

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS

Eduardo Antonio dos Reis

MODELO ESPECTRAL DE QUARKS $SU(3)_f$

São João del Rei - MG

7 de julho de 2015

Eduardo Antonio dos Reis

MODELO ESPECTRAL DE QUARKS $SU(3)_f$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física associação ampla UNIFALMG/UFLA/UFSJ, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos

Orientador: André Luiz Mota

Co-Orientador: Edson Wander Dias

São João del Rei - MG
Departamento de Ciências Naturais - UFSJ
Julho/2015

À toda minha Família, em especial minha mãe Eulália Angela Reis, minha irmã Kássia Reis Santos (em memória) e meu avô Antonio dos Reis (em memória).

"Tudo aquilo que o homem ignora, não existe para ele. Por isso, o universo de cada um, se resume ao tamanho do seu saber."

Albert Einstein.

... "This life is short, baby that's a fact. Better live it right, you ain't comin back. Gotta raise some hell, 'fore they take you down. Gotta live this life. Gotta look this world in the eye. Gotta live this life until you die"...

Curtis Stigers.

Agradecimentos

Depois de uma grande jornada de conhecimento, este é o momento de voltar no tempo e lembrar de todas as pessoas que contribuíram de diversas formas pelo que sou hoje. Gostaria então, de expressar meus sinceros agradecimentos:

Aos meus "pais acadêmicos"(como aqui chamamos nossos orientadores) Prof. Dr. André Luiz Mota, que me acompanhou nesta trajetória desde a graduação como orientador de Iniciação Científica e Prof. Dr. Edson Wander Dias, por terem depositado em mim toda sua confiança no desenvolvimento do trabalho, pela paciência e orientação em todas as dificuldades e pela amizade que construímos.

À minha mãe Eulália, por não medir esforços em me apoiar nos meus objetivos e por fazer dois papéis em minha vida como mãe e pai, à minha querida irmã Kássia(em memória) a qual sinto muita falta, principalmente de nossas conversas, conselhos e tudo mais, obrigado por me ensinar a ver sempre o lado bom da vida, saiba que sempre estará em meu coração, à minha sobrinha Fernanda, um pedaço da minha irmã que ficou e que me ensina lições de vida desde pequena, entre eles, o motivo de seguir minha caminhada.

Ao meu avô Antonio (Tonho Carrinho)(em memória) e aos meus tios, Helder, Rander, Hamilton(Tio Mirto), Antonio Carlos(Tio Crito), Carlos(Tio Carlão), Fernando(Nandão) por me ensinarem a ser o homem que sou hoje, a todas as minhas tias, em especial, tia Marilene e tia Dola.

Um agradecimento mais do que especial a minha madrinha Marialva por acreditar sempre em mim, por ser minha segunda mãe, pelo carinho e pelas comidas deliciosas.

À todos os meus primos, pelas conversas, momentos de diversão e por tudo que passamos até hoje.

À toda a minha família pelo apoio, incentivo e pelas reuniões de família incríveis.....Amo vocês!

À minha banda Paruzha, a qual é formada pelos meus melhores amigos Eduardo Oliveira(Edu loiro), César(Pocahontas) e Clayton (Jesus), meus irmãos para todo e sempre!

À minha "Rep. Arizona 51"que foi meu lar durante todo o mestrado, a todos os meus amigos que por lá passaram, especialmente Ernane, Diego(milk), Daniel(Paranauê), Henrique(Juninho), Romildo(Terrorista), Rafael, Luciano, Felipe(kuca), Gabriel(Percínio), Yuri, Ge-

ovanni.

À todos os professores que passaram por minha vida, afinal se cheguei até aqui, foi graças ao empenho de vocês em propagar o conhecimento. Em especial, ao Prof. Dr. José Luiz Aarestrup (Zeca), Prof. Fernando (Fubá), Prof. Dr. Ricardo Farias, Prof. Dr. Juan Campoy, Prof. Dr. Samuel Kurcbart, a Prof^a. Dra. Thalita Chiaramonte, Prof^a. Dra Maria Aline e ao Prof. Dr. Fernando Marroquim.

À todos os amigos e colegas que formei ao longo da graduação e mestrado, em especial Daniel Teixeira, Daniel Magri, Ricardo(wing chun), Mateus Antônio, Allison, Ivan, Débora, Matheus Cecilio, Jáder, Bruno, Fernando, Filipe(Bob), Dérick, Diego, Dyana, Karina e que compartilharam tantos momentos de dificuldades e descontração.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física em associação ampla UFSJ/UFLA/UNIFAL - MG.

À UFSJ por todo o apoio e a Fapemig pelo apoio financeiro.

RESUMO

MODELO ESPECTRAL DE QUARKS $SU(3)_f$

Eduardo Antonio dos Reis

Orientador: André Luiz Mota

Co-Orientador: Edson Wander Dias

Resumo da dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física associação ampla UNIFALMG/UFLA/UFSJ do Departamento de Ciências Naturais da Universidade Federal de São João del Rei, como parte dos pré-requisitos necessários para obter o grau de mestre.

Este trabalho apresenta os primeiros resultados de uma extensão do modelo espectral de quarks, que inclui diferentes sabores. O modelo espectral de quarks é uma abordagem baseada em uma generalização da representação de Lehmann para o propagador do quark. Invariância de calibre e quiral são asseguradas com a ajuda da técnica de gauge, que fornece soluções específicas para as identidades Ward-Takahashi. Condições gerais sobre as função espectrais de quarks seguem a partir de exigências físicas naturais. Em particular, a função é normalizada, e todos os momentos positivos devem desaparecer, enquanto os observáveis físicos ficam dependentes dos momentos negativos e os chamados momentos log. Como consequência, o modelo é finito. A inclusão de diferentes sabores de quarks no modelo, a partir da determinação das duas funções espectrais diferentes e funções de n-pontos construídas a partir das identidades Ward-Takahashi, permite a descrição física do méson káon, um méson considerado leve, constituído por um quark up e um strange. Algumas previsões e relações foram deduzidas a partir de nossa abordagem, como condensados de quarks, polarização de vácuo e decaimento fraco para mésons leves.

ABSTRACT**SPECTRAL QUARK MODEL $SU(3)_f$** **Supervisor:** André Luiz Mota**Co-Supervisor:** Edson Wander Dias

This work presents the first results of an extension of the spectral quark model which includes different flavors. The spectral quark model is an approach based on a generalization of the Lehmann representation for the quark propagator. Gauge and chiral invariance are ensured with the help of gauge technique which provides particular solutions to the Ward-Takahashi identities. General conditions on the quark spectral function follow from natural physical requirements. In particular, the function is normalized, it's all positive moments must vanish, while the physical observables depend on negative moments and so-called log moments. As a consequence, the model is made finite. The inclusion of different flavors of quarks in the model, from the determination of the two different spectral functions and n-point functions constructed from Ward-Takahashi identities, permits the physical description of meson kaon, considered a light meson constituted by an up and strange quark. Some predictions and relations were deduced from our approach, as quark condensate, vacuum polarization and weak decay for light mesons.

Sumário

1	Introdução	8
2	Conceitos Fundamentais da Cromodinâmica Quântica	12
2.1	O Modelo Padrão	12
2.2	O Modelo de Quarks	15
2.3	Propriedades Peculiares da QCD	17
2.3.1	Liberdade Assintótica, Confinamento de Quarks, Simetrias	17
3	Simetrias	22
3.1	Teorema de Noether	22
3.2	Identidades de Ward-Takahashi	24
3.3	Relação de Goldberger-Treiman	27
4	Modelo Espectral de Quarks	29
4.1	Modelos Quirais de Quarks	29
4.2	Modelo Espectral de Quarks	30
4.3	Momentos da função espectral	32
4.3.1	Condensado de quarks	35
4.3.2	Densidade de Energia no Vácuo	36
4.3.3	Limite de $p \rightarrow \infty$	38
4.4	Técnica de Gauge	39
4.4.1	Vértices com uma corrente	40
4.4.2	Relação de Goldberger-Treiman	41

<i>SUMÁRIO</i>	6
5 Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$	43
5.1 Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$	43
5.1.1 Condensado de quarks	44
5.1.2 Densidade de Energia no Vácuo	45
5.2 Técnica de Gauge	46
5.2.1 Vértices com uma corrente	47
5.2.2 A Relação Análoga de Goldberger-Treiman para o Káon	49
5.3 Polarização do Vácuo	49
5.4 Decaimento fraco do Káon	54
6 Conclusões	58
Bibliografia	60
A Notações e Convenções	64
B Resultados úteis	67

Lista de Figuras

2.1	As quatro interações fundamentais[23]	13
2.2	Modelo Padrão[26]	15
3.1	Identidades de Ward-Takahashi [34]	26
4.1	Diagrama do tensor energia-momento a um loop.	36

Capítulo 1

Introdução

A teoria correspondente ao estudo da interação forte – a interação entre as partículas sub-atômicas, responsável, por exemplo, pela coesão dos núcleos atômicos, é conhecida como Cromodinâmica Quântica (QCD, da denominação em língua inglesa Quantum Chromodynamics). Do ponto de vista das partículas mais fundamentais conhecidas atualmente, a QCD descreve a interação entre quarks – os constituintes sub-atômicos da matéria, portadores de carga forte, chamada de cor (daí a denominação “cromodinâmica”) – através de mediadores chamados glúons, os quanta do campo cromodinâmico.

No regime de altas energias, a intensidade da interação forte é pequena, tendendo a zero no limite em que a separação espacial entre partículas tende, igualmente, a zero, fenômeno conhecido como liberdade assintótica. Desta forma, pode-se tratar a QCD através das mesmas técnicas perturbativas empregadas na Eletrodinâmica Quântica (QED), com a intensidade da interação, uma vez pequena, utilizada como parâmetro perturbativo. Embora reconhecida atualmente como a teoria que descreve a interação forte, a QCD apresenta um problema de convergência formal em seu tratamento perturbativo no regime de baixas energias, onde a intensidade da interação é alta. Isto ocorre principalmente devido ao fato de que os mediadores da interação forte (ao contrário dos fótons na QED) também carregam carga de cor e por isto interagem não apenas com os quarks, mas também entre si. De um modo ingênuo, podemos dizer que enquanto o campo eletromagnético obedece ao princípio da superposição (sendo, portanto, a teoria linear), o campo cromodinâmico não o faz. Entretanto, é justamente neste regime de baixas energias que se encontram os estados ligados de quarks - prótons e nêutrons por exemplo (estados ligados de três quarks), e mésons (píons, káons, estados ligados de dois

quarks em geral). Neste regime, modelos efetivos para a teoria e técnicas de soluções não perturbativas devem ser empregados no tratamento da QCD. Uma das características destes modelos efetivos é que, devido à presença de interações efetivas de intensidade baixa no limite de baixas energias, os mesmos podem ser tratados perturbativamente. No entanto, nem todas as características da QCD podem ser reproduzidas por estes modelos, sendo às vezes necessária a introdução de interações não locais e, desta forma, novamente exige-se o emprego de técnicas não perturbativas de tratamento da QCD. A redução do número de graus de liberdade nestes modelos efetivos continua sendo, entretanto, uma forte motivação para o emprego dos mesmos.

O termo "Modelo Quiral de Quarks" é um nome genérico para qualquer teoria relativística de campos que se refira à descrição das características não perturbativas da QCD. Diversas abordagens [1-8] compartilham características comuns, como: (a) os quarks são incorporados nestes modelos como os únicos graus de liberdade e (b) diversas simetrias da QCD são reproduzidas nos modelos, principalmente as invariâncias de calibre e quiral. Estas simetrias são expressas pelas chamadas Identidades de Ward-Takahashi, e modelos quirais de quarks oferecem soluções particulares para as mesmas.

Apesar de não haver dúvidas de que estes modelos efetivos fornecem uma descrição quantitativa razoavelmente precisa de processos hadrônicos, há uma falha sistemática na construção dos mesmos: uma fonte de ambiguidade, que reside no fato de que os modelos quirais de quarks são, supostamente, uma aproximação para a QCD em baixas energias, sendo necessária a supressão dos graus de liberdade de altas energias. Isto define certa escala, ou corte (que podemos entender como o valor de energia abaixo do qual supõe-se válido o modelo). A escala adquire um significado físico, e deve ser mantida em todo o tratamento destes modelos. A forma precisa com que este corte de energia deve ser introduzido não é de todo clara, sendo a razão para a mencionada ambigüidade na construção destes modelos. Não é possível, desta forma, decidir por um modelo ou outro apenas por suas características teóricas, sendo fundamental, portanto, a avaliação de seu poder de predição.

Um modelo muito recente usado para a descrição da QCD no regime de baixas energias é o Modelo Espectral de Quarks [9-10]. Este modelo usa a representação de Lehmann [11] para o propagador de quarks, representado em termos de uma dada função espectral $\rho(\omega)$, e a técnica de gauge [12-13], para fornecer soluções para as identidades de Ward-Takahashi. Diversos observáveis físicos (como, por exemplo, condensados de quarks e densidade de energia no vácuo)

são empregados para construir-se a função espectral do modelo, e o poder de predição do mesmo é impressionante, quando comparado com os resultados experimentais conhecidos [14]. Além disso, a escala característica para a região de baixas energias, como mencionada anteriormente, surge no modelo associada à função espectral, de maneira bem menos artificial que em outros modelos, nos quais o limite infinito (artificial) para esta escala reproduz resultados divergentes, o que implica que termos de superfície, geralmente ambíguos [15-16], estão presentes nestes modelos. Sob este ponto de vista, o Modelo Espectral de Quarks pode ser visto como um modelo finito, no sentido de que não existe nenhum parâmetro artificialmente introduzido que leve ao surgimento de divergências. Na forma atual, o modelo espectral de quarks descreve a interação de quarks sem massa, ou seja, é eficaz para a descrição da fenomenologia dos mésons leves.

Neste trabalho pretendemos construir uma extensão do Modelo Espectral de Quarks que descreva os mésons formados por quarks de diferentes sabores. Em outros modelos quirais, esta descrição corresponde às versões que implementam a simetria $SU(3)$. Com a inclusão do quark strange teremos então duas distribuições $\rho_\mu(\omega')$ e $\rho_{\bar{s}}(\omega)$, essenciais para o uso do modelo na descrição da física do méson Káon, um méson considerado leve, constituído por um quark up e um quark strange.

Nosso trabalho ficou organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos uma introdução sobre o modelo padrão e as teorias que o abrangem e considerações sobre as mesmas, seguindo com o foco sobre a interação forte e a teoria que a descreve, a Cromodinâmica Quântica (QCD). Ao longo desse capítulo descreveremos propriedades da QCD como liberdade assintótica, confinamento, e as simetrias que a teoria possui. No capítulo 3, aprofundaremos mais um pouco sobre as simetrias e suas propriedades, fazendo uma exposição do teorema de Noether e das Identidades de Ward-Takahashi como guias na análise de simetrias. No capítulo 4, partimos da modelagem não perturbativa a partir de modelos quirais de quarks e introduzimos o modelo utilizado neste trabalho, chamado de Modelo Espectral de Quarks. Expomos a forma como o modelo é construído e as condições necessárias para que o mesmo seja finito. A partir de cálculos de alguns observáveis mostramos condições a serem satisfeitas pelos momentos da função espectral. No capítulo 5, apresentaremos uma extensão do modelo espectral de quarks, eficaz na descrição da fenomenologia dos méson leves formado por quarks de diferentes sabores. A partir do modelo resultante, realizamos cálculos de alguns observáveis mesônicos,

como condensado de quarks, polarização do vácuo e decaimento fraco, detalhadamente discutidos e comparados com os resultados conhecidos, para a validação do modelo. Finalmente, no último capítulo apresentaremos as conclusões obtidas neste trabalho e as perspectivas para continuação do mesmo. Em seqüências, temos as referências utilizadas no mesmo e dois apêndices que suplementam a dissertação: no primeiro, apresentamos as notações e convenções utilizadas e no segundo explicitaremos resultados utilizados ao longo do trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais da Cromodinâmica Quântica

Neste capítulo introduziremos uma visão geral sobre a interação forte e o modelo teórico que a descreve, denominado Cromodinâmica Quântica.

2.1 O Modelo Padrão

Atualmente, considera-se que, na natureza, todos os fenômenos e todas as transformações são regidos por quatro interações fundamentais: a interação gravitacional, a eletromagnética, a fraca e a forte. Cada uma dessas forças compreende a uma Teoria Física (fig. 2.1):

A interação mais conhecida é a Gravitação ou interação gravitacional, tendo seu primeiro modelo clássico, a Teoria da Gravitação Universal de Newton, sua generalização relativística é a teoria da Gravitação de Einstein, também chamada de Teoria da Relatividade Geral de Einstein ou também Geometrodinâmica, uma vez que a relatividade geral geometriza a gravitação. Para descrever os estágios iniciais da formação do Universo precisamos de uma teoria quântica da gravitação, algo que ainda está em aberto. Há também outra interação bastante conhecida, a eletromagnética. Teoria que descreve os fenômenos elétricos e magnéticos, ou seja as forças eletromagnéticas. A formulação clássica da Eletrodinâmica já consistente com a teoria da relatividade especial de Einstein foi feita por James Clerk Maxwell [17]. Posteriormente, o "casamento" desta teoria com a mecânica quântica, ou seja, a construção de uma Eletrodinâmica Quântica (Quantum Electrodynamics - QED), foi realizada por Feynman, Tomonaga e

Schwinger [18] por volta de 1940. As forças fracas são as responsáveis por explicar os processos de decaimento radiativo, tais como o decaimento beta nuclear, o decaimento do pion, do muon e de várias partículas. É interessante notar que esta força não era conhecida pela física clássica e que sua formulação como teoria é estritamente quântica. A primeira teoria das interações fracas foi apresentada por Fermi [19] em 1933. Mais tarde ela foi aperfeiçoada por Lee, Yang, Feynman, Gell-Mann [20] e vários outros nos anos da década de 1950. Sua forma atual a Flavordynamics ou Dinâmica dos Sabores construída por volta de 1960 é devida a Glashow, Weinberg e Salam [21]. Nesta teoria, as interações fraca e eletromagnética são apresentadas como manifestações diferentes de uma única força, a força eletrofraca. Esta unificação entre a interação fraca e a interação eletromagnética reduz o número de forças existentes no Universo a apenas 3: força gravitacional, força forte e força eletrofraca. As forças fortes, responsáveis pelos fenômenos inter-nucleares e a estabilidade nuclear, mantém o núcleo unido evitando que os prótons que os constituem, por possuírem a mesma carga elétrica, simplesmente sofram uma intensa repulsão e destruam o próprio átomo. Se a força forte não existisse a matéria que forma o Universo, tal como o conhecemos, também não existiria. O trabalho pioneiro sobre as forças fortes foi realizado por Yukawa [22] em 1934 mas até meados da década de 1970 não havia, realmente, uma teoria capaz de explicar os fenômenos nucleares. Foi então que surgiu a Cromodinâmica Quântica (Quantum Chromodynamics - QCD).

Forças na Natureza (quatro interações fundamentais)

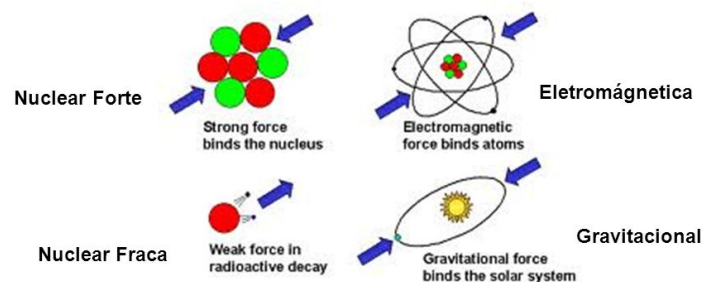


Figura 2.1: As quatro interações fundamentais[23]

Um dos grandes desafios da Física tem sido a tentativa de unificação entre as quatro interações fundamentais da natureza. O Modelo Padrão, formulado por volta de 1970 e estabelecido empiricamente em 1980, é o modelo das interações fundamentais que descreve três das quatro interações conhecidas: a interação eletromagnética, a interação fraca e a interação forte, só não descrevendo a interação gravitacional. De acordo com o Modelo Padrão, léptons e quarks são partículas verdadeiramente elementares, no sentido de não possuírem estrutura interna, são partículas que constituem a matéria, com spin semi-inteiro e que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli¹

As interações fundamentais ocorrem como se as partículas interagentes “trocassem” outras partículas entre si. Essas partículas mediadoras seriam os fótons na interação eletromagnética, os glúons na interação forte, as partículas W e Z na interação fraca e os grávitons (ainda não detectados) na interação gravitacional. Assim, partículas eletricamente carregadas interagiriam trocando fótons, partículas com carga cor interagiriam trocando glúons, partículas com carga fraca trocariam partículas W e Z enquanto partículas com massa trocariam grávitons.

Segundo Gordon Kane [24], o modelo padrão de partículas elementares é, na verdade, a mais sofisticada teoria matemática sobre a natureza. É uma teoria compreensiva que identifica as partículas básicas e especifica como interagem. Tudo o que acontece em nosso mundo (exceto os efeitos da gravidade) resulta das partículas do Modelo Padrão interagindo de acordo com suas regras e equações. Nesse contexto, quarks e léptons são partículas puramente elementares, porque não possuem estrutura interna. Já outras partículas que possuem estrutura interna são chamadas de hádrons², que dividimos em:

- ▶ Bárions: constituídos por três quarks ou três antiquarks.
- ▶ Mésons: constituídos por um quark e um antiquark.

Até o momento, temos conhecimento sobre seis léptons (elétron, múon, tau, neutrino do elétron, neutrino do múon, neutrino do tau) e seis quarks (up, down, charm, strange, bottom, top). Devido à propriedade de cor, cada quark pode apresentar três tipos de cores diferentes: vermelho, azul e verde. Há, portanto, 18 tipos de quarks. A fig. 2.2 mostra a tabela de

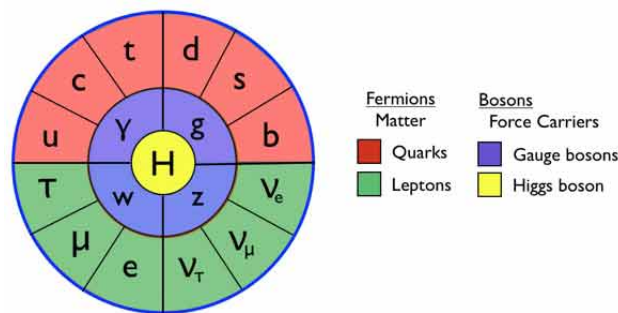
¹O princípio de exclusão de Pauli diz que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente.

²palavra de origem grega que significa pesado, são todas as partículas formadas por quarks.

partículas elementares que se conhece atualmente para o modelo padrão.

Uma peculiaridade dos quarks é que eles possuem carga elétrica fracionária e , ($\frac{2}{3}e$) para alguns tipos e ($-\frac{1}{3}e$) para outros. No entanto, quarks nunca foram observados livres, estando sempre confinados em hádrons, de tal modo que a soma algébrica das cargas dos quarks que constituem um determinado hádron é sempre um múltiplo inteiro de e [25].

No Modelo Padrão, a massa das partículas é gerada pelo bóson de Higgs³, através do mecanismo de quebra de simetria de calibre induzida pelo campo de Higgs, o que faz da massa das partículas uma propriedade dinâmica. Outro fato interessante é que mésons compostos por quarks leves (up/down e strange), devem suas massas a outro tipo de quebra de simetria, a quebra de simetria quiral e não ao campo de Higgs. O káon, por exemplo, composto pelos quarks up-strange, cujas massas são, up($4MeV$) e strange ($95MeV$), possui uma massa de $494MeV$.



Particles of the Standard Model

Figura 2.2: Modelo Padrão[26]

2.2 O Modelo de Quarks

Em 1964, Gell-Mann e Zweig (independentemente) propuseram um modelo que explicava o espectro das partículas que interagem pela força forte (os hádrons), a partir de constituintes elementares (os quarks). A interação responsável por manter os quarks unidos no núcleo atômico é a interação forte, assim como a interação eletromagnética mantém prótons e elétrons unidos

³O bóson de Higgs, (descoberto em julho do 2012 com sua confirmação definitiva em março de 2013 no LHC (Large Hadron Collider)) é uma partícula formulada pelo físico Peter Higgs em 1964, descoberta que lhe rendeu o prêmio nobel de física de 2013 e pretende explicar uma série de fenômenos naturais, como a origem da vida e do universo e o mistério da existência de massa nas demais partículas que compõem o Modelo Padrão.

formando átomos. Note que, na escala do núcleo atômico, a interação forte é mais intensa que a interação eletromagnética.

O modelo de quarks obteve grande sucesso na previsão de novos hádrons e das interações eletromagnética e fraca entre os mesmos. Entretanto, nos primórdios de sua concepção, o modelo apresentava alguns problemas como:

- Psicológico : Partículas com cargas fracionadas?
- Dificuldades de comprovação experimental :
 1. Quarks livres ainda não foram detectados. A resposta para isso é ou porque ainda não chegamos a grandes energias suficientes para quebrar os hádrons ou, talvez, a força entre quarks é tal que eles são obrigados a ficar juntos, não importa o quão forte seja a colisão;
 2. Era esperado que a função de onda dos quarks no interior do bárions fosse anti-simétrica na troca dos números quânticos de sabor e spin de qualquer par de quarks, uma vez que os mesmos eram férmions de spin $\frac{1}{2}$ e então obedeceriam ao Princípio de Exclusão de Pauli. No entanto, havia a detecção de um estado excitado leve Δ^{++} com spin $\frac{3}{2}$ e carga elétrica $+2$ interpretada como o estado ligado (uuu) com momento angular orbital nulo e o spin dos três quarks paralelos, o que resultaria em uma função de onda total simétrica.
 3. Ao mesmo tempo, sabia-se que em um mundo ideal validava-se a relação de Goldberger-Treiman, na qual o méson π ou pión era sem massa. Assim, a taxa de decaimento para o processo $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ era calculada, sendo seu valor menor do que o observado experimentalmente por um fator de $9 = 3^2$.

Para reconciliar o modelo de quarks com o Princípio de exclusão de Pauli, Gell-Mann postulou que quarks carregavam um grau de liberdade ou número quântico até esta data desconhecido, chamado por ele de cor. Desta forma, fez-se a suposição *ad hoc* que a função de onda dos bárions era totalmente antissimétrica no número quântico de cor e era simétrica no sabor e spin, de forma que a função de onda total seria antissimétrica, o que concordava com a estatística da Fermi-Dirac. Assim, para cada sabor de quark foram atribuídos três "cores", por exemplo vermelho, verde e azul, ou a representação q_i , com $i = 1, 2, 3$ sendo o índice de cor.

O problema da anti-simetrização da função de onda estava resolvido e ainda multiplicando-se a amplitude do decaimento do π^0 por 3 (ou seja, três possíveis cores), a taxa de decaimento seria 9 vezes maior, resolvendo a discrepância entre teoria e experimento. Pode-se ressaltar ainda o fato de que léptons e hádrons não teriam cor, ou seja, o modelo é construído de forma que as cores dos hádrons e léptons sejam nulas, reproduzindo evidências experimentais de que os mesmos não interagem por troca direta dos mediadores da força forte.

Por conseguinte, quarks com cor seriam uma representação fundamental de uma nova simetria global interna, chamada de $SU(3)$. Desse modo, os quarks q_i transformariam-se sob a representação fundamental ou 3, da simetria $SU(3)$ de cor. Os anti-quarks \bar{q}^i transformariam sob a representação $\bar{3}$. O produto interno de 3 por $\bar{3}$ é um invariante de $SU(3)$, assim como também pode-se construir uma combinação totalmente anti-simétrica dos três 3's, ϵ_{ijk} , que se transforma como:

$$\epsilon_{ijk} \longrightarrow U_{i,i'}U_{j,j'}U_{k,k'}\epsilon_{i'j'k'} = (\det U)\epsilon_{ijk} \quad (2.1)$$

que é invariante sob $SU(3)$, uma vez que $(\det U) = 1$. Postulando-se que todas as funções de onda dos hádrons têm de ser invariantes sob as transformações de simetria $SU(3)$, as únicas combinações permitidas são:

$$q^{-i}q_i, \quad \epsilon^{ijk}q_iq_jq_k, \quad \epsilon_{ijk}\bar{q}^i\bar{q}^j\bar{q}^k.$$

Finalmente, a suposição de que os hádrons físicos sejam singletos de cor, implica que a única possibilidade é que os mesmos sejam mésons, bárions ou anti-bárions.

2.3 Propriedades Peculiares da QCD

2.3.1 Liberdade Assintótica, Confinamento de Quarks, Simetrias

Ao estudar o espalhamento inelástico profundo de elétrons em núcleos (os hádrons que compõem o núcleo atômico), físicos experimentais descobriram que quando ocorria uma colisão de altas energias (usualmente colisões entre prótons), os quarks dentro dos núcleos agiam como se não houvesse interação mútua, ou seja, os quarks se comportavam como se estivessem livres.

Isto era algo paradoxal, pois quarks nunca haviam sido vistos isoladamente e quando observados, os mesmos se encontravam ligados fracamente um ao outro dentro do núcleo.

Este comportamento aparentemente contraditório que os quarks possuem pode ser entendido se o acoplamento da interação forte tender a zero no limite de grandes momentos ou energias (também chamado de limite ultravioleta), e tender ao infinito ou a um grande valor no limite de baixos momentos (limite infravermelho)⁴.

Muitos pesquisadores buscaram por teorias cujos acoplamentos tendiam a zero no limite ultravioleta, agora conhecidas como teorias assintoticamente livres e nesse sentido David Gross, Frank Wilczek e David Politzer [27-29], em 1973, descobriram que teorias de gauge não-abelianas, e em especial a teoria de Yang-Mills, tinham essa propriedade, mais tarde conhecida como **liberdade assintótica**.

Além da propriedade de liberdade assintótica, que representa essa falta de interação entre quarks em pequenas distâncias (ou seja, grandes momentos, uma vez que distância de separação e momento transferido são variáveis conjugadas pela transformação de Fourier), a força forte ainda tem a característica de mantê-las fortemente unidas em grandes distâncias (baixos momentos). Essa propriedade é chamada de **confinamento de cor** e é uma consequência direta do caráter não-abeliano dos glúons.

Qualquer sistema de interação forte à temperatura e densidade zero deve ser um singlete de cor na escala de distâncias maiores do que $\frac{1}{\lambda_{QCD}}$ ⁵. Como consequência, quarks livres isolados não existem na natureza (confinamento quark). O confinamento de cor da QCD é uma conjectura teórica consistente com os fatos experimentais. Sua prova formal, na QCD, ainda não foi obtida.

Suponhamos, por exemplo, que temos um par quark-antiquark, que está em um estado de singlete de cor. Pode-se tentar separar o quark do antiquark puxando para separá-los. A interação entre os quarks fica mais forte uma vez que a distância entre eles se torna maior, semelhante ao que acontece em uma mola. De fato, quando uma mola é esticada além do limite elástico, ela quebra e produz duas molas. No caso do par de quarks, um novo par quark-antiquark será criado quando puxado além de certa distância. Parte da energia do alongamento vai para a criação do novo par, e, como consequência, não se obtém quarks como partículas livres [30].

⁴Considerando $c = \hbar = 1$ (sistema de unidades naturais).

⁵ $\frac{1}{\lambda_{QCD}} \sim 250 MeV$, escala de interação forte que define a escala em que a constante de acoplamento torna-se grande e a física se torna não perturbativa

A partir de uma teoria para a interação forte, podemos analisar as simetrias⁶ da mesma, a fim de esclarecer termos e definições utilizadas ao longo do trabalho.

Quando estudamos as simetrias de sabor, lidamos com as partículas no espaço de isospin⁷(esse termo foi introduzido por Wigner [31]). Heisenberg [32] foi quem propôs que deveria existir alguma simetria entre partículas cujas massas de repouso eram próximas, sugerindo então que prótons e nêutrons deveriam ser estados diferentes de uma mesma partícula quando estudadas em um espaço interno, o qual ele denominou de espaço de isospin, pois a álgebra foi desenvolvida em completa analogia com a do spin.

Consideremos apenas dois sabores de quarks, u (up) e d (down), sendo $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ onde, $u = q_1$ e $d = q_2$. Assim, densidade de Lagrangeana da QCD fica:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - M)q, \quad (2.2)$$

com

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix},$$

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x),$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x),$$

onde m_u e m_d são as massas dos quarks u e d , respectivamente, $A_\mu(x)$ é o campo de calibre (gauge) e D_μ é a derivada de calibre covariante. Se $m_u = m_d$, a Lagrangeana (2.2) é invariante sob a transformação

$$q \rightarrow Uq = e^{i\vec{\Theta}\cdot I_i} q \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

sendo I_i os geradores do grupo SU(2), denotados na representação fundamental por:

$$I_i = \frac{\tau_i}{2} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

onde τ_i são as matrizes de Pauli em uma versão para isospin(ver apêndice A), com os geradores

⁶No capítulo 3 apresentaremos uma discussão geral sobre simetrias e suas propriedades.

⁷isospin (spin isotópico, spin isobárico) é um número quântico relacionado às partículas que são igualmente afetadas pela força forte, mas têm diferentes cargas (por exemplo, prótons e nêutrons).

satisfazendo

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl}I_l.$$

Esta simetria corresponde à simetria de isospin de Heisenberg.

Adicionando o quark s (strange), com massa muito superior aos quarks u e d , porém, ainda considerado leve, a simetria $SU(2)$ de isospin não se aplica. Para resolver isso, Gell-Mann e Ne'eman admitiram que o isospin era apenas uma manifestação de uma simetria maior, chamada $SU(3)$, com o quark strange tendo $I = 0$, formando um tripleto. A partir disso, mostraram que as partículas elementares naturalmente satisfazem as representações dessa nova simetria. O conjunto das matrizes unitárias 3×3 formam o grupo $SU(3)$. Os geradores podem ser tomados como quaisquer $(N_c = 3)^2 - 1 = 8$ matrizes 3×3 , hermiteanas de traço nulo e linearmente independentes; onde N_c é o número de cores. Essas matrizes formam então a representação fundamental do $SU(3)$:

$$U = e^{-i\phi\lambda_a} \quad (2.5)$$

onde ϕ é o parâmetro do grupo, que funciona como uma fase, e λ_a , com $a = 1, \dots, 8$ são as matrizes de Gell-Man (ver apêndice A).

Pode-se notar ainda que a Lagrangeana (2.2) é invariante sob as transformações no setor de sabor dos campos fermiônicos:

$$q_f \rightarrow e^{i\theta} q_f, \quad (2.6)$$

$$q_f \rightarrow e^{i\theta_f} q_f, \quad (2.7)$$

onde f (flavors) são os sabores dos quarks. A relação (2.6) representa uma redefinição de fase global para todos os sabores de quarks, associada com a conservação do número bariônico e a relação (2.7) é uma redefinição de fase para diferentes sabores de quarks, que implica na conservação do sabor.

No limite quiral, em que m_u e m_d são nulas, a Lagrangeana (2.5) também é invariante sob a transformação

$$q \rightarrow e^{i\vec{\Theta} \frac{\tau_i}{2} \gamma_5} q, \quad (2.8)$$

conhecida como transformação axial, ou quiral $SU(2)$.

Em Teoria Quântica de Campos, a simetria quiral corresponde a invariância da Lagrangeana (2.5) sob a transformação 2.8. Como consequência, temos as correntes bariônicas de Noether, vetorial e axial, respectivamente:

$$J_B^\mu(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu q(x) \quad (2.9)$$

$$J^{\mu a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q(x) \quad (2.10)$$

$$J_5^{\mu a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q(x) \quad (2.11)$$

As conservações das correntes bariônica, vetorial e a conservação parcial da corrente axial (PCAC) implicam em:

$$\partial_\mu J_B^\mu(x) = 0, \quad (2.12)$$

$$\partial_\mu J^{\mu a}(x) = 0, \quad (2.13)$$

$$\partial_\mu J_5^{\mu a}(x) = M\bar{q}(x)i\gamma_5\tau^a q(x), \quad (2.14)$$

que são a representação da simetria quiral na QCD.

Capítulo 3

Simetrias

Diversas simetrias estão associadas ao estudo da fenomenologia dos hádrons na QCD. Neste capítulo, apresentaremos algumas simetrias e relações fundamentais para o entendimento e desenvolvimento do nosso trabalho.

3.1 Teorema de Noether

Os sistemas físicos são descritos classicamente pelas leis de Newton (equações de Euler-Lagrange), em termos de uma função específica, chamada Lagrangeana, e baseiam-se no princípio de mínima ação. O conhecimento de constantes de movimento, ou seja, grandezas físicas conservadas ao longo da evolução temporal do sistema é muito importante tanto do ponto de vista físico como matemático na resolução de equações de movimento. Por outro lado, outro conceito fundamental em Física é o de simetria. O Teorema de Noether [33] relaciona simetrias e leis de conservação em Teorias Clássicas de Campos. Esse teorema afirma que a cada simetria contínua corresponde uma corrente que satisfaz uma equação de continuidade, ou, equivalentemente, uma quantidade que é conservada. Seja $\delta\phi(x)$ uma transformação infinitesimal de simetria no campo $\phi(x)$, temos então que

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (3.1)$$

sendo $\delta\phi(x)$ uma deformação no campo. Chamamos essa transformação de simetria se ela deixa a equação de movimento invariante. Isto é assegurado se a ação $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x))$ é invariante

sob a transformação (3.1), invariância esta que pode ser descrita por:

$$\mathcal{L}(\phi(x) + \delta\phi(x)) = \mathcal{L}(\phi(x)) \quad (3.2)$$

$$0 = \mathcal{L}(\phi(x) + \delta\phi(x)) - \mathcal{L}(\phi(x)) = \delta\mathcal{L} \quad (3.3)$$

Expandindo (3.3) em primeira ordem em $\delta\phi$, temos:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \quad (3.4)$$

Pela equação de *Euler – Lagrange* [28],

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right),$$

e a relação

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\phi + \delta\phi) - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi),$$

substituindo em (3.4), obtemos:

$$0 = \left(\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} (\partial_\mu\delta\phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right), \quad (3.5)$$

Definindo:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi. \quad (3.6)$$

é conhecida como a corrente de Noether (que é conservada, uma vez que $\partial_\mu J^\mu = 0$) associada à simetria $\delta\phi$. Transformações unitárias são as mais comuns e uma transformação (U) é dita unitária quando obedece a relação $UU^\dagger = 1$. A simetria quiral pertence a esta classe.

É importante ressaltar que algumas correntes de Noether não se conservam no nível quântico, pois nem toda simetria dos campos clássicos possui um análogo quântico. As correntes conservadas levam a cargas conservadas no tempo:

$$Q = \int d^3x J^0(x); \quad \frac{d}{dt}Q = 0. \quad (3.7)$$

3.2 Identidades de Ward-Takahashi

A versão quântica do clássico Teorema de Noether, as Identidades de Ward-Takahashi [22], são identidades que relacionam funções de correlação que seguem a partir de simetrias globais ou de calibre (gauge) e propagadores em Teoria Quântica de Campos, válidas em todas as ordens de perturbação e após renormalização.

O tratamento desenvolvido aqui pode ser encontrado em [34]. Em QED, o funcional gerador Z das funções de Green completas para um sistema de fótons e elétrons é descrito por:

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int \mathcal{L} dx}, \quad (3.8)$$

sendo \mathcal{L} a lagrangeana, dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \psi - m\bar{\psi} \psi - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \eta \bar{\psi}, \quad (3.9)$$

onde J^μ , $\bar{\eta}$ e η são fontes associadas a A_μ , ψ e $\bar{\psi}$ respectivamente. As transformações infinitesimais de calibres nos campos são dadas por:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda; \quad \psi \rightarrow \psi - i\epsilon \Lambda \psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + i\epsilon \Lambda \bar{\psi}. \quad (3.10)$$

Ao exigirmos a invariância com relação a transformações de calibre do funcional gerador, os três primeiros termos são invariantes, mas o restante não. Assim, o integrando de Z é reescrito como:

$$\exp \left\{ i \int dx \left[\frac{-1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu) \square \Lambda - J^\mu \partial_\mu \Lambda - i\epsilon (\bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta) \Lambda \right] \right\}, \quad (3.11)$$

desde que Λ é infinitesimal e integrando por partes, temos

$$1 + i \int dx \left[\frac{-1}{\alpha} \square (\partial_\mu A_\mu) - \partial^\mu J_\mu - i\epsilon (\bar{\eta} \psi - \bar{\psi} \eta) \right] \Lambda(x). \quad (3.12)$$

A invariância em Z implica que, quando o operador (3.12) atua em Z , obtemos simplesmente a identidade. Portanto, desde que Λ é uma função arbitrária, obtemos a equação diferencial funcional:

$$\left[\frac{i}{\alpha} \square \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} - \partial^\mu J_\mu - \epsilon \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z(\eta, \bar{\eta}, J) = 0, \quad (3.13)$$

onde fizemos as seguintes substituições:

$$A_\mu \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}; \quad \psi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}; \quad \bar{\psi} \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}. \quad (3.14)$$

Tomando $Z = e^{iW}$, onde W é um funcional gerador de funções de Green conexas. Podemos então reescrever (3.13) como uma equação para $W[\eta, \bar{\eta}, J]$, da seguinte forma:

$$\left[-\frac{\square}{\alpha} \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} - i\partial^\mu J_\mu - i\epsilon \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) \right] = 0. \quad (3.15)$$

Finalmente, podemos transformar (3.15) em uma equação para a função de vértice Γ , uma vez que:

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J] - \int dx (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J^\mu A_\mu) \quad (3.16)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} &= -J^\mu(x), & \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} &= -\bar{\eta}(x), & \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} &= -\eta(x), \\ \frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)} &= A^\mu(x), & \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} &= \psi(x), & \frac{\delta W}{\delta \eta} &= \bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, (3.15) pode ser reescrito como:

$$-\frac{\square}{\alpha} \partial_\mu A_\mu(x) + i\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} + i\epsilon \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} - i\epsilon \bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = 0. \quad (3.18)$$

onde o primeiro termo do membro esquerdo é referente ao fixador de calibre (gauge fixing) e o segundo referente à conservação da corrente vetorial. Agora, diferenciamos funcionalmente duas vezes a equação (3.18) com respeito a $\bar{\psi}(x_1)$ e $\psi(y_1)$, e fazendo $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$. O primeiro termo desaparece, e obtemos:

$$i\partial_x^\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1) \delta A^\mu(x)} = i\epsilon \delta(x - x_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1)} - i\epsilon \delta(x - y_1) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1)}. \quad (3.19)$$

No espaço de momentos, podemos definir a função de vértice amputada $\Gamma_\mu[p, q, p']$ como:

$$\int dx dx_1 dy_1 e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(y_1) \delta A^\mu(x)} = i\epsilon (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \Gamma_\mu[p, q, p']. \quad (3.20)$$

Por outro lado, $\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x_1)\delta\psi(y_1)}$ é o inverso do propagador, denotado por S :

$$\int dx_1 dy_1 e^{i(p'x_1 - py_1)} \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x_1)\delta\psi(y_1)} = (2\pi)^4 \delta(p' - p) S^{-1}(p). \quad (3.21)$$

Portanto, multiplicando (3.19) por $e^{i(p'x_1 - py_1)}$ e integrando sobre x , x_1 e y_1 , obtemos

$$q^\mu \Gamma_\mu[p', p] = S^{-1}(p') - S^{-1}(p). \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) é conhecida como identidade de Ward-Takahashi, representada diagramaticamente pela fig.(3.1):

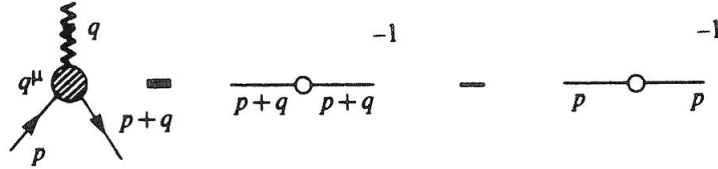


Figura 3.1: Identidades de Ward-Takahashi [34]

A função de vértice não amputada $\Lambda_\mu(p', p)$ é definida por:

$$\Lambda_\mu(p', p) = iS(p')\Gamma_\mu[p', p]iS(p). \quad (3.23)$$

De forma equivalente, multiplicando ambos os lados da equação (3.22) por $iS(p')iS(p)$, podemos reescreve-la para a função de vértice não amputada como:

$$q^\mu \Lambda_\mu(p', p) = S(p') - S(p). \quad (3.24)$$

As condições (3.22) e (3.24) são conhecidas como identidades de Ward-Takahashi, e são expressões que refletem as simetrias das amplitudes de mecânica quântica e que as correntes devem satisfazer (consequência da invariância de calibre (gauge)) em nível quântico. As identidades de WT foram aqui deduzidas no contexto da eletrodinâmica quântica para exemplificar sua obtenção. Estas relações se estendem a todos os modelos que apresentem as mesmas simetrias desta teoria, ou seja, serão válidas também no estudo do modelo espectral de quarks que tratamos neste trabalho.

3.3 Relação de Goldberger-Treiman

Outra relação de simetria que abordamos em nosso trabalho, que se relaciona agora com a simetria quiral, é a chamada Relação de Goldberger-Treiman [22]. Devido à paridade, o decaimento fraco do pión é dominado pelo elemento de matriz da corrente axial entre o estado de vácuo e o estado de um pión, $\langle 0 | J_A^\mu | \pi \rangle$. Este elemento de matriz deve ser proporcional ao momento do pión q^μ :

$$\langle 0 | J_A^{a\mu} | \pi^b(q) \rangle = -i f_\pi q^\mu \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}, \quad (3.25)$$

onde $f_\pi = 93 MeV$ é a constante de proporcionalidade denominada constante de decaimento fraco do pión, determinada experimentalmente, os índices a e b se referem ao isospin e μ indica o caráter vetorial de Lorentz da corrente axial. Tomando o divergente da equação (3.25) e o limite do momento do pión nulo temos:

$$\langle 0 | \partial_\mu J_A^{a\mu} | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}. \quad (3.26)$$

Apesar de quebrar a simetria quiral, como a massa do pión ($m_\pi \simeq 140 MeV$) é pequena comparada com as escalas hadrônicas ($\sim 1 GeV$), espera-se que a corrente axial seja parcialmente conservada, ou seja, a pequena massa do pión quebra a simetria axial mas essa quebra é pequena comparada a escala de energia que a corrente axial é dita parcialmente conservada. A equação (3.26) é conhecida como relação PCAC (Partial Conservation of the Axial Current).

Pelas relações (3.25) e (3.26), a corrente axial do pión deve ser:

$$J_A^{a\mu} = f_\pi \partial^\mu \Phi^a(x), \quad (3.27)$$

onde $\Phi^a(x)$ é o campo do pión. Para evidenciar a conservação da corrente axial, vamos considerar a corrente axial do núcleon:

$$J_N^{a\mu} = g_a \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N, \quad (3.28)$$

onde $\psi_N = (\text{próton}, \text{nêutron})$ é a representação isoespinorial do próton e nêutron. O fator g_a é devido ao fato de que a corrente axial do núcleon pode ser renormalizada. Como a massa

do núcleon m_N é grande não temos uma corrente axial conservada, e utilizando a equação de Dirac para o núcleon livre obtemos:

$$\partial_\mu J_N^{a\mu} = ig_a m_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N \neq 0. \quad (3.29)$$

e só se anula quando a massa do núcleon é nula.

Entretanto, sabe-se que o núcleon interage fortemente com o pión, logo, considerando a corrente axial total como a soma das contribuições do pión e do núcleon, e a partir das relações (3.27) e (3.28), obtemos:

$$J_T^{a\mu} = g_a \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N + f_\pi \partial^\mu \Phi^a. \quad (3.30)$$

Portanto, utilizando-se a equação (3.29), a corrente total conservada ($\partial_\mu J_T^\mu = 0$) será:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi^a = -g_a i \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N, \quad (3.31)$$

que é a equação de Klein-Gordon para um bóson sem massa (pión), acoplada com um núcleon. Por isso, a conservação total da corrente axial implica que o pión não deve possuir massa.

Permitindo uma massa finita para o pión, ou seja, exigimos agora que o divergente da corrente axial seja consistente com o resultado da PCAC (3.26). Assim, a equação de Klein-Gordon do pión acoplada com o núcleon fica:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2) \Phi^a = -g_a i \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N, \quad (3.32)$$

onde identificamos que o acoplamento pión - núcleon é dado por:

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{m_N}{f_\pi}. \quad (3.33)$$

A equação (3.33) é usualmente chamada de relação de Goldberger-Treiman. Esta relação é fundamental na afirmação de que a simetria quiral esteja presente na QCD. Todo modelo quiral deve conseguir reproduzi-la, e no caso do modelo espectral, ela é essencial, por exemplo, no estudo do decaimento anômalo do pión [10], além de relacionar quatro quantidades que são medidas experimentalmente (válida em uma faixa de erro de 5%) e consistente com fato de que o méson π (pión) é massivo.

Capítulo 4

Modelo Espectral de Quarks

Neste capítulo, introduziremos brevemente os modelos quirais de quarks e descreveremos o modelo espectral de quarks, que é um modelo quiral de quarks recente, utilizado como alternativa na descrição da QCD, no regime de baixas energias.

4.1 Modelos Quirais de Quarks

Um modelo quiral de quarks é um nome genérico para qualquer teoria relativística de campos que descreve características não perturbativas da QCD, e neste caso, em baixas energias. Diversas abordagens de modelos quirais de quarks desenvolvidos compartilham determinadas características comuns a seguir:

1) Os quarks são incorporados nestes modelos como únicos graus de liberdade explícitos, ou seja, os glúons são representados por uma constante de acoplamento, de forma que as interações sejam pontuais.

2) Diversas simetrias da QCD são reproduzidas nos modelos, principalmente as invariâncias de calibre e quiral.

3) Estas simetrias são expressas pelas Identidades de Ward-Takahashi, e modelos quirais de quarks oferecem soluções particulares para as mesmas [seção 3.2].

Apesar de não haver dúvidas de que estes modelos efetivos fornecem uma descrição quan-

titativa razoavelmente precisa de processos hadrônicos, há uma falha sistemática na construção dos mesmos: uma fonte de ambiguidade, que reside no fato de que os modelos quirais de quarks são, supostamente, uma aproximação para a QCD em baixas energias. Um ingrediente essencial é a supressão de graus de liberdade de altas energias, separando o regime de baixas energias, onde o modelo é suposto funcionar, e o regime de altas energias, onde a dinâmica da QCD genuína, em termos de quarks explícitos e glúons, deveria defini-lo. Isto define certa escala, ou corte ("cutoff") (que podemos entender como o valor de energia abaixo do qual supõe-se válido o modelo). A escala adquire um significado físico, e deve ser mantida em todo o tratamento destes modelos. A forma precisa com que este corte de energia deve ser introduzido não é de todo clara, sendo a razão para a mencionada ambiguidade na construção destes modelos. Não é possível, desta forma, decidir por um modelo ou outro apenas por suas características teóricas, sendo fundamental, portanto, a avaliação de seu poder de predição.

4.2 Modelo Espectral de Quarks

O modelo espectral de quarks [9-10] é uma abordagem em que um modelo quiral de quarks é construído a partir da representação de Lehmann para o propagador de quarks [11], representado em função de uma dada função espectral $\rho(\omega)$, e a chamada técnica de gauge [12-13]. Na representação de Lehmann, o propagador do quark é representado por:

$$S(p) = \int_C d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega}, \quad (4.1)$$

onde ω é a massa espectral, $\rho(\omega)$ é a função espectral ou distribuição espectral, e C denota um contorno no plano complexo escolhido adequadamente. A massa espectral é a massa do quark constituinte. O conceito de quark constituinte está relacionado à hipótese de que os quarks dentro do hádron não são partículas pontuais livres. Enquanto a massa de hádrons é algumas centenas de MeV's (e até alguns GeV's), a massa de repouso dos quarks mais leves é da ordem de 4 MeV. Considera-se, então, que os quarks dentro do hádron adquirem uma massa efetiva por causa do meio no qual estão inseridos (glúons, quarks virtuais, etc.). Assim o propagador (4.1) pode ser considerado como um propagador de uma partícula não puntual, à qual está relacionada uma função $\rho(\omega)$, que descreve como é distribuída a massa do quark

dentro do hádron. Exigências físicas naturais, como uma normalização adequada e a finitude dos observáveis hadrônicos, são alcançadas pelo cumprimento das condições espectrais a seguir para os momentos da distribuição espectral $\rho(\omega)$:

$$\rho_0 \equiv \int d\omega \rho(\omega) = 1, \quad (4.2)$$

$$\rho_n \equiv \int d\omega \omega^n \rho(\omega) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

sendo os observáveis físicos proporcionais aos momentos inversos (ou momentos negativos),

$$\rho_{-n} \equiv \int d\omega \omega^{-n} \rho(\omega), \quad (4.4)$$

e aos momentos logarítmicos,

$$\begin{aligned} \rho'_n &\equiv \int d\omega \log \frac{\omega^2}{\mu^2} \omega^n \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega) - \int d\omega \log(\mu^2) \omega^n \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega), \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nota-se que, em (4.5), a condição espectral (4.3) remove a dependência na escala μ , garantindo a ausência de qualquer transmutação dimensional. Não é necessário determinar a forma da distribuição espectral $\rho(\omega)$, mas sim as consequências gerais e relações implícitas que seguem das condições espectrais (4.2 – 4.5). Na seção 4.3, a seguir, mostramos uma forma de se obter estas condições.

O cálculo de amplitudes de probabilidade em Teorias de Campo exige com frequência a adoção de um esquema de regularização e renormalização, que nos permite identificar e eliminar as divergências presentes nas diferentes amplitudes. Uma preocupação adicional na escolha de um esquema de regularização é que o mesmo deve preservar propriedades de simetria que a teoria possua. Como exemplo, em teorias de interação fundamentais, como Eletrodinâmica Quântica (QED) e Cromodinâmica Quântica (QCD), uma das mais importantes simetrias é a chamada simetria de calibre (gauge), que corresponde à invariância da lagrangeana (e portanto

da ação) da teoria a uma variação nos campos do tipo

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha(x)}; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x).$$

onde $\alpha(x)$ é um fator de fase que pode depender da posição.

A regularização espectral permite resolver explicitamente as identidades de Ward-Takahashi eletromagnética e quiral, através da técnica de gauge, como veremos na seção 4.4.

Assim, o modelo com a regularização espectral (4.1), (4.2), (4.3), suprido com acoplamentos obtidos via técnica de gauge, possui simultaneamente as seguintes características:

⇒ Fornece valores finitos para os observáveis hadrônicos, que serão usados para fixar os momentos inversos (4.4) e os momentos log (4.5).

⇒ Satisfaz, por construção, as identidades de Ward-Takahashi eletromagnética e quiral, desta forma reproduzindo todas as exigências de simetria necessárias.

A satisfação de todas as características acima simultaneamente por um modelo quiral de quarks não é algo trivial [35]. A regularização introduzida pela técnica de gauge é especial porque ela não apenas torna a teoria finita, mas também corresponde a tomar o limite de cutoff infinito, naqueles observáveis que não dependem da massa do quark constituinte. Isto inclui o cumprimento adequado das anomalias, pois um valor próximo do experimental para a largura de decaimento do pión neutro em dois fótons (decaimento anômalo do pión) apenas pode ser obtido em um modelo quiral de quarks na ausência de um regularizador (ou no limite em que o cutoff vai para o infinito)[36]. Esta condição é satisfeita, uma vez que o modelo espectral de quarks é livre de reguladores.

4.3 Momentos da função espectral

Podemos parametrizar o propagador do quark (4.1), como segue,

$$S(p) = A(p)\not{p} + B(p) = Z(p)\frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (4.6)$$

com,

$$A(p) = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \quad (4.7)$$

$$B(p) = \int d\omega \frac{\omega \rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \quad (4.8)$$

onde a função de massa $M(p)$ e a renormalização da função de onda $Z(p)$ do quark, dadas por

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (4.9)$$

$$Z(p) = [p^2 - M^2(p)]A(p). \quad (4.10)$$

respectivamente. Nota-se que se $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$, a massa do quark seria zero ($M(p) = 0$), e a quebra espontânea da simetria quiral não ocorreria. Portanto, em geral, espera-se que $\rho(\omega)$ não seja uma função par. Nas seções seguintes, a partir de cálculos de observáveis físicos, acumularemos condições que deverão ser satisfeitas pelos momentos da função espectral $\rho(\omega)$. A equação (4.6), pode ser utilizada, a fim de relacionarmos os momentos negativos (4.4) e os momentos log (4.5) às integrais que envolvam $M(p)$ e $Z(p)$. Consideremos as seguintes condições espectrais:

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) = \delta_{n0} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

e a seguinte identidade (a prova desta identidade encontra-se no apêndice B),

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{\not{p} - \omega} = \not{p}^n S(\not{p}) - \not{p}^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

Substituindo (4.6) em (4.12) e multiplicando e dividindo o lado esquerdo por $\not{p} + \omega$, obtemos:

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} = \not{p}^n Z(p) \frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p}^{n-1}. \quad (4.13)$$

Ficamos então com duas possibilidades para n , par ou ímpar. Para $n = 2k$ (par), temos:

$$\not{p} \int d\omega \omega^{2k} \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2} + \int d\omega \omega^{2k+1} \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2} = \not{p} \frac{p^{2k} Z(p)}{p^2 - M^2(p)} + p^{2k} Z(p) \frac{M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p} p^{2k-2}. \quad (4.14)$$

Definindo

$$L_n(p^2) = \int d\omega \omega^n \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}. \quad (4.15)$$

e comparando com (4.14), obtemos as seguintes identidades, comparando termos de mesma potência em p :

$$L_{2k}(p^2) = \frac{p^{2k}Z(p)}{p^2 - M^2(p)} - p^{2k-2}, \quad (4.16)$$

$$L_{2k+1}(p^2) = p^{2k}Z(p)\frac{M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (4.17)$$

que são obtidas também no caso n ímpar.

Para $n > 2$, a partir da condição espectral (4.11), obtemos as seguintes relações de recorrência:

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = p^2 \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}, \quad (4.18)$$

$$L_n(p^2) = p^2 L_{n-2}(p^2) \quad n > 2, \quad (4.19)$$

cujas verificações dessa relação encontra-se no apêndice B.

Finalmente, passando para o espaço Euclidiano ($p^2 \leftrightarrow -p_E^2$), obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \rho'_n &= \int d\omega \omega^n \log \omega^2 \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \int_0^\infty dp^2 \frac{1}{p^2 - \omega^2} \\ &= \int_0^\infty dp_E^2 L_n(-p_E^2) \\ &= - \int_0^\infty dp_E^2 p_E^2 L_{n-2}(-p_E^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

que descreve o momento log de $\rho(\omega)$ em termos de $M(p)$ e $Z(p)$.

Os momentos negativos podem ser obtidos a partir da derivada do propagador do quark (4.1) na origem:

$$\rho_{-k} = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega^k} = - \left(\frac{d}{d\phi} \right)^{k-1} S(\phi) \Big|_{\phi=0}. \quad (4.21)$$

Logo, dado o propagador do quark $S(\phi)$, podemos obter os momentos log e os momentos negativos apenas utilizando as relações (4.20) e (4.21) sem precisar encontrar a forma explícita da função espectral.

Na seção seguinte, a partir de cálculos de alguns observáveis físicos, determinaremos algumas condições a serem satisfeitas pelos momentos da função espectral $\rho(\omega)$.

4.3.1 Condensado de quarks

O condensado de quark para um único sabor é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{q}q \rangle &= -iN_c \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{1}{\not{p} - \omega} \\
&= -iN_c \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} \\
&= -4iN_c \int d\omega \rho(\omega) \omega \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2} \\
&= -4iN_c \int d\omega \rho(\omega) \omega I,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde o traço é feito sobre o espaço de Dirac, $N_c = 3$ é o número de cores. A integral sobre o momento p é quadraticamente divergente. Isto requer que utilizemos um método de regularização auxiliar, removido no final do cálculo.

Resolvendo a integral I (a resolução de I se encontra no apêndice B), utilizando uma regularização do tipo sharp cutoff Λ , obtemos:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right]. \tag{4.23}$$

A finitude dos resultados para $\Lambda \leftrightarrow \infty$, requer as condições:

$$\rho_1 = \int d\omega \omega \rho(\omega) = 0, \tag{4.24}$$

$$\rho_3 = \int d\omega \omega^3 \rho(\omega) = 0. \tag{4.25}$$

Assim, obtemos:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \log(\omega^2) \omega^3 \rho(\omega) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_3. \tag{4.26}$$

Nota-se, o cumprimento da condição espectral (4.3) nas relações, como uma exigência física de $\langle \bar{q}q \rangle$ ser finito.

Observa-se que na fase perturbativa, sem quebra espontânea de simetria, onde $\rho(\omega) = \rho(-\omega) = \delta(\omega)$, teríamos $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, uma vez que o integrando de ρ'_3 seria ímpar. Com o valor

aceito [37] de

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \simeq -(250 \text{ MeV})^3, \quad (4.27)$$

(em escalas hadrônicas típicas de (0,5 - 1 GeV), pode-se inferir o valor de ρ'_3 . O sinal do condensado de quark mostra que

$$\rho'_3 > 0. \quad (4.28)$$

4.3.2 Densidade de Energia no Vácuo

O tensor energia-momento para o modelo puramente de quarks é definido por:

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \bar{q}(x) \frac{i}{2} \{ \gamma^\mu \partial^\nu + \gamma^\nu \partial^\mu \} q(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (4.29)$$

O valor esperado para o tensor de energia-momento no vácuo é obtido tratando-se a expressão (4.29) como um operador de campo, tomando-se seu valor esperado no vácuo. Diagramaticamente, a um loop de quarks, isso é representado pelo diagrama da fig. (4.1), onde o vértice x representa a inserção do tensor energia-momento. De modo que, no espaço de momentos temos:

$$\begin{aligned} \langle \theta^{\mu\nu} \rangle &= -i N_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p} - \omega} \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{p}^\nu + \gamma^\nu \not{p}^\mu) - g^{\mu\nu} (\not{p} - \omega) \right] \right\} \\ &= -4i N_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (p^2 - \omega^2)}{p^2 - \omega^2} \\ &= B g^{\mu\nu} + \theta_0^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde N_s é o número de sabores e $\theta_0^{\mu\nu}(x)$ é o tensor energia-momento para a teoria livre, avaliado



Figura 4.1: Diagrama do tensor energia-momento a um loop.

com $\rho(\omega) = \delta(\omega)$. A quantidade B é a densidade de energia no vácuo, dada por:

$$\begin{aligned} B &= -iN_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2} \\ &= -iN_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 I, \end{aligned} \quad (4.31)$$

Chegamos na mesma integral I no caso do condensado de quarks, porém, agora com uma potência a mais em ω . Portanto, obtemos:

$$B = -\frac{N_c N_s}{16\pi^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right]. \quad (4.32)$$

Para que B seja finita, temos as seguintes condições:

$$\rho_2 = \int d\omega \omega^2 \rho(\omega) = 0, \quad (4.33)$$

$$\rho_4 = \int d\omega \omega^4 \rho(\omega) = 0, \quad (4.34)$$

resultando em

$$B = -\frac{N_c N_s}{16\pi^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega^4 \log(\omega^2) = -\frac{N_c N_s}{16\pi^2} \rho'_4. \quad (4.35)$$

No caso de quebra espontânea da simetria quiral, espera-se que $\langle \theta_{00} \rangle < \langle \theta_{00} \rangle_0$, ou $B < 0$. A partir da análise das regras de soma da QCD para o charmômio [38, 39], tem-se, para três sabores,

$$B = -\frac{9}{32} \left\langle \frac{\alpha}{\pi} G^2 \right\rangle = -(224_{-70}^{+35} \text{MeV})^4. \quad (4.36)$$

Nota-se uma grande incerteza neste resultado, contudo o sinal negativo implica que

$$\rho'_4 > 0. \quad (4.37)$$

4.3.3 Limite de $p \rightarrow \infty$

Para grandes momentos, limite em que $p \leftrightarrow \infty$, pode-se expandir o propagador do quark (4.1) na forma:

$$S(p) \sim \frac{1}{\not{p}} \int d\omega \rho(\omega) + \frac{1}{p^2} \int d\omega \omega \rho(\omega) + \frac{1}{\not{p}^3} \int d\omega \omega^2 \rho(\omega) + \dots, \quad (4.38)$$

Na região assintótica, o propagador do quark é normalizado para

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}}.$$

e desta forma, temos a condição espectral

$$\rho_0 = \int d\omega \rho(\omega) = 1, \quad (4.39)$$

e desde que $M(p)$ deve assintoticamente se anular, a relação (4.9) se torna

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\int d\omega \omega \rho(\omega)/(p^2 - \omega^2)}{\int d\omega \rho(\omega)/(p^2 - \omega^2)}$$

$$M(p \leftrightarrow \infty) \rightarrow \frac{\frac{1}{p^2} \int d\omega \omega \rho(\omega)}{\frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega)} \Big|_{p \rightarrow \infty} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{1} = 0 \quad (4.40)$$

assim obtemos que $\rho_1 = 0$.

Note que se todas as condições espectrais (4.2 – 4.3) fossem determinadas a partir desta mesma expansão para grandes momentos, trivialmente isso resultaria em um propagador total para o quark, porém, livre e sem massa. Logo, a expansão para grandes momentos não pode representar o propagador completo (e não trivial) do quark (mais sobre isso pode ser encontrado nas seções IX e X de [9]).

Vimos então que, a partir de quantidades físicas podemos definir as condições espectrais para os momentos da função espectral $\rho(\omega)$. Uma vez estabelecida a dependência de determinado observável nos momentos negativo e log, utilizamos as relações (4.20) e 4.(21) relacionadas às funções de massa e de renormalização da função de onda para determinação de observáveis

físicos sem necessidade de encontrar a forma explícita da distribuição.

4.4 Técnica de Gauge

Na seção anterior, obtivemos as condições espectrais para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 . Nesta seção, vamos especificar os acoplamentos dos vértices com uma corrente, para quarks de massas iguais, a fim de, a partir das identidades WT, obtermos as funções de vértice vetorial e axial.

Em QCD, as correntes vetorial e axial são definidas por:

$$J_V^{\mu,a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad (4.41)$$

$$J_A^{\mu,a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad (4.42)$$

válida para $SU(N_f)_f$, sendo λ_a as matrizes de Gell-Man, γ^μ as matrizes de Dirac e $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, matriz auxiliar construída a partir do produto das matrizes γ . A conservação da corrente vetorial (CVC) e a conservação parcial da corrente axial (PCAC) implicam que:

$$\partial_\mu J_V^{\mu,a}(x) = 0, \quad (4.43)$$

$$\partial_\mu J_A^{\mu,a}(x) = \bar{q}(x)\hat{M}i\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad (4.44)$$

sendo $\hat{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ a matriz de massa dos quarks. Qualquer teoria efetiva da QCD deve incorporar estes vínculos. As relações (43) e (44) implicam em um conjunto de identidades de Ward-Takahashi de gauge e quiral entre as funções de correlação envolvendo correntes vetoriais, axiais e operadores de campo de quarks, que são baseadas em regras de comutação locais entre correntes e campos:

$$[J_V^{0,a}(x), q(x')]_{x_0=x'_0} = -\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x)\delta(x-x') \quad (4.45)$$

$$[J_5^{0,a}(x), q(x')]_{x_0=x'_0} = -\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x)\delta(x-x') \quad (4.46)$$

Téóricos tem procurado por soluções aproximadas de um conjunto completo de equações ligando as funções de Green em vários modelos quânticos de campos como QED. A maioria

destas aproximações equivale a somar conjuntos específicos de gráficos de perturbações com a esperança de que a seleção irá fornecer contribuições dominantes na região cinética de interesse. Em teorias de calibre, a maioria destas aproximações infelizmente viola as restrições de gauge entre as funções de Green e isso torna difícil avaliar a veracidade ou não das soluções encontradas. No entanto, há um método de aproximação que tem a virtude de preservar as identidades Ward-Takahashi em todas as fases, denominado **técnica de gauge** [12 – 13].

4.4.1 Vértices com uma corrente

As funções de vértice vetorial e axial não amputadas são definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\Lambda_V^{\mu,a}(p,p') &= iS(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p,p')iS(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0|T\{J_V^{\mu,a}(0)q(x')\bar{q}(x)\}|0\rangle e^{ip'x' - ipx},\end{aligned}\quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_A^{\mu,a}(p,p') &= iS(p')\Gamma_A^{\mu,a}(p,p')iS(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0|T\{J_A^{\mu,a}(0)q(x')\bar{q}(x)\}|0\rangle e^{ip'x' - ipx},\end{aligned}\quad (4.48)$$

sendo os Γ 's as correspondentes funções vértice amputadas [40]. A identidade de Ward-Takahashi para o vértice vetorial é dada por:

$$(p' - p)_\mu \Lambda_V^{\mu,a}(p,p') = S(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S(p). \quad (4.49)$$

Da mesma forma, para o vértice axial, tem-se:

$$(p' - p)_\mu \Lambda_A^{\mu,a}(p,p') = S(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 - \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S(p). \quad (4.50)$$

A técnica de gauge consiste em escrever soluções tentativa (funções de vértices) com o propósito de satisfazer as identidades de Ward-Takahashi, Eqs.(4.49) e (4.50). Para um sabor, escrevemos

a solução tentativa a partir da definição da função de vértice vetorial (4.47) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Lambda_V^{\mu,a}(p,p') &= iS(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p,p')iS(p) \\ &= \int d\omega\rho(\omega)\frac{i}{\not{p}'-\omega}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}\frac{i}{\not{p}-\omega}\end{aligned}\quad (4.51)$$

Inserindo nossa solução tentativa na identidade de WT para o vértice vetorial (4.49), temos:

$$(p'-p)_\mu iS(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p,p')iS(p) = S(p')\frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2}S(p) \quad (4.52)$$

Resolvendo o lado esquerdo,

$$\begin{aligned}iS(p')(\not{p}'-\not{p})\frac{\lambda_a}{2}iS(p) &= iS(p')(\not{p}'-\omega-\not{p}+\omega)\frac{\lambda_a}{2}iS(p) \\ &= iS(p')(\not{p}'-\omega)\frac{\lambda_a}{2}iS(p) - iS(p')(\not{p}+\omega)\frac{\lambda_a}{2}iS(p) \\ &= \cancel{S(p')(\not{p}+\omega)\frac{\lambda_a}{2}S(p)} - \cancel{S(p')(\not{p}'-\omega)\frac{\lambda_a}{2}S(p)} \\ &= S(p')\frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2}S(p)\end{aligned}\quad (4.53)$$

Uma vez que a solução tentativa (4.51) satisfaz a identidade de WT para o vértice vetorial, logo, ela é uma solução para a função de vértice vetorial. Seguindo os mesmos passos, obtemos também uma solução para a função de vértice axial, da forma:

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p,p') = \int d\omega\rho(\omega)\frac{i}{\not{p}'-\omega}\left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2}\right)\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}\frac{i}{\not{p}-\omega} \quad (4.54)$$

4.4.2 Relação de Goldberger-Treiman

Uma consequência da identidade de Ward-Takahashi axial, válida apenas se $\rho(\omega) \neq \delta(\omega)$ é a ocorrência de um pólo pseudoescalar sem massa, identificado como Píon. Próximo ao pólo ($q^2 \rightarrow 0$), o decaimento do Píon, dado pelo vértice axial (4.54), é dominado pelo acoplamento pseudoescalar. Neste limite, o vértice axial está associado à função de onda do Píon (correspondendo ao vértice $P \rightarrow q\bar{q}$) pela relação

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p,p')|_{q \rightarrow 0} \rightarrow -2f_\pi\frac{q^\mu}{q^2}\Lambda_\pi^a(p,p') \quad (4.55)$$

onde f_π é a constante de decaimento do Píon, de (4.55) obtemos então que

$$\Lambda_\pi^a(p, p') = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \quad (4.56)$$

e podemos identificar sob a integral em ω o acoplamento pseudoescalar entre os quarks e o Píon por

$$g_\pi(\omega) = \frac{\omega}{f_\pi} \quad (4.57)$$

que é a relação de Goldberger-Treiman.

Os resultados apresentados neste capítulo para o modelo espectral de quarks, servirão de base e serão comparados com os resultados obtidos nas primeiras seções do capítulo seguinte, onde apresentaremos uma extensão do modelo, incluindo agora, diferentes sabores de quarks.

Capítulo 5

Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$

Neste capítulo, apresentaremos uma versão do modelo espectral de quarks que objetiva a descrição da fenomenologia dos mésons leves formados por quarks de diferentes sabores. Os resultados obtidos a partir do modelo resultante, para diversos observáveis mesônicos, como o condensado de quarks, a polarização do vácuo, o decaimento fraco e a verificação das identidades de Ward-Takahashi para os mésons leves, foram comparados com os resultados conhecidos para a validação do modelo. A formulação aqui apresentada corresponde à contribuição original desta dissertação ao desenvolvimento do modelo.

5.1 Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$

A extensão do modelo espectral de quarks para a descrição de mésons formados por quarks de diferentes sabores foi realizada de forma análoga à sua formulação original. Entretanto, com a inclusão do quark strange, torna-se necessária a introdução de duas distribuições espectrais, $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$, com o objetivo de descrever as massas constituintes dos quarks up(down) e strange respectivamente. Em outros modelos quirais, esta descrição corresponde às versões que implementam a simetria $SU(3)$. Na representação de Lehmann, temos então que os propagadores dos quarks são representados por:

$$S_s(p) = \int_C d\omega \frac{\rho_s(\omega)}{\not{p} - \omega} \quad S_u(p') = \int_C d\omega' \frac{\rho_u(\omega')}{\not{p}' - \omega'}. \quad (5.1)$$

onde ω e ω' são as massas espectrais, $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$ são distribuições espectrais para os quarks up(down) e strange respectivamente e C denota um contorno no plano complexo escolhido adequadamente.

A seguir, a partir de cálculos de alguns observáveis físicos, determinaremos algumas condições a serem satisfeitas pelos momentos das funções espectrais $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$.

5.1.1 Condensado de quarks

Na seção 4.3.1, vimos que o condensado de quark para um único sabor, em geral, é dado por:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4iN_c \int d\omega \rho(\omega) \omega I. \quad (5.2)$$

onde o traço é feito sobre o espaço de Dirac, $N_c = 3$ é o número de cores e I é a integral sobre o momento p , resolvida no apêndice B. Seguindo os mesmos passos que na seção 4.3.1, para as distribuições $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$, obtemos

$$\langle \bar{s}s \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho_s(\omega) \omega \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right]. \quad (5.3)$$

$$\langle \bar{u}u \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega' \left[\Lambda^2 + \omega'^2 \log \left(\frac{\omega'^2}{\Lambda^2 + \omega'^2} \right) \right]. \quad (5.4)$$

Agora, a finitude dos resultados para $\Lambda \leftrightarrow \infty$ requer as seguintes condições:

$$\rho_{u,1} = \rho_{s,1} = \int d\omega \omega \rho_u(\omega) = \int d\omega \omega \rho_s(\omega) = 0, \quad (5.5)$$

$$\rho_{u,3} = \rho_{s,3} = \int d\omega \omega^3 \rho_u(\omega) = \int d\omega \omega^3 \rho_s(\omega) = 0, \quad (5.6)$$

Assim, obtemos:

$$\langle \bar{s}s \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \log(\omega^2) \omega^3 \rho_s(\omega) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_{s,3}. \quad (5.7)$$

$$\langle \bar{u}u \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' \log(\omega'^2) \omega'^3 \rho_u(\omega') = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_{u,3}. \quad (5.8)$$

Novamente, observa-se que na fase perturbativa, sem quebra espontânea de simetria, onde $\rho_u(\omega') = \rho_s(\omega) = \rho(\omega) = \rho(-\omega) = \delta(\omega)$, teríamos $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, uma vez que os integrandos de $\rho'_{u,3}$

e $\rho'_{s,3}$ seriam ímpar. Com as estimativas experimentais para os diferentes condensados [37] e [41], dadas por

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \simeq -(250 \text{ MeV})^3, \quad (5.9)$$

$$\langle \bar{s}s \rangle = 1.08 \langle \bar{u}u \rangle \simeq -1.08(250 \text{ MeV})^3, \quad (5.10)$$

(em escalas hadrônicas típicas de 0,5 - 1 GeV), podemos inferir os valores de $\rho'_{s,3}$ e $\rho'_{u,3}$. A partir dos sinais dos condensados de quarks, temos

$$\rho'_{u,3} = \rho'_{s,3} > 0. \quad (5.11)$$

5.1.2 Densidade de Energia no Vácuo

Como vimos na seção 4.3.1, o tensor energia-momento para o modelo de quarks é definido por:

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \bar{q}(x) \frac{i}{2} \{ \gamma^\mu \partial^\nu + \gamma^\nu \partial^\mu \} q(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (5.12)$$

Agora, com as duas distribuições, $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$, a um loop de quarks temos:

$$\begin{aligned} \langle \theta^{\mu\nu}(x) \rangle &= -iN_c 2 \int d\omega' \rho_\mu(\omega') \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p}' - \omega'} \times \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu p'^\nu + \gamma^\nu p'^\mu) - g^{\mu\nu} (\not{p}' - \omega') \right] \right\} \\ &\quad - iN_c \int d\omega \rho_s(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p} - \omega} \times \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) - g^{\mu\nu} (\not{p} - \omega) \right] \right\} = -4iN_c \\ &\quad \left[2 \int d\omega' \rho_\mu(\omega') \int \frac{d^4(p')}{(2\pi)^4} \frac{p'^\mu p'^\nu - g^{\mu\nu} (p'^2 - \omega'^2)}{p'^2 - \omega'^2} + \int d\omega \rho_s(\omega) \int \frac{d^4(p)}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (p^2 - \omega^2)}{p^2 - \omega^2} \right] \\ &= Bg^{\mu\nu} + \theta_0^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde $\theta_0^{\mu\nu}(x)$ é o tensor energia-momento para a teoria livre, avaliado $\rho_u(\omega') = \rho_s(\omega) = \rho(\omega) = \delta(\omega)$. A quantidade B é a densidade de energia no vácuo, dada por:

$$B = -iN_c \left[2 \int d\omega' \rho_\mu(\omega') \int \frac{d^4(p')}{(2\pi)^4} \frac{\omega'^2}{p'^2 - \omega'^2} + \int d\omega \rho_s(\omega) \int \frac{d^4(p)}{(2\pi)^4} \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} \right]. \quad (5.14)$$

Resolvendo a integral em p , obtemos:

$$B = -\frac{N_c}{16\pi^2} \left\{ 2 \int d\omega' \rho_\mu(\omega') \omega'^2 \left[\Lambda^2 + \omega'^2 \log \left(\frac{\omega'^2}{\Lambda^2 + \omega'^2} \right) \right] + \int d\omega \rho_s(\omega) \omega^2 \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \right\}, \quad (5.15)$$

Para que B seja finita, temos as seguintes condições:

$$\rho_{u,2} = \rho_{s,2} = \int d\omega \omega^2 \rho_{u,s}(\omega) = 0, \quad (5.16)$$

$$\rho_{u,4} = \rho_{s,4} = \int d\omega \omega^4 \rho_{u,s}(\omega) = 0, \quad (5.17)$$

resultando em

$$B = -\frac{N_c}{16\pi^2} \left\{ 2 \int d\omega' \rho_\mu(\omega') \omega'^4 \log(\omega'^2) + \int d\omega \rho_s(\omega) \omega^4 \log(\omega^2) \right\} = -\frac{N_c}{16\pi^2} \{2\rho'_{u,4} + \rho'_{s,4}\}, \quad (5.18)$$

No caso de quebra espontânea da simetria quiral, espera-se que $\langle \theta_{00} \rangle < \langle \theta_{00} \rangle_0$, ou $B < 0$. De acordo com a análise das regras de soma da QCD para o charmômio [38 – 39], tem-se para três sabores,

$$B = -\frac{9}{32} \left\langle \frac{\alpha}{\pi} G^2 \right\rangle = -(224_{-70}^{+35} \text{MeV})^4.$$

Apesar da grande incerteza neste resultado, podemos afirmar que

$$(2\rho'_{u,4} + \rho'_{s,4}) > 0. \quad (5.19)$$

5.2 Técnica de Gauge

Na seção anterior, assim como no capítulo 4, obtivemos as condições espectrais para $n = 1, 2, 3$ e 4 , entretanto agora, para distribuições espectrais distintas. A seguir, vamos especificar os acoplamentos dos vértices com uma corrente para quarks de massas diferentes, a fim de, a partir das identidades WT, obtermos as funções de vértice vetorial e axial para massas diferentes.

5.2.1 Vértices com uma corrente

As funções de vértice vetorial e axial não amputadas são definidas como:

$$\begin{aligned}\Lambda_V^{\mu,a}(p,p') &= iS_u(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p,p')iS_s(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0|T\{J_V^{\mu,a}(0)q(x')\bar{q}(x)\}|0\rangle e^{ip'x'-ipx},\end{aligned}\quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_A^{\mu,a}(p,p') &= iS_u(p')\Gamma_A^{\mu,a}(p,p')iS_s(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0|T\{J_A^{\mu,a}(0)q(x')\bar{q}(x)\}|0\rangle e^{ip'x'-ipx},\end{aligned}\quad (5.21)$$

respectivamente, sendo os Γ 's as correspondentes funções de vértice amputadas [40]. No entanto, em contraste com o resultado obtido em (4.51) e (4.54), agora temos um propagador correspondente a um quark up/down e outro associado a um quark strange. Portanto, a identidade de Ward-Takahashi para o vértice vetorial fica:

$$(p' - p)_\mu \Lambda_V^{\mu,a}(p,p') = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S_s(p). \quad (5.22)$$

do mesmo modo, para o vértice axial, tem-se:

$$(p' - p)_\mu \Lambda_A^{\mu,a}(p,p') = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S_s(p). \quad (5.23)$$

A partir da técnica de gauge, construímos soluções (funções de vértice) com o propósito de satisfazer as identidades de Ward-Takahashi, Eqs.(5.22) e (5.23). Agora para dois sabores, escrevemos a solução tentativa a partir da definição da função de vértice vetorial (5.20) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Lambda_V^{\mu,a}(p,p') &= iS_u(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p,p')iS_s(p) \\ &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega},\end{aligned}\quad (5.24)$$

Inserindo nossa solução tentativa na identidade de WT para o vértice vetorial (5.22),

temos:

$$(p' - p)_\mu iS_u(p') \Gamma_V^{\mu,a}(p, p') iS_s(p) = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S_s(p), \quad (5.25)$$

Resolvendo o lado esquerdo,

$$\begin{aligned} iS_u(p') (\not{p}' - \not{p}) \frac{\lambda_a}{2} iS_s(p) &= iS_u(p') (\not{p}' - \omega' - \not{p} + \omega - (\omega - \omega')) \frac{\lambda_a}{2} iS_s(p) \\ &= iS_u(p') (\not{p}' - \omega') \frac{\lambda_a}{2} iS_s(p) - iS_u(p') (\not{p} + \omega) \frac{\lambda_a}{2} iS_s(p) \\ &\quad - iS_u(p') (\omega - \omega') i \frac{\lambda_a}{2} S_s(p) = S_u(p') (\cancel{\not{p}' + \omega}) \frac{\lambda_a}{2} \cancel{S_s(p)} \\ &\quad - \cancel{S(p')} (\cancel{\not{p}' - \omega'}) \frac{\lambda_a}{2} S(p) + S_u(p') (\omega - \omega') \frac{\lambda_a}{2} S_s(p) \\ &= S(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S(p) + iS_u(p') (\omega - \omega') \frac{\lambda_a}{2} S_s(p). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Nossa solução tentativa (5.24) satisfaz a identidade de WT para o vértice vetorial a menos de um termo, que pode ser utilizado a fim de corrigir à solução tentativa original, para encontrarmos:

$$\Lambda_V^{\mu,a}(p, p') = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' - \omega) q^\mu}{q^2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (5.27)$$

onde $q^\mu = (p' - p)^\mu$, agora, portanto, ela é uma solução para a função de vértice vetorial. E no limite do modelo 1 (modelo espectral de quarks para um sabor apresentado por [9]), obtido pela substituição de $\rho_s(\omega) = \delta(\omega - \omega')$, obtemos

$$\Lambda_V^{\mu,a}(p, p') = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (5.28)$$

que é exatamente o resultado esperado (encontrado no capítulo 4). Seguindo os mesmos passos, obtemos também uma solução para a função de vértice axial não amputada,

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p, p') = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right) \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (5.29)$$

que no limite do modelo 1, reproduz exatamente o resultado esperado:

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p, p') = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (5.30)$$

5.2.2 A Relação Análoga de Goldberger-Treiman para o Káon

No capítulo 4, vimos que uma consequência da identidade de Ward-Takahashi axial é a ocorrência de um pólo pseudoescalar. Para o caso de massas diferentes e próximo ao pólo ($q^2 \rightarrow 0$), o decaimento do Káon, dado pelo vértice axial (5.29), é dominado pelo acoplamento pseudoescalar. Neste limite, o vértice axial está associado à função de onda do Káon (correspondendo ao vértice $k \rightarrow q\bar{q}$) pela relação

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p,p')|_{q \rightarrow 0} \rightarrow -2f_k \frac{q^\mu}{q^2} \Lambda_k^a(p,p'), \quad (5.31)$$

onde f_k é a constante de decaimento do Káon. De (5.31) obtemos então que

$$\Lambda_k^a(p,p') = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \frac{(\omega' + \omega)}{2f_k} \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \quad (5.32)$$

e podemos identificar o acoplamento entre os quarks e o Káon por

$$g_k(\omega', \omega) = \frac{\omega' + \omega}{2f_k}. \quad (5.33)$$

que é a relação análoga de Goldberger-Treiman para o Káon [42].

A partir da técnica de gauge, foi possível encontrar as funções de vértice não amputadas vetorial e axial para as duas distribuições $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$, equações (5.27) e (5.29). Nas seções seguintes, iremos utilizá-las no cálculo de alguns observáveis físicos para o méson Káon.

5.3 Polarização do Vácuo

De acordo com a Teoria Quântica de Campos (TQC), o vácuo entre as partículas interagentes não é simplesmente um espaço vazio. Em vez disso, ele contém pares de partícula-antipartícula "virtuais" (léptons ou quarks e glúons), que são criados a partir do vácuo nos valores de energia limitados no tempo pela versão tempo-energia do princípio da incerteza de Heisenberg. Estes pares partícula-antipartícula transportam vários tipos de cargas, como a carga de cor se eles estão sujeitos a QCD, como quarks ou glúons, ou a carga eletromagnética se eles são léptons eletricamente carregados, por exemplo, pares elétron-pósitron virtuais.

Tais pares carregados atuam como um dipolo elétrico. Na presença de um campo elétrico, como exemplo o campo eletromagnético em torno de um elétron, estes pares de partícula-antipartícula reposicionam-se, de modo a neutralizar parcialmente o campo (um efeito de blindagem parcial, um efeito dielétrico). O campo, por conseguinte, vai ser mais fraco do que seria esperado se o vácuo fosse completamente vazio. Esta reorientação dos pares de partícula-antipartícula de curta duração é conhecida como **polarização do vácuo**.

A um loop, a contribuição de um par quark-antiquark para a polarização do vácuo é calculada a partir da função de correlação vetorial, que é construída fechando uma linha de quark no vértice vetorial não amputado (5.27), o que resulta em:

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q) = \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J_V^{\mu a}(x) J_V^{\nu b}(0) \} | 0 \rangle = -N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Lambda_V^{\mu a}(p+q, p) \gamma_\nu \frac{\lambda_b}{2} \right], \quad (5.34)$$

A contribuição do par quark-antiquark (up-antiup/down-antidown) para a polarização do vácuo é então escrita como:

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{u\bar{u}} = -N_c \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p}' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \gamma_\nu \frac{\lambda_b}{2} \right], \quad (5.35)$$

onde $p' = p + q$. Note que a parte que multiplica o integrando $\frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2}$ é ímpar, e se anula, pois o domínio de integração é simétrico. Assim, ficamos com:

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{uu} = -N_c \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p}' - \omega'} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \gamma_\nu \frac{\lambda_b}{2} \right], \quad (5.36)$$

Calculando o traço no espaço de Dirac [ver Apêndice B], obtemos:

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{uu} = 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p'^\mu p^\nu - p' p g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu + \omega' \omega g^{\mu\nu}}{(p'^2 - \omega'^2)(p^2 - \omega^2)}, \quad (5.37)$$

utilizando a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(A-B)x + B]^2}, \quad (5.38)$$

chamando $A = (p'^2 - \omega'^2)$ e $B = (p^2 - \omega^2)$, temos que:

$$\frac{1}{(p'^2 - \omega'^2)(p^2 - \omega^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(p + qx)^2 - \Xi]^2}, \quad (5.39)$$

onde $\Xi = (-q^2x(1-x) + (\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2)$. Agora fazendo o "shift" $p \rightarrow p - qx$, temos que:

$$p' = p + q = p - qx + q = p + q(1-x); \quad p'p = pp - qqx(1-x); \quad dp = d(p+qx) = dp. \quad (5.40)$$

Fazendo as mudanças necessárias, a equação (5.37) se torna :

$$\begin{aligned} i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{u\bar{u}} = & 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int_0^1 dx \\ & \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2p^\mu p^\nu - 2(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})x(1-x) - [q^2x(1-x) - \omega'\omega + p^2]g^{\mu\nu}}{[p^2 - \Xi]^2}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

podemos reescrever o argumento do terceiro termo como:

$$q^2x(1-x) - \omega'\omega = q^2x(1-x) - (\omega'^2 - \omega^2)x - \omega^2 + (\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega = -\Xi + (\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega, \quad (5.42)$$

logo,

$$\begin{aligned} i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{uu} = & 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int_0^1 dx \\ & \times \left\{ 2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{[p^2 - \Xi]^2} - g^{\mu\nu} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - \Xi + (\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega)}{[p^2 - \Xi]^2} \right. \\ & \left. - 2(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})x(1-x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - \Xi]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

rearranjando os termos, temos:

$$\begin{aligned} i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{uu} = & 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int_0^1 dx \\ & \times \left\{ 2I_1 - g^{\mu\nu} I_0 - g^{\mu\nu} [(\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega] I_2 - 2(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})x(1-x) I_2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

Resolvendo as integrais I_0 , I_1 e I_2 e utilizando por simplicidade a regularização dimensional

[43] (a resolução das integrais se encontra no apêndice B), obtemos:

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{uu} &= 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int_0^1 dx \\
 &\times \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ 2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} \Xi \alpha - g^{\mu\nu} \Xi \alpha - g^{\mu\nu} [(\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega] (\alpha - 1) \right. \\
 &\left. - 2(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) x(1-x)(\alpha - 1) \right\}, \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \log\left(\frac{4\pi}{\Xi}\right) + O(\epsilon) \right]. \tag{5.46}$$

com os dois termos que se cancelam, ficamos com:

$$\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{uu} = \delta_{ab} \left(\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \bar{\Pi}_V(q^2) - \frac{N_c}{4\pi^2} \delta_{ab} g^{\mu\nu} I_p. \tag{5.47}$$

onde

$$\bar{\Pi}_V(q^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int_0^1 dx \left\{ -2x(1-x)(\alpha - 1) \right\}, \tag{5.48}$$

e

$$I_p = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \int_0^1 dx g^{\mu\nu} [(\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega] (\alpha - 1), \tag{5.49}$$

O primeiro termo da equação (5.47) preserva a invariância de calibre da polarização do vácuo, e para que isto seja assegurado para toda a expressão, o segundo termo deve se anular.

Portanto, substituindo o valor de α e integrando em x o segundo termo (I_p), obtemos

$$\begin{aligned}
 I_p &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \left\{ (\omega'^2 - \omega^2) \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\log(4\pi)}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{[\omega^2 \omega'^2 \log(\omega'^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \frac{[\omega'^2 \omega^2 - \frac{1}{4}\omega'^4 - \frac{3}{4}\omega^4]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right) \right] \\
 &\quad \left. + (\omega^2 - \omega'\omega) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \frac{[\omega'^2 \log(\omega'^2) - \omega^2 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + 1 \right] \right\}, \tag{5.50}
 \end{aligned}$$

Pelas condições espectrais, a finitude do resultado exige que:

$$\rho_{1,u} = \rho_{1,s} = \int d\omega' \omega' \rho_u(\omega') = \int d\omega \omega \rho_u(\omega) = 0, \tag{5.51}$$

$$\rho_{2,u} = \rho_{2,s} = \int d\omega' \omega'^2 \rho_u(\omega') = \int d\omega \omega^2 \rho_u(\omega) = 0, \quad (5.52)$$

as divergências desaparecem, logo, I_p se torna:

$$I_p = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \left\{ \frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} - \frac{[\omega'^3 \omega \log(\omega'^2) - \omega^3 \omega' \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}. \quad (5.53)$$

Definindo os novos momentos espectrais como:

$$\sigma^{40} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \left\{ \frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\} \quad (5.54)$$

e

$$\sigma^{31} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \left\{ \frac{[\omega'^3 \omega \log(\omega'^2) - \omega^3 \omega' \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}. \quad (5.55)$$

temos que

$$I_p = \sigma_{uu}^{40} - \sigma_{uu}^{31}. \quad (5.56)$$

No limite do modelo 1, I_p se anula com a condição (5.52), como esperado. Para o nosso modelo $SU(3_f)$, entretanto, a expressão (5.56) define uma nova condição espectral, ou seja, exigindo-se que o modelo preserve a invariância de calibre, temos

$$\sigma_{uu}^{40} = \sigma_{uu}^{31}. \quad (5.57)$$

Seguindo os mesmos passos, obtemos também a contribuição do par quark-antiquark (strange-antistrange) para a polarização do vácuo,

$$\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q)_{ss} = \delta_{ab} \left(\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \bar{\Pi}_V(q^2) - \frac{N_c}{4\pi^2} \delta_{ab} g^{\mu\nu} I_p. \quad (5.58)$$

com

$$\bar{\Pi}_V(q^2) = \frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_s(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx \left\{ -2x(1-x)(\alpha-1) \right\}, \quad (5.59)$$

e

$$I_p = \int d\omega' d\omega \rho_s(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx g^{\mu\nu} [(\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2 - \omega'\omega](\alpha-1) = \sigma_{ss}^{40} - \sigma_{ss}^{31} = 0. \quad (5.60)$$

que também preserva a invariância de calibre da polarização do vácuo.

5.4 Decaimento fraco do Káon

A constante de decaimento fraco do Káon, é definida como:

$$\langle 0 | J_A^{\mu a}(x) | \pi_b(q) \rangle = i f_k q_\mu \delta_{a,b} e^{iq \cdot x}, \quad (5.61)$$

e pode ser calculada através da função de correlação axial, a partir da seguinte relação:

$$\begin{aligned} -i\Pi_{AA}^{\mu a; \nu b}(q) &= \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J_A^{\mu a}(x) J_A^{\nu b}(0) \} | 0 \rangle \\ &= i f_k^2 \delta_{ab} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} + \dots, \end{aligned} \quad (5.62)$$

Novamente, assim como no cálculo da polarização, fechamos uma linha de quark no vértice axial não amputado (5.29) e contruimos a função de correlação axial. Resultando em:

$$\begin{aligned} -i\Pi_{AA}^{\mu a; \nu b}(q) &= -N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\Lambda_A^{\mu a}(k+q, k) \gamma_\nu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \\ &= -N_c \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times Tr \left[\frac{i}{\not{k}' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{k} - \omega} \gamma^\nu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde $k' = k + q$. Observe que a expressão acima envolve apenas um vértice completo, $\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2}$ e um vértice nu, $\gamma^\nu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2}$. Isto é necessário para evitar dupla contagem e está em conformidade com o método de Pagels e Stokar [44]. Calculando o traço no espaço de Dirac da equação (5.63)[ver apêndice B]. Obtemos:

$$\begin{aligned} -i\Pi_{AA}^{\mu a; \nu b}(q) &= 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k'^2 - \omega'^2)(k^2 - \omega^2)} \\ &\quad \times \left[\omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} (k^\nu - k'^\nu) + \omega'^2 \frac{q^\mu}{q^2} k^\nu - \omega^2 \frac{q^\mu}{q^2} k'^\nu - 2k'^\mu k^\nu + g^{\mu\nu} k'^\sigma k^\sigma + \omega' \omega g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

A parametrização é a mesma utilizada no cálculo da polarização, trocando p por k . Assim, a equação (5.64) fica:

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q) &= 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx \\
 &\times \left\{ \omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu - q^\nu x}{[k^2 - \Xi]^2} - \omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu + q^\nu(1-x)}{[k^2 - \Xi]^2} \right. \\
 &+ \omega'^2 \frac{q^\mu}{q^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu - q^\nu x}{[k^2 - \Xi]^2} - \omega^2 \frac{q^\mu}{q^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu + q^\nu(1-x)}{[k^2 - \Xi]^2} \\
 &- 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu - q^\mu q^\nu x(1-x)}{[k^2 - \Xi]^2} + g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - q^2 x(1-x)}{[k^2 - \Xi]^2} \\
 &\left. + \omega' \omega g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \Xi]^2} \right\} \quad (5.65)
 \end{aligned}$$

As integrais em k^ν desaparecem uma vez que o integrando é ímpar, restando apenas as integrais I_1 , e I_2 , I_3 que também foram calculadas utilizando por simplicidade via regularização dimensional (ver Apêndice B).

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q) &= 4N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx \\
 &\times \left\{ -\omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} q^\nu x I_2 - \omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} q^\nu (1-x) I_2 - \omega'^2 \frac{q^\mu}{q^2} q^\nu x I_2 - \omega^2 \frac{q^\mu}{q^2} q^\nu (1-x) I_2 \right. \\
 &- 2[I_1 - q^\mu q^\nu x(1-x) I_2] + g^{\mu\nu} [I_3 - q^2 x(1-x) I_2] \\
 &\left. + \omega' \omega g^{\mu\nu} I_2 \right\} \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados das integrais e rearranjando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q) &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx (\alpha - 1) \\
 &\times \left\{ -\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} x (\omega' \omega + \omega'^2) - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (1-x) (\omega' \omega + \omega^2) + 2 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} q^2 x(1-x) \right. \\
 &\left. + g^{\mu\nu} ((\omega'^2 - \omega^2) + \omega^2 + \omega' \omega) - 2g^{\mu\nu} q^2 x(1-x) \right\} \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

No limite em que $q^2 \rightarrow 0$, temos:

$$\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q) = \frac{N_c}{4\pi^2} \delta_{ab} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi}{(\omega'^2 - \omega^2)x + \omega^2} \right] \left\{ (\omega'^2 - \omega^2)x + (\omega'\omega + \omega^2) \right\} \quad (5.68)$$

integrando em x , ficamos com:

$$\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q) = \frac{N_c}{4\pi^2} \delta_{ab} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx \left\{ (\omega'^2 - \omega^2) \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\log(4\pi)}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} - \frac{[\omega^2 \omega'^2 \log(\omega'^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \frac{[\omega'^2 \omega^2 - \frac{1}{4}\omega'^4 - \frac{3}{4}\omega^4]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right) \right] + (\omega'\omega + \omega^2) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \frac{[\omega'^2 \log(\omega'^2) - \omega^2 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + 1 \right] \right\} \quad (5.69)$$

A quebra espontânea de simetria quiral implica em um polo na correlação axial-axial, com o resíduo proporcional ao quadrado da constante de decaimento fraco do Káon. Resultando em:

$$f_k^2 = \frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \int_0^1 dx \left\{ (\omega'^2 - \omega^2) \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\log(4\pi)}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} - \frac{[\omega^2 \omega'^2 \log(\omega'^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \frac{[\omega'^2 \omega^2 - \frac{1}{4}\omega'^4 - \frac{3}{4}\omega^4]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right) \right] + (\omega'\omega + \omega^2) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \frac{[\omega'^2 \log(\omega'^2) - \omega^2 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + 1 \right] \right\} \quad (5.70)$$

A finitude do valor para f_k , exige as seguintes condições espectrais:

$$\rho_{1,u} = \rho_{1,s} = \int d\omega' \omega' \rho_u(\omega') = \int d\omega \omega \rho_s(\omega) = 0 \quad (5.71)$$

$$\rho_{2,u} = \rho_{2,s} = \int d\omega' \omega'^2 \rho_u(\omega') = \int d\omega \omega^2 \rho_s(\omega) = 0 \quad (5.72)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_k^2 &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \left\{ \frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{[\omega'^3 \omega \log(\omega'^2) - \omega^3 \omega' \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\} \\ &= -\frac{N_c}{4\pi^2} [\sigma_{us}^{40} + \sigma_{us}^{31}] \end{aligned} \quad (5.73)$$

O valor da constante de decaimento do Káon pode ser usado para determinar a relação entre σ_{us}^{40} e σ_{us}^{31} , e podemos inferir que o sinal é, obviamente,

$$[\sigma_{us}^{40} + \sigma_{us}^{31}] < 0. \quad (5.74)$$

A partir da expressão (5.73), no limite do modelo 1, obtemos

$$f_\pi^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 \log(\omega^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_2. \quad (5.75)$$

que coincide com o resultado apresentado por [9] para o decaimento fraco do pión.

No limite de massas iguais, fazendo-se $\rho_u(\omega) = \rho_s(\omega)$, obtemos uma nova expressão para o decaimento fraco do pión:

$$\begin{aligned} f_\pi^2 &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_u(\omega) \left\{ \frac{1}{2} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{[\omega'^3 \omega \log(\omega'^2) - \omega^3 \omega' \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\} \\ &= -\frac{N_c}{4\pi^2} [\sigma_{uu}^{40} + \sigma_{uu}^{31}]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

e usando (5.56), obtemos que

$$f_\pi^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} 2\sigma_{uu}^{40} = -\frac{N_c}{4\pi^2} 2\sigma_{uu}^{31}. \quad (5.77)$$

de onde podemos obter os valores de $\sigma_{uu}^{40} = \sigma_{uu}^{31}$ a partir do conhecimento do valor experimental de f_π^2 .

A partir da nossa abordagem, obtivemos as expressões para a polarização do vácuo e o decaimento fraco do Káon, utilizando duas distribuições diferentes. Em especial, o cálculo da polarização do vácuo resultou em uma parte invariante de gauge somada a outra parte, relacionada aos novos momentos espectrais, impondo uma nova condição espectral, de forma a preservar a invariância de calibre. Obtemos também a expressão para o decaimento fraco do Káon que pode ser usada na obtenção dos valores dos momentos espectrais do modelo. Por conseguinte, uma nova expressão para o decaimento fraco do pión também foi obtida, diferente do modelo original, com duas distribuições distintas. Foi possível comparar todos os resultados com o modelo original (para quarks de massas iguais) [9].

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, desenvolvemos uma abordagem do Modelo Espectral de Quarks que permite a descrição da fenomenologia de mésons leves, incluindo-se três sabores de quarks. Este modelo é construído de forma a ser finito e livre de singularidades, utilizando-se a forma generalizada da representação de Lehmann para o propagador do quark, a Técnica de Gauge e condições espectrais que surgem a partir de exigências físicas naturais como normalização e finitude dos observáveis.

A extensão do modelo espectral de quarks para a descrição de mésons formados por quarks de diferentes sabores foi realizada de forma análoga à sua formulação original. Entretanto, com a inclusão do quark strange, construímos duas funções espectrais distintas e mostramos que é possível a obtenção de funções de vértice que relacionam os propagadores espectrais e satisfazem as identidades de Ward-Takahashi correspondentes. Em contraste com as funções de vértice obtidas na formulação original do modelo, as novas funções envolvem agora duas distribuições espectrais, com uma estrutura analítica distinta, mas que reproduz os resultados anteriores no limite no qual uma das distribuições é excluída. A presença das duas distribuições leva também ao surgimento de novos momentos espectrais anteriormente ausentes.

A partir de cálculos de alguns observáveis físicos, como condensados de quarks e densidade de energia no vácuo, obtivemos expressões que relacionam algumas condições a serem satisfeitas pelos momentos das funções espectrais $\rho_u(\omega)$ $\rho_s(\omega)$ e também os vértices vetorial e axial do modelo que satisfazem as identidades de WT. A partir desses vértices, foi possível obtermos a relação análoga de Goldberger-Treiman para o káon. Outros resultados obtidos a partir dos vértices determinados foram a polarização do vácuo e o decaimento fraco para o káon.

Estes dois últimos resultados são significativamente diferentes dos obtidos no modelo original, mas reproduzem os resultados anteriores nos limites adequados. Em particular, o cálculo da polarização do vácuo resulta em uma parte invariante de gauge somada a outra parte, que se relaciona aos novos momentos espectrais que, para que esta invariância seja preservada, impõe uma nova condição espectral. Obtemos também a expressão para o decaimento fraco do Káon que pode ser usada na obtenção dos valores de alguns dos momentos espectrais do modelo. Todos os resultados podem ser utilizados para cálculos nos limites de massas iguais, reproduzindo os observáveis do pión, e no limite que reproduz o modelo original (para quarks de massas iguais), permitindo a comparação do presente resultado com o apresentado em [9].

Como principal conclusão e contribuição deste trabalho, mostramos que é possível formularmos um modelo espectral de quarks que envolva duas diferentes distribuições espectrais, permitindo a descrição de observáveis de mésons constituídos por quarks de diferentes massas. Uma das perspectivas para o desenvolvimento futuro do presente trabalho é a obtenção de outros observáveis do káon que possibilitem a determinação de um conjunto completo de momentos espectrais que possa ser usado para previsão de outros observáveis, como fatores de forma, por exemplo. Também a extensão do modelo para a obtenção de observáveis de mésons constituídos por quarks pesados é uma perspectiva promissora, em especial devido à finitude do modelo espectral de quarks, o que elimina as dificuldades da relação entre as escalas de energias envolvidas e os valores dos cortes ("cutoff") envolvidos em outros processos de regularização.

Referências Bibliográficas

- [1] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 27:195–272, 1991.
- [2] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, 1992.
- [3] M. K. Volkov. Effective chiral Lagrangians and the Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys. Part. Nucl.*, 24:35–58, 1993.
- [4] T. Hatsuda and T. Kunihiro. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. *Phys. Rept.*, 247:221–367, 1994.
- [5] Chr. V. Christov et al. Baryons as non-topological chiral solitons. *Prog.Part. Nucl. Phys.*, 37:91–191, 1996.
- [6] R. Alkofer, H. Reinhardt, and H. Weigel. Baryons as chiral solitons in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys. Rept.*, 265:139–252, 1996.
- [7] G. Ripka. Quarks bound by chiral fields: The quark-structure of the vacuum and of light mesons and baryons. Oxford, UK: Clarendon Pr. (1997) 205 p.
- [8] E. Ruiz Arriola. Pion structure at high and low energies in chiral quark models. ((V)). *Acta Phys. Polon.*, B33:4443–4479, 2002.
- [9] E. Ruiz Arriola and W. Broniowski. Spectral quark model and low energy hadron phenomenology. *Phys. Rev.*, D67:074021, 2003.
- [10] L. C. Ferreira and A. L. Mota. Axial-vector coupling and chiral anomaly in the spectral quark model. *Phys. Rev. D* 79:085002, (2009).

- [11] C. Itzykson and J. B. Zuber. Quantum Field Theory. New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).
- [12] R. Delbourgo and P. C. West. A Gauge Covariant Approximation to Quantum Electrodynamics. J. Phys., A10:1049, 1977.
- [13] R. Delbourgo. The Gauge Technique. Nuovo Cim., A49:484–496, 1979.
- [14] <http://pdg.lbl.gov/>
- [15] R. Jackiw. When radiative corrections are finite but undetermined. Int.J.Mod. Phys., B14:2011–2022, 2000.
- [16] A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, B. Hiller, and M. C. Nemes. Chiral anomaly in a gamma(5) friendly momentum space regularization framework. Phys. Rev., D64:046013, 2001.
- [17] J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism (Clarendon, London, 1891).
- [18] Feynman, R. P. Quantum Eledrodynamics, W. A. Benjamin, Inc. (1962).
- [19] Fermi, E. Quantum Theory of Radiation, Reviews of Modern Physics, 4 87.(1932).
- [20] Lee, T.D. and Yang, C.N. Question of Parity Conservation in Weak Interactions, Physical Review 104: 254.(1956).
- [21] Derman, Emanuel. "Flavor unification, τ decay, and b decay within the six-quark-six-lepton Weinberg-Salam model."Physical Review D 19.1 (1979): 317.
- [22] Peskin, E.M., Schroeder, D.V., An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing Company, (1996).
- [23] <http://www.ph.unimelb.edu.au/dnj/teaching/160mag/160mag.htm>
- [24] G. Kane, Scientific American 288(6), 56 (2003).
- [25] Marco Antonio Moreira, Rev. Bras. Ensino Fís. vol.31 no.1 São Paulo Apr. 2009.
- [26] <http://schoolsnapshots.org/blog/2014/03/08/movie-review-particle-fever/>

- [27] D. J. Gross and F. Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.* 30, 1343 (1973).
- [28] D. J. Gross and F. Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories. *Phys. Rev. D* 8, 3633 (1973).
- [29] H. D. Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?. *Phys. Rev. Lett.* 30, 1346 (1973).
- [30] <http://www.physics.umd.edu/courses/Phys741/xji/chapter1.pdf>
- [31] Wigner. *Phys. Rev.* 51:106-119, (1937).
- [32] W. K. Heisenberg. "Über den Bau der Atomkerne". *Zeitschrift für Physik* 77:1-11 (1932).
- [33] Noether, E..*Invariante Variationsprobleme.* Gött. Nachr. (1918).
- [34] Ryder, L. H., "Quantum Field Theory. Cambridge University Press, 1987.
- [35] E. Megias, E. Ruiz Arriola, L. L. Salcedo, and W. Broniowski. Low-energy chiral Lagrangian in curved space-time from the spectral quark model. *Phys. Rev.*, D70:034031, 2004.
- [36] A. H. Blin, B. Hiller, and M. Schaden. Electromagnetic Form Factors in the Nambu-Jona-Lasinio Model. *Z. Phys.*, A331:75-82, 1998.
- [37] S. P. Klevansky, R. H. Lemmer. Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory. arXiv:hep-ph/9707206 (1997).
- [38] B. L. Ioffe. Condensates in quantum chromodynamics. *Phys. Atom.Nucl.*, 66:30–43, 2003.
- [39] B. L. Ioffe and K. N. Zybalyuk. Gluon condensate in charmonium sum rules with 3-loop corrections. *Eur. Phys. J.*, C27:229–241 (2003).
- [40] Nossas convenções são as seguintes: Utilizamos $e^{-ip \cdot x}$ para partículas chegando e $e^{ip \cdot x}$ para partículas saindo. Para partículas livres sem massa, as funções irreduzíveis são normalizadas de acordo com $\Gamma_V^{\mu,a} = \gamma^\mu(\frac{\lambda_a}{2})$ e $\Gamma_A^{\mu,a} = \gamma^\mu \gamma_5(\frac{\lambda_a}{2})$. A convenção para as matrizes de Dirac e o tensor métrico são os da Ref. [11].

- [41] C. McNeile, A. Bazavov, C. T. H. Davies, R. J. Dowdall, K. Hornbostel, G. P. Lepage, and H. D. Trottier Phys. Rev. D 87, 034503 – Published 8 February 2013.
- [42] Takao OKABAYASHI. The Goldberger-Treiman Relation and Its kaon Analogue as a Non-Group-Theoretical kinematics Generating an $SU(3)$ Symmetry. Progress of Theoretical Physics, Vol. 41, No.6, June 1969 .
- [43] A utilização da regularização dimensional garante a invariância de calibre, sem mais subtrações. Por simplicidade, iremos utilizá-la nas aplicações com correntes vetoriais e axiais.
- [44] H. Pagels and S. Stokar, Phys. Rev. D 20, 2947 (1979).

Apêndice A

Notações e Convenções

Neste apêndice, apresentaremos as notações e propriedades, que foram utilizadas ao longo do trabalho.

As matrizes de Pauli são um conjunto de três matrizes 2×2 , Hermitianas e unitárias.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Denotadas aqui por τ em representação a simetria de isospin. Elas se transformam através das transformações unitárias, que representam rotações de isospin.

$$U(\tau_j) = e^{-i\frac{\theta_j\sigma_j}{2}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.1})$$

Obedecem as regras de comutação do grupo $SU(2)$:

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k \quad (\text{A.2})$$

e a relação de anticomutação:

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}I \quad (\text{A.3})$$

onde $\epsilon_{i,j,k}$ é o simbolo de Levi-Civita, δ_{ij} é a delta de Kronecker e I é a matriz identidade 2×2 .

Outras propriedades importantes:

$$\tau_i^2 = \tau_j^2 = \tau_k^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (\text{A.4})$$

$$\det(\tau_i) = -1 \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Tr}(\tau_i) = 0 \quad (\text{A.6})$$

As matrizes de Dirac, ou matrizes gama $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ são quatro matrizes 4×4 , unitárias:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \tau^j \\ -\tau^j & 0 \end{pmatrix},$$

onde I são matrizes identidade 2×2 , 0 são matrizes nulas também 2×2 e τ^j as matrizes de Pauli. A covariância entre as matrizes γ é definida por (notação de Einstein):

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = \{\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3\}, \quad (\text{A.7})$$

Relação de anticomutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4, \quad (\text{A.8})$$

onde $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é a métrica de Minkowski e I_4 é a matriz identidade 4×4 .

A partir das matrizes γ podemos definir a seguinte matriz auxiliar:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.9})$$

que possui algumas propriedades importantes como:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \text{ (hermitiana)}, \quad (\gamma^5)^2 = I_4, \quad (\text{A.10})$$

e anticomuta com as quatro matrizes γ :

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0. \quad (\text{A.11})$$

A notação slash de Feynman é definida por:

$$\not{a} = a^\mu \gamma_\mu = a_\mu \gamma^\mu. \quad (\text{A.12})$$

para qualquer quadrivetor a .

As matrizes de Gell-Mann são uma representação de geradores infinitesimais de um grupo unitário especial chamado $SU(3)$. Tradicionalmente denotadas por λ_a , com $a = 1, \dots, 8$, são matrizes 3×3 definidas como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

São Hermitianas ($\lambda_a^\dagger = \lambda_a$) e o traço destas matrizes é dado por:

$$Tr[\lambda_a] = 0, \quad Tr[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab}, \quad (a, b = 1, \dots, 8). \quad (\text{A.13})$$

Apêndice B

Resultados úteis

Neste apêndice, apresentaremos provas e cálculos de alguns resultados utilizados ao longo do trabalho.

► Prova da identidade (4.12). A identidade (4.12) é:

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{\not{p} - \omega} = \not{p}^n S(\not{p}) - \not{p}^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{B.1})$$

Substituindo do lado direito da identidade o propagador do quark na forma (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{\not{p} - \omega} - \not{p}^n \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega} &= -\not{p}^{n-1} \\ - \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega} (\not{p}^n - \omega^n) &= -\not{p}^{n-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

utilizando a relação:

$$\not{p}^n - \omega^n = (\not{p} - \omega) \sum_{i=n-1}^0 \sum_{j=0}^{n-1} \not{p}^i \omega^j \delta_{i+j}^{n-1}. \quad (\text{B.3})$$

provada por indução. Em seguida, ficamos com:

$$\begin{aligned} - \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega} (\not{p} - \omega) \sum_{i=n-1}^0 \sum_{j=0}^{n-1} \not{p}^i \omega^j \delta_{i+j}^{n-1} &= -\not{p}^{n-1} \\ - \int d\omega \rho(\omega) (\not{p}^{n-1} + \not{p}^{n-2} \omega + \dots + \not{p} \omega^{n-2} + \omega^{n-1}) &= -\not{p}^{n-1} \\ -\not{p}^{n-1} \int d\omega \rho(\omega) - \dots - \int d\omega \rho(\omega) \omega^{n-1} &= -\not{p}^{n-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Agora, utilizando as condições espectrais (4.2) e (4.3), temos que:

$$\int d\omega \rho(\omega) = 1; \quad \int d\omega \rho(\omega) \omega^{n-1} = 0 \quad n > 1. \quad (\text{B.5})$$

Logo:

$$- \not{p}^{n-1} = - \not{p}^{n-1}. \quad (\text{B.6})$$

► Verificação da relação de recorrência (4.18):

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = p^2 \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} \quad n > 2, \quad (\text{B.7})$$

Fazendo a substituição $p^2 = (p^2 - \omega^2) + \omega^2$, temos que,

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{\cancel{(p^2 - \omega^2)}}{\cancel{(p^2 - \omega^2)}} + \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} \quad n > 2, \quad (\text{B.8})$$

e pela condição espectral (4.3), temos que:

$$\int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) = 0 \quad n > 2, \quad (\text{B.9})$$

Logo,

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \quad (\text{B.10})$$

► A integral I , utilizada no cálculo dos condensados de quarks é dada por:

$$I = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \quad (\text{B.11})$$

onde $p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2$. Fazendo-se a substituição de variáveis:

$$p^0 = ik^0, \quad \vec{p} = \vec{k}. \quad (\text{B.12})$$

teremos:

$$d^4 p = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3 = idk^0 dk^1 dk^2 dk^3 = id^4 k. \quad (\text{B.13})$$

e

$$p^2 = -(k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = -k^2. \quad (\text{B.14})$$

Temos então que,

$$I = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + \omega^2}, \quad (\text{B.15})$$

Fazendo a mudança para coordenadas hiperesféricas (ou polares 4-dimensionais), temos:

$$d^4 k = k^3 dk d\phi \sin\theta d\theta \sin^2\xi d\xi, \quad (\text{B.16})$$

onde $k = \sqrt{k^2}$. Assim, utilizando o cutoff Λ , obtemos:

$$\begin{aligned} I &= -i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\pi \sin^2\xi d\xi \int_0^\Lambda \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{k^3}{k^2 + \omega^2} \\ &= -i 2\pi \times 2 \times \frac{\pi}{2} \int_0^\Lambda \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{k^3}{k^2 + \omega^2} \\ &= -i 2\pi^2 \int_0^\Lambda \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{k^3}{k^2 + \omega^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

fazendo divisão de polinômios:

$$\frac{k^3}{k^2 + \omega^2} = \frac{(k^2 + \omega^2)k - \omega^2 k}{(k^2 + \omega^2)} = k - \frac{\omega^2 k}{(k^2 + \omega^2)}. \quad (\text{B.18})$$

I então fica:

$$I = -i \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\Lambda \left(k - \frac{\omega^2 k}{k^2 + \omega^2} \right) dk, \quad (\text{B.19})$$

Finalmente, resolvendo as duas ultimas integrais triviais, obtemos:

$$I = -i \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right]. \quad (\text{B.20})$$

► Operações de traço, utilizadas no cálculo da polarização do vácuo e decaimento do Káon.

No caso da polarização do vácuo, a equação do traço é:

$$Tr_p = Tr \left[i(\not{p}' + \omega') \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} i(\not{p} + \omega) \gamma^\nu \frac{\lambda_b}{2} \right] \quad (\text{B.21})$$

mas pelo apêndice A, sabemos que:

$$Tr \left[\frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right] = \delta_{ab} \quad (\text{B.22})$$

agora ficamos então com:

$$Tr_p = -\delta_{ab} Tr[(\not{p}' + \omega')\gamma^\mu(\not{p} + \omega)\gamma^\nu] \quad (\text{B.23})$$

expandindo os termos, temos que

$$Tr_p = -\delta_{ab} Tr[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu + \not{p}'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu + \omega'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu + \omega'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu] \quad (\text{B.24})$$

pelas propriedades do traço, $Tr[A + B] = Tr[A] + Tr[B]$, logo

$$Tr_p = -\delta_{ab} \{Tr[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu] + Tr[\not{p}'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu] + Tr[\omega'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu] + Tr[\omega'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu]\} \quad (\text{B.25})$$

Resolvendo os traços um a um, temos:

$$Tr[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu] = Tr[\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu]p'^\rho p^\sigma = 4(p'^\mu p^\nu - p' p g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu) \quad (\text{B.26})$$

$$Tr[\not{p}'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu] = Tr[\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu]p' = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$Tr[\omega'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu] = Tr[\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu]\omega' = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$Tr[\omega'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu] = \omega'\omega Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\omega'\omega g^{\mu\nu} \quad (\text{B.29})$$

onde usamos que $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ e traço de um número ímpar de matrizes γ^μ é zero. Substituindo os resultados (), obtemos

$$\therefore Tr_p = -4\delta_{ab}(p'^\mu p^\nu - p' p g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu + g^{\mu\nu}\omega'\omega) \quad (\text{B.30})$$

No caso decaimento do Káon, temos o seguinte traço:

$$Tr_k = Tr \left[i(\not{k}' + \omega') \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega)q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} i(\not{k} + \omega)\gamma^\nu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \quad (\text{B.31})$$

pela equação (), e rearranjando os termos ficamos com:

$$Tr_k = \delta_{ab} Tr[(\not{k}' + \omega')(\omega' + \omega) \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 (\not{k} + \omega)\gamma^\nu \gamma_5 - (\not{k}' + \omega')\gamma^\mu \gamma_5 (\not{k} + \omega)\gamma^\nu \gamma_5] \quad (\text{B.32})$$

expandindo os termos, temos que

$$\begin{aligned}
 Tr_k = & \delta_{ab} \{ Tr[k' \omega' \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] + Tr[k' \omega' \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \omega \gamma^\nu \gamma_5] + Tr[k' \omega \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] \\
 & + Tr[k' \omega^2 \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] + Tr[\omega'^2 \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] + Tr[\omega'^2 \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \omega \gamma^\nu \gamma_5] \\
 & + Tr[\omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] + Tr[\omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} \gamma_5 \omega \gamma^\nu \gamma_5] - Tr[k' \gamma^\mu \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] \\
 & - Tr[k' \gamma^\mu \gamma_5 \omega \gamma^\nu \gamma_5] - Tr[\omega' \gamma^\mu \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] - Tr[\omega' \omega \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] \}
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

uma vez que traço de um número ímpar de matrizes γ^μ é zero o. A equação () se reduz a:

$$\begin{aligned}
 Tr_k = & \delta_{ab} \{ \omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} Tr[k' \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] + \omega^2 \frac{q^\mu}{q^2} Tr[k' \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] + \omega'^2 \frac{q^\mu}{q^2} Tr[\gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] \\
 & + \omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} Tr[\gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] - Tr[k' \gamma^\mu \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] - \omega' \omega Tr[\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] \}
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Utilizando as propriedades dos traços e das matrizes γ (apêndice A), resolvendo um a um, temos:

$$Tr[k' \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] = -Tr[\gamma^\rho \gamma^\nu] k'^\rho = -4k'^\nu \tag{B.35}$$

$$Tr[\gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] = Tr[\gamma^\rho \gamma^\nu] k^\rho = 4k^\nu \tag{B.36}$$

$$Tr[k' \gamma^\mu \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \gamma_5] = Tr[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] = 4(k'^\mu k^\nu - k' k g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu) \tag{B.37}$$

$$Tr[\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5] = -Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = -4g^{\mu\nu} \tag{B.38}$$

Substituindo os resultados (), obtemos

$$\therefore Tr_p = 4\delta_{ab} \left[(k^\nu - k'^\nu) \omega' \omega \frac{q^\mu}{q^2} + (k^\nu \omega'^2 - k'^\nu \omega^2) \frac{q^\mu}{q^2} - 2k'^\mu k^\nu + g^{\mu\nu} (k'^\sigma k^\sigma + \omega' \omega) \right] \tag{B.39}$$

► Cálculo das integrais I_0 , I_1 , I_2 e I_3 , utilizadas no cálculo da polarização do vácuo e no decaimento do Káon. Para as quatro integrais, no espaço de Minkowski e em d dimensões temos que []:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Xi)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Xi} \right)^{n - \frac{d}{2}} \tag{B.40}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Xi)^n} = \frac{(-1)^{(n-1)} i d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Xi} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \tag{B.41}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Xi)^n} = \frac{(-1)^{(n-1)} i g^{\mu\nu} \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{B.42})$$

para o nosso caso, $d = 4 - \epsilon$ e $n = 2$. Portanto temos que:

$$I_0 = \int \frac{d^{4-\epsilon} k}{(2\pi)^{(4-\epsilon)}} \frac{1}{(k^2 - \Xi)} = -\frac{i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1)}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \quad (\text{B.43})$$

resolvendo termo a termo,

$$(4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}-2} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi) + O(\epsilon^2) \right] \quad (\text{B.44})$$

e

$$\left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}-1} = \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \Xi \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{1}{\Xi}\right) + O(\epsilon^2) \right] \quad (\text{B.45})$$

expandindo $\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)$, utilizando as propriedades das funções gama, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos:

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2}}\right) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)\right] = -\left[\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + O(\epsilon)\right] \quad (\text{B.46})$$

aqui γ é a constante de Euler- Mascheroni ($\gamma \approx 0.5772$). Substituindo B.23, B.24 e B.25 em B.22 e fazendo os produtos, I_0 então fica:

$$I_0 = \frac{i}{(4\pi)^2} \Xi \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \log\left(\frac{4\pi}{\Xi}\right) + O(\epsilon) \right] \quad (\text{B.47})$$

ou

$$I_0 = \frac{i}{(4\pi)^2} \Xi \alpha \quad (\text{B.48})$$

onde

$$\alpha = \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \log\left(\frac{4\pi}{\Xi}\right) + O(\epsilon) \right] \quad (\text{B.49})$$

I_1 é dada por:

$$I_1 = \int \frac{d^{4-\epsilon} k}{(2\pi)^{(4-\epsilon)}} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Xi)^2} = -\frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \quad (\text{B.50})$$

e resulta em:

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \Xi \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \log\left(\frac{4\pi}{\Xi}\right) + O(\epsilon) \right] \quad (\text{B.51})$$

ou

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \Xi (\alpha + 1) \quad (\text{B.52})$$

Para I_2 , temos:

$$I_2 = \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{(4-\epsilon)}} \frac{1}{(k^2 - \Xi)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \quad (\text{B.53})$$

uma vez que

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)\right]$$

e

$$\left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{1}{\Xi}\right) + O(\epsilon^2)\right] \quad (\text{B.54})$$

Logo I_2 resulta em:

$$I_2 = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log\left(\frac{4\pi}{\Xi}\right) + O(\epsilon)\right] = \frac{i}{(4\pi)^2} (\alpha - 1) \quad (\text{B.55})$$

Finalmente para I_3 , temos que:

$$I_3 = \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{(4-\epsilon)}} \frac{k^2}{(k^2 - \Xi)^2} = -\frac{i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \quad (\text{B.56})$$

substituindo B.25, B.26 e B.27 em B.30 e fazendo os produtos, obtemos:

$$I_3 = 2 \frac{i}{(4\pi)^2} \Xi \left[\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{2} - \gamma + \log\left(\frac{4\pi}{\Xi}\right) + O(\epsilon)\right] = 2 \frac{i}{(4\pi)^2} \Xi (\alpha - \frac{1}{2}) \quad (\text{B.57})$$