conduzida neste trabalho foi estruturada em duas frentes principais de investigação. A primeira fase dedica-se à avaliação das técnicas paramétricas de reconstrução de distribuições de probabilidade, realizada na Seção 6.2. A segunda fase, apresentada na Seção 6.3, avança para uma validação efetiva da metodologia proposta aplicada na estimação direta dos riscos de violação de limites

¹ As formulações tradicionais das métricas de desvio adotam valores em módulo. No entanto, em análises estocásticas, o operador de valor absoluto é frequentemente suprimido para que o sinal do erro seja mantido, possibilitando avaliar tendências do algoritmo em subestimar ou superestimar as estimativas de probabilidade.

do sistema elétrico. É nesta fase de aplicação prática que se realiza também uma análise de sensibilidade integrada, atuando sempre em comparação com a SMC.

A análise dos resultados apresentados nas Seções 6.2 e 6.3 foi estruturada sob quatro eixos transversais de avaliação. Essa abordagem garante uma investigação sistemática em todos os cenários, orientando a validação metodológica através dos seguintes tópicos:

- **Propagação Estocástica via UT:** Avaliação da capacidade da UT em propagar as incertezas através das equações não lineares do fluxo de potência. Utilizando-se os desvios relativos (ϵ_r) e absolutos (ϵ_a), valida-se a acurácia na estimação dos quatro primeiros momentos estatísticos (μ , σ^2 , γ e κ) em comparação à SMC;
- **Aderência das Reconstruções de DPs:** Investigação da acurácia global e das limitações teóricas intrínsecas a cada técnica paramétrica (CF, SJ e SP). A robustez dos métodos frente a grandezas impactadas por diferentes fontes e níveis de incerteza é analisada graficamente por meio do plano assimetria-curtose ($\gamma^2 \times \kappa$) e quantificada pela métrica de desvio máximo absoluto (D_{max});
- **Estimativa de Violações de Limites Operativos:** Validação da metodologia com foco estrito na segurança da rede. A acurácia da abordagem proposta é comparada à referência (SMC), aferindo-se a confiabilidade na identificação de restrições operativas perante diferentes condições e níveis de riscos, por meio dos desvios relativos (ϵ_r) e absolutos (ϵ_a);
- **Eficiência e Viabilidade Computacional:** Quantificação do desempenho e aplicabilidade prática da ferramenta em estudo. O esforço computacional é dimensionado pelo comparativo direto entre o número de estados determinísticos (FPDs) avaliados e o tempo total de processamento, empregando-se a métrica de *speedup* (S_p) para atestar o ganho de tempo computacional alcançado em relação à simulação Monte Carlo tradicional.

6.2 Estudo I: Comparativo entre as Técnicas de Reconstrução de DPs

Nesta seção, realiza-se um comparativo entre as três técnicas de reconstrução de distribuições de probabilidade abordadas neste trabalho: Cornish-Fisher, Sistema de Johnson e Sistema de Pearson. Para fundamentar as análises, adotou-se o sistema teste IEEE 6 barras adaptado (Subseção 6.1.1.1), inserido em um contexto prático de planejamento operacional: a contratação do MUST por uma concessionária de distribuição de energia elétrica que se conecta à rede básica (sistema de transmissão) pela Barra 1. As análises de limite operativo relacionadas a este montante são verificadas a partir das estimativas da potência líquida P_1 injetada nesta barra.

A concessionária simulada admite um risco regulatório de, no máximo, 5% de probabilidade de violação do limite superior contratual, critério este utilizado para a definição do montante contratado. Para fins de referência dos resultados, a probabilidade de violação do MUST foi estabelecida como a variável mandatória para o critério de convergência da SMC, cujo coeficiente de variação (β) tolerado para interrupção foi estipulado em 1%.

Para a obtenção dos momentos estatísticos via UT, utilizam-se 3 pontos sigma por VA modelada. Destaca-se que esta configuração visa estabelecer uma base comparativa referencial nestes primeiros cenários e que a sensibilidade dos resultados em relação à variação na quantidade destes parâmetros é objeto de análise específica no Estudo II (Seção 6.3).

Para avaliar o desempenho das técnicas de reconstrução frente a diferentes níveis de severidade estatística, a análise é subdividida em quatro cenários de complexidade crescente. Em todos os cenários, monitora-se não apenas o comportamento da potência ativa injetada na Barra 1 (P_1), mas também das magnitudes de tensão (V_4 , V_5 e V_6) e dos fluxos de potência aparente nos ramos (S_{14} , S_{16} , S_{23} , S_{25} , S_{34} , S_{46} e S_{56}).

A Tabela 5 sintetiza a configuração e a modelagem estocástica adotada, evidenciando a inserção progressiva das fontes de incerteza ao longo das simulações. As subseções seguintes apresentam de forma mais detalhada as particularidades de cada cenário, bem como os resultados e análises produzidas.

Tabela 5 – Configuração e modelagem estocástica por cenário.

Barra	Fonte de Incerteza	Distribuição	Parâmetros	Cenários			
				I.1	I.2	I.3	I.4
3	Potência Ativa Demandada	Normal	CV = 25%	•	•	•	•
5	Potência Ativa Demandada	Normal	CV = 25%	•	•	•	•
6	Potência Ativa Demandada	Normal	CV = 25%	•	•	•	•
2	Velocidade do Vento	Weibull	$\begin{cases} k = 2,3 \\ c = 8,5 \end{cases}$	-	•	•	•
2	Conversão de Potência (Aerogeradores)	Não Linear por Partes	$\begin{cases} v_{ci} = 3 \text{ m/s} \\ v_r = 16 \text{ m/s} \\ v_{co} = 18 \text{ m/s} \end{cases}$	-	-	•	•
2	Indisponibilidade (Parque Eólico)	Binomial	$q = 4\%$	-	-	-	•

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.1 Cenário I.1

Neste primeiro cenário, as incertezas são atribuídas exclusivamente às cargas do sistema, sendo modeladas por três variáveis aleatórias independentes seguindo distribuição normal (Gaussiana) e coeficiente de variação (CV) de 25%, o que resulta em desvios padrões entre 5% e 10% para todas as cargas, cujas médias correspondem aos valores de demanda ativa apresentados na Tabela 1. Para garantir que o risco de violação do limite regulatório permaneça dentro do valor estipulado (5%), o MUST contratado na Barra 01 foi ajustado para 108 MW, o que resulta em uma probabilidade de violação (estimada via SMC) de 4,65%.

Para iniciar as análises de desempenho, avalia-se a capacidade da UT em propagar as incertezas através do sistema. A Tabela 6 apresenta o comparativo de esforço computacional entre o método de referência e a abordagem proposta para estimar as grandezas elétricas de

acordo com as definições de solução do FPP. Observa-se que, enquanto a SMC demandou a avaliação de 205.140 estados para atingir a convergência considerando P_1 como a grandeza observada, a UT necessitou de apenas 27 execuções.

Tabela 6 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.1).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo de Estimativa [s]
SMC	205.140	19,42
UT	27	4,62

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 7 apresenta a acurácia dessa propagação por meio dos desvios percentuais relativos dos quatro primeiros momentos estatísticos da potência ativa injetada na Barra 1 (P_1). Adicionalmente, são apresentadas as médias dos desvios percentuais dos momentos estatísticos das magnitudes de tensão, calculadas para as barras de tensão não controlada (V), e dos fluxos de potência ativa, calculados para todos os circuitos (S). Inicialmente, é possível verificar uma boa exatidão na estimação da média (μ) e da variância (σ^2), com desvios percentuais médios sistematicamente inferiores a 1%. Ademais, com exceção dos fluxos de potência nos circuitos (S), nota-se também uma boa acurácia nas estimativas de assimetria (γ) e curtose (κ).

Tabela 7 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.1).

Grandeza	Média dos Desvios Percentuais [%]			
	μ	σ^2	γ	κ
P_1	-0,1152	-0,4783	1,0594	-1,0010
V	0,0007	-0,6305	-3,0044	-3,3082
S	0,0147	-0,6269	-14,9583	-6,9783

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os desvios percentuais mais elevados observados nestes momentos de ordem superior podem ser justificados pelas particularidades do critério de convergência aplicado à SMC. Primeiramente, o equacionamento clássico do método considera exclusivamente o monitoramento dos dois primeiros momentos estatísticos (μ e σ^2). Dessa forma, embora a estabilização da média e da variância seja matematicamente garantida, o mesmo rigor não se estende necessariamente ao terceiro e quarto momentos (γ e κ). Cabe ressaltar que a convergência pautada nos dois primeiros momentos da variável de interesse já provê à SMC uma elevada acurácia na estimação de probabilidades de violação, o que justifica a ampla adoção dessa formulação na literatura. Adicionalmente, o critério de parada ancora-se especificamente na variável P_1 , em virtude do contexto prático de verificação do MUST contratado. Consequentemente, embora essa estratégia assegure a convergência da variável de referência, ela não garante que as demais grandezas do sistema (magnitudes de tensão e fluxos de potência nos circuitos) atinjam simultaneamente o mesmo grau de estabilização em seus próprios momentos estatísticos. Contudo, como exigir a

convergência de todas as grandezas oneraria severamente o esforço computacional, restringir o critério de parada exclusivamente a P_1 consolida-se como uma medida adequada para garantir a eficiência da SMC.

Para aprofundar essa discussão, a Tabela 8 apresenta um comparativo detalhado dos momentos estatísticos para um subconjunto representativo de grandezas do sistema. A escolha destas variáveis justifica-se por englobar a variável de referência para a contratação do MUST (P_1), bem como grandezas que refletem o perfil de tensão (V_6) e o carregamento de circuitos estratégicos da rede (S_{14} e S_{34}). Dessa forma, a análise evidencia o contraste entre a magnitude dos erros relativos e absolutos, especialmente para os casos discutidos. As unidades de medida para ϵ_a foram omitidas, mas são as mesmas das grandezas correspondentes.

Tabela 8 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.1).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_1	μ [MW]	78,7988	78,7081	-0,1152	-0,0908
	σ^2 [MW ²]	551,2818	548,6451	-0,4783	-2,6367
	γ	0,0758	0,0766	1,0594	0,0008
	κ	3,0462	3,0157	-1,0010	-0,0305
V_6	μ [pu]	0,9794	0,9795	0,0015	0,0001
	σ^2 [pu ²]	0,000184	0,000183	-0,6271	0,0000
	γ	-0,4042	-0,3909	-3,2793	0,0133
	κ	3,3350	3,1807	-4,6258	-0,1543
S_{14}	μ [MVA]	38,2828	38,2118	-0,1853	-0,0709
	σ^2 [MVA ²]	167,2799	167,1994	-0,0481	-0,0805
	γ	0,1125	0,0953	-15,3273	-0,0172
	κ	2,9800	3,0028	0,7659	0,0228
S_{34}	μ [MVA]	59,3485	59,3374	-0,0188	-0,0112
	σ^2 [MVA ²]	8,3498	8,3447	-0,0616	-0,0051
	γ	0,1821	-0,0109	-105,9642	-0,1929
	κ	4,1098	2,7343	-33,4688	-1,3755

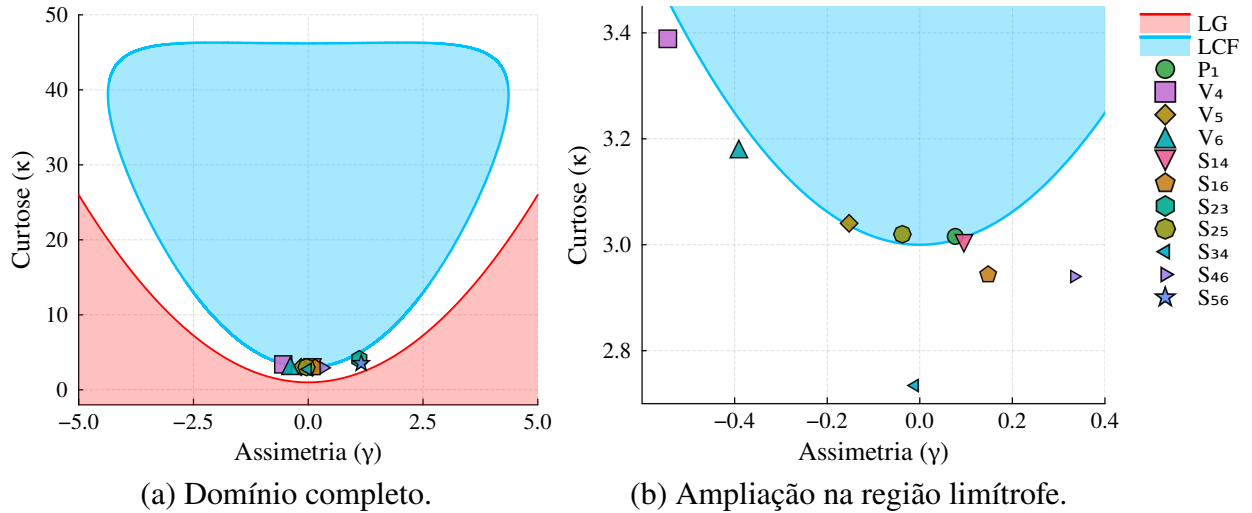
Fonte: Elaborado pelo autor.

O comportamento do fluxo S_{34} ilustra o fenômeno matemático de distorção métrica discutido na Subseção 6.1.2: embora o desvio relativo da assimetria atinja a marca expressiva de $-105,96\%$, a diferença absoluta entre as estimativas da SMC (0,1821) e da UT ($-0,0109$) é de apenas $-0,1929$. Ao avaliar também os desvios absolutos das grandezas, constatam-se margens de desvio dentro de limites adequados, mesmo em casos de elevados desvios percentuais.

Na etapa seguinte da avaliação metodológica, o foco direciona-se ao desempenho das técnicas de reconstrução de DPs. Inicialmente, é necessário verificar se as grandezas estimadas possuem parâmetros dentro do domínio de validade matemático das técnicas utilizadas. Dado que SJ e SP são capazes de reconstruir DPs para qualquer par de assimetria e curtose (conforme detalhado nas Seções 4.2.1 e 4.2.2 e ilustrado nas Figuras 8 e 9), esta primeira análise é dedicada

exclusivamente à CF. A Figura 17 mapeia as grandezas de saída no plano assimetria-curtose ($\gamma \times \kappa$), permitindo visualizar a sua disposição frente ao domínio de validade da expansão de Cornish-Fisher.

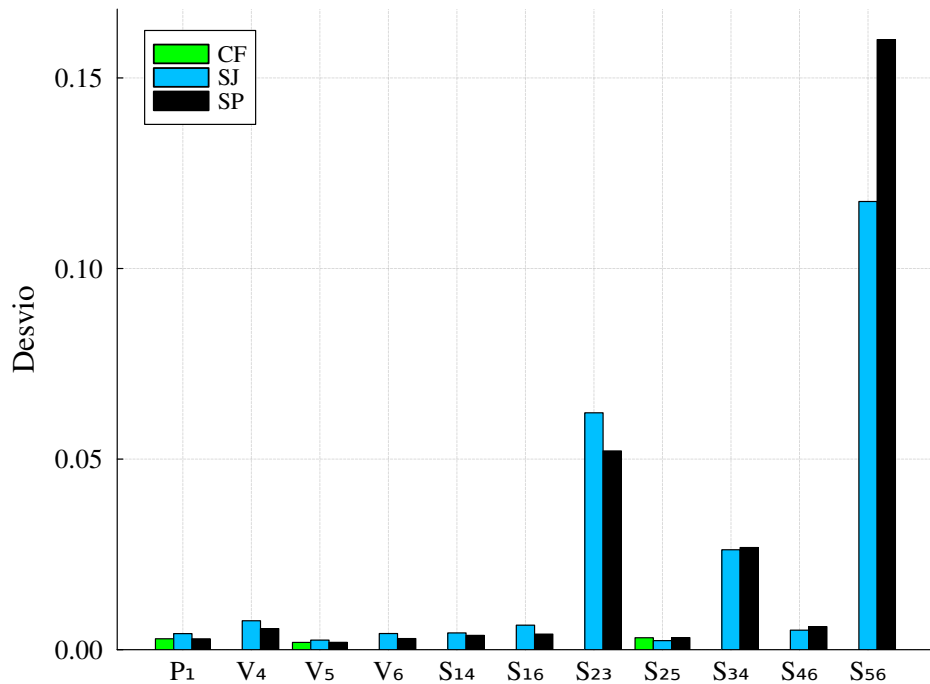
Figura 17 – Plano assimetria e curtose ($\gamma \times \kappa$) para as grandezas analisadas no Cenário I.1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da análise visual da Figura 17, constata-se a limitação matemática da expansão de Cornish-Fisher. Conforme delimitado pela área azul (i.e., LCF), apenas três das onze variáveis aleatórias analisadas permaneceram contidas na região de validade matemática da técnica. Essa restrição impacta diretamente a aplicabilidade da CF, visto que se mostrou incapaz de fornecer reconstruções para grandezas de fundamental importância para a operação do sistema. Em contrapartida, os sistemas SJ e SP não sofrem tais limitações de domínio, sendo aptos a modelar todas as grandezas avaliadas. Para mensurar e comparar a acurácia dessas metodologias, a Figura 18 apresenta os desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução em relação à referência empírica da SMC. Cabe destacar que, para a CF, a métrica de erro é apresentada exclusivamente para as variáveis em que a reconstrução foi matematicamente possível.

Figura 18 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.1).



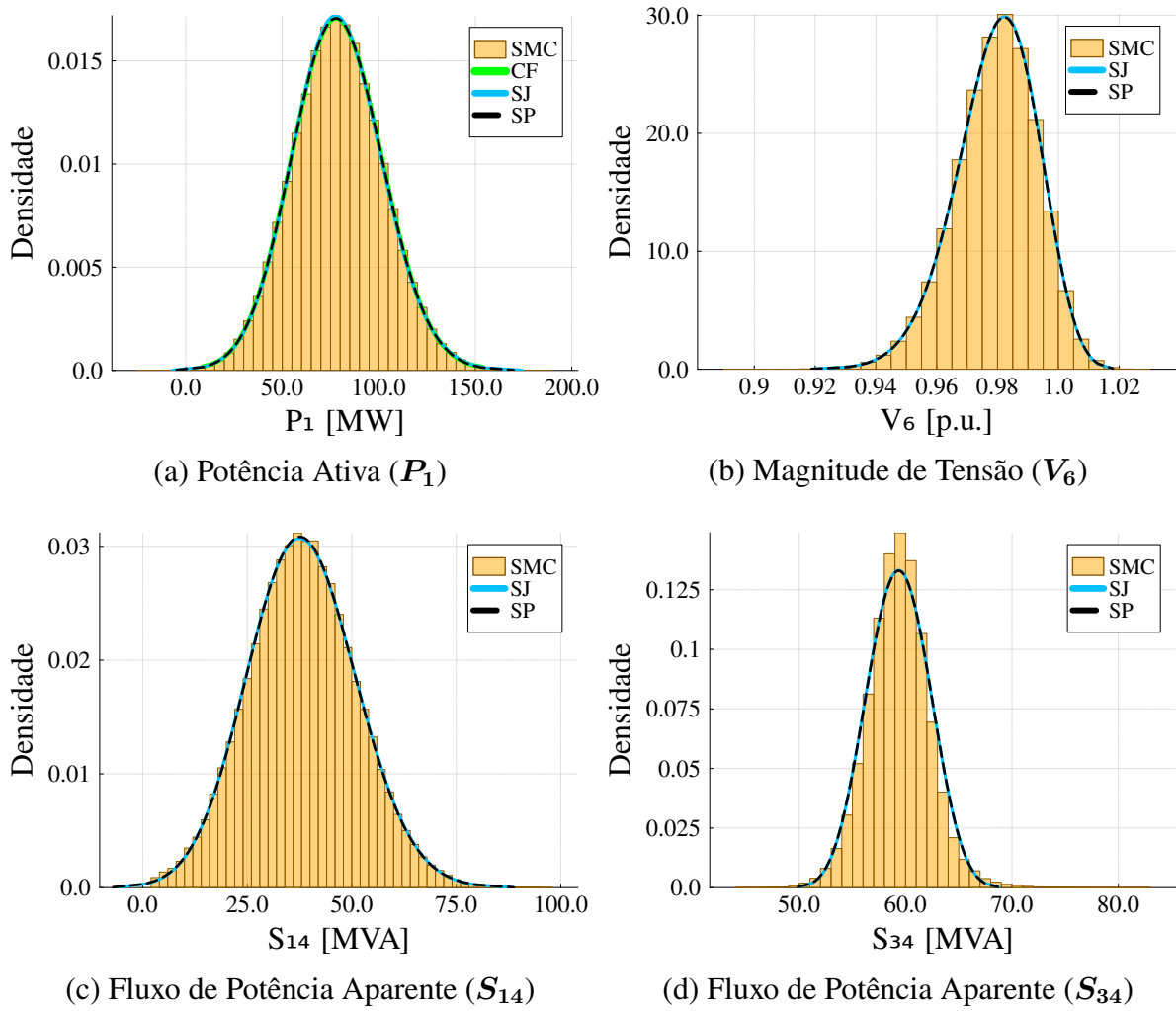
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Figura 18 revela que, de maneira geral, as três técnicas apresentaram uma boa acurácia na reconstrução das DP's. Os desvios absolutos máximos mantiveram-se em patamares consideravelmente baixos, com a maioria dos casos exibindo valores inferiores a 0,05, e apenas um pico isolado próximo a 0,16 para a grandeza de menor aderência. Embora a expansão CF tenha se mostrado apta a reconstruir apenas três variáveis, a técnica demonstrou excelente exatidão, resultando em erros de ordem desprezível. Adicionalmente, ao avaliar o desempenho dos dois métodos aplicáveis a todo o sistema, o SP sobressaiu-se em relação ao SJ, registrando desvios menores em 7 das 11 grandezas analisadas, o que evidencia a sua melhor acurácia geral para este cenário.

A fim de materializar essas métricas e ilustrar o comportamento das reconstruções em toda a extensão das distribuições (incluindo as regiões de cauda), a Figura 19 sobrepõe as curvas reconstruídas aos histogramas de referência gerados pela SMC, para as quatro grandezas representativas da rede detalhadas anteriormente.

A análise dos gráficos apresentados na Figura 19 confirma a robustez das técnicas de reconstrução. Observa-se que as curvas referentes ao SJ (linha contínua azul clara) e ao SP (linha tracejada preta) apresentam uma alta aderência ao contorno das distribuições empíricas da SMC nos quatro painéis analisados. É fundamental destacar que essa elevada exatidão se mantém consistente nas regiões de cauda das distribuições, fator crítico para garantir a acurácia no cálculo de probabilidades de violação operativa. Em nítido contraste, a CF (linha contínua verde) só foi capaz de reconstruir a FDP da variável P_1 , embora também tenha atingido ótima aderência neste caso específico.

Figura 19 – Histogramas das DP's para as grandezas selecionadas (Cenário I.1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Adicionalmente, ao avaliar as curvas na Figura 19 (c), nota-se que, mesmo com os elevados desvios percentuais de assimetria previamente reportados para o fluxo S_{14} , a reconstrução da sua FDP ocorreu com alta fidelidade, o que ratifica o fenômeno de distorção métrica debatido. Por fim, o comportamento do fluxo S_{34} , ilustrado no Figura 19 (d), evidencia uma sutil perda de aderência das curvas reconstruídas na região central da distribuição (pico). Contudo, nota-se que as regiões de cauda mantiveram um ajuste satisfatório, preservando a validade da técnica para a análise de risco. Essa distorção visual comprova que a qualidade da reconstrução está intrinsecamente ligada à exatidão da estimativa dos momentos estatísticos. Como o fluxo S_{34} foi a grandeza que concentrou os maiores desvios nas estimativas de assimetria e curtose via UT, essas diferenças numéricas se refletem na topologia final da FDP.

Para quantificar o desempenho computacional associado a esta etapa de reconstrução das DP's, a Tabela 9 detalha o tempo de processamento e a taxa de sucesso de cada técnica.

A análise da Tabela 9 revela que as três metodologias demandam tempos computacionais

Tabela 9 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.1).

Metodologia	Tempo de Reconstrução [s]	VAs com DPs Reconstruídas
CF	3,10	3/11
SJ	4,16	11/11
SP	3,12	11/11

Fonte: Elaborado pelo autor.

consideravelmente baixos, na ordem de 3 a 4 segundos para reconstruir as DPs das VAs de saída. Contudo, ao cruzar o tempo de reconstrução com o número de variáveis reconstruídas com sucesso, o SP apresenta o melhor resultado. A técnica foi capaz de modelar todas as 11 grandezas do sistema em 3,12 segundos, tempo de reconstrução próximo do menor observado, consolidando-se também neste quesito como a abordagem de melhor desempenho geral.

Consolidada a análise da viabilidade teórica da reconstrução de DPs, a avaliação final recai sobre a estimativa da probabilidade de violação operativa. A Tabela 10 compila os resultados para o limite superior do MUST contratado na Barra 01 (P_1), comparando a probabilidade estimada pela SMC com as obtidas pelas abordagens propostas (i.e., UT acoplada a cada técnica de reconstrução). Para evidenciar a eficiência global do método, foram incorporados o tempo total de simulação (i.e., tempo de estimativa + reconstrução) e o respectivo *speedup* em relação à SMC.

Tabela 10 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.1).

VA	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a	Tempo Total [s]	Speedup
P_1	SMC	4,6485	-	-	19,42	-
	UT+CF	4,4278	-4,7495	-0,2208	7,72	2,51
	UT+SJ	4,6462	-0,0495	-0,0023	8,78	2,21
	UT+SP	4,5437	-2,2551	-0,1048	7,74	2,50

Fonte: Elaborado pelo autor.

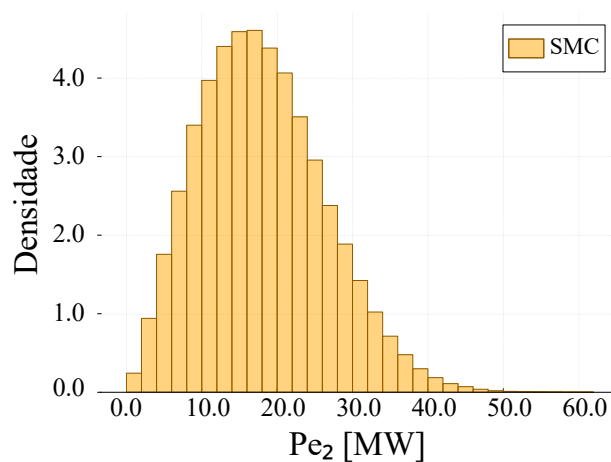
A análise da Tabela 10 atesta a eficácia das metodologias propostas na avaliação do risco operativo. Sob a ótica da exatidão, destaca-se que as três técnicas apresentaram excelente desempenho, com desvios relativos percentuais abaixo de 5% e desvios absolutos limitados a -0,2208 pontos percentuais em relação ao método de referência. Adicionalmente, no que tange ao esforço computacional, constata-se que a adoção da UT acoplada às técnicas de reconstrução de DPs proporciona um ganho de velocidade (*speedup*) superior a duas vezes. Esses resultados evidenciam que a metodologia proposta é capaz de atingir acurácia comparável à do método tradicional para o problema avaliado, porém demandando um tempo consideravelmente menor de processamento.

6.2.2 Cenário I.2

Neste segundo cenário, o nível de complexidade estocástica do sistema foi elevado com a inserção de um parque eólico na Barra 02 (Pe_2), possuindo uma média de potência gerada de 18 MW. Dessa forma, as incertezas do sistema passaram a ser modeladas por quatro variáveis aleatórias independentes: as três cargas (mantidas com distribuição Normal e CV de 25%) e a velocidade do vento no local da usina renovável. Para a caracterização da variabilidade do vento, adotou-se o modelo probabilístico de Weibull, cujos parâmetros de forma (k) e escala (c) foram definidos como 2,3 e 8,5 m/s, respectivamente (resultando em uma velocidade média de 7,5 m/s).

Nesta etapa inicial de inserção da fonte renovável, assumiu-se, por simplificação, que a potência ativa injetada na rede é diretamente proporcional à velocidade do vento (i.e., desprezando-se as não linearidades da taxa de conversão dos aerogeradores, consideradas no Cenário I.3). Consequentemente, a variável Pe_2 herda a característica estocástica da fonte primária. A Figura 20 apresenta o histograma empírico de Pe_2 , evidenciando o seu comportamento assimétrico. Essa particularidade insere uma fonte de incerteza não gaussiana na rede, impondo um desafio adicional às metodologias de propagação e reconstrução.

Figura 20 – Histograma da potência ativa injetada pelo gerador eólico (Cenário I.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para garantir que o risco de violação do limite regulatório permanecesse dentro da tolerância estipulada, o MUST contratado na Barra 01 foi ajustado para 109 MW, o que resultou em uma probabilidade de violação de 4,94% (estimada via SMC com tolerância para o coeficiente de variação (β) de 1%).

Para iniciar as análises de desempenho, avaliou-se a capacidade da UT em propagar essas incertezas através do sistema. A Tabela 11 apresenta o comparativo de esforço computacional entre o método de referência (SMC) e a abordagem proposta (UT). Observa-se que, enquanto a SMC demandou a avaliação de 192.257 estados para atingir a convergência, a UT necessitou de apenas 81 execuções, atestando a alta eficiência da técnica na etapa de estimativa estocástica.

Tabela 11 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.2).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo de Estimativa [s]
SMC	192.257	19,44
UT	81	5,22

Fonte: Elaborado pelo autor.

A acurácia da propagação estocástica neste cenário de maior complexidade é detalhada na Tabela 12, que consolida os desvios percentuais médios dos momentos estatísticos. Constatase que a inserção de uma fonte assimétrica (eólica) não prejudicou a exatidão na estimação da média (μ) e da variância (σ^2), que mantiveram erros sistematicamente limitados a patamares inferiores a 0,5%. Nos momentos de ordem superior (γ e κ), as diferenças em relação à SMC mantêm a mesma natureza observada anteriormente. Conforme detalhadamente fundamentado no Cenário I.1, essas variações são justificadas pelas distorções métricas em grandezas com assimetria próxima a zero e pelas particularidades do critério de parada empírico da simulação de referência, que permanece ancorado unicamente no monitoramento da média e variância de P_1 .

Tabela 12 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.2).

Grandeza	Média dos Desvios Percentuais [%]			
	μ	σ^2	γ	κ
P_1	-0,0508	-0,4047	4,6639	-0,5964
V	0,0037	-0,3182	-3,4762	-3,1974
S	-0,0887	-0,1139	-11,3488	-5,5424

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para aprofundar a avaliação, a Tabela 13 detalha as estimativas para as quatro grandezas representativas deste cenário.

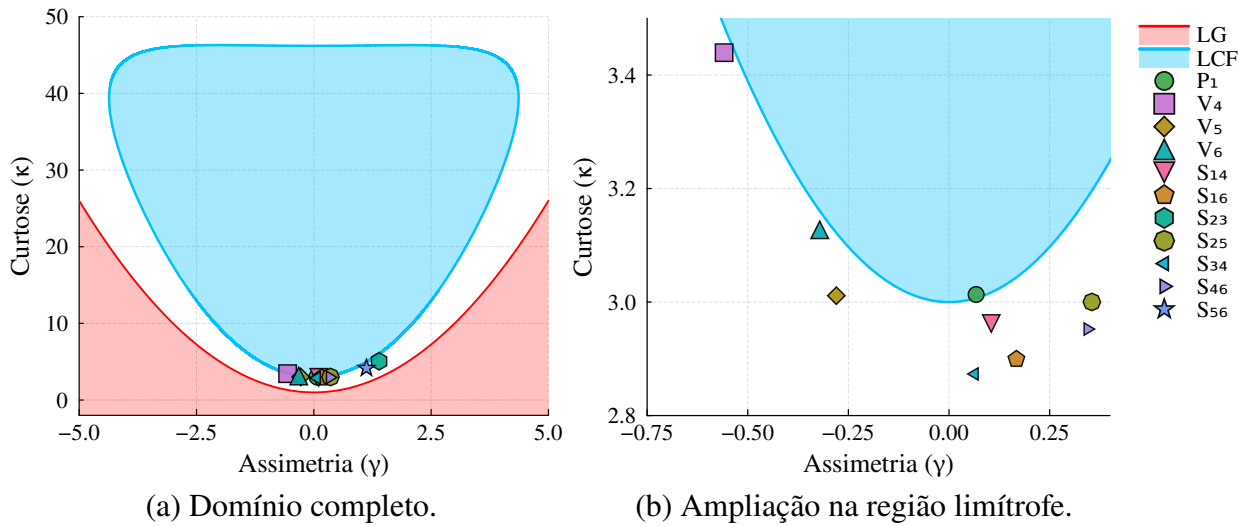
A análise da Tabela 13 reitera a robustez da propagação via UT e ilustra de forma clara o impacto da fonte eólica. O fluxo S_{23} , por estar topologicamente muito influenciado pela injeção renovável intermitente, apresenta uma assimetria empírica bastante severa ($\gamma \approx 1,38$). Notavelmente, a UT foi capaz de mapear essa acentuada não linearidade com um desvio relativo de assimetria de apenas 0,41%, comprovando a sua eficácia em propagar incertezas não Gaussianas. Por outro lado, o comportamento do fluxo S_{34} reproduz o fenômeno de distorção métrica discutido no Cenário I.1: apesar de exibir um desvio relativo expressivo na assimetria ($-71,86\%$), o seu desvio absoluto real é de apenas $-0,1627$, consolidando a adequação da técnica para fornecer os parâmetros matemáticos às etapas de reconstrução.

Para verificar a adequação dos parâmetros estimados, a Figura 21 mapeia as grandezas de saída no plano assimetria-curtose ($\gamma \times \kappa$), permitindo visualizar a sua disposição frente ao domínio matemático da expansão de Cornish-Fisher.

Tabela 13 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.2).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_1	μ [MW]	78,8708	78,8307	-0,0508	-0,0401
	σ^2 [MW ²]	607,7119	605,2528	-0,4047	-2,4591
	γ	0,0644	0,0674	4,6639	0,0030
	κ	3,0314	3,0133	-0,5964	-0,0181
V_6	μ [pu]	0,9792	0,9792	0,0042	0,0000
	σ^2 [pu ²]	0,0002	0,0002	-0,3806	0,0000
	γ	-0,3411	-0,3212	-5,8431	0,0199
	κ	3,2764	3,1273	-4,5520	-0,1491
S_{23}	μ [MVA]	10,8581	10,8550	-0,0289	-0,0031
	σ^2 [MVA ²]	3,9826	3,9623	-0,5108	-0,0203
	γ	1,3846	1,3904	0,4184	0,0058
	κ	5,0883	5,0567	-0,6212	-0,0316
S_{34}	μ [MVA]	59,3354	59,3383	0,0049	0,0029
	σ^2 [MVA ²]	8,7515	8,8003	0,5575	0,0488
	γ	0,2264	0,0637	-71,8596	-0,1627
	κ	4,1558	2,8733	-30,8589	-1,2824

Fonte: Elaborado pelo autor.

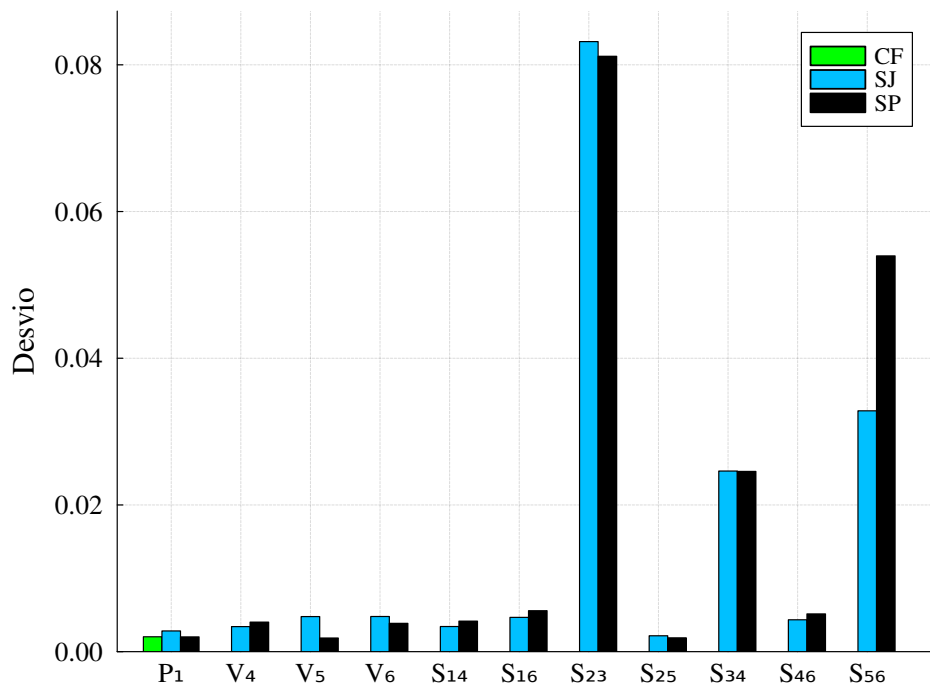
Figura 21 – Plano assimetria e curtose ($\gamma \times \kappa$) para as grandezas analisadas no Cenário I.2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da análise visual da Figura 21, constata-se que a inserção da geração intermitente impactou o deslocamento dos momentos estatísticos em direção à região externa ao domínio da expansão de Cornish-Fisher, tornando ainda mais evidente a limitação matemática da técnica. Conforme delimitado pela área azul (i.e., LCF), desta vez apenas uma das onze variáveis analisadas (P_1) permaneceu contida na região de validade da técnica. Essa contínua restrição

evidencia a inviabilidade de aplicação generalizada da CF para problemas complexos. Em contrapartida, os sistemas SJ e SP ratificam a sua importância metodológica, mantendo-se plenamente aptos a modelar todas as grandezas do sistema. Para mensurar a acurácia dessas abordagens perante a complexidade deste cenário, a Figura 22 apresenta os desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução em relação à SMC.

Figura 22 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.2).

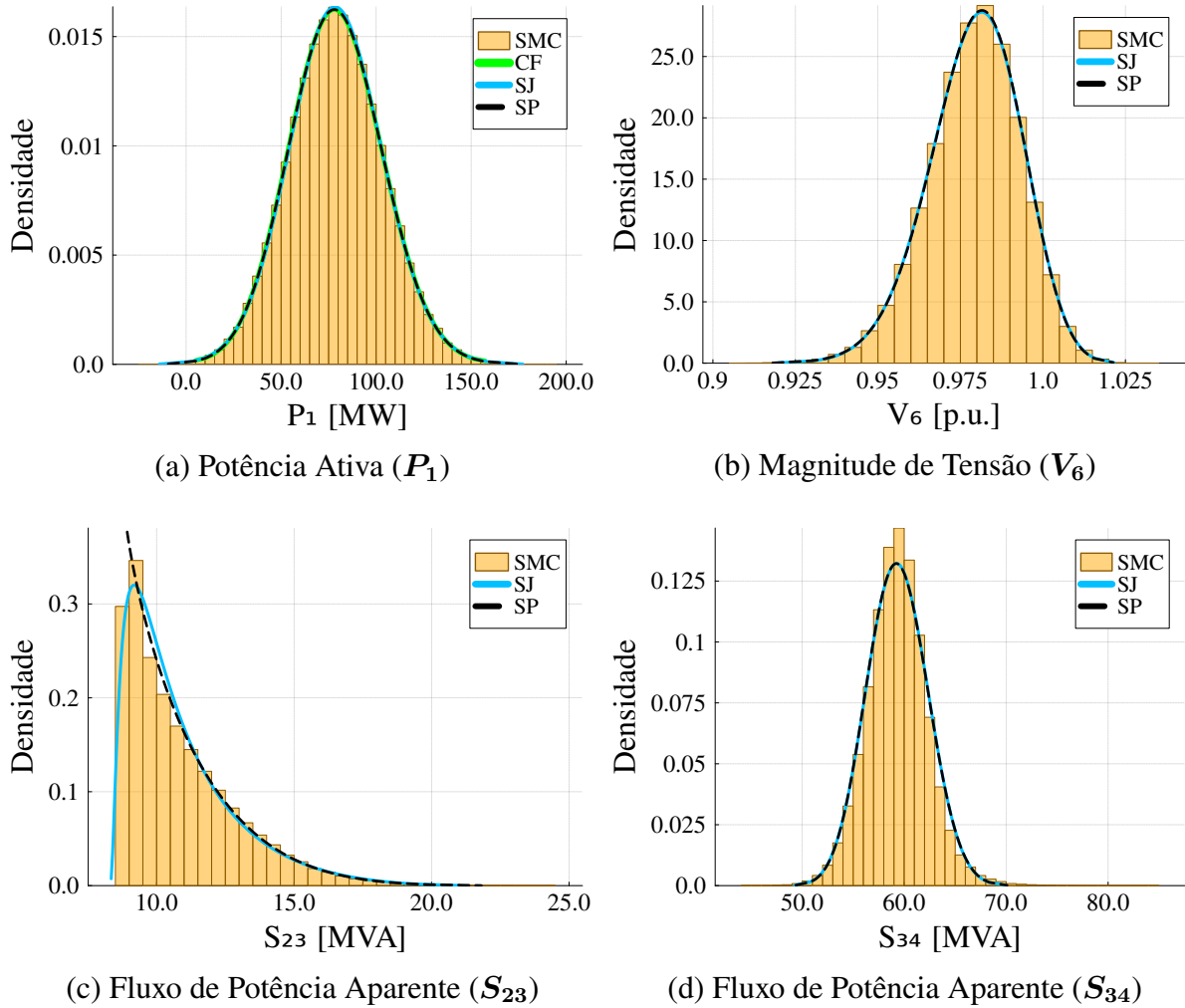


Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Figura 22 revela que, mesmo diante de variáveis assimétricas, as metodologias aplicadas preservaram uma boa acurácia geral. Os desvios absolutos máximos mantiveram-se baixos, com a maioria dos casos exibindo valores inferiores a 0,04. O pico isolado de erro ocorreu no fluxo S_{23} (aproximadamente 0,08 para a reconstrução via SJ), grandeza esta que absorveu a maior carga de assimetria da fonte eólica. Ao avaliar o desempenho comparativo, o SP novamente demonstrou uma superioridade em relação ao SJ neste cenário, registrando desvios menores em seis das onze grandezas.

A fim de materializar as métricas de desempenho e ilustrar o comportamento das reconstruções perante as novas fontes de incerteza do sistema, a Figura 23 sobrepõe as curvas reconstruídas aos histogramas de referência da SMC para as quatro grandezas representativas.

Figura 23 – Histogramas das DP para as grandezas selecionadas (Cenário I.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise visual da Figura 23 confirma a elevada versatilidade dos sistemas SJ e SP em modelar distribuições com diferentes graus de assimetria. Na Figura 23 (c), observa-se que as técnicas foram capazes de capturar com acurácia a cauda alongada à direita do fluxo S_{23} , característica induzida pela intermitência eólica, sendo justamente esta extremidade superior a região de maior interesse para este tipo de estudo. Notavelmente, embora o SJ tenha apresentado o maior desvio numérico para esta grandeza, a sua curva reconstruída ainda preserva uma aderência satisfatória ao histograma da SMC. Por outro lado, a curva tracejada do SP demonstra uma alta aderência em todos os gráficos, consolidando a sua superioridade estatística neste cenário.

Novamente, a limitação estrutural da expansão CF é evidenciada pela sua presença exclusiva na Figura 23 (a), ainda que com boa exatidão. Por fim, a Figura 23 (d) reitera que, apesar dos elevados erros percentuais de assimetria para o fluxo S_{34} , a sua reconstrução permaneceu com uma boa aderência.

Para quantificar o desempenho computacional associado à etapa de reconstrução de DPs

neste cenário, a Tabela 14 detalha o tempo de processamento e a taxa de sucesso de cada técnica.

Tabela 14 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.2).

Metodologia	Tempo de Reconstrução [s]	VAs com DPs Reconstruídas
CF	2,91	1/11
SJ	4,09	11/11
SP	2,12	11/11

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 14 revela que o SP não apenas apresentou a melhor aderência estatística, mas também a maior eficiência computacional. A técnica foi capaz de modelar todas as 11 grandezas do sistema em 2,12 segundos. A expansão CF demandou 2,91 segundos, porém com uma taxa de sucesso severamente limitada, enquanto o SJ exigiu um tempo superior (4,09 segundos) para processar o mesmo número de variáveis que o SP.

Consolidada a análise metodológica, a avaliação final recai sobre a estimação da probabilidade de violação operativa. A Tabela 15 compila os resultados para o limite superior do MUST contratado na Barra 01 (P_1), ajustado para 109 MW neste cenário. Para evidenciar a eficiência global do método, foram incorporados o tempo total de simulação (tempo de estimativa + reconstrução) e o respectivo *speedup* em relação à SMC.

Tabela 15 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.2).

VA	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a	Tempo Total [s]	Speedup
P_1	SMC	4,9444	-	-	19,44	-
	UT+CF	4,8281	-2,3527	-0,1163	8,13	2,39
	UT+SJ	4,9462	0,0367	0,0018	9,31	2,09
	UT+SP	4,9439	-0,0107	-0,0005	7,34	2,65

Fonte: Elaborado pelo autor.

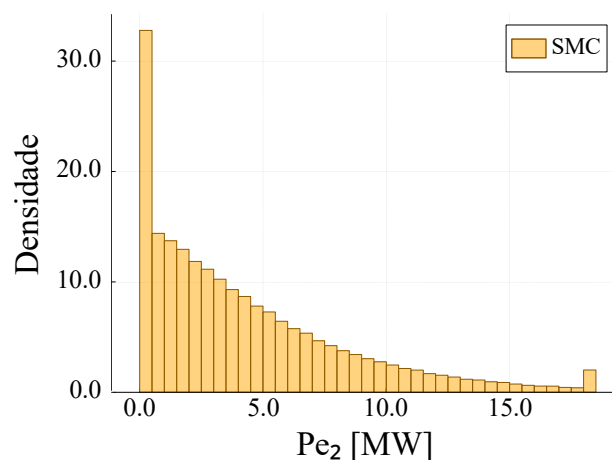
A análise da Tabela 15 chancela a eficácia da metodologia proposta, mesmo diante da inserção de fontes não gaussianas na rede. Sob a ótica da exatidão, a abordagem UT+SP estimou a probabilidade de violação com um desvio absoluto desprezível ($-0,0005$) em relação à simulação de referência. Quanto ao desempenho computacional, a adoção da UT acoplada ao SP proporcionou um *speedup* de 2,65. Esses resultados evidenciam que a metodologia é capaz de absorver a complexidade estocástica inerente às fontes renováveis intermitentes, mantendo uma acurácia comparável à do método de referência, porém demandando um tempo de processamento consideravelmente menor.

6.2.3 Cenário I.3

Neste terceiro cenário, mantém-se a configuração estocástica base do sistema avaliado anteriormente (três cargas com coeficiente de variação de 25% e uma fonte eólica na Barra 02),

porém agregando-se uma nova camada de complexidade ao problema. Em vez de assumir uma relação diretamente proporcional entre a velocidade dos ventos e a potência ativa injetada, este cenário incorpora a curva de potência real dos aerogeradores (i.e., a taxa de conversão de potência do equipamento). Essa característica impõe limites operativos de corte inferior (*cut-in*) e superior (*cut-out*), além de um trecho de conversão não linear e um patamar de potência nominal, a qual foi estabelecida em 18 MW para este estudo. Consequentemente, a variável Pe_2 passa a ser uma função definida por partes, com comportamento altamente não linear, conforme evidenciado na Figura 24.

Figura 24 – Histograma da potência ativa injetada pelo gerador eólico (Cenário I.3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa acentuada distorção morfológica impõe um severo desafio analítico para as técnicas de propagação e reconstrução. Para assegurar que o risco de violação do limite regulatório permanecesse próximo à tolerância estipulada, o MUST contratado na Barra 01 foi ajustado para 120 MW, o que resultou em uma probabilidade de violação (estimada via SMC) de 4,90%.

Para iniciar as análises de desempenho, avaliou-se a capacidade da UT em propagar essas incertezas através do sistema. A Tabela 16 apresenta o comparativo de esforço computacional entre o método de referência (SMC) e a abordagem proposta (UT). Observa-se que, enquanto a SMC demandou a avaliação de 194.216 estados para atingir a convergência, a UT necessitou de apenas 81 execuções, atestando a alta eficiência da técnica na etapa de propagação, mesmo sob os efeitos altamente não lineares introduzidos pela curva de potência.

Tabela 16 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.3).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo de Estimativa [s]
SMC	194.216	19,94
UT	81	5,19

Fonte: Elaborado pelo autor.

A exatidão da propagação sob essas condições é avaliada por meio da Tabela 17, que consolida os desvios percentuais médios dos momentos estatísticos. Constata-se que a média (μ) permaneceu imune às distorções, preservando desvios médios desprezíveis. Para a variância (σ^2), nota-se um leve incremento nos desvios das grandezas de rede (V e S) em relação aos cenários anteriores, o que reflete a injeção de incertezas limitadas por patamares operacionais oriundos da curva de potência. Por outro lado, observa-se que o desvio percentual médio da assimetria (γ) para os fluxos de potência (S) apresentou uma expressiva redução em módulo quando comparado aos cenários anteriores. Esse decréscimo comprova que o aumento da assimetria física do sistema afasta os valores de referência de zero, mitigando diretamente o efeito de distorção métrica discutido detalhadamente no Cenário I.1. Tais constatações indicam o desempenho adequado da UT na propagação das incertezas para as configurações do sistema em estudo, mesmo diante da inserção de VAs com severa não linearidade.

Tabela 17 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.3).

Grandeza	Média dos Desvios Percentuais [%]			
	μ	σ^2	γ	κ
P_1	-0,1533	-0,1297	-5,1318	-0,6980
V	-0,0026	1,2008	5,6532	-2,1537
S	-0,0250	2,2088	-4,0406	-4,6714

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 18 detalha as estimativas para as quatro grandezas representativas selecionadas (P_1 , V_6 , S_{23} e S_{34}). Esta análise permite observar como a elevada não linearidade da curva de potência afeta individualmente as variáveis da rede.

A análise da Tabela 18 ilustra a robustez da UT mesmo diante de regimes de forte não linearidade. O fluxo S_{23} , que absorve diretamente o impacto da função definida por partes da eólica, teve sua assimetria elevada para 2,30 e sua curtose atingiu o patamar crítico de 10,09. Notavelmente, a UT mapeou esses momentos de ordem superior com desvios percentuais de apenas $-1,15\%$ e $-3,60\%$, respectivamente. Simultaneamente, o fluxo S_{34} reproduz o padrão de distorção métrica discutido anteriormente: embora apresente um desvio relativo de assimetria de $-35,91\%$, seu desvio absoluto real é de apenas $-0,1155$, validando a qualidade da base estatística para a reconstrução das DPs.

Na sequência da avaliação metodológica, o foco recai sobre o desempenho das técnicas de reconstrução de DPs. Em relação ao domínio de validade matemático no plano assimetria-curtose ($\gamma \times \kappa$), constata-se que a expansão de Cornish-Fisher apresenta o mesmo comportamento verificado nos cenários anteriores. Dessa forma, a fim de evitar redundâncias analíticas, o mapeamento gráfico destas grandezas é suprimido para as análises dos Cenários I.3 e I.4.

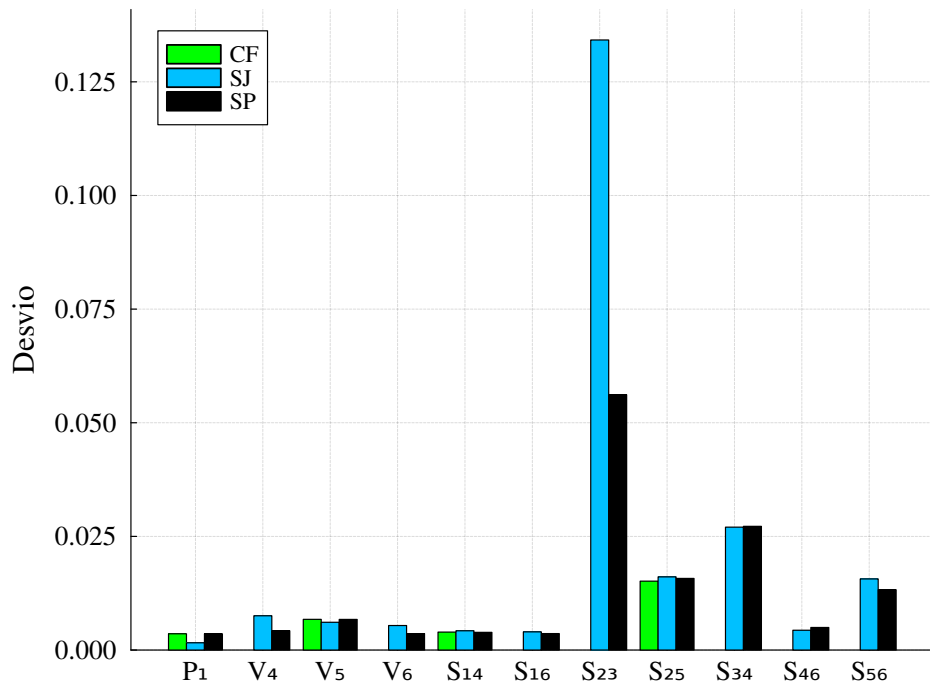
Para mensurar a acurácia dessas abordagens diante dessa extrema não linearidade, a Figura 25 apresenta os desvios máximos absolutos das técnicas em relação à simulação de referência.

Tabela 18 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.3).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_1	μ [MW]	91,6334	91,4930	-0,1533	-0,1404
	σ^2 [MW ²]	580,2978	579,5453	-0,1297	-0,7525
	γ	0,0770	0,0730	-5,1318	-0,0039
	κ	3,0397	3,0185	-0,6980	-0,0212
V_6	μ [pu]	0,9844	0,9844	0,0005	0,0000
	σ^2 [pu ²]	0,0002	0,0002	-0,3555	0,0000
	γ	-0,3979	-0,3754	-5,6413	0,0224
	κ	3,3436	3,1765	-4,9977	-0,1671
S_{23}	μ [MVA]	9,5216	9,5335	0,1258	0,0119
	σ^2 [MVA ²]	0,7825	0,8257	5,5307	0,0432
	γ	2,3065	2,2798	-1,1566	-0,0266
	κ	10,0952	9,7308	-3,6096	-0,3644
S_{34}	μ [MVA]	60,3092	60,3025	-0,0111	-0,0066
	σ^2 [MVA ²]	10,1849	10,2035	0,1831	0,0186
	γ	0,3216	0,2061	-35,9149	-0,1155
	κ	4,2826	2,8415	-33,6488	-1,4410

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.3).



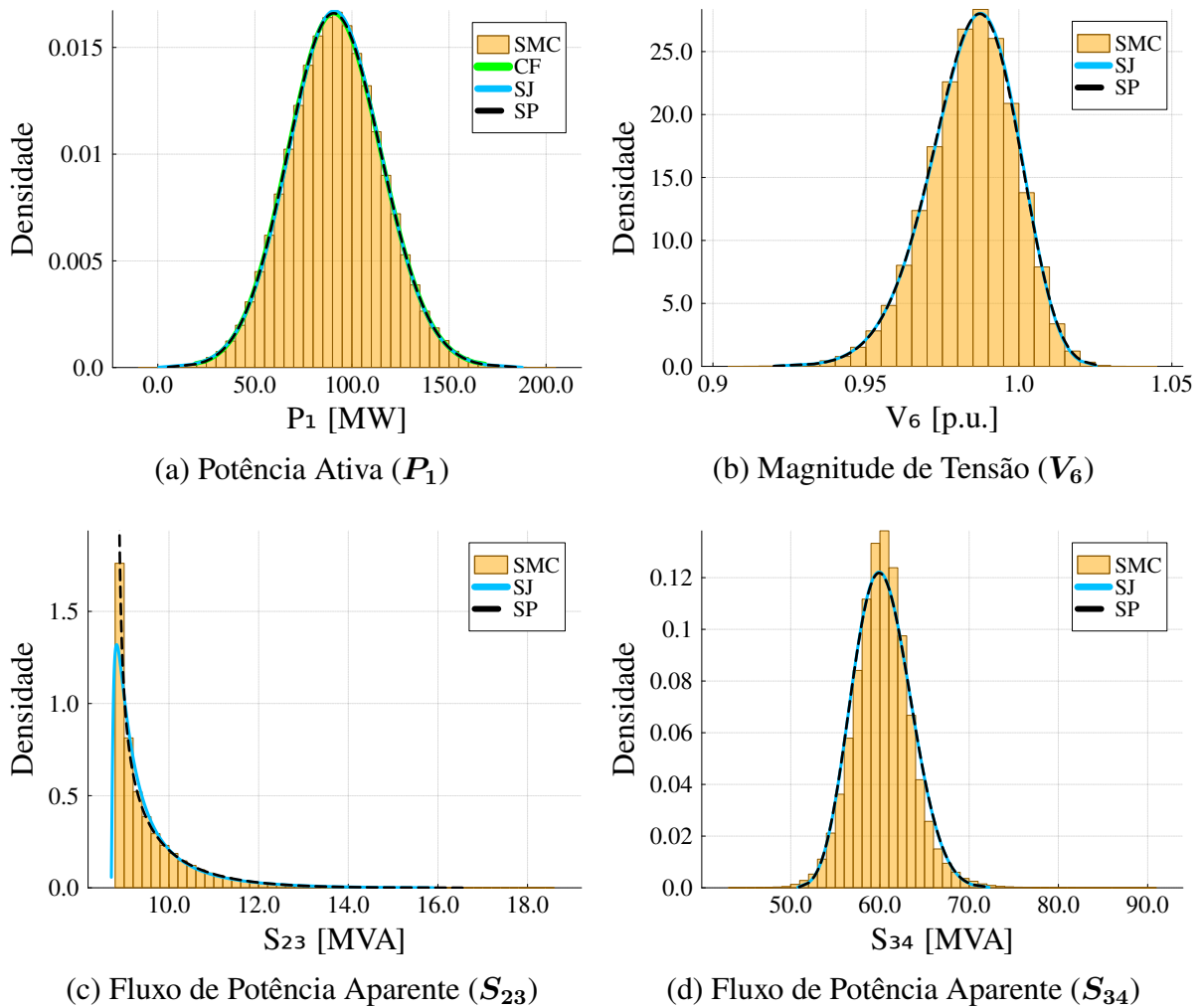
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Figura 25 revela, inicialmente, que a CF reconstrói apenas quatro variáveis (P_1 , V_5 , S_{14} e S_{25}), falhando nas demais grandezas de interesse. Em contrapartida, mesmo

diante da severa distorção introduzida pela curva de potência, as metodologias globais (SJ e SP) preservam uma excelente acurácia geral. Os desvios absolutos máximos mantêm-se controlados, com a quase totalidade dos casos exibindo valores inferiores a 0,05. O pico isolado de erro ocorre novamente no fluxo S_{23} , grandeza esta que absorve a maior carga de distorção da fonte eólica, cujos desvios, no entanto, mantêm-se restritos a valores abaixo de 0,13 para a reconstrução via SJ. Ao avaliar o desempenho comparativo, o SP ratifica a sua superioridade em relação ao SJ neste cenário, contendo o erro máximo no fluxo S_{23} a um patamar próximo a 0,05 e registrando desvios menores em sete das onze grandezas do sistema.

A fim de materializar essas métricas e ilustrar o comportamento morfológico das distribuições reconstruídas, a Figura 26 sobrepõe as curvas analíticas aos histogramas de referência da SMC para as quatro grandezas selecionadas.

Figura 26 – Histogramas das DP's para as grandezas selecionadas (Cenário I.3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise visual da Figura 26 evidencia a robustez das abordagens propostas e ilustra fenômenos matemáticos notáveis. A Figura 26 (c) revela a manifestação gráfica da extrema

assimetria e curtose do fluxo S_{23} : para acomodar esses momentos estatísticos acentuados, o SP ajustou uma curva (linha tracejada preta) com comportamento assintótico em sua fronteira inferior. Apesar dessa singularidade matemática na origem, a aderência visual da técnica na região de cauda (já destacada como a área crítica para a contabilização de sobrecargas) permanece superior à apresentada pelo SJ, corroborando os resultados do gráfico de desvios máximos.

Nos demais gráficos, tanto o SJ quanto o SP mantêm uma alta aderência ao histograma fornecido pela SMC. Reitera-se que, embora a técnica CF tenha sido capaz de reconstruir quatro das onze variáveis do sistema (P_1 , V_5 , S_{14} e S_{25}), sua presença na Figura 26 restringe-se à Figura 26 (a), uma vez que as demais grandezas selecionadas para representação visual (V_6 , S_{23} e S_{34}) encontram-se fora de seu domínio de validade.

Para quantificar o desempenho computacional associado a esta etapa de reconstrução das DPs neste cenário adverso, a Tabela 19 detalha o tempo de processamento e a taxa de sucesso de cada técnica.

Tabela 19 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.3).

Metodologia	Tempo de Reconstrução [s]	VAs com DPs Reconstruídas
CF	2,82	4/11
SJ	3,96	11/11
SP	3,20	11/11

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 19 atesta novamente o bom desempenho do SP, que modelou todo o sistema em 3,20 segundos, um tempo menor que o exigido pelo SJ (3,96 segundos). A expansão CF demandou o menor tempo relativo (2,82 segundos), contudo, com uma taxa de sucesso baixa (4 variáveis reconstruídas).

A Tabela 20 compila os resultados para o limite superior do MUST na Barra 01 (P_1), cujo valor considerado na contratação para este cenário é de 120 MW. Para evidenciar a eficiência global do método, foram incorporados o tempo total de simulação (tempo de estimativa + reconstrução) e o respectivo *speedup* em relação à simulação empírica.

Tabela 20 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.3).

VA	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a	Tempo Total [s]	Speedup
P_1	SMC	4,8971	-	-	19,94	-
	UT+CF	4,7281	-3,4516	-0,1690	8,01	2,49
	UT+SJ	4,8462	-1,0408	-0,0509	9,15	2,18
	UT+SP	4,8440	-1,0845	-0,0531	8,39	2,38

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 20 conclui a validação do modelo proposto frente aos desafios introduzidos pelas restrições operativas da geração renovável. Sob a ótica da exatidão, as

abordagens baseadas nos sistemas SJ e SP apresentaram acurácia equivalente, estimando o risco operativo com desvios absolutos restritos a patamares de $-0,05$. Quanto ao desempenho computacional, constata-se que a adoção da metodologia acoplada ao SP garantiu um *speedup* de 2,38. Esses resultados cancelam a solidez matemática da ferramenta proposta nos casos estudados, comprovando sua acurácia comparável à simulação de referência mesmo quando as variáveis de entrada assumem comportamentos de forte não linearidade, o que viabiliza a sua aplicação na avaliação probabilística de riscos operativos com reduzido esforço computacional.

6.2.4 Cenário I.4

Neste quarto e último cenário, mantém-se a modelagem estocástica e física estabelecida no Cenário I.3 (incluindo as variações de carga e taxa de conversão de potência dos aerogeradores), incorporando-se a taxa de indisponibilidade forçada (FOR, do inglês *Forced Outage Rate*) do parque eólico. Essa adição modela a probabilidade da fonte geradora estar completamente inoperante devido à uma falha inesperada, independentemente da velocidade instantânea dos ventos.

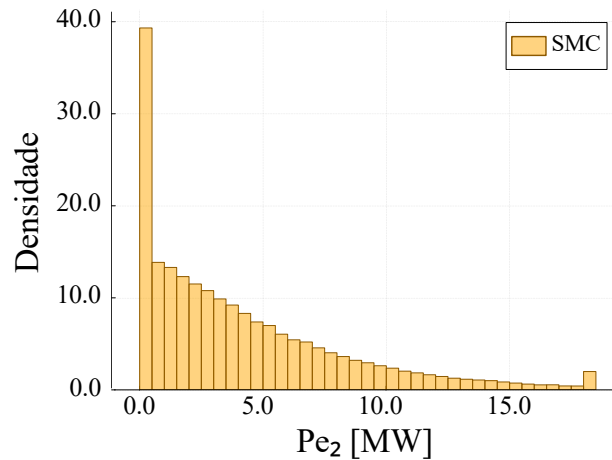
Do ponto de vista estatístico, a introdução da FOR acopla uma variável discreta (representando o estado de disponibilidade do parque) ao modelo estocástico. Essa combinação eleva a massa de probabilidade no valor nulo ($Pe_2 = 0$), uma vez que a probabilidade de falha do equipamento, considerada igual a $4\%^2$, se sobrepõe aos regimes de ventos fora dos limites operacionais da turbina (*cut-in* e *cut-out*). Contudo, por se tratar de uma taxa de falha relativamente baixa, o impacto global sobre o contorno da distribuição é marginal. Consequentemente, a assimetria e a curtose dos dados de entrada mantêm-se em patamares muito próximos aos consolidados no cenário anterior. O desafio metodológico imposto neste cenário não reside em uma nova explosão dos momentos estatísticos, mas sim na necessidade de a técnica processar corretamente um FPP composto por VAs contínuas e discretas, capturando o impacto destas FDPs mistas, sem comprometer a exatidão. A representação visual dessa elevada concentração de probabilidade na ausência de geração é evidenciada no histograma da Figura 27.

Para assegurar que o risco de violação do limite regulatório permaneça próximo à tolerância estipulada, o MUST contratado na Barra 01 foi mantido em 120 MW, o que resultou em uma probabilidade de violação (estimada via SMC) de 4.98%, superior à probabilidade de violação estimada no Cenário I.3, como esperado.

Para iniciar as análises de desempenho, avaliou-se a capacidade da UT em propagar essas incertezas através do sistema. A Tabela 21 apresenta o comparativo de esforço computacional na etapa de propagação. Observa-se que a SMC demandou 190.732 simulações empíricas para atingir a convergência. Em contrapartida, a abordagem proposta modelou todo o sistema com

² Cabe ressaltar que este valor de 4% reflete a taxa de falha típica de um único aerogerador. A extrapolação desse índice para a indisponibilidade simultânea de todo o parque eólico foi assumida neste estudo com finalidade estritamente didática e metodológica, com o intuito de inserir uma variável discreta de maior variabilidade para avaliar a robustez da ferramenta computacional.

Figura 27 – Histograma da potência ativa injetada pelo gerador eólico (Cenário I.4).



Fonte: Elaborado pelo autor.

apenas 162 execuções determinísticas. Cabe destacar um detalhe metodológico crucial: o salto de 81 (Cenários I.2 e I.3) para 162 estados é devido à inserção da nova VA do tipo binomial (i.e., indisponibilidade do parque eólico), o que divide o problema em operação normal e operação com falha, avaliando a rede em ambos os estados e combinando os resultados matematicamente. Mesmo com esse crescimento em custo computacional, a UT permanece com eficiência em ordens de grandeza superior à SMC.

Tabela 21 – Comparativo da eficiência no tempo de estimativa estocástica (Cenário I.4).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo de Estimativa [s]
SMC	190.732	19,35
UT	162	5,25

Fonte: Elaborado pelo autor.

A exatidão dessa propagação é sumarizada na Tabela 22, que consolida os desvios percentuais médios dos momentos estatísticos para toda a rede. Consta-se que a média (μ) não teve a exatidão afetada pela inserção do evento discreto de falha (FOR), preservando desvios médios irrisórios. De forma análoga ao cenário anterior, a distorção métrica sobre os momentos de ordem superior volta a se manifestar positivamente: com a manutenção da forte assimetria global frente à introdução da FOR, o desvio percentual médio da assimetria (γ) para os fluxos de potência (S) manteve-se em um patamar mais baixo ($-3,21\%$). Tais constatações solidificam o argumento de que a UT preserva a sua acurácia na estimação dos momentos mesmo quando a natureza do sistema impõe combinações de distribuições mistas.

A Tabela 23 detalha as estimativas para as quatro grandezas representativas padrão (P_1 , V_6 , S_{23} e S_{34}). Esta análise permite observar o impacto isolado da taxa de falha sobre variáveis específicas.

A análise da Tabela 23 chancela a capacidade da UT em processar a FDP mista da eólica

Tabela 22 – Desvios percentuais médios dos momentos estatísticos estimados (Cenário I.4).

Grandeza	Média dos Desvios Percentuais [%]			
	μ	σ^2	γ	κ
P_1	-0,1668	-0,3640	-1,2971	-0,1946
V	-0,0023	0,9741	7,4101	-1,6718
S	-0,0103	2,2678	-3,2153	-4,2226

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 23 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário I.4).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_1	μ [MW]	91,8133	91,6602	-0,1668	-0,1531
	σ^2 [MW ²]	581,8389	579,7210	-0,3640	-2,1180
	γ	0,0740	0,0730	-1,2971	-0,0010
	κ	3,0245	3,0186	-0,1946	-0,0059
V_6	μ [pu]	0,9845	0,9845	0,0013	0,0000
	σ^2 [pu ²]	0,0002	0,0002	-0,4884	0,0000
	γ	-0,3896	-0,3756	-3,5989	0,0140
	κ	3,3303	3,1767	-4,6114	-0,1536
S_{23}	μ [MVA]	9,5137	9,5281	0,1509	0,0144
	σ^2 [MVA ²]	0,7617	0,8153	7,0350	0,0536
	γ	2,2879	2,2867	-0,0546	-0,0013
	κ	9,9120	9,7815	-1,3166	-0,1305
S_{34}	μ [MVA]	60,3217	60,3149	-0,0113	-0,0068
	σ^2 [MVA ²]	10,1750	10,2297	0,5373	0,0547
	γ	0,3048	0,2085	-31,6110	-0,0964
	κ	4,2204	2,8426	-32,6460	-1,3778

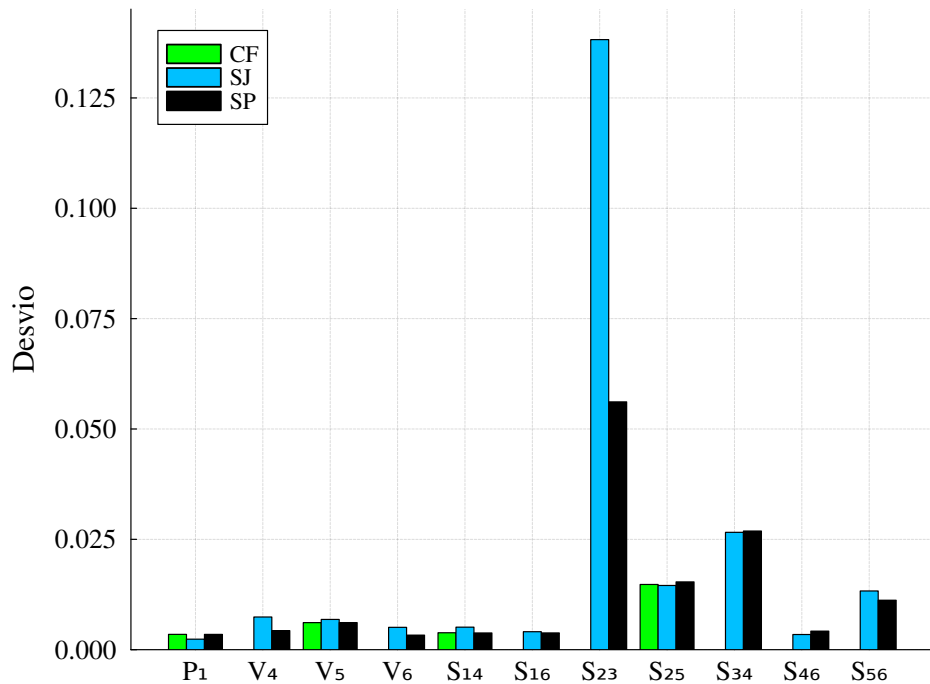
Fonte: Elaborado pelo autor.

para o caso analisado. O destaque absoluto recai sobre o fluxo S_{23} : sob o efeito do salto de probabilidade gerado pela FOR, a UT modelou a assimetria desta grandeza com um desvio relativo ínfimo ($-0,05\%$). Simultaneamente, o fluxo S_{34} reproduz a distorção métrica já debatida nos cenários prévios (elevado desvio percentual, porém com erro absoluto inferior a 0,10 na assimetria), garantindo a viabilidade estatística para a etapa seguinte.

Para mensurar a acurácia dessas abordagens, a Figura 28 apresenta os desvios máximos absolutos das reconstruções.

A análise da Figura 28 revela que as metodologias preservaram uma excelente acurácia geral, com desvios absolutos máximos em patamares baixos e com comportamento similar ao do Cenário I.3. O pico isolado de erro permaneceu no fluxo S_{23} , cujos desvios mantiveram-se restritos a valores abaixo de 0,13 para a reconstrução via SJ. Ao avaliar o desempenho comparativo, o SP ratificou sua superioridade em relação ao SJ, contendo o erro máximo no fluxo S_{23} a um

Figura 28 – Desvios máximos absolutos das técnicas de reconstrução (Cenário I.4).



Fonte: Elaborado pelo autor.

patamar próximo a 0,05 e registrando desvios menores em sete das onze grandezas de saída do sistema.

Em relação ao comportamento morfológico das distribuições reconstruídas, o desempenho verificado no Cenário I.3 foi mantido. Por esse motivo, os resultados gráficos não são apresentados nesta etapa.

Para quantificar o desempenho computacional nesta etapa final, a Tabela 24 detalha os tempos de processamento e a taxa de sucesso.

Tabela 24 – Desempenho computacional das técnicas de reconstrução de DPs (Cenário I.4).

Metodologia	Tempo de Reconstrução [s]	VAs com DPs Reconstruídas
CF	2,84	4/11
SJ	3,48	11/11
SP	3,62	11/11

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 24 atesta que o SP modelou o sistema integralmente em 3,62 segundos, enquanto SJ precisou de 3,48 segundos. Apesar de neste caso o SJ ter tido melhor desempenho em termos de eficiência computacional, o SP manteve ao menos uma eficiência equiparada. Por fim, a Tabela 25 compila os resultados para a probabilidade de violação do MUST na Barra 01 (P_1).

A análise da Tabela 25 conclui a validação do modelo proposto frente ao nível máximo de complexidade estocástica simulado. As abordagens baseadas nas técnicas de reconstrução

Tabela 25 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário I.4).

VA	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a	Tempo Total [s]	Speedup
P_1	SMC	4,9821	-	-	19,35	-
	UT+CF	4,8116	-3,4219	-0,1705	8,09	2,39
	UT+SJ	4,9312	-1,0218	-0,0509	8,73	2,21
	UT+SP	4,9327	-0,9914	-0,0494	8,87	2,18

Fonte: Elaborado pelo autor.

de DPs possibilitaram estimar o risco operativo com desvios absolutos restritos a patamares de $-0,05$, garantindo um *speedup* de 2,18 para a metodologia acoplada ao SP e 2,21 para SJ. Tais resultados cancelam a solidez da ferramenta proposta para o sistema analisado até este ponto, comprovando sua acurácia comparável à simulação de referência mesmo sob regimes de VAs com distribuições mistas e elevada não linearidade.

6.3 Estudo II: Análise de Sensibilidades

Conforme evidenciado ao longo do Estudo I, a composição da UT em conjunto com o SP firmou-se como a abordagem mais robusta e eficiente dentre as avaliadas. Diante da sua capacidade em reconstruir todas as distribuições com a maior exatidão média global e em baixo tempo de execução computacional, essa técnica foi a escolhida para dar prosseguimento às análises. Tendo a sua validade comprovada em um sistema de pequeno porte, o passo metodológico subsequente consiste em avaliar a escalabilidade e as limitações dessa ferramenta frente a um contexto de maior complexidade topológica e estatística.

É importante destacar a mudança de objetivo metodológico que baliza esta nova etapa. Enquanto o Estudo I dedicou-se à comparação entre as diferentes técnicas de reconstrução paramétricas (CF, SJ e SP), este Estudo II concentra-se na análise de desempenho frente ao ajuste dos parâmetros envolvidos na aplicação da metodologia proposta e às características inerentes ao problema, como a raridade dos eventos e a dimensionalidade do modelo.

Para garantir o rigor das simulações, adotou-se o consolidado sistema IEEE RTS 24 barras (Subseção 6.1.1.2), que é reconhecido e amplamente aplicado na literatura técnica para estudos de confiabilidade, planejamento e operação, proporcionando uma malha de transmissão robusta e uma diversidade de componentes e parâmetros essenciais para estressar os algoritmos sob avaliação.

Para fundamentar as análises deste segundo estudo, a rede do sistema IEEE RTS 24 barras foi inserida em um contexto análogo ao do Estudo I: a contratação do MUST por uma concessionária operando na região de subtransmissão (138 kV) conectada à rede básica (230 kV). Diferentemente do cenário anterior, a conexão ao sistema interligado ocorre simultaneamente em três pontos distintos (Barras 03, 09 e 10). Para manter o risco regulatório global próximo à margem estipulada de 5%, estabeleceu-se um limite máximo de probabilidade de violação

individual na ordem de 2% para cada barra de conexão (resultando no valor global de 5,88%). Diante destas premissas, além das violações diretas de potência ativa limitadas pelo MUST contratado, monitorou-se o comportamento das magnitudes de tensão nas referidas barras e os fluxos de potência aparente nos circuitos de conexão.

A modelagem estocástica base deste problema foi configurada com um total de 11 VAs independentes. As incertezas de demanda foram atribuídas a todas as 10 cargas localizadas na região de 138 kV, modeladas seguindo distribuições Normais com coeficiente de variação (CV) de 10%. Adicionalmente, a geração originalmente despachada na Barra 07 foi substituída pela injeção intermitente de um parque eólico com 198 MW de capacidade instalada (composto por 60 aerogeradores de 3,3 MW). Visando isolar a influência da injeção de potência ativa, a máquina síncrona preexistente nesta barra foi mantida operando com fornecimento ativo nulo, prestando exclusivamente suporte de potência reativa para controle da magnitude de tensão local.

A fim de conduzir a investigação de forma progressiva, o presente estudo utiliza este cenário base de 11 VAs para estruturar três frentes de análise de sensibilidade, detalhadas a seguir:

1. **Sensibilidade à Densidade de Discretização:** Avalia o impacto da quantidade de pontos sigma amostrados sobre a dualidade entre acurácia matemática e desempenho computacional. Esta frente subdivide-se em três níveis de exigência: o Cenário II.1 utiliza uma discretização de 3 pontos sigma por VA; o Cenário II.2 adensa a formulação para 5 pontos sigma por VA; e o Cenário II.3 adota uma formulação híbrida, alocando 5 pontos para VAs assimétricas (e.g., eólica) e 3 pontos para VAs simétricas (e.g., cargas). A formulação estabelecida neste último atuará como base para as sensibilidades seguintes;
2. **Sensibilidade à Raridade do Evento:** Investiga o comportamento analítico e o esforço computacional exigido pelas técnicas diante da necessidade de quantificar probabilidades em regiões extremas de cauda. Para este teste, o risco individual aceito pela concessionária em cada barra será afrouxado de 2% para 5%, o que resultará em uma probabilidade de violação global estimada em 14,26%;
3. **Sensibilidade à Dimensionalidade do Problema:** Compara a degradação de desempenho enfrentada pelos métodos frente ao aumento de VAs injetadas na rede. Partindo do cenário base, novas incertezas binomiais serão agregadas ao FPP para modelar a indisponibilidade do parque eólico: inicialmente avaliando o parque como uma usina equivalente (adição de 1 VA) e, em seguida, modelando a falha coletiva em arranjos internos agrupados a cada 10 turbinas (adição de 6 VAs).

O detalhamento metodológico, a análise dos gráficos e a avaliação quantitativa atrelada a estas três frentes de investigação são apresentados nas subseções a seguir.

6.3.1 Sensibilidade à Densidade de Discretização

Nesta primeira etapa de simulações, investiga-se o impacto da densidade amostral da UT sobre a acurácia estatística e o esforço computacional do algoritmo. Conforme detalhado na fundamentação teórica, a Quadratura Gaussiana exige a definição prévia da quantidade de pontos sigma que representarão a FDP de cada VA de entrada. Como a avaliação do FPP depende do produto tensorial dessas variáveis, a escolha desta malha de discretização estabelece um compromisso direto entre a exatidão no mapeamento das não linearidades e o tempo de processamento exigido para a resolução do problema, conforme discutido no Capítulo 3.

Como as premissas operativas do sistema RTS-24 permanecem inalteradas ao longo de todos os testes desta subseção, a Tabela 26 sintetiza a configuração operativa base, apresentando os limites do MUST contratado e o risco regulatório de referência para as três barras de conexão avaliadas.

Tabela 26 – Configuração operativa base e risco regulatório de referência.

Ponto de Conexão	MUST Contratado [MW]	Probabilidade de Violação (SMC) [%]
Barra 03 (P_{03})	223	1,89
Barra 09 (P_{09})	329	1,92
Barra 10 (P_{10})	450	1,89

Fonte: Elaborado pelo autor.

A investigação da abordagem de densidade de amostragem foi conduzida de maneira progressiva por meio de três cenários distintos, descritos a seguir.

6.3.1.1 Cenário II.1

Neste primeiro cenário, a Quadratura Gaussiana da *Unscented Transform* foi configurada com uma densidade reduzida, estipulando-se 3 pontos sigma para cada uma das 11 VAs de entrada do sistema. Devido à natureza da formulação, o arranjo dessa malha estocástica exigiu a avaliação de 177.147 estados de FPDs. A Tabela 27 apresenta o comparativo de esforço computacional entre SMC e UT+SP.

Tabela 27 – Comparativo da eficiência computacional (Cenário II.1).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo Total [min]	Speedup
SMC	519.013	6,41	-
UT+SP	177.147	2,15	2,98

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 27 evidencia que, sob a perspectiva estritamente computacional, a formulação de baixa densidade apresenta uma elevada eficiência. Enquanto a simulação de referência por Monte Carlo demandou a convergência após a amostragem de 519.013 cenários

determinísticos, a abordagem via UT mapeou as incertezas operativas com cerca de um terço destes estados. Essa redução drástica refletiu-se diretamente nos tempos de processamento, em que o FPP via UT+SP demandou apenas 2,15 minutos frente aos 6,41 minutos exigidos pela SMC, estabelecendo um *speedup* de aproximadamente 2,98 vezes.

Contudo, a avaliação da acurácia estatística desta etapa revela que o mapeamento reduzido compromete o rigor na captura de momentos estatísticos de ordens superiores. A Tabela 28 detalha os desvios relativos e absolutos dos quatro primeiros momentos calculados para os fluxos de potência ativa nas barras de acoplamento da concessionária (P_{03} , P_{09} e P_{10}).

Tabela 28 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário II.1).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	μ [MW]	222,0976	221,9784	-0,0537	-0,1191
	σ^2 [MW ²]	140,1871	146,4538	4,4703	6,2667
	γ	-0,2165	-0,3140	45,0483	-0,0975
	κ	3,0705	3,2594	6,1519	0,1888
P_{09}	μ [MW]	312,1262	311,7712	-0,1137	-0,3549
	σ^2 [MW ²]	742,3774	795,7669	7,1917	53,3895
	γ	-0,4426	-0,6113	38,1039	-0,1686
	κ	3,2319	3,6386	12,5822	0,4066
P_{10}	μ [MW]	432,2565	431,8854	-0,0858	-0,3710
	σ^2 [MW ²]	1139,6408	1218,4871	6,9185	78,8463
	γ	-0,4003	-0,5581	39,4021	-0,1577
	κ	3,2057	3,5654	11,2209	0,3597

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados expostos na Tabela 28 demonstram que, embora a estimativa do primeiro momento (μ) permaneça estável e com boa acurácia, exibindo desvios irrisórios (inferiores a 0,12%), o mesmo comportamento não se estende aos momentos de dispersão e formato. A variância (σ^2) registrou desvios consideráveis em todas as barras monitoradas, variando de 4,47% na Barra 03 a até 7,19% na Barra 09. Essa inexatidão percentual expande-se de forma crítica na avaliação da assimetria (γ) e da curtose (κ), nas quais o uso de apenas 3 pontos sigma por VA mostrou-se incapaz de mapear as VAs de saída frente aos efeitos não lineares inerentes ao problema de FPP. A assimetria de P_{03} apresentou um desvio relativo severo de 45,04%, enquanto os desvios de curtose superaram os 11% e 12% para os barramentos 10 e 09, respectivamente. É importante destacar que este comportamento já havia sido identificado nas análises realizadas no Estudo I, conforme discutido detalhadamente.

Essa inacurácia na captura dos momentos de ordem mais alta pode acarretar consequências diretas na finalidade central do estudo de planejamento, que consiste na quantificação do risco de violação operacional, uma vez que a reconstrução das DPs está diretamente relacionada a estimativa desses momentos. A Tabela 29 compila a probabilidade estimada de superação do

limite superior do MUST contratado para cada ponto de conexão, confrontando os resultados obtidos via UT+SP com a referência SMC.

Tabela 29 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário II.1).

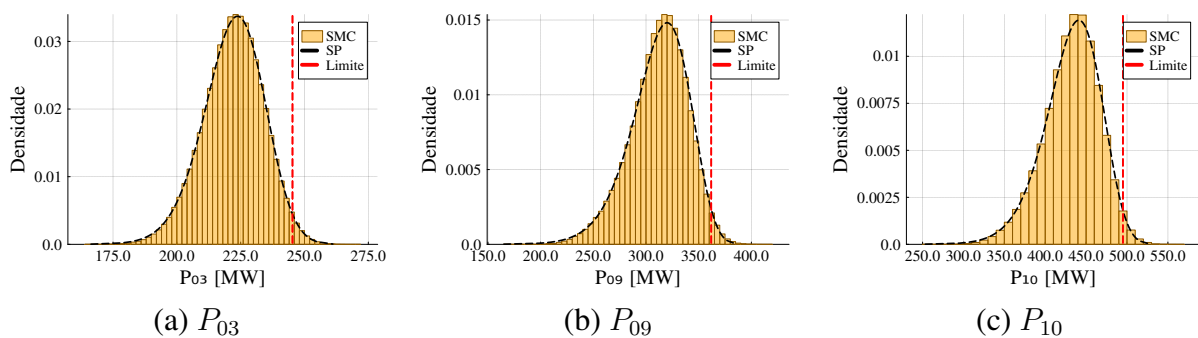
VA	Limite	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	Superior	SMC	1,8912	-	-
		UT+SP	1,8387	-2,7793	-0,0525
P_{09}	Superior	SMC	1,9192	-	-
		UT+SP	1,6305	-15,0408	-0,2886
P_{10}	Superior	SMC	1,8903	-	-
		UT+SP	1,6326	-13,6297	-0,2576

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados na Tabela 29 expõem as particularidades do uso de uma baixa densidade de discretização em problemas com alto teor estocástico. Embora a Barra 03 tenha mantido um desvio relativo de apenas $-2,78\%$, as estimativas para as demais barras monitoradas subestimaram o risco operativo real sob a ótica percentual. A metodologia registrou erros relativos de $-15,04\%$ na Barra 09 e de $-13,63\%$ na Barra 10. Contudo, é imperativo ressaltar que os desvios absolutos se mantiveram em patamares bastante restritos, não ultrapassando a margem de $-0,29$ pontos percentuais nas probabilidades estimadas.

Para ilustrar estas divergências na avaliação de risco, a Figura 29 contrapõe as FDPs reconstruídas pelo SP com os histogramas da SMC para os fluxos de potência ativa, explicitando a fronteira de violação regulatória de cada barra.

Figura 29 – Potências ativas nas barras de conexão MUST (Cenário II.1).

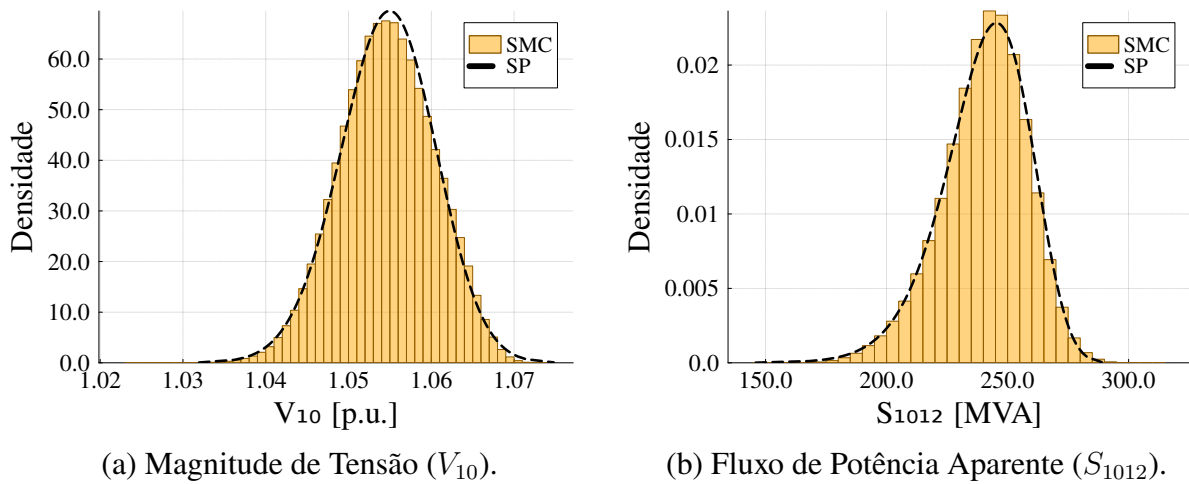


Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise visual das distribuições sintetizadas na Figura 29 ratifica o comportamento desse mapeamento estatístico. Nota-se que o corpo principal das curvas reconstruídas possui uma notável aderência aos histogramas da SMC. O distanciamento ocorre principalmente na região crítica à direita da linha de limite operativo, na qual as estimativas paramétricas apresentam um leve achatamento, justificando a subestimação relativa do risco apontada na Tabela 29.

Para além das potências ativas, que balizam os contratos, é importante avaliar visualmente como essa parametrização impacta as demais grandezas elétricas da rede. Para uma representação mais concisa, foram selecionados para análise o barramento e o circuito de interligação que apresentaram as maiores distorções morfológicas. A Figura 30 apresenta a sobreposição das curvas reconstruídas para a magnitude de tensão mais crítica e para o fluxo de potência aparente mais representativo.

Figura 30 – Perfis de probabilidade para as grandezas representativas (Cenário II.1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em consonância com as constatações realizadas para a potência ativa, a Figura 30 evidencia que a estimativa das grandezas elétricas secundárias preserva a conformidade global, sofrendo desvios limitados apenas nas cristas e nas extremidades das caudas. Esse comportamento atesta que, embora o arranjo com 3 pontos sigma produza aproximações globais de alta eficiência e com desvios absolutos contidos, ele pode carecer do rigor matemático demandado para quantificar eventos operativos raros em análises críticas de segurança. Tal constatação torna imperativa a investigação dos efeitos de um adensamento amostral.

6.3.1.2 Cenário II.2

Com o intuito de mitigar as inexatidões identificadas no cenário anterior e avaliar os limites práticos da ferramenta, o Cenário II.2 propõe um refinamento na amostragem. A UT foi reconfigurada para aplicar uma malha de alta densidade, estipulando-se 5 pontos sigma para cada uma das 11 VAs de entrada. Essa expansão amostral ilustra fisicamente a alta sensibilidade da técnica frente à densidade de amostragem, em que, ao aumentar apenas dois pontos por variável, o arranjo estocástico escalou exponencialmente, saltando para a avaliação de 48.828.125 estados determinísticos. A Tabela 30 apresenta o comparativo de esforço computacional.

Tabela 30 – Comparativo da eficiência computacional (Cenário II.2).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo Total	Speedup
SMC	519.013	6,41 min	-
UT+SP	48.828.125	9,13 horas	0,012

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise apresentada na Tabela 30 evidencia a inviabilidade prática de uma estratégia de alta densidade. O processamento totalizou 9,13 horas de simulação contínua, em comparação com apenas 6,41 minutos necessários para a amostragem via SMC. Essa discrepância revela uma severa degradação de desempenho na abordagem proposta, sendo aproximadamente 85 vezes mais lenta que a referência, comprometendo seu principal objetivo, que é a eficiência computacional.

Apesar do custo computacional restritivo, a avaliação estatística desta etapa comprova o poder intrínseco da Quadratura Gaussiana em aproximar funções contínuas por discretas. A Tabela 31 detalha a estimação dos momentos estatísticos sob o adensamento para 5 pontos sigma.

Tabela 31 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário II.2).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	μ [MW]	222,0976	222,0758	-0,0098	-0,0218
	σ^2 [MW ²]	140,1871	140,0579	-0,0921	-0,1291
	γ	-0,2165	-0,2247	3,7908	-0,0082
	κ	3,0705	3,0780	0,2440	0,0074
P_{09}	μ [MW]	312,1262	312,0640	-0,0199	-0,0621
	σ^2 [MW ²]	742,3774	741,0571	-0,1778	-1,3203
	γ	-0,4426	-0,4511	1,9047	-0,0084
	κ	3,2319	3,2145	-0,5389	-0,0174
P_{10}	μ [MW]	432,2565	432,2356	-0,0048	-0,0208
	σ^2 [MW ²]	1139,6408	1139,7495	0,0095	0,1087
	γ	-0,4003	-0,4095	2,2925	-0,0091
	κ	3,2057	3,1876	-0,5638	-0,0180

Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação com os dados do Cenário II.1 revela um salto de acurácia elevado. A malha estocástica mais densa mostrou-se perfeitamente hábil em contornar as não linearidades inerentes ao problema de FPP. Os desvios consideráveis na estimação da variância (σ^2), que antes superavam a marca de 7%, foram mitigados para patamares irrisórios (desvio máximo de -0,17% na Barra 09). O ganho de exatidão é ainda mais marcante nos momentos de formato da distribuição: a assimetria (γ) do fluxo em P_{10} , por exemplo, recuou de um erro severo de 39,40% para uma restrita margem de 2,29%, enquanto os desvios de curtose de todas as barras convergiram para a referência da SMC com desvios abaixo de 1%.

Tendo em vista a análise dos momentos estatísticos, a Tabela 32 consolida o recálculo do risco de superação do MUST contratado pela concessionária.

Tabela 32 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário II.2).

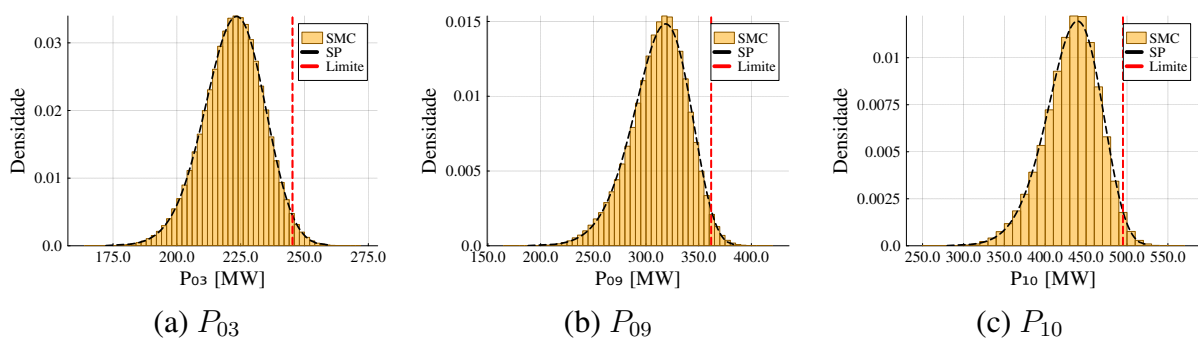
VA	Limite	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	Superior	SMC	1,8912	-	-
		UT+SP	1,8366	-2,8871	-0,0546
P_{09}	Superior	SMC	1,9192	-	-
		UT+SP	1,6283	-15,1578	-0,2909
P_{10}	Superior	SMC	1,8903	-	-
		UT+SP	1,7304	-8,4594	-0,1599

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 32 expõe um detalhe metodológico inerente aos métodos paramétricos de reconstrução. Apesar de os quatro momentos estatísticos terem sido mapeados com alta exatidão pela UT, as probabilidades estimadas na região de cauda pelo SP apresentaram uma margem de divergência em relação à referência, registrando desvios relativos de $-15,15\%$ em P_{09} e $-8,45\%$ em P_{10} . Este comportamento atesta que, uma vez sanada a inexactidão de propagação da UT, o desvio passa a ser governado estritamente pela limitação matemática da própria técnica SP. Ainda assim, em consonância com a constatação do Cenário II.1, os desvios absolutos permaneceram contidos em até $-0,29$ pontos percentuais, garantindo um bom nível de acurácia.

Para ilustrar a qualidade da propagação associada ao desvio residual na cauda da distribuição, a Figura 31 contrapõe as FDPs reconstruídas com os histogramas de simulação para os fluxos de potência ativa.

Figura 31 – Potências ativas nas barras de conexão MUST (Cenário II.2).



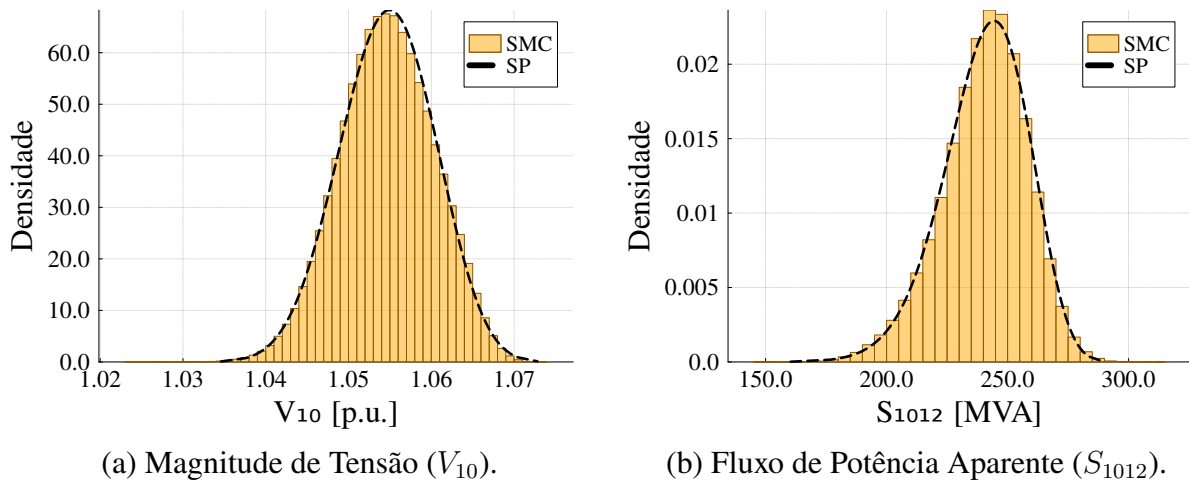
Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar de haver uma melhora visível nos achatamentos observados no Cenário II.1, os gráficos da Figura 31 demonstram que o fornecimento de momentos estatísticos altamente acurados não permitiu ao SP um ganho considerável de exatidão ao buscar sobrepor os dados obtidos via histograma. Embora os resultados de probabilidades estimadas em termos percentuais

tenham sido melhores que do Cenário II.1, o incremento de custo computacional envolvido torna impeditiva essa abordagem. Ademais, é importante destacar que em termos de desvios absolutos, as duas abordagens obtiveram um grau de acurácia comparável.

Por fim, visando corroborar que este ajuste de forma se estenda de maneira global para a rede elétrica, a Figura 32 reapresenta as curvas de probabilidade para a magnitude de tensão representativa e para o fluxo aparente no respectivo circuito crítico.

Figura 32 – Perfis de probabilidade corrigidos para as grandezas representativas (Cenário II.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em consonância com as potências avaliadas para contratação de MUST, a Figura 32 evidencia a extensão do mesmo comportamento para as grandezas monitoradas de forma secundária no problema, com as curvas ajustando-se com boa acurácia aos resultados da SMC, porém sem justificar o incremento em custo computacional.

Em síntese, o Cenário II.2 atesta a acurácia fornecida pela UT na estimativa dos momentos, mas reprovava a sua viabilidade prática de implementação. Os resultados comparativos entre os Cenários II.1 e II.2 evidenciam a necessidade de uma intervenção otimizada, justificando a investigação de um arranjo híbrido no cenário subsequente, aumentando a densidade de pontos apenas em grandezas de maior necessidade.

6.3.1.3 Cenário II.3

Buscando equilibrar os extremos evidenciados nos Cenários II.1 e II.2, o Cenário II.3 propõe uma exploração das características físicas e estatísticas do sistema por meio de uma amostragem não padronizada. O equacionamento desta abordagem pauta-se no comportamento intrínseco das variáveis aleatórias injetadas na rede. Como as 10 variáveis de carga possuem distribuição Normal, elas não apresentam assimetria intrínseca (i.e., seu terceiro momento tende a zero), o que torna um adensamento nessas VAs redundante e oneroso. Em contrapartida, a geração eólica atua como a fonte central de distorções e não linearidades do problema.

Desta forma, a UT foi reconfigurada alocando-se a densidade robusta de 5 pontos sigma exclusivamente para a VA eólica intermitente, enquanto as 10 VAs de carga mantiveram a discretização reduzida de 3 pontos sigma. O produto tensorial derivado deste arranjo selecionado ($5^1 \times 3^{10}$) resultou na avaliação de apenas 295.245 estados operativos determinísticos. A Tabela 33 apresenta o impacto dessa abordagem no esforço computacional.

Tabela 33 – Comparativo da eficiência computacional (Cenário II.3).

Metodologia	Estados Avaliados	Tempo Total [min]	Speedup
SMC	519.013	6,41	-
UT+SP	295.245	3,40	1,89

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 33 comprova a eficácia da redução de estados avaliados pela ferramenta. Ao direcionar o adensamento apenas para a grandeza estocástica de maior complexidade, a formulação híbrida mitigou a explosão combinatória observada no Cenário II.2, reduzindo o volume de estados avaliados a patamares viáveis. Consequentemente, o tempo total de execução computacional recuou das restritivas 9,13 horas para apenas 3,40 minutos, restituindo o *speedup* objetivado do algoritmo, que se consolidou 1,89 vezes mais rápido que a SMC de referência.

Superado o gargalo computacional, torna-se necessário verificar o impacto desta economia de estados na qualidade da propagação estocástica. A Tabela 34 detalha as estimativas dos momentos para a formulação híbrida.

Tabela 34 – Comparativo detalhado dos momentos estatísticos (Cenário II.3).

VA	Momento	SMC	UT	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	μ [MW]	222,0976	222,0758	-0,0098	-0,0218
	σ^2 [MW ²]	140,1871	140,0578	-0,0922	-0,1292
	γ	-0,2165	-0,2247	3,7916	-0,0082
	κ	3,0705	3,0780	0,2452	0,0075
P_{09}	μ [MW]	312,1262	312,0641	-0,0199	-0,0621
	σ^2 [MW ²]	742,3774	741,0563	-0,1779	-1,3211
	γ	-0,4426	-0,4511	1,9046	-0,0084
	κ	3,2319	3,2145	-0,5399	-0,0174
P_{10}	μ [MW]	432,2565	432,2356	-0,0048	-0,0208
	σ^2 [MW ²]	1139,6408	1139,7487	0,0095	0,1079
	γ	-0,4003	-0,4095	2,2942	-0,0091
	κ	3,2057	3,1876	-0,5653	-0,0181

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados elencados na Tabela 34 validam a premissa desta estratégia seletiva. A acurácia dos momentos estimados foi comparável à do Cenário II.2, atingindo exatidão coincidente

até a terceira casa decimal para as médias (μ) e variâncias (σ^2). A assimetria (γ) de P_{10} , por exemplo, fixou-se nos mesmos 2,29% de desvio relativo alcançados sob alta densidade.

Esses dados evidenciam que o expressivo desvio de propagação aferido no Cenário II.1 (39,40% na assimetria de P_{10}) decorreu de uma limitação causada por uma parametrização de baixa densidade, a qual se mostrou deficiente para capturar a severa assimetria da geração eólica intermitente. A Tabela 35 quantifica o risco final de violação regulatória calculado na etapa de reconstrução de FDPs.

Tabela 35 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST (Cenário II.3).

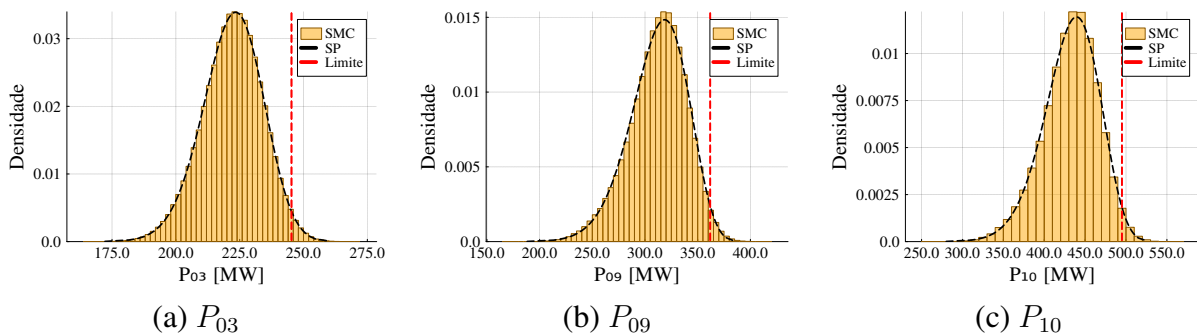
VA	Limite	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	Superior	SMC	1,8912	-	-
		UT+SP	1,8366	-2,8871	-0,0546
P_{09}	Superior	SMC	1,9192	-	-
		UT+SP	1,6283	-15,1579	-0,2909
P_{10}	Superior	SMC	1,8903	-	-
		UT+SP	1,7304	-8,4595	-0,1599

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em conformidade com o comportamento atestado na Tabela 34, as probabilidades de violação geradas pela técnica UT+SP com amostragem híbrida foram comparáveis às encontradas no Cenário II.2. A manutenção da limitação de aderência do SP nas regiões extremas indica, mais uma vez, que a causa é uma restrição relacionada à técnica de reconstrução.

Para corroborar visualmente a eficácia desta estratégia direcional, a Figura 33 contrapõe as FDPs reconstruídas sob a amostragem híbrida com os histogramas de simulação para os fluxos de potência ativa.

Figura 33 – Potências ativas nas barras de conexão MUST (Cenário II.3).



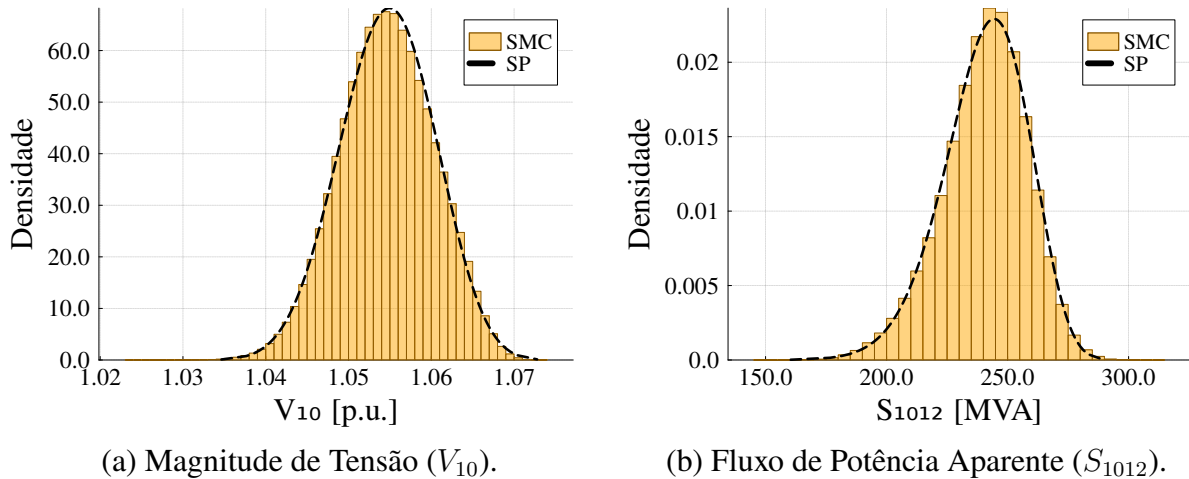
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise visual dos gráficos da Figura 33 atesta que os perfis gerados exibem a mesma excelência de ajuste observada na formulação padronizada de alta densidade (Cenário II.2). As curvas aderem com boa acurácia aos histogramas da SMC, incluindo a região de violação à

direita do limite. Tal comportamento reafirma que a redução drástica de 99,4% no número de estados avaliados não comprometeu a capacidade do método de rastrear o comportamento estocástico da rede.

Por fim, a Figura 34 estende a comprovação gráfica para as grandezas elétricas monitoradas de forma secundária, atestando a validade global do arranjo híbrido.

Figura 34 – Perfis de probabilidade para as grandezas representativas (Cenário II.3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

De maneira análoga às potências ativas, a Figura 34 evidencia a total conformidade das curvas de tensão e fluxo aparente com os histogramas, replicando o elevado grau de exatidão do Cenário II.2, mas com um esforço computacional vastamente inferior.

Diante do exposto, os estudos da Subseção 6.3.1 permitem concluir que a alocação padronizada de alta densidade se traduz em um desperdício de recursos computacionais sem proporcionar um impacto considerável em termos de qualidade de estimação de riscos operativos. Por outro lado, por conjugar um *speedup* competitivo e assegurar uma alta acurácia em relação à SMC, a modelagem estocástica baseada na formulação híbrida de amostragem indica ser a abordagem mais apropriada para problemas complexos como o FPP. Dessa forma, a arquitetura aplicada no Cenário II.3 foi consolidada como a base estrutural para os testes de sensibilidade à dimensionalidade do problema. Ressalta-se, contudo, que para o estudo de raridade do evento, apresentado na sequência, optou-se por manter a avaliação comparativa entre as três abordagens de discretização (II.1, II.2 e II.3).

6.3.2 Sensibilidade à Raridade do Evento

Nesta segunda frente de investigação, o objetivo metodológico desloca-se da sensibilidade frente à densidade de discretização para a sensibilidade frente à raridade do evento de risco. O intuito é avaliar e comparar o comportamento e o esforço computacional da técnica abordada

(FPP via UT+SP) com a técnica de referência (SMC), diante de eventos operativos com diferentes graus de frequência.

Para estruturar esta sensibilidade, o limite regulatório (MUST) assumido pela concessionária foi relaxado. Os níveis de violação, antes contidos na margem de 2%, foram redimensionados para admitir um risco operativo na ordem de 5% em cada ponto de conexão, configurando um cenário consideravelmente mais frequente. A Tabela 36 sintetiza a nova configuração de limites e as respectivas probabilidades de violação que servirão como referência.

Tabela 36 – Configuração operativa e risco regulatório afrouxado (Sensibilidade à Raridade).

Ponto de Conexão	MUST Contratado [MW]	Probabilidade de Violação (SMC) [%]
Barra 03 (P_{03})	219	4,86
Barra 09 (P_{09})	321	4,94
Barra 10 (P_{10})	440	4,70

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para garantir a coerência da base comparativa, os três cenários de discretização estocástica estabelecidos na Subseção 6.3.1 foram rigorosamente espelhados nesta etapa. Assim, o Cenário II.1 aplica a malha uniforme de baixa densidade (3 pontos sigma); o Cenário II.2 submete a rede à malha uniforme de alta densidade (5 pontos sigma); e o Cenário II.3 adota a formulação híbrida.

É fundamental pontuar uma particularidade desta etapa: a propagação das incertezas por meio da UT independe dos limites operativos avaliados, atuando estritamente na estimação dos momentos estatísticos das grandezas de saída do sistema. Consequentemente, o volume de estados avaliados pela UT e os momentos calculados permanecem matematicamente idênticos aos estimados na sensibilidade anterior. A alteração da raridade do evento impacta exclusivamente a estimativa final da probabilidade, realizada após a reconstrução da distribuição (no caso do FPP via UT) e o critério de convergência (no caso do FPP via SMC).

A Tabela 37 consolida o contraste de esforço computacional entre o FPP via UT+SP e o FPP via SMC, justapondo os resultados obtidos sob o limiar anterior de 2% (Subseção 6.3.1) com os novos patamares sob o regime afrouxado de 5% de risco.

Tabela 37 – Comparativo transversal de eficiência computacional: Risco de 2% vs. Risco de 5%.

Metodologia	Estados Avaliados		Tempo Total		Speedup	
	Risco 2%	Risco 5%	Risco 2%	Risco 5%	Risco 2%	Risco 5%
SMC	519.013	202.609	6,41 min	2,45 min	-	-
UT+SP (II.1)	177.147	177.147	2,15 min	2,15 min	2,98	1,14
UT+SP (II.2)	48.828.125	48.828.125	9,26 horas	9,26 horas	0,012	0,004
UT+SP (II.3)	295.245	295.245	3,40 min	3,40 min	1,89	0,72

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise comparativa dos dados dispostos na Tabela 37 expõe o comportamento distinto das metodologias frente à mudança de raridade do evento operativo monitorado. Sob a ótica da simulação Monte Carlo, constata-se uma sensibilidade amostral extrema em relação à probabilidade do alvo sob análise. Ao deslocar o limiar de violação do MUST de 2% para 5%, o espaço amostral empírico exigido para satisfazer o critério de convergência ($\beta = 1\%$) decresceu de 519.013 para 202.609 estados, uma redução expressiva de 60,96% no volume de execuções de FPDs. Essa diminuição refletiu-se de forma direta no tempo de processamento, que migrou de 6,41 minutos para apenas 2,45 minutos.

Em contrapartida, os resultados atestam a independência da *unscented transform* perante a raridade do evento. Independentemente do risco associado ao MUST, o número de estados avaliados via UT permaneceu rigorosamente invariável em todos os cenários (177.147 no Cenário II.1, 48.828.125 no Cenário II.2 e 295.245 no Cenário II.3). Os tempos totais de execução também espelharam este comportamento, manifestando oscilações marginais decorrentes apenas de flutuações de processamento. Esse comportamento evidencia que o ônus computacional da técnica é dependente exclusivamente da topologia do sistema e da densidade de discretização estocástica adotada, mostrando-se totalmente imune ao deslocamento do limiar operativo na cauda da distribuição.

Esse contraste de comportamento resultou em uma inversão direta no desempenho computacional dos algoritmos. Na análise sob regime de alta segurança (i.e., risco de 2%), a formulação híbrida da UT+SP (Cenário II.3) consolida-se como uma alternativa vantajosa ao estabelecer um *speedup* de 1,89 vezes sobre a SMC, enquanto a formulação reduzida do Cenário II.1 atinge a marca de 2,98 vezes. Contudo, sob o regime de menor segurança (i.e., risco de 5%), a convergência do método de referência (SMC) supera o desempenho computacional da ferramenta abordada. O indicador de aceleração do Cenário II.3 foi comprimido para o patamar de 0,72, tornando a simulação tradicional mais rápida, ao passo que o ganho do Cenário II.1 recuou para uma margem estreita de 1,14 vezes. Quanto ao Cenário II.2, o indicador degrada-se de 0,012 para 0,004, reiterando sua completa inviabilidade em ambos os contextos operacionais.

Os resultados apresentados demonstram que a vantagem computacional da abordagem FPP via UT+SP é condicionada ao nível de raridade do evento analisado, impossibilitando sua adoção como substituta universal da SMC. Para estudos de eventos mais prováveis, a SMC possui ótima acurácia e desempenho computacional, convergindo com uma baixa quantidade de estados analisados. Porém, para estudos de eventos raros, a SMC tende a demandar volumes amostrais massivos, atingindo desempenho computacional proibitivo. É justamente neste contexto que se insere a atratividade da implementação da abordagem via UT+SP, visto que a sua formulação mantém tempos de execução fixados e independentes da raridade do evento.

Sob o aspecto preditivo, o deslocamento do limite em direção ao centro da distribuição estatística ocasionou melhorias na abordagem FPP via UT+SP associado a um número menor de pontos sigma. A Tabela 38 sumariza as probabilidades estimadas pelo modelo UT+SP nos três cenários de discretização, contrastando-as com a referência SMC.

Tabela 38 – Probabilidade de violação do limite regulatório afrouxado.

VA	Limite	Método	Probabilidade [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	Superior	SMC	4,8625	-	-
		UT+SP (II.1)	4,8412	-0,4385	-0,0213
		UT+SP (II.2)	4,8392	-0,4805	-0,0233
		UT+SP (II.3)	4,8392	-0,4805	-0,0233
P_{09}	Superior	SMC	4,9405	-	-
		UT+SP (II.1)	4,8332	-2,1725	-0,1073
		UT+SP (II.2)	4,9310	-0,1923	-0,0095
		UT+SP (II.3)	4,9310	-0,1924	-0,0095
P_{10}	Superior	SMC	4,7036	-	-
		UT+SP (II.1)	4,7352	0,6724	0,0316
		UT+SP (II.2)	4,7329	0,6222	0,0292
		UT+SP (II.3)	4,7329	0,6222	0,0292

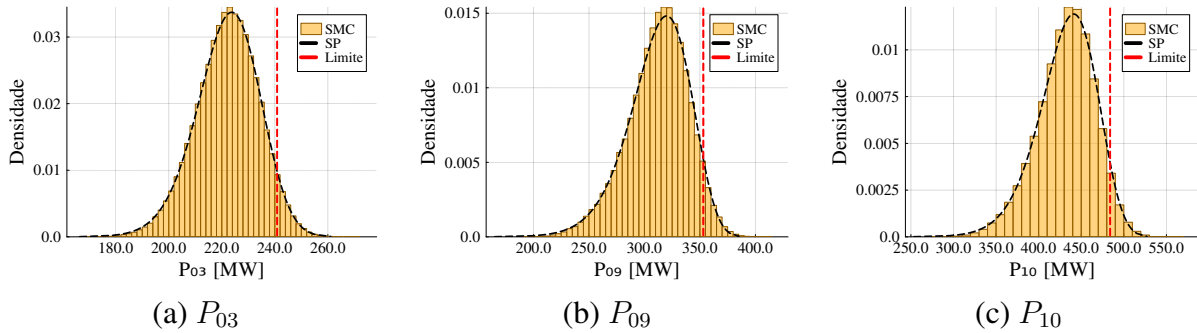
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise dos resultados expostos na Tabela 38 reforça a equivalência em termos de acurácia entre a formulação de alta densidade (Cenário II.2) e a formulação híbrida (Cenário II.3), apresentando desvios percentuais e absolutos marginais, corroborando a robustez desta abordagem mista.

Outro aspecto relevante desta análise consiste na melhoria de acurácia da matriz de 3 pontos sigma (Cenário II.1) frente a eventos de maior probabilidade de ocorrência. Conforme observado na Subseção 6.3.1, sob o limiar restrito de 2%, a amostragem reduzida apresentou dificuldades em mapear a região extrema da cauda na Barra 09, resultando em um desvio de $-15,04\%$. Já sob o regime de violação afrouxado para 5%, a estimativa dessa mesma variável obteve um ganho de acurácia expressivo, reduzindo o erro relativo para apenas $-2,17\%$. Esse comportamento é justificado pelo fato de que, ao aproximar-se do corpo central da distribuição, a sensibilidade da estimativa do risco diminui em relação aos desvios de assimetria e curtose, momentos estatísticos que a formulação de baixa densidade possui maior limitação, tornando-se mais dependente da média e da variância, que são capturadas com maior fidelidade. Além disso, em regiões de maior densidade probabilística, os desvios de reconstrução diluem-se na própria magnitude da probabilidade acumulada, resultando em erros percentuais significativamente menores em comparação com as zonas da cauda.

Para ilustrar este fenômeno de aderência, a Figura 35 apresenta os perfis de densidade sintetizados sob a matriz de 3 pontos sigma (Cenário II.1) em contraste com o histograma da SMC. A linha demarcada delimita a nova fronteira de violação do limite de contratação.

Figura 35 – Potências ativas nas barras de conexão sob risco afrouxado de 5% (Cenário II.1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A representação visual corrobora a análise quantitativa. Ao deslocar a linha de limite para mais próximo da média (i.e., região de maior densidade probabilística), a área de risco avaliada foge da zona de achatamento, ingressando em uma região de boa aderência local com o histograma. Tal constatação comprova empiricamente que as deficiências atreladas à abordagem de baixo adensamento da UT concentram-se estritamente na sua capacidade de mapear as extremidades das caudas. Para o rastreo do corpo central e das frações medianas das distribuições, discretizações menos densas revelam-se perfeitamente capazes de prover estimativas probabilísticas sólidas aliadas a um desempenho computacional ainda competitivo.

A subseção a seguir investiga a sensibilidade à dimensionalidade do problema, na qual o sistema é submetido a um adensamento estocástico por meio da inserção de novas variáveis aleatórias, destinadas a modelar a indisponibilidade do parque eólico. O intuito é mensurar o comportamento do desempenho computacional frente ao crescimento das variáveis de entrada, comparando as sensibilidades da abordagem UT+SP com a SMC.

6.3.3 Sensibilidade à Dimensionalidade do Problema

Nesta terceira e última frente de investigação, o enfoque metodológico direciona-se à escalabilidade dos algoritmos frente ao aumento do número de incertezas sistêmicas. O objetivo é mensurar o impacto da explosão combinatória atrelada à discretização estocástica, caracterizada pela severa degradação do desempenho computacional à medida que novas variáveis aleatórias são incorporadas ao modelo.

Para conduzir este estudo de sensibilidade, o cenário híbrido de 11 VAs (Cenário II.3 da Subseção 6.3.1) atua como o cenário base. A partir desta configuração, novas fontes de incerteza do tipo binomial foram agregadas ao problema para modelar a indisponibilidade física da injeção eólica. A expansão dimensional foi estruturada em duas etapas progressivas:

- **Cenário II.4.1 (+1 VA):** Adiciona-se uma única variável de falha global, modelando o parque eólico como uma usina equivalente (totalizando 12 VAs no FPP).

- **Cenário II.4.2 (+6 VAs):** O parque eólico é subdividido em arranjos internos, modelando a falha independente de 6 grupos compostos por 10 aerogeradores cada (totalizando 17 VAs no FPP).

Devido à natureza dicotômica (i.e., sucesso ou falha) das novas variáveis de indisponibilidade, a QG requer a alocação de apenas 2 pontos sigma para mapear adequadamente cada VA binomial. Ainda assim, este adensamento reflete diretamente no produto tensorial. A Tabela 39 apresenta o comparativo de esforço computacional entre o método de referência (SMC) e a ferramenta abordada (UT+SP) à medida que o vetor de incertezas se expande.

Tabela 39 – Comparativo transversal de eficiência computacional sob expansão dimensional.

Cenário de Teste	SMC		UT+SP (Híbrida)		Speedup
	Estados	Tempo	Estados	Tempo	
II.3: Cenário Base (11 VAs)	519.013	6,41 min	295.245	3,40 min	1,89
II.4.1: Adição de +1 VA (12 VAs)	477.005	6,24 min	590.490	7,00 min	0,89
II.4.2: Adição de +6 VAs (17 VAs)	506.249	6,63 min	18.895.680	3,53 horas	0,03

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da Tabela 39 expõe a severa limitação inerente aos métodos de aproximação por matrizes combinatórias. Ao adicionar apenas uma VA (Cenário II.4.1), o número de estados avaliados pela UT duplica em relação ao cenário base, fazendo o tempo de execução saltar para 7 minutos e suprimindo o ganho de desempenho frente à SMC (*speedup* de 1,89 para 0,89). O impacto da explosão combinatória evidencia-se de forma crítica no Cenário II.4.2, em que a incorporação de 6 VAs multiplica o espaço amostral da UT por 2^6 , demandando a resolução de quase 19 milhões de FPDs. Consequentemente, o tempo de execução colapsou para 3,53 horas, tornando a abordagem inviável sob a ótica de custo computacional.

Sob a perspectiva da simulação tradicional, os dados revelam a sua principal virtude. O critério de convergência da SMC é fundamentado estritamente na variância do valor estimado de probabilidade, sendo não dependente diretamente do número de variáveis de entrada. Tal característica é comprovada pela estabilidade do seu esforço computacional, em que independentemente de a composição possuir 11, 12 ou 17 VAs, o método exige um volume de amostras flutuando na margem de 500 mil estados, mantendo o seu tempo de processamento contido na estreita faixa de 6,2 a 6,7 minutos.

Apesar da limitação computacional enfrentada pela abordagem UT+SP, é importante avaliar se a degradação de desempenho compromete a sua acurácia estatística. Tendo em vista as alterações topológicas do sistema com a inserção das falhas operativas, as probabilidades de referência são naturalmente alteradas. A Tabela 40 apresenta as probabilidades de violação do MUST estimadas pelas duas metodologias ao longo do aumento da dimensionalidade.

Tabela 40 – Probabilidade de violação do limite superior da MUST frente à expansão dimensional.

VA	Cenário	SMC [%]	UT+SP [%]	ϵ_r [%]	ϵ_a
P_{03}	II.3 (11 VAs)	1,8912	1,8366	-2,8871	-0,0546
	II.4.1 (12 VAs)	2,0534	1,9367	-5,6812	-0,1166
	II.4.2 (17 VAs)	1,9371	1,8372	-5,1586	-0,0999
P_{09}	II.3 (11 VAs)	1,9192	1,6283	-15,1579	-0,2909
	II.4.1 (12 VAs)	2,1540	1,8283	-15,1195	-0,3256
	II.4.2 (17 VAs)	2,0007	1,7299	-13,5381	-0,2708
P_{10}	II.3 (11 VAs)	1,8903	1,7304	-8,4595	-0,1599
	II.4.1 (12 VAs)	2,0926	1,9305	-7,7474	-0,1621
	II.4.2 (17 VAs)	1,9648	1,7317	-11,8634	-0,2330

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise dos resultados dispostos na Tabela 40 revela que o aumento exponencial da dimensionalidade compromete a confiabilidade estatística da ferramenta abordada, não havendo garantia de bons níveis de acurácia nas estimativas. Embora os desvios absolutos tenham se preservado contidos na casa dos décimos percentuais (não ultrapassando a margem de $-0,32$ no Cenário II.4.1 para a Barra 09), os desvios relativos atingiram patamares expressivos, chegando a até $15,15\%$. Esta constatação evidencia que a limitação da UT frente à elevação da dimensionalidade não reside unicamente no processamento computacional proibitivo, mas também na perda de capacidade em mapear o comportamento estocástico da rede com precisão sob tais condições.

6.3.4 Considerações Finais do Estudo II

A conjugação das três frentes de sensibilidade investigadas (Densidade, Raridade e Dimensionalidade) consolida o panorama final do Estudo II, permitindo traçar um paralelo comparativo entre as capacidades e as limitações do método estocástico tradicional (SMC) e da abordagem FPP via UT+SP.

Visando sintetizar as informações metodológicas destas análises e estabelecer diretrizes claras para a aplicação de cada técnica na análise de riscos operativos, a Tabela 41 apresenta o comparativo global de desempenho estruturado ao longo deste estudo.

Tabela 41 – Comparativo global de características e viabilidade metodológica (SMC vs. UT+SP).

Critério	FPP via SMC	FPP via UT+SP
Acurácia em Regiões de Cauda	Alta: Adotada como a referência de exatidão do estudo.	Moderada/Alta: Requer adensamento em variáveis assimétricas.
Sensibilidade à Raridade	Alta: Eventos muito raros exigem volumes amostrais massivos.	Nula: Tempos de execução totalmente independentes da raridade do evento.
Sensibilidade à Dimensionalidade	Baixa: Esforço mantém-se estável sob a inserção de novas variáveis.	Alta: Sujeita à explosão combinatória do produto tensorial.
Aplicação Recomendada	Problemas com alta dimensionalidade e estudos de eventos frequentes.	Problemas com dimensionalidade moderada e estudos de eventos raros.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados sumarizados na Tabela 41 comprovam que a abordagem de FPP via UT+SP consiste em uma ferramenta de rigor estatístico, capaz de superar a velocidade da simulação de Monte Carlo desde que aplicada de forma cautelosa. O seu emprego atinge a máxima eficiência na avaliação de eventos raros (extrema cauda) em sistemas sujeitos a um número moderado de variáveis aleatórias independentes, cenário em que a SMC se torna excessivamente onerosa. Em contrapartida, para o processamento de matrizes estocásticas de altíssima dimensão ou sob regimes de operação mais prováveis, a SMC ratifica o seu papel como o instrumento mais adequado e resiliente à disposição na literatura.

7 CONCLUSÕES

Esta dissertação investiga a solução do problema de FPP via UT na análise de riscos operativos em sistemas elétricos. A abordagem desenvolvida fundamenta-se no acoplamento desta técnica de amostragem discreta com algoritmos de reconstrução de distribuições de probabilidade, viabilizando a quantificação de violações de limites operacionais do sistema sob fortes incertezas de geração e carga. As simulações conduzidas permitem delimitar as fronteiras de viabilidade técnica e computacional das ferramentas avaliadas.

As simulações estruturadas apontam para a premissa de que o desempenho dos métodos por aproximação de FPP é fortemente condicionado pela escolha do algoritmo de reconstrução das distribuições de probabilidade das VAs de saída. As análises demonstraram que a expansão de CF, quando empregada como ferramenta de reconstrução das distribuições de probabilidade a partir das estimativas dos momentos estatísticos via UT, possui um domínio de validade demasiadamente restrito para aplicação no contexto de FPP, não contemplando a grande maioria das VAs de interesse. Por sua vez, a reconstrução por meio do SJ se mostrou capaz de aderir a qualquer VA de interesse, mas apresenta a tendência de superestimar os riscos de cauda em algumas das distribuições assimétricas avaliadas. Neste contexto, a modelagem via SP consolidou-se como a ferramenta mais robusta, provendo a flexibilidade matemática necessária para mapear distribuições assimétricas com menores desvios e melhor desempenho computacional.

Além disso, a investigação comparativa entre a solução tradicional via SMC e a abordagem baseada na UT+SP evidenciou critérios claros de viabilidade para a condução de análises de riscos operativos por meio de cada ferramenta. Verifica-se que a eficiência do método UT+SP é superior na quantificação de violações de limites operativos raros, contexto em que a simulação de Monte Carlo exige um elevado número de simulações, tornando a sua execução computacionalmente onerosa para atingir a convergência. Em contrapartida, na avaliação de eventos operativos mais prováveis, a SMC reassume a sua vantagem computacional, visto que o volume amostral necessário decresce substancialmente. Ademais, a definição de uma amostragem seletiva e híbrida provou ser a abordagem mais eficiente para a discretização das VAs pela UT, mitigando o desperdício de processamento ao adensar pontos sigma exclusivamente nas variáveis de maior complexidade estatística. Contudo, confirmou-se que a composição UT+SP é altamente suscetível à explosão combinatória frente ao aumento do número de variáveis.

De forma geral, os estudos desta dissertação evidenciaram que a quantificação de incertezas no contexto de sistemas elétricos modernos não deve depender de uma única ferramenta universal, mas sim de uma abordagem metodológica complementar. Os resultados apresentados comprovam que a escolha do método de resolução do FPP deixou de ser uma decisão clássica e conservadora para se tornar uma etapa estratégica da análise de riscos operativos. Enquanto a técnica UT+SP desponta como uma solução ágil para avaliar a confiabilidade do sistema contra eventos críticos e de extrema raridade, a SMC mantém o seu protagonismo em problemas de menor raridade e de alta dimensionalidade. Dessa forma, este trabalho fornece não apenas um algoritmo eficiente

para quantificação de riscos operativos, mas apresenta um mapa comparativo fundamentado para a escolha do método adequado a cada contexto.

As principais contribuições derivadas desta dissertação englobam:

- A implementação e validação de uma metodologia de FPP fundamentada no acoplamento da UT com técnicas de reconstrução de distribuições de probabilidade, capaz de estimar riscos operativos em sistemas elétricos de forma rápida e com acurácia equivalente à da SMC;
- A análise comparativa e sistemática do desempenho das técnicas de reconstrução de distribuições de probabilidade frente a injeções não Gaussianas, delimitando os domínios de validade restritos das expansões clássicas (i.e., CF) em contraste com as vantagens de robustez e eficiência do Método dos Momentos aplicado aos SJ e SP;
- A investigação e definição das vantagens, desvantagens e domínios de aplicação das abordagens SMC e UT+SP na resolução do FPP, estabelecendo a adequação de cada técnica frente a diferentes cenários de complexidade do problema.

Como desdobramentos naturais desta pesquisa e visando transpor as limitações identificadas ao longo das análises de sensibilidade, sugerem-se as seguintes frentes de investigação para trabalhos futuros:

- **Aplicação complementar de técnicas de redução de dimensionalidade:** Integrar ao algoritmo ferramentas de mapeamento, filtro e compressão de espaço estocástico (e.g., Análise de Componentes Principais), com o intuito de viabilizar a aplicação prática da metodologia UT+SP em sistemas com grande quantidade de VAs;
- **Elaboração de um método adaptativo para definição de pontos sigma:** Desenvolver um algoritmo de varredura dinâmica capaz de ajustar automaticamente a quantidade de pontos sigma alocados por variável aleatória, baseando-se no grau de não linearidade e de representatividade, minimizando o adensamento desnecessário na discretização das VAs de entrada;
- **Modelagem de dependência e correlação entre variáveis aleatórias:** Transpor a premissa de independência estocástica por meio da incorporação de modelos estatísticos de correlação, permitindo representar a variação conjunta existente entre múltiplas variáveis de geração e de carga do sistema.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBASI, A. R. Comparison parametric and non-parametric methods in probabilistic load flow studies for power distribution networks. *Electrical Engineering*, v. 104, n. 6, p. 3943–3954, dec 2022. ISSN 1432-0487. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00202-022-01590-9>>.

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. *Resolução Normativa nº 1.017, de 19 de abril de 2022*. Brasília, DF, 2022. Alterada pela Resolução Normativa nº 1.107, de 3 de dezembro de 2024.

AIEN, M.; FOTUHI-FIRUZABAD, M.; AMINIFAR, F. Probabilistic load flow in correlated uncertain environment using unscented transformation. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 27, n. 4, p. 2233–2241, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2191804>>.

AIEN, M.; HAJEBRAHIMI, A.; FOTUHI-FIRUZABAD, M. A comprehensive review on uncertainty modeling techniques in power system studies. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 57, p. 1077–1089, 2016. ISSN 1364-0321. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.12.070>>.

ALLAN, R.; LEITE DA SILVA, A.; BURCHETT, R. Evaluation methods and accuracy in probabilistic load flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-100, n. 5, p. 2539–2546, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPAS.1981.316721>>.

ALLAN, R. N.; AL-SHAKARCHI, M. R. G. Probabilistic a.c. load flow. In: IET. 1976. v. 123, n. 6, p. 531–536. Disponível em: <<https://doi.org/10.1049/piee.1976.0120>>.

ALLAN, R. N.; BORKOWSKA, B.; GRIGG, C. H. Probabilistic analysis of power flows. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, IET, v. 121, n. 12, p. 1551–1556, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1049/piee.1974.0320>>.

ATWA, Y. M. et al. Optimal renewable resources mix for distribution system energy loss minimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 25, n. 1, p. 360–370, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2009.2030276>>.

BECKER, M.; KLÖBNER, S.; HEINRICH, J. *PearsonDS: Pearson Distribution System*. [S.l.], 2023. CRAN. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=PearsonDS>>.

BILLINTON, R.; ALLAN, R. N. *Reliability Evaluation of Power Systems*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1996.

BILLINTON, R.; LI, W. *Reliability assessment of electric power systems using Monte Carlo methods*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994.

BORKOWSKA, B. Probabilistic load flow. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, IEEE, PAS-93, n. 3, p. 752–759, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPAS.1974.293973>>.

CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA. *Atlas do potencial eólico brasileiro: simulações 2013*. Rio de Janeiro, RJ, 2013. Relatório Técnico.

- CHEN, P.; CHEN, Z.; BAK-JENSEN, B. Probabilistic load flow: A review. In: *2008 Third International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies*. [s.n.], 2008. p. 1586–1591. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/DRPT.2008.4523658>>.
- COELHO, A. J. C. et al. A new efficient approach to estimate overhead distribution lines lightning performance. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 40, n. 4, p. 1802–1810, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRD.2025.3584383>>.
- COELHO, A. J. C.; MOURA, R. A. R.; ASSIS, F. A. Backflashover rate estimation for overhead transmission lines via unscented transform method. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 40, n. 4, p. 2206–2214, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRD.2025.3577479>>.
- COELHO, A. J. C. et al. Evaluation of lightning overvoltages for overhead transmission lines using unscented transform. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 38, n. 1, p. 746–749, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRD.2022.3226908>>.
- COELHO, A. J. C. et al. Methodology to accelerate the statistical assessment process of evaluating the transmission line lightning performance. *Electric Power Systems Research*, v. 235, p. 110828, 2024. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.epsr.2024.110828>>.
- COELHO, A. J. d. C. *A Fast and Accurate Technique for Estimating the Lightning Performance of Overhead Power Lines*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)) — Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2024. Orientador: Rodolfo Antônio Ribeiro de Moura. Coorientador: Moisés Vidal Ribeiro.
- DANG, C.; XU, J. Novel algorithm for reconstruction of a distribution by fitting its first-four statistical moments. *Applied Mathematical Modelling*, v. 71, p. 505–524, 2019. ISSN 0307-904X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.040>>.
- ENERGY SYSTEMS INTEGRATION GROUP. *Redefining Resource Adequacy for Modern Power Systems*. Reston, VA, 2021. Disponível em: <<https://www.esig.energy/reports-briefs/resource-adequacy-for-modern-power-systems/>>. Acesso em: 27 abril 2026.
- FATTAHI, H. et al. Comparison of solving probabilistic optimal power flow methods in the presence of wind and solar sources. *Mehran University Research Journal Of Engineering & Technology*, Mehran University of Engineering & Technology Jamshoro, Pakistan, v. 41, n. 3, p. 54–71, 2022. Disponível em: <<https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.629639697193412>>.
- GAUTSCHI, W. Construction of Gauss-Christoffel quadrature formulas. *Mathematics of Computation*, v. 22, n. 102, p. 251–270, 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2004654>>.
- GAUTSCHI, W. Orthogonal polynomials: applications and computation. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 5, p. 45–119, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0962492900002622>>.
- GOLUB, G. H.; WELSCH, J. H. *Calculation of Gauss Quadrature Rules*. [S.l.], 1967. Disponível em: <<http://i.stanford.edu/pub/ctr/reports/cs/tr/67/81/CS-TR-67-81.pdf>>.
- IEEE Probability Methods Subcommittee. Ieee reliability test system. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-98, n. 6, p. 2047–2054, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPAS.1979.319398>>.

JOHNSON, N. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, v. 36, n. 1/2, p. 149–176, 1949.

JULIER, S.; UHLMANN, J. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, v. 92, n. 3, p. 401–422, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.823141>>.

JULIER, S.; UHLMANN, J.; DURRANT-WHYTE, H. A new approach for filtering nonlinear systems. In: *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*. [s.n.], 1995. v. 3, p. 1628–1632 vol.3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.1995.529783>>.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. In: *SPIE. Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*. 1997. v. 3068, p. 182–193. Disponível em: <<https://doi.org/10.1117/12.280797>>.

KUNDUR, P. *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill, 1994.

LEITE DA SILVA, A. M.; ARIENTI, V. L. Probabilistic load flow by a multilinear simulation algorithm. *IEE Proceedings C (Generation, Transmission and Distribution)*, IET, v. 137, n. 4, p. 276–282, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1049/ip-c.1990.0037>>.

LEITE DA SILVA, A. M.; MILHORANCE, A. Risk assessment in probabilistic load flow via monte carlo simulation and cross-entropy method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 34, n. 2, p. 1193–1202, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2018.2869769>>.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. D. *Noções de probabilidade e estatística*. [S.l.]: Edusp São Paulo, SP, Brazil, 2002. v. 5.

MAILLARD, D. A user's guide to the cornish fisher expansion. *Available at SSRN 1997178*, 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1997178>>.

MESQUITA, R. S. et al. Reconstruction of probability distributions in the solution of probabilistic power flow via unscented transform technique. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Automática (SBA), 2024. v. 4, n. 1. Disponível em: <<https://doi.org/10.20906/CBA2024/4323>>.

MESQUITA, R. S. et al. Análise de violação de limites operativos em sistemas elétricos via fluxo de potência probabilístico e unscented transform. In: *SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA (SBA). Anais do XI Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE)*. São João del-Rei, MG, Brasil, 2025.

MILHORANCE, A. *Aplicações do Método da Entropia Cruzada em Estimação de Risco e Otimização de Contrato de Montante de Uso do Sistema de Transmissão*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, agosto 2021.

MONTGOMERY, D. C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. [S.l.]: Wiley, 2010.

MONTICELLI, A. J. *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. São Paulo: E. Blucher, 1983.

MORALES, J. M.; PEREZ-RUIZ, J. Point estimate schemes to solve the probabilistic power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 22, n. 4, p. 1594–1601, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2007.907515>>.

NORTH AMERICAN ELECTRIC RELIABILITY CORPORATION. *Evolving Planning Criteria for a Sustainable Power Grid*. Atlanta, GA, 2023. Disponível em: <https://www.nerc.com/globalassets/programs/rapa/ra/evolving_planning_criteria_for_a_sustainable_power_grid.pdf>. Acesso em: 27 abril 2026.

OKE, O. A. *Enhanced unscented transform method for probabilistic load flow studies*. Tese (Doutorado) — University of Nottingham, 2013.

OKE, O. A. et al. Probabilistic load flow for distribution systems with wind production using unscented transform method. In: IEEE. *ISGT 2011*. 2011. p. 1–7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ISGT.2011.5759124>>.

OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO. *Procedimentos de Rede: Módulo 2 – Critérios e Requisitos*. Brasília, DF, 2026. Disponível em: <<https://www.ons.org.br/paginas/sobre-o-ons/procedimentos-de-rede/vigentes>>. Acesso em: 12 jan. 2026.

PAPOULIS, A. *Probability, random variables and stochastic processes*. [S.l.]: McGraw Hill, 1965.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

PEARSON, K. X. contributions to the mathematical theory of evolution. ii. skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. (A.), v. 186, p. 343–414, 1895.

PENG, S. et al. Probabilistic power flow of ac/dc hybrid grids with addressing boundary issue of correlated uncertainty sources. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, v. 13, n. 3, p. 1607–1619, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSTE.2022.3167531>>.

PENG, S. et al. Comparison on three unscented transformation methods for solving probabilistic load flow. In: IEEE. *2019 IEEE Innovative Smart Grid Technologies-Asia (ISGT Asia)*. 2019. p. 3941–3946. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ISGT-Asia.2019.8881206>>.

PENG, S. et al. Fractional moments based adaptive scaled unscented transformation for probabilistic power flow of ac-dc hybrid grids. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 39, n. 5, p. 6249–6262, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2024.3364674>>.

PERES, W. A probabilistic load flow for unbalanced three-phase islanded microgrids using unscented transformation. *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, v. 155, p. 109554, 2024. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2023.109554>>.

PRADO, A. *Bagagem*. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

PRUSTY, B. R.; JENA, D. A critical review on probabilistic load flow studies in uncertainty constrained power systems with photovoltaic generation and a new approach. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Elsevier, v. 69, p. 1286–1302, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.12.044>>.

RCall. *RCall.jl*. 2024. <<https://github.com/JuliaInterop/RCall.jl>>. Acessado em: 01-12-2025.

RUBINSTEIN, R. Y. *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York: John Wiley & Sons, 1981.

- SALSA, I. d. S.; MOREIRA, J. A. *Probabilidade e Estatística*. [S.l.]: EDUFRRN Natal, RN, Brazil, 2014. v. 2.
- SCHILLING, M. T. et al. Bibliography on power system probabilistic analysis (1962-88). *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 5, n. 1, p. 1–11, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/61.48891>>.
- SIGE, L. et al. Probabilistic power flow calculation using sigma-point transform algorithm. In: *2006 International Conference on Power System Technology*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–5.
- SONG, J.; LI, Z. A review of probabilistic power flow calculation methods. In: *2025 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies - Asia (ISGT Asia)*. [s.n.], 2025. p. 367–372. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ISGTAsia63446.2025.11431527>>.
- SU, C.-L. Probabilistic load-flow computation using point estimate method. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 20, n. 4, p. 1843–1851, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2005.857921>>.
- TILLMANN, M.; SCHÖTTLER, J.; PRAKTIKNJO, A. A review of probabilistic resource adequacy assessments in power systems: Methods, applications, and future challenges. *Energy Policy*, v. 209, p. 114924, 2026. ISSN 0301-4215. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enpol.2025.114924>>.
- USAOLA, J. Probabilistic load flow with wind production uncertainty using cumulants and cornish–fisher expansion. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 31, n. 9, p. 474–481, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2009.02.003>>.
- VILLANUEVA, D.; PAZOS, J. L.; FEIJOO, A. Probabilistic load flow including wind power generation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 26, n. 3, p. 1659–1667, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2010.2096436>>.
- WANG, C. et al. A scenario-based analytical method for probabilistic load flow analysis. *Electric Power Systems Research*, v. 181, p. 106193, 2020. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.epsr.2019.106193>>.
- WANG, Z. et al. A comprehensive review on uncertainty modeling methods in modern power systems. *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, v. 166, p. 110534, 2025. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2025.110534>>.
- WARD, J. B.; HALE, H. W. Digital computer solution of power-flow problems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, IEEE, v. 75, n. 3, p. 398–404, Jan 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/AIEEPAS.1956.4499321>>.
- WILKINS, J. E. A Note on Skewness and Kurtosis. *The Annals of Mathematical Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 15, n. 3, p. 333 – 335, 1944. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/aoms/1177731243>>.
- WU, Z. et al. An accelerated solution method for stochastic optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 41, n. 2, p. 1334–1347, 2026. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2025.3618969>>.
- ZHANG, P.; LEE, S. T. Probabilistic load flow computation using the method of combined cumulants and gram-charlier expansion. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 19, n. 1, p. 676–682, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2003.818743>>.

ZOBAA, A. F.; ALEEM, S. H. E. A. *Uncertainties in Modern Power Systems*. New York: Academic Press (Elsevier), 2020. ISBN 978-0-12-820491-7.

APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

A.1 Considerações Iniciais

A estatística é um ramo da matemática que compreende um conjunto de técnicas que permitem realizar, de forma sistemática, a coleta, o processamento, a interpretação e a apresentação de dados, sendo de fundamental importância para compreensão de problemas e tomada de decisões em diversas áreas do conhecimento (MAGALHÃES; LIMA, 2002). Por sua vez, a probabilidade é um âmbito da estatística que compreende o estudo de eventos aleatórios e incertos, estimando e representando de forma quantitativa a expectativa de ocorrência de um evento de interesse (PAPOULIS, 1965; MONTGOMERY, 2010).

Os conhecimentos em Estatística e Probabilidade são ferramentas indispensáveis para solução de problemas com grandes volumes de dados e fontes de incerteza, tendo uma ampla aplicabilidade em todos os campos da ciência. Nesta seção, são apresentados alguns de seus conceitos básicos, importantes para entendimento do restante deste trabalho.

A.2 Definições Fundamentais

Para compreensão dos conceitos de estatística e probabilidade, é essencial o conhecimento de termos e definições fundamentais, dentre os quais destacam-se:

- **Experimento Aleatório:** Processo de observação em que, sob mesmas condições, pode apresentar resultados distintos;
- **População:** Conjunto de todas as observações possíveis nas mesmas condições, isto é, a totalidade de um objeto de estudo;
- **Amostra:** Conjunto de observações ou dados estatísticos resultantes de experimentos repetidos nas mesmas condições sob a população;
- **Espaço Amostral:** Conjunto de todos os resultados possíveis associados a um experimento aleatório;
- **Evento:** Subconjunto do espaço amostral, ou seja, um ou mais resultados possíveis do experimento aleatório;
- **Probabilidade (Definição Clássica):** É a relação (razão matemática) entre a quantidade de ocorrências de um evento específico e o total de eventos possíveis.

A.3 Eventos Aleatórios

Os fenômenos presentes na natureza podem ser classificados em duas categorias distintas: determinísticos ou aleatórios. Os fenômenos determinísticos são aqueles que, quando realizados

sob condições iguais, sempre produzem os mesmos resultados. Por sua vez, os fenômenos aleatórios, também chamados de eventos aleatórios, apresentam resultados que podem divergir em diferentes observações, ainda que ocorram sob as mesmas condições, não sendo possível garantir previamente seu resultado. Estes eventos aleatórios são o objeto central de estudo da estatística inferencial (probabilística), sendo frequentemente associados a cenários em que há a influência de incertezas. A análise destes eventos envolve a relação dos diferentes resultados possíveis, associados com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

Dentro do contexto da estatística, cada evento é considerado um subconjunto do espaço amostral, sendo cada elemento do subconjunto uma amostra. Assim, a inter-relação entre eventos pode ser analisada por meio da Teoria dos Conjuntos, obedecendo a suas propriedades fundamentais, entre as quais se destacam:

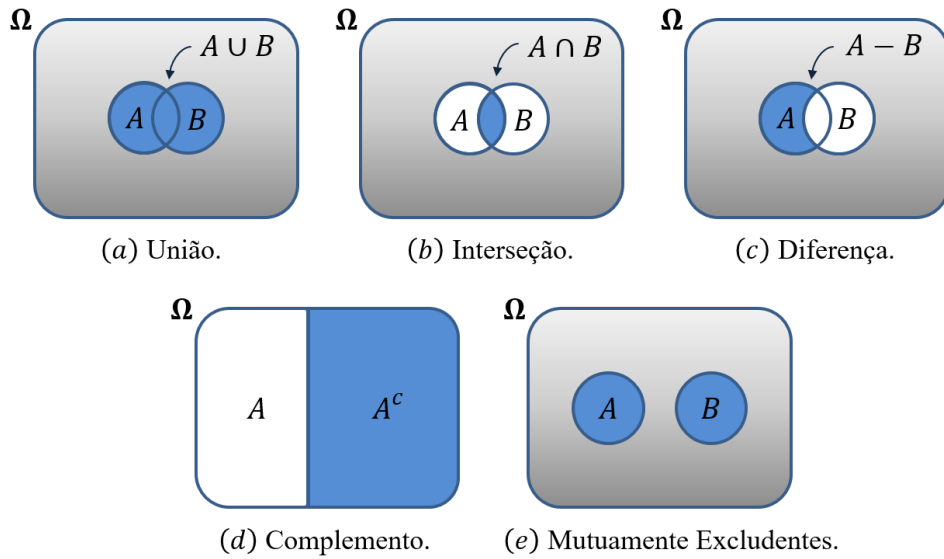
- **União:** A união dos conjuntos (eventos) A e B é o conjunto formado por todos os elementos de A e todos os elementos de B . A notação matemática é expressa por: $A \cup B$;
- **Interseção:** A interseção dos conjuntos (eventos) A e B é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem tanto a A quanto a B . A notação matemática é expressa por: $A \cap B$;
- **Diferença:** A diferença entre os conjuntos (eventos) A e B é definida como o conjunto de todos os elementos que pertencem a A mas não pertencem a B . A notação matemática é expressa por: $A - B$;
- **Eventos Complementares:** O complemento de um evento (conjunto) A , é o conjunto de todos os elementos do espaço amostral (Ω) que não pertencem a A . A definição matemática é expressa por: $x \in A^c$ somente se $x \notin A$, para $A \cup A^c = \Omega$;
- **Eventos Mutuamente Excluentes:** Os eventos A e B são ditos mutuamente excluentes se não possuem elementos em comum, ou seja, a interseção entre eles é vazia. A definição matemática é expressa por: $A \cap B = \emptyset$.

É importante notar que eventos complementares são sempre eventos mutuamente excluentes, mas o inverso nem sempre se aplica. A Figura 36 dispõe uma ilustração que representa as propriedades de eventos apresentadas.

A.4 Probabilidade

Durante a análise de eventos aleatórios, caracterizados pela presença de incertezas, é fundamental quantificar estas imprevisibilidades. À vista disso, a Probabilidade se apresenta como uma ferramenta essencial para estes estudos estatísticos, permitindo mensurar a chance de ocorrência de determinado evento variável.

Figura 36 – Inter-relação entre eventos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A definição clássica de Probabilidade, descrita na Subseção A.2, representa uma das primeiras tentativas de estabelecer um método para estimar a expectativa de ocorrência de fenômenos aleatórios, consolidada por Pierre-Simon Laplace no século XVIII. No entanto, esta abordagem é válida somente para casos equiprováveis, tendo sua aplicabilidade limitada a estes cenários. Diante desta restrição, tornou-se necessária uma formulação mais abrangente, estruturada por Andrey Kolmogorov na década de 1930, por meio de uma definição axiomática. A definição proposta por Kolmogorov é fundamentada em uma sólida base teórica, possuindo sua aplicabilidade válida para quaisquer eventos e espaços amostrais, não se restringindo apenas aos casos de eventos equiprováveis.

A Probabilidade Axiomática é definida como (SALSA; MOREIRA, 2014):

Seja um experimento aleatório denotado por ε , cujo conjunto de todos os resultados possíveis é representado por Ω (espaço amostral). Denotamos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os subconjuntos (eventos) de Ω , incluindo tanto o próprio conjunto Ω — que representa o evento certo — quanto o conjunto vazio $\emptyset$ — que corresponde ao evento impossível. Uma função P , denominada probabilidade, que é definida em $\mathcal{F}$ e associa a cada evento de $\mathcal{F}$ um número no intervalo $[0,1]$, é expressa como $P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$. Esta função deve satisfazer as seguintes axiomas fundamentais:

- i. Não Negatividade:** Para todo evento $A \in \mathcal{F}$, temos $P(A) \geq 0$;
- ii. Normalização:** A probabilidade do evento certo é 1, ou seja, $P(\Omega) = 1$;
- iii. Aditividade:** Para quaisquer eventos mutuamente exclusivos A e B em $\mathcal{F}$ (isto é, $A \cap B = \emptyset$), a probabilidade da união desses eventos é a soma de suas

probabilidades: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Estes axiomas estabelecem as bases matemáticas para a teoria da probabilidade, possibilitando a quantificação e análise de incertezas de forma genérica. Vale ressaltar que o conjunto Ω , a σ -álgebra $\mathcal{F}$ e a medida de probabilidade P são coletivamente designados como espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Adicionalmente, a Probabilidade possui algumas regras e propriedades fundamentais, entre as quais destacam-se:

- **Intervalo de Valores:** A probabilidade de um evento A sempre varia entre 0 e 1, ou seja, $0 \leq P(A) \leq 1$. Neste contexto, $P(A) = 0$ indica que o evento A é impossível de ocorrer, enquanto $P(A) = 1$ sinaliza que o evento A é certo;
- **Probabilidade do Evento Complementar:** A probabilidade do complemento de um evento A , representado como A^c , é calculada pela equação: $P(A^c) = 1 - P(A)$. Assim, conhecendo a probabilidade de um evento, é possível determinar também a probabilidade de sua não ocorrência;
- **Adição de Probabilidades:** A probabilidade da união de dois eventos A e B , representado como $P(A \cup B)$, que denota a probabilidade de ao menos um dos eventos ocorrerem, é calculada pela equação: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Vale destacar que, para eventos mutuamente exclusivos (ou seja, que não podem ocorrer simultaneamente), a probabilidade da interseção é nula. Assim, a probabilidade de que ao menos um deles ocorra pode ser encontrada simplesmente somando as probabilidades dos eventos individuais: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Ambas as formulações podem ser ampliadas para abranger múltiplos eventos.

A.4.1 Probabilidade Condicional

Durante o estudo de um fenômeno aleatório, muitas vezes o problema se mostra algo complexo, sendo conveniente ser estruturado e analisado de forma segmentada. Neste contexto, à medida que informações adicionais são obtidas, pode ser necessário (ou não) reavaliar as probabilidades associadas a cada segmento. De forma objetiva, isto significa que a ocorrência de um determinado evento pode impactar na probabilidade de ocorrência de outro, sendo esta relação nomeada como probabilidade condicional, definida matematicamente pela Equação (A.1).

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0, \quad (\text{A.1})$$

em que $P(A | B)$ é a probabilidade de ocorrer A dado que B ocorreu.

A.4.2 Independência Probabilística

Partindo do conceito de Probabilidade Condicional, é possível definir também o conceito de Independência Probabilística, que se aplica à análise de eventos independentes. Dois eventos são considerados independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de que o outro ocorra, definida matematicamente pela Equação (A.2).

$$P(A | B) = P(A), \quad P(B) > 0, \quad (A.2)$$

em que $P(A | B)$ é a probabilidade de ocorrer A dado que B ocorreu.

A.4.3 Regra do Produto

Expandindo os conceitos de Probabilidade Condicional e Independência Probabilística, é possível estabelecer a Regra do Produto para Probabilidades. Esta regra permite calcular a probabilidade de eventos ocorrerem simultaneamente, sendo definida matematicamente pela Equação (A.3):

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A), \quad (A.3)$$

em que $P(A \cap B)$ denota a probabilidade de A e B ocorrerem juntos, $P(A)$ é a probabilidade de A ocorrer, $P(B)$ é a probabilidade de B ocorrer e $P(B | A)$ a probabilidade de B ocorrer dado que A já ocorreu.

Vale destacar que, para o caso específico de eventos independentes, a probabilidade de B ocorrer dado que A ocorreu é simplesmente a probabilidade de B ocorrer, conforme descrito na Equação (A.2). Assim, para probabilidade conjunta de eventos independentes, a Equação (A.3) pode ser reescrita como:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \quad (A.4)$$

É importante enfatizar que a Regra do Produto é uma ferramenta fundamental para solução de problemas de Probabilidade, especialmente em cenários com múltiplos eventos e variáveis.

A.4.4 Teorema da Probabilidade Total

Para problemas complexos, onde se torna conveniente uma análise segmentada, muitas vezes a probabilidade de um evento é dada sob a composição das probabilidades condicionais relacionadas aos eventos que particionam o espaço amostral. Neste contexto, o Teorema da Probabilidade Total se apresenta como uma ferramenta essencial, permitindo calcular a probabilidade individual de um evento específico a partir das probabilidades condicionais que o envolvem. A formulação matemática desta regra é expressa por:

Seja $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ uma partição do espaço amostral (Ω) , ou seja, $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ são eventos mutuamente exclusivos e a união deles é igual a Ω . O Teorema da Probabilidade Total afirma que, para um evento A , a probabilidade individual pode ser calculada pela Equação (A.5):

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \quad . \quad (\text{A.5})$$

Utilizando a probabilidade condicional, a Equação (A.5) pode ser reescrita como:

$$P(A) = P(A|B_1) P(B_1) + P(A|B_2) P(B_2) + \dots + P(A|B_n) P(B_n) \quad , \quad (\text{A.6})$$

em que $P(A|B_i)$ é a probabilidade de A dado que B_i ocorreu, $P(B_i)$ é a probabilidade de B_i .

É importante ressaltar que este teorema se torna especialmente valioso em situações em que a avaliação direta da probabilidade de um evento é difícil de se obter, mas as probabilidades condicionais em relação à partição do espaço amostral são mais simples de determinar.

A.4.5 Teorema de Bayes

Conforme já mencionado, frequentemente as informações relacionadas a fenômenos aleatórios são apresentadas por meio de probabilidades condicionais. No entanto, é importante destacar que a situação inversa também ocorre com frequência. Muitas vezes, após observar o resultado de um fenômeno aleatório, buscamos determinar a probabilidade de que um evento específico tenha ocorrido, considerando o resultado observado. Neste contexto, no século XVIII, Thomas Bayes desenvolveu uma formulação que possibilita avaliar esta relação, nomeada Teorema de Bayes. Este teorema é matematicamente definido pela Equação (A.7).

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) P(B)}{P(A)}, \quad P(B) > 0 \quad , \quad (\text{A.7})$$

em que $P(B|A)$ é a probabilidade de B dado que A ocorreu, $P(A|B)$ é a probabilidade de A dado que B ocorreu, $P(B)$ é a probabilidade individual de B ocorrer e $P(A)$ é a probabilidade individual de A ocorrer.

A.5 Variáveis Aleatórias

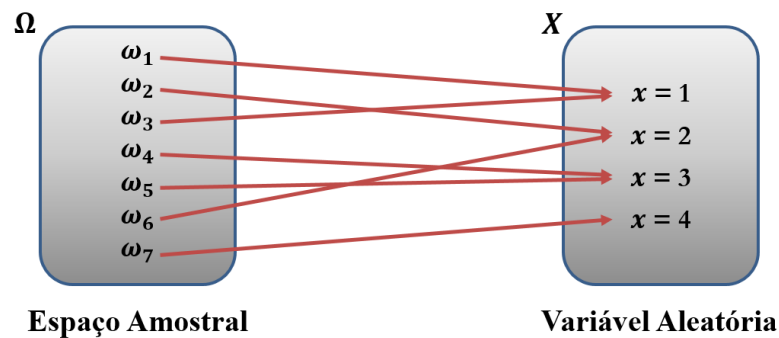
Em muitos problemas representados por meio de modelos probabilísticos, o espaço amostral pode ser extremamente grande, e até mesmo infinito, o que torna o cálculo das probabilidades de ocorrência dos eventos uma tarefa complexa ou até impossível. Buscando contornar este desafio, introduz-se o conceito de Variáveis Aleatórias, uma estrutura probabilística que possibilita trabalhar com estes espaços amostrais demasiadamente grandes, viabilizando a análise e a compreensão dos fenômenos em estudo.

A definição de Variável Aleatória (VA) é uma função que associa todo elemento do espaço amostral a um valor numérico (pertencente aos reais), recebendo esta nomenclatura devido ao fato dos resultados não serem previamente conhecidos. A Equação (A.8) apresenta a notação matemática utilizada para representar as VAs, e a Figura 37 exemplifica o mapeamento de um espaço amostral para obtenção de uma VA.

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \quad , \quad (\text{A.8})$$

em que ω são os eventos pertencentes ao espaço amostral Ω , e x os valores assumidos pela variável aleatória X .

Figura 37 – Mapeamento de um espaço amostral (Ω) para obtenção de uma VA (X).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base em suas características, as VAs são frequentemente classificadas da seguinte maneira:

- **Variáveis Aleatórias Discretas:** Quando assumem somente valores em um conjunto enumerável;
- **Variáveis Aleatórias Contínuas:** Quando assumem qualquer valor em um intervalo do conjunto dos reais.

Adicionalmente, é importante mencionar também uma terceira categoria: **Variáveis Aleatórias Híbridas**, que combinam, por partes, as características das variáveis discretas e contínuas.

A.6 Funções de Probabilidade

Quando estudamos algum fenômeno aleatório, na prática estamos interessados em analisar o comportamento de ao menos uma variável aleatória a ele associada. Isto é feito através da informação de probabilidade relacionada a cada elemento pertencente ao conjunto desta VA,

ou seja, o conjunto de resultados possíveis relacionados com suas respectivas probabilidades de ocorrência. Neste contexto, as funções de probabilidade se tornam ferramentas essenciais, possibilitando realizar tais análises. Estas funções podem ser classificadas em três categorias principais: Funções Massa de Probabilidade, Funções Densidade de Probabilidade e Funções Distribuição Acumulada.

A.6.1 Função Massa de Probabilidade

A Função Massa de Probabilidade (FMP) é uma função que descreve a distribuição de probabilidades de variáveis aleatórias discretas. Em termos simples, ela estabelece uma relação entre os possíveis resultados dessa variável e suas respectivas probabilidades de ocorrência. A FMP é comumente representada como $f(x_i)$ e é definida matematicamente pela Equação (A.9). A Figura 38 ilustra um exemplo de uma distribuição de uma variável aleatória discreta.

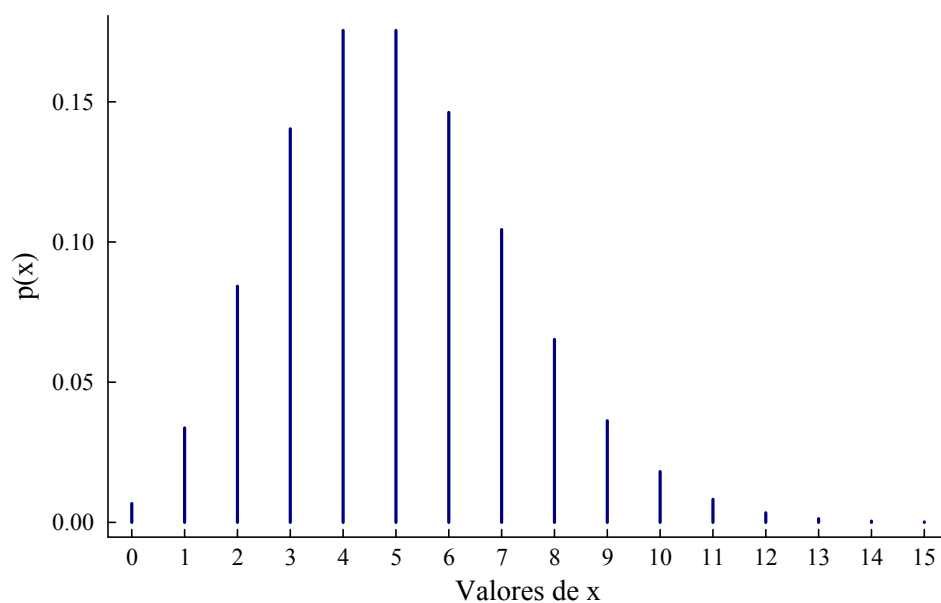
$$f(x_i) = P(X = x_i) = p(x_i) \quad , \quad (\text{A.9})$$

em que x_i são todos os valores que a VA X pode assumir, $p(x_i)$ suas respectivas probabilidades e $P(X = x_i)$ é a função massa de probabilidade e obedece aos seguintes axiomas:

- i. $0 \leq p(x_i) \leq 1, \quad \forall x_i \in X$;
- ii. $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$.

em que n corresponde ao número de elementos de X .

Figura 38 – Função Massa de Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A.6.2 Função Densidade de Probabilidade

A Função Densidade de Probabilidade (FDP) é uma função que descreve a distribuição de probabilidades de variáveis aleatórias contínuas. Em termos simples, ela estabelece uma relação entre os intervalos contínuos de valores possíveis que essa variável pode assumir e suas respectivas probabilidades de ocorrência. A FDP é comumente representada por $f(x)$ e é definida matematicamente pela Equação (A.10). A Figura 39 ilustra um exemplo de uma distribuição de uma variável aleatória contínua.

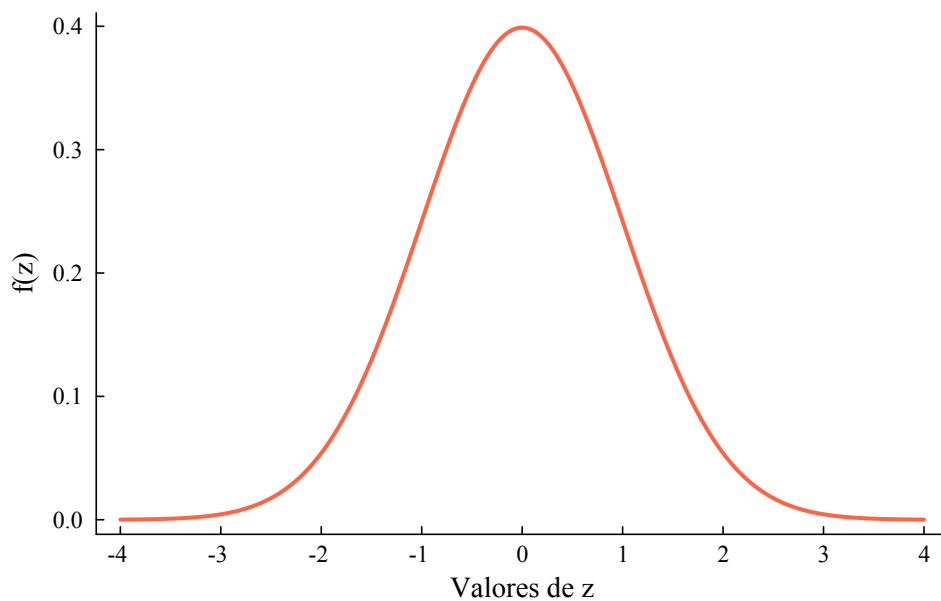
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad , \quad (\text{A.10})$$

em que $f(x)$ é a função densidade de probabilidade, $P(a \leq X \leq b)$ é a probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor dentro do intervalo (a, b) e é calculada pela integral da função densidade nesse intervalo. A FDP obedece aos seguintes axiomas:

- i. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ;$
- ii. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad .$

É importante notar que, no contexto das variáveis aleatórias contínuas, a probabilidade está relacionada sempre a intervalos de valores, e não a valores individuais como ocorre para as VAs discretas.

Figura 39 – Função Densidade de Probabilidade de uma Variável Aleatória Contínua.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A.6.3 Função Distribuição Acumulada

A Função Distribuição Acumulada (FDA) é uma função que descreve a probabilidade agregada ao longo dos diferentes valores que uma variável aleatória pode assumir, seja ela discreta ou contínua. Em outras palavras, a FDA possibilita capturar a probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor menor ou igual a um determinado número. A FDA é comumente representada como $F(x)$ e é definida matematicamente pela Equação (A.11).

$$F(x) = P(X \leq x) \quad , \quad (\text{A.11})$$

em que $P(X \leq x)$ representa a probabilidade de que a variável aleatória X assumira um valor menor ou igual a x . A função de distribuição acumulada obedece às seguintes propriedades:

- i. $0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ;$
- ii. $F(x_2) \geq F(x_1), \quad \forall x_2 \geq x_1 \quad ;$
- iii. $F(\psi_2) - F(\psi_1) = P(\psi_1 \leq x \leq \psi_2), \quad \forall \psi_2 \geq \psi_1 \quad .$

A primeira propriedade assegura que a probabilidade acumulada permaneça sempre dentro do intervalo entre 0 e 1. A segunda propriedade garante que essa função seja monotonicamente crescente, ou seja, nunca decrescente. Por último, a terceira propriedade estabelece que a diferença entre os valores da FDA em dois pontos corresponde à probabilidade de que a variável aleatória assumira um valor dentro do intervalo definido entre estes dois pontos.

Devido às suas características específicas, é importante analisar a FDA sob a perspectiva de cada um dos principais tipos de variáveis aleatórias, discretas e contínuas, que serão apresentadas nas subseções seguintes.

A.6.3.1 FDA - Variável Aleatória Discreta

Para o caso de variáveis aleatórias discretas, a Equação (A.11) pode ser reescrita como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k) \quad , \quad (\text{A.12})$$

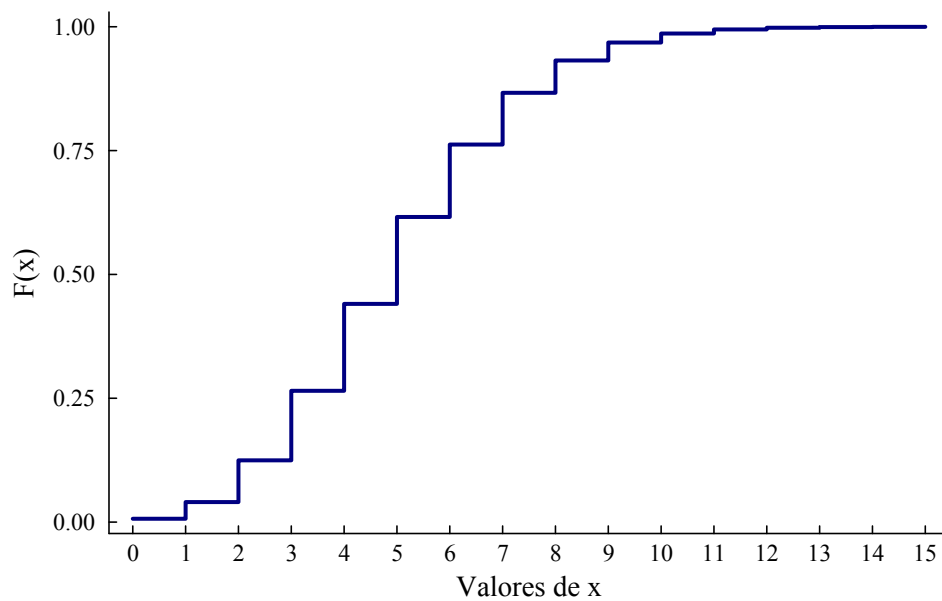
onde $P(X = k)$ é a probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor específico k . A função $F(x)$ fornece a probabilidade de que X seja menor ou igual a x .

É importante notar que, na prática, a FDA é constituída pelo somatório das probabilidades individuais referentes a cada um dos elementos que compõem a VA discreta analisada. A Figura 40 ilustra a FDA de uma variável aleatória discreta, cuja FMP foi apresentada na Figura 38.

A.6.3.2 FDA - Variável Aleatória Contínua

Para o caso de variáveis aleatórias contínuas, a Equação (A.11) pode ser reescrita como:

Figura 40 – Função Distribuição Acumulada de uma Variável Aleatória Discreta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad , \quad (\text{A.13})$$

onde $F(x)$ é a função distribuição acumulada, $P(X \leq x)$ representa a probabilidade de que a variável aleatória X seja menor ou igual a x e $f(t)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua.

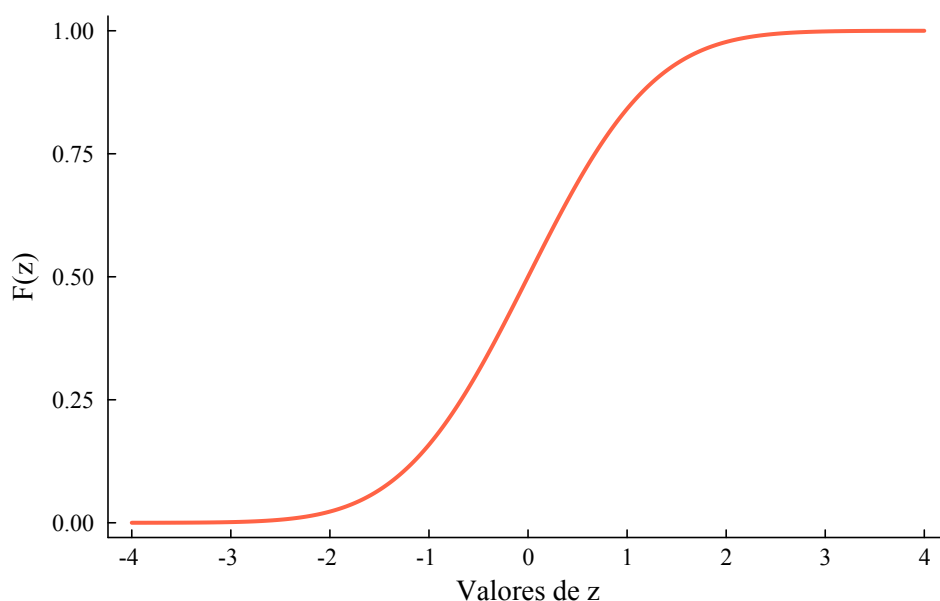
É importante notar que, para o caso de variáveis aleatórias contínuas, a relação entre a FDA e a FDP é dada pela derivada da FDA em relação a x , ou seja, $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$. Isso significa que a função densidade de probabilidade pode ser obtida derivando a função distribuição acumulada. A Figura 41 ilustra a FDA de uma variável aleatória discreta, cuja FDP foi apresentada na Figura 39.

A.7 Medidas Resumo

Medidas Resumo são métricas estatísticas que têm como objetivo sintetizar informações sobre um fenômeno em estudo, oferecendo uma visão abrangente de suas principais características. Elas podem ser aplicadas tanto a conjuntos de dados quanto a funções de probabilidade de variáveis aleatórias, desde que se utilize a abordagem adequada para cada contexto. De forma prática, estas ferramentas permitem, por meio de parâmetros quantitativos, resumir e interpretar grandes volumes de dados de maneira mais clara e eficiente, facilitando a identificação de padrões, tendências e anomalias.

As medidas resumo podem ser classificadas em duas categorias principais: Medidas de Posição e Medidas de Dispersão, que estão detalhadas nas subseções seguintes.

Figura 41 – Função Distribuição Acumulada de uma Variável Aleatória Contínua.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A.7.1 Medidas de Posição

As medidas de posição são utilizadas para indicar a localização ou a centralidade dos dados em estudo. As principais medidas de posição incluem:

- **Média:** É uma medida de tendência central que indica o valor típico ou central de um conjunto de dados, sendo sensível inclusive a valores extremos (*outliers*). Para o caso da média aritmética, é definida como a razão entre o somatório de todos os elementos de um conjunto e o número total de elementos deste conjunto.
- **Mediana:** É o valor que divide um conjunto de dados ordenado ao meio, ou seja, é o ponto médio. Se houver um número ímpar de observações, a mediana será o valor central. Se houver um número par, a mediana será a média dos dois valores centrais. A mediana é menos sensível a valores extremos.
- **Moda:** É o valor que aparece com mais frequência em um conjunto de dados. Um conjunto pode ter uma moda (unimodal), mais de uma moda (multimodal) ou nenhuma moda (quando não há repetição de valores).
- **Quartis:** Dividem um conjunto de dados em quatro partes iguais. O primeiro quartil (Q1) corresponde ao 25% menor, o segundo quartil (Q2) é a mediana (50%), e o terceiro quartil (Q3) é o 75% menor.

A.7.2 Medidas de Dispersão

As medidas de dispersão fornecem informações sobre a variabilidade e dispersão dos dados em relação à medida de posição escolhida. Algumas das principais medidas de dispersão incluem:

- **Amplitude:** É a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados. Indica a extensão total dos dados, mas pode ser influenciada por *outliers*.
- **Desvio Padrão:** Mede o quanto os valores se dispersam em relação à média, sendo expressa pela raiz quadrada da variância. Um desvio padrão menor indica que os valores estão mais próximos da média, enquanto um desvio maior sugere maior dispersão.
- **Variância:** É a média dos quadrados dos desvios em relação à média. Assim como o desvio padrão, a variância indica a dispersão dos dados, mas é expressa em unidades quadradas.
- **Coefficiente de Variação:** Expressa a variabilidade dos dados em relação à média, sendo calculado como o desvio padrão dividido pela média, geralmente apresentado em forma de porcentagem. Ajuda na comparação da dispersão de diferentes conjuntos de dados.

A.8 Momentos Estatísticos

Momentos Estatísticos são medidas numéricas que capturam diferentes aspectos de uma distribuição de probabilidade, permitindo um resumo e uma compreensão mais profunda de características importantes das variáveis aleatórias. De maneira simplificada, os momentos ajudam a extrair, quantificar e descrever informações relevantes, como a tendência central (média), a variabilidade (dispersão), a forma e a assimetria da distribuição de uma variável aleatória. Os momentos são geralmente representados pelo símbolo μ_r (em suas diferentes variações) ou $E(X^r)$, que denotam o r -ésimo momento, e são definidos matematicamente em relação à função densidade de probabilidade, para variáveis contínuas, ou à função de massa de probabilidade, para variáveis discretas.

Devido ao seu propósito, diversos tipos de momentos são apresentados na literatura, objetivando extrair diferentes características de interesse. Nas subseções seguintes, estão dispostas as definições de Momentos Brutos, Momentos Centrais e Momentos Centrais Padronizados, conceitos fundamentais para a compreensão do trabalho desenvolvido.

A.8.1 Momentos Brutos

Os Momentos Brutos descrevem as informações do conjunto de dados em estudo, considerando como referência a origem (centrado na origem). A Equação (A.14) apresenta a fórmula utilizada para as VAs contínuas, enquanto a Equação (A.15) apresenta para as VAs discretas.

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad , \quad (\text{A.14})$$

$$\mu'_r = \sum_{i=1}^n x_i^r p_i \quad , \quad (\text{A.15})$$

em que μ'_r é o momento bruto de ordem r , $f(x)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória X , n a quantidade de elementos de X , x_i é o i -ésimo elemento da VA e p_i a sua respectiva probabilidade.

Vale destacar que, o primeiro momento bruto (ou momento bruto de ordem 1) é equivalente à média da distribuição, sendo comumente representado como apenas μ .

A.8.2 Momentos Centrais

Os Momentos Centrais, também chamados Momentos Centrados, são uma extensão dos Momentos Brutos, fornecendo as informações sobre a distribuição de um conjunto de dados ponderados em relação à sua média. Enquanto os Momentos Brutos consideram a origem como ponto de referência, os Momentos Centrados utilizam média da variável aleatória em estudo, o que permite uma análise mais adequada de algumas das características da distribuição, como a dispersão e variabilidade. A Equação (A.16) apresenta a fórmula utilizada para as VAs discretas, enquanto a Equação (A.17) apresenta para as VAs contínuas.

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad , \quad (\text{A.16})$$

$$\mu_r = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^r p_i \quad , \quad (\text{A.17})$$

em que μ_r é o Momento Central de ordem r , μ a média da variável aleatória X , $f(x)$ é a função densidade de probabilidade de X , n a quantidade de elementos de X , x_i é o i -ésimo elemento da VA e p_i a sua respectiva probabilidade.

É importante ressaltar que, devido ao fato de os momentos centrados utilizarem a média da distribuição como referência, o primeiro momento centrado (ou momento centrado de ordem 1) é sempre igual a zero.

A.8.3 Momentos Centrais Padronizados

Os Momentos Centrais Padronizados são uma extensão dos Momentos Centrados, que buscam normalizar a medida da variabilidade e a forma de uma distribuição ao longo do seu conjunto de dados. Enquanto os Momentos Centrados fornecem informações sobre a posição e a dispersão dos dados em relação à média, os Momentos Centrais Padronizados ajustam estas medidas para desconsiderar a escala da medida original, permitindo comparações entre

distribuições diferentes. A Equação (A.18) apresenta a fórmula utilizada para o cálculo dos Momentos Centrados Padronizados:

$$\tilde{\mu}_r = \frac{\mu_r}{\sigma^r} \quad , \quad (\text{A.18})$$

em que $\tilde{\mu}_r$ é o momento central padronizado de ordem r , μ_r é o momento central de ordem r e σ é o desvio padrão da variável aleatória.

É importante notar que, assim como os momentos centrados, o primeiro momento central padronizado (momento central padronizado de ordem 1) também será zero, reforçando que a média é o ponto de referência para a análise de dispersão e forma. O segundo momento central padronizado (momento central padronizado de ordem 2) é sempre igual a um, indicando a utilização da medida de variabilidade como parâmetro de normalização.

A.8.4 Momentos Estatísticos Fundamentais

As principais informações estatísticas, mais comumente utilizadas em estudos estocásticos, podem ser obtidas por meio dos quatro primeiros momentos. O cálculo explícito de cada um deles fundamenta a caracterização paramétrica das distribuições:

- **Média** (μ): Obtida por meio do primeiro momento bruto (μ'_1), é uma medida de tendência central da distribuição.

$$\mu = \mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \quad ; \quad (\text{A.19})$$

- **Variância** (σ^2): Obtida por meio do segundo momento central (μ_2), é uma medida de dispersão da distribuição em relação à sua média.

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad ; \quad (\text{A.20})$$

- **Assimetria** (γ): Obtida por meio do terceiro momento central padronizado ($\tilde{\mu}_3$), é uma medida de desvio de simetria em relação à média.

$$\gamma = \tilde{\mu}_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx \quad ; \quad (\text{A.21})$$

- **Curtose** (κ): Obtida por meio do quarto momento central padronizado ($\tilde{\mu}_4$), é uma medida da característica de pico e de peso nas caudas da distribuição.

$$\kappa = \tilde{\mu}_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx \quad . \quad (\text{A.22})$$