



Universidade Federal
de São João del-Rei

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA, FÍSICA E MATEMÁTICA

Daniel Catalayu Passile

MÉTRICAS EFETIVAS NA ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR

[Ouro Branco-MG]

[2023]

Daniel Catalayu Passile

MÉTRICAS EFETIVAS NA ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, em associação ampla com a Universidade Federal de Alfenas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos.

Linha de pesquisa: Gravitação e Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Érico Goulart de Oliveira Costa

[Ouro Branco-MG]

Departamento de Estatística, Física de e Matemática - UFSJ

[2023]

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P288m Passile, Daniel Catalayu.
Métricas efetivas na eletrodinâmica não-linear /
Daniel Catalayu Passile ; orientador Érico Goulart de
Oliveira Costa. -- Ouro Branco, 2023.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2023.

1. métricas efetivas. 2. gravitação . 3.
cosmologia. 4. eletrodinâmica não-linear. I. de
Oliveira Costa, Érico Goulart, orient. II. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 4 / 2023 - PPGF (13.29)

Nº do Protocolo: 23122.006628/2023-32

São João del-Rei-MG, 27 de fevereiro de 2023.

A dissertação de mestrado "**Métricas efetivas na eletrodinâmica não-linear**" elaborada por **Daniel Catalayu Passile** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

(Assinado digitalmente em 27/02/2023 12:34)

ERICO GOULART DE OLIVEIRA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 2351300

(Assinado digitalmente em 27/02/2023 15:06)

JOSE ELOY OTTONI
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1673925

(Assinado digitalmente em 27/02/2023 11:21)

EDUARDO HENRIQUE SILVA BITTENCOURT
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 073.405.966-31

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **4**, ano: **2023**, tipo: **HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**, data de emissão: **27/02/2023** e o código de verificação: **5e55b9c004**

Este trabalho é dedicado à minha família, especialmente à minha esposa e filhos, aos meus irmãos e aos meus queridos pais Albano Sachilombo Passile e Marcelina Choguindele Katchiunga (em memória).

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor e orientador Prof. Dr. Érico Goulart de Oliveira Costa, pela excelente forma de saber fazer e ser, o que resulta em sua longa paciência em ensinar, partilha de conhecimento sem reservas e empatia.

À toda minha família (pai: Albano Sachilombo Passile; irmãos: Maurício Kessongo Passile, Isabel Filipa Passile, Rosaria Liwewe Passile, Feliciano Muhongo Canombo Passile e Fernanda Kussaia Passile) pelo apoio incondicional que me têm dado nas minhas lutas acadêmicas. Em especial à minha esposa Ester de Freitas Rodrigues Passile e filhos Daniel Mezac Rodrigues Passile, Sadrac Jorge Rodrigues Passile e Abdenego Luís Sachilombo Rodrigues Passile, por suportarem as minhas ausências.

Ao meu mentor e professor Prof. Dr. Jorge Maria Gonçalves Mayer, por me orientar acadêmica e profissionalmente em todos tempos e não só.

Aos colegas do P.P.G.F-2020/02 que tornaram-se amigos e companheiros na carreira Luciano de Lima, Elves Moreira, Gabriel Volino, Stenio, Mauro e sem me esquecer do grande Guilherme pela bolsa que me cedeu no seu curso de inglês técnico, à estes todos o meu eterno agradecimento.

Por fim, não deixo de agradecer ao Estado brasileiro, em nome da UFSJ e do P.P.G.F., pela soberana oportunidade que me foi dada ao aceitar a minha candidatura ao programa que termina conferindo-me o grau de mestre em Física.

“Querem que vos ensine o modo de chegar à ciência verdadeira? Aquilo que se sabe, saber que se sabe; aquilo que não se sabe, saber que não se sabe; na verdade é este o saber.”

Confúcio (551-479 a.C.)

“A ciência consiste em saber; em crer que se sabe reside a ignorância.”

Einstein (1879-1955)

RESUMO

Através de generalizações não-lineares da Teoria Eletrodinâmica de Maxwell (TEM) é possível construir um ferramental matemático capaz de reproduzir certos fenômenos descritos na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Portanto, tais generalizações constituem excelentes laboratórios mentais para o estudo de sistemas físicos passíveis de geometrização. Em particular, utilizando-se da técnica da métrica efetiva, podemos descrever a evolução de raios de luz nestas teorias em termos de ferramentas típicas da relatividade geral. Em contrapartida, podemos produzir soluções, envolvendo somente o campo eletromagnético, capazes de imitar total ou parcialmente certos fenômenos próprios do campo gravitacional. Tal abordagem constitui exemplo particular dos chamados modelos análogos de gravitação. Neste trabalho estudaremos as métricas efetivas em modelos de eletrodinâmica não-linear, investigando a possibilidade de se construir passo-a-passo soluções cuja lagrangiana depende apenas do invariante F e mostraremos aspectos importantes da interação da luz com luz, e procuraremos reproduzir um horizonte de eventos pela métrica efetiva.

Palavra-chave: Eletromagnetismo não-linear, métrica efetiva, modelos análogos de gravitação.

ABSTRACT

Through non-linear generalizations of Maxwell's Electrodynamics Theory (TEM) it is possible to build a mathematical tool capable of reproducing certain phenomena described in the General Theory of Relativity (GRT). Therefore, such generalizations constitute excellent mental laboratories for the study of physical systems subject to geometrization. In particular, using the effective metric technique, we can describe the evolution of light rays in these theories in terms of typical tools of general relativity. On the other hand, we can produce solutions, involving only the electromagnetic field, capable of totally or partially imitating certain phenomena typical of the gravitational field. Such an approach constitutes a particular example of the so-called analogous models of gravitation. In this work we will study the effective metrics in models of non-linear electrodynamics, investigating the possibility of building step-by-step solutions whose Lagrangian depends only on the invariant F and we will show important aspects of the interaction of light with light, and we will try to reproduce a horizon of events by the effective metric.

Keywords: Non-linear electromagnetism, effective metric, analogous models of gravitation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Linhas do vetor campo elétrico brotando da fonte.....	37
Figura 2- Linhas do vetor campo elétrico em rotação.....	38
Figura 3: Radiação eletromagnética.....	71
Figura 4: Forma o cone de luz na métrica efetiva.....	76
Figura 5: Curvas integrais do campo vetorial ($N = 1, A = 1$ e $w = 1$).....	86
Figura 6: Curvas integrais do campo vetorial ($N = 1, A = 2$ e $w = 2$).....	87
Figura 7: Curvas integrais do campo vetorial ($N = 1, A = 1$ e $w = -5$).....	88

CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

▪ Vetores unitários mutuamente ortogonais:	\hat{i}, \hat{j} e \hat{k}
▪ Vetores linearmente independentes	\vec{e}_1, \vec{e}_2 e \vec{e}_3
▪ Matriz de transformação	a_i^j
▪ Matriz de transformação inversa	$(a^{-1})_i^j$
▪ Delta de Kronecker	δ^i_j
▪ Vetor covariante	V_j
▪ Vetor contravariante	V^j
▪ Tensor métrico covariante	$g_{ij}, g_{\mu\nu}$
▪ Tensor métrico contravariante	$g^{ij}, g^{\mu\nu}$
▪ Métrica de Minkowski	$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$
▪ métrica efetiva	$\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{g}^{\mu\nu}$
▪ Tensores no espaço vetorial tri-dimensional	$g_{ij}, g^{ij}, F_{ij}, W_{ijk}, R_{jkl}^i$
▪ Índices latinos minúsculos (i, j, k, l)	variam de 1 à 3
▪ Índices gregos minúsculos ($\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$)	variam de 0 à 3
▪ Representação de tensor simétrico	(). Exemplo $T_{(ij)}$
▪ Representação de tensor antissimétrico	[]. Exemplo $T_{[ij]}$
▪ Símbolo de Christoffel	$\Gamma^i_{jk} = g^{il}(g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$
▪ Elemento de linha	$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$
▪ Elemento de linha na métrica efetiva	$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
▪ Tensor de Faraday	$F_{\mu\nu}$
▪ Tensor dual do campo eletromagnético	$\hat{F}^{\mu\nu}$
▪ Tensor momento-energia	$T_{\mu\nu}$
▪ Tensor de Levi-Civita	$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$
▪ Tensor de Riemann	$R_{\alpha\beta\mu\nu}$
▪ Tensor de Ricci	$R_{\alpha\beta}$
▪ Equação de Euler-Lagrange	$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$
▪ Equação da geodésica	$\frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0$

▪ Sistema de unidades naturais	$c = 8\pi G \equiv 1$
▪ Assinatura da métrica	$(+, -, -, -)$
▪ Potencial vetor magnético	\mathbf{A}
▪ Densidade volumétrica de carga	ρ
▪ Densidade volumétrica de corrente	\mathbf{J}
▪ Vetor campo elétrico	\mathbf{E}
▪ Vetor magnético	\mathbf{B}
▪ Densidade lagrangiana	\mathcal{L}
▪ Funcional dos campos	\mathcal{S}

SIGLAS

TEM-Teoria Eletromagnética de Maxwell

TRG-Teoria da Relatividade Geral

TCC- Teoria Clássica de Campos

QED- Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*)

EMF- Campos eletromagnéticos (*Electromagnetic fields*)

NLED- Eletrodinâmica não-linear (*Nonlinear Electrodynamics*)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
1 BASE MATEMÁTICA.....	19
1.1 Conceito amplo de vetor e definição dos tensores.....	19
1.2 Algumas propriedades dos tensores. Definição do tensor métrico.....	24
1.2.1 Contração ou traço.....	24
1.2.2 Simetria e antissimétrica de tensores.....	25
1.3 Tensor métrico.....	25
1.4 Campos tensoriais.....	28
1.5 Derivada covariante.....	31
1.6 Princípio variacional.....	33
1.6.1 Geodésicas.....	35
2 PRINCIPAIS PROPRIEDADES DO CAMPO DE MAXWELL NO ESPAÇO DE MINKOWSKI.....	37
2.1 Equações de Maxwell.....	37
2.1.1 Interpretação física das leis que constituem as equações de Maxwell.....	38
2.2 Equações de Maxwell no formalismo tensorial.....	41
2.3 Potenciais eletromagnéticos.....	45
3 EQUAÇÕES DE MAXWELL NO FORMALISMO LAGRAGIANO E CONSTRUÇÃO DA MÉTRICA EFETIVA NO ELETROMAGNETISMO NÃO-LINEAR.....	48
3.1 Lagrangiana do campo eletromagnético.....	49
3.1.1 Generalização da densidade Lagrangiana.....	51
3.2 Eletromagnetismo não-linear no formalismo lagrangiano.....	54
3.2.1 Generalização do eletromagnetismo de Maxwell.....	54
3.2.2 Métrica efetiva. Definição do conceito.....	55
3.2.3 Construção da métrica efetiva no eletromagnetismo não-linear.....	56
3.2.4 Descontinuidade do campo não-linear.....	61
3.2.5 Lagrangiano de dois parâmetros F e G	65
3.2.6 Paralelo entre a métrica efetiva e a métrica do espaço-tempo de Minkowski.....	66
4 COMPORTAMENTO GEODÉSICO DA RADIAÇÃO NÃO-LINEAR.....	67
4.1 Propagação da radiação não-linear.....	67
4.1.1 Geodésicas nulas na métrica efetiva.....	68
4.1.2 Particularidades dos invariantes F e G , na propagação da radiação não-linear.....	71
4.2 Influência do campo de fundo na propagação da radiação.....	74

4.2.1	Forma do cone de luz.....	75
5	SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA LUZ PELA MÉTRICA EFETIVA.....	78
5.1	Algumas teorias alternativas a gravitação	78
5.2	Desvio da luz pela métrica efetiva.....	79
5.3	Ensaio um horizonte de eventos usando a métrica efetiva	81
5.3.1	Solução tipo onda plana e suas propriedades	82
	CONCLUSÕES	90
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92

INTRODUÇÃO

A teoria eletromagnética (TE) de Maxwell e a teoria da relatividade geral (TRG) de Einstein constituem dois exemplos típicos de teorias clássicas de campos. Enquanto a primeira é vetorial e linear, a segunda é tensorial e altamente não-linear sendo naturalmente formulada em termos da geometria dos espaços curvos. [1, 2] No entanto, através de extensões não-lineares da eletrodinâmica de Maxwell é possível construir um ferramental matemático capaz de reproduzir certos fenômenos descritos na teoria da relatividade geral. Desta maneira, o estudo da eletrodinâmica não-linear, constitui um excelente laboratório terrestre para a análise de sistemas físicos gravitacionais, utilizando particularmente a técnica da métrica efetiva. Com a métrica efetiva podemos descrever a evolução de raios de luz nesta teoria em termos de ferramentas típicas da relatividade geral e, em contrapartida, podemos produzir soluções, capazes de imitar certos fenômenos próprios do campo gravitacional, envolvendo somente o campo eletromagnético. Tal abordagem constitui exemplo particular dos chamados modelos análogos de gravitação, que é uma área recente e multidisciplinar de investigação no cenário da física relativista [2].

Além da eletrodinâmica não-linear, podemos destacar outros sistemas físicos tanto clássicos quanto quânticos que constituem as bases de outros modelos análogos, tais como: ótica em meios dielétricos não-lineares, acústica de fluidos em movimento, sistemas lagrangianos com muitos graus de liberdade, física de superfluidos e hélio líquido e condensado de Bose-Einstein [2, 3]. Todavia, muitos são os trabalhos de investigação em física, que nos últimos anos têm-se concentrado na possibilidade da geometrização dos sistemas acima mencionados.

A geometrização de sistemas não gravitacionais remete à década de 20 com o trabalho pioneiro de Gordon [3, 4], onde descreve-se as trajetórias da luz em um meio dielétrico através de uma dada métrica efetiva. Na sequência Unruh, Landau, Lifshitz e Plebanski [4] estudaram também a situação inversa, mostrando a existência de um certo material capaz de gerar o movimento da luz em um dado campo gravitacional previsto pela TRG.

Em configurações não-lineares, situações semelhantes também podem ocorrer graças ao fenômeno da auto-interação, tornando possível fazer interagir uma dada solução das equações de campo com suas respectivas excitações. Tal propriedade aparece explicitamente na propagação de descontinuidades nestes sistemas, pois a interação produz um cenário onde tais descontinuidades propagam-se como se espaço-tempo plano usual fosse substituído por uma

geometria não-euclidiana curva que é função da solução das equações não-lineares que descrevem o sistema físico. Assim os raios associados ao campo não coincidem com retas do espaço de Minkowski, mas podem ser descritos por geodésicas nulas de uma nova geometria pseudo-riemanniana [4, 5].

Neste contexto é interessante ressaltar que, embora a física gravitacional exija uma formulação não-linear e relativista, muitos dos resultados interessantes podem ocorrer já no nível da física Newtoniana ou da mecânica quântica não relativista. Dentre esses podemos citar os horizontes em fluidos e a propagação de ondas acústicas em condensados de Bose-Einstein [2, 5].

Na situação particular do eletromagnetismo não-linear, em que as não-linearidades podem afetar drasticamente as propriedades de propagação dos fótons, uma das geometrias efetivas particularmente relevantes foi obtida através da análise de campos elétricos no interior de dielétricos em movimento. Esta geometria consiste em um buraco negro análogo onde a estrutura dos fótons possui propriedades de propagação semelhantes àsquelas encontradas em uma configuração de uma estrela colapsada que, é uma generalização da métrica efetiva encontrada por Gordon [4, 5].

Dentre as principais teorias não-lineares do eletromagnetismo exploradas na literatura destacam-se a teoria de Born-Infeld proposta em 1934 e de Euler-Heisenberg, de 1936. A eletrodinâmica de Born-Infeld atua no sentido de corrigir a divergência da auto-energia do elétron, baseando-se na forma como a relatividade restrita restringe o valor máximo da velocidade. Contudo, esta eletrodinâmica é particularmente distinta por surgir em diversos cenários de teorias das cordas e com ampla aplicação no contexto de gravitação, como em cenários alternativos de inflação e buracos negros do tipo Reissner-Nordström e possui algumas propriedades interessantes, sendo a única a não apresentar o efeito de birrefringência no vácuo. Por sua vez a eletrodinâmica de Euler-Heisenberg corrige a eletrodinâmica de Maxwell incorporando, de forma não perturbativa, os efeitos da polarização do vácuo a um loop. [6].

Em tudo, interessa olhar para o estudo dos modelos análogos de gravitação como muito importantes sendo que além de proporcionarem a possibilidade de simular eventos gravitacionais em laboratórios terrestres, também permitem aplicar as técnicas da geometria Riemanniana e da relatividade geral na engenharia de materiais e também no desenvolvimento de dispositivos óticos e de controle eletromagnético. Na presente dissertação iremos construir uma solução de background do tipo onda plana e investigaremos as principais propriedades da

métrica efetiva correspondente. Em particular, mostraremos aspectos importantes da interação da luz com a luz, e procuraremos reproduzir um horizonte de eventos pela métrica efetiva.

Sobre a estrutura do trabalho

No primeiro capítulo apresenta-se a base matemática que constitui o ferramental algébrico/diferencial mínimo necessário para a descrição da teórica eletromagnética no contexto do cálculo tensorial.

No segundo capítulo fez-se uma abordagem sucinta sobre as principais propriedades do campo de Maxwell no espaço de Minkowski, começando por apresentar as leis que constituem as equações de Maxwell na sua forma diferencial e culminando com demonstrações de como o tensor de Faraday reproduz as ditas equações, para o campo eletromagnético.

No terceiro capítulo, as equações de Maxwell são novamente apresentadas no formalismo lagrangiano, seguido de um tratamento tensorial do lagrangiano do campo eletromagnético. A grande parte deste capítulo é reservado para a construção da métrica efetiva e a correspondente relação de dispersão, dependendo apenas do invariante F .

No quarto capítulo trata-se das particularidades do processo de propagação da luz através da métrica construída no capítulo quatro.

No quinto capítulo faz-se uma análise do comportamento da luz ao interagir com luz e com recurso à métrica efetiva, buscando simular algumas soluções exatas das equações de Einstein, sobretudo horizontes efetivos.

Por fim são apresentadas as conclusões gerais, onde são refletidas o alcance das actividades que guiaram a pesquisa e particularidades importantes do próprio estudo em si.

Capítulo 1

1 BASE MATEMÁTICA

A principal característica associada às grandezas físicas é a particularidade de serem medidas e quantificadas de alguma maneira. Portanto, é nesta senda que a Matemática atua num papel imprescindível na descrição e elaboração de modelos necessários para todo e qualquer evento mensurável do universo e o próprio universo em geral.

Entretanto, cada área da física é fundamentada por sua matemática própria que descreve a teoria com a exatidão desejada para sua compressão, experimentação e aplicação. Associado a isso, para uma compreensão adequada da teoria eletromagnética é necessário o domínio de algumas ferramentas matemáticas imprescindíveis, tais como o cálculo vetorial, álgebra e cálculo tensorial assim como o cálculo variacional, entre outras.

Neste capítulo, apresentamos as ferramentas matemáticas necessárias para compreensão e manipulação da Teoria Electromagnética nos seus aspectos mais genéricos.

1.1 Conceito amplo de vetor e definição dos tensores

Usualmente é comum definirmos um vetor como sendo uma grandeza física caracterizada por um módulo, direção e sentido, cuja representação simbólica é feita com o uso de uma letra com uma seta por cima, em que o seu tamanho corresponde ao seu módulo. Nesta representação, o segmento da reta fornece a direção, e a orientação da seta representa o sentido [7]. No sistema cartesiano tri-dimensional, um vetor é representado por

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \quad (1.1)$$

onde \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vetores unitários mutuamente ortogonais ou versores das coordenadas x , y e z , respectivamente, que formam uma base para o espaço vetorial, sendo que qualquer vetor pode ser escrito em termos dos mesmos e V_x , V_y e V_z são as componentes de \vec{V} ao longo de cada coordenada.

Entretanto, algumas grandezas físicas exigem a utilização de um conceito mais geral de vetor sendo aquelas definidas a partir de uma lei de transformação. Para tal, comecemos por tomar um conjunto de vetores linearmente independentes \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 no espaço tridimensional, isto é, assumimos que a equação

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = 0 \quad (1.2)$$

só tem solução se todos os escalares a , b e c forem simultaneamente nulos. Neste momento, não exigiremos a orto-normalização de tais vetores e, ademais, utilizaremos a notação abreviada \vec{e}_i , com o índice i tomando valores no conjunto 1, 2 e 3. Em geral, utilizaremos neste capítulo convenção similar para todos os índices latinos minúsculos, como i, j, k, m, n etc. Desta maneira, obtemos uma base para o espaço tri-dimensional, de forma que um vetor genérico, como por exemplo \vec{V} , pode ser expandido como

$$\vec{V} = V^1\vec{e}_1 + V^2\vec{e}_2 + V^3\vec{e}_3 = \sum_1^3 V^i\vec{e}_i \quad (1.3)$$

onde as quantidades V^i denotam as componentes do dado vetor com respeito à base \vec{e}_i . É conveniente introduzir de agora em diante a convenção ou notação de Einstein, segundo a qual dois índices repetidos (mudos) em uma dada equação devem ser somados de 1 até a dimensão do espaço vetorial correspondente (que no presente caso é 3). Em geral, nas expressões tensoriais, teremos dois tipos distintos de índices: os índices *contravariantes* sempre escritos acima do objeto (sobrescritos), e os índices *covariantes* sempre escritos abaixo do objeto (subscritos). Desta maneira, a equação anterior toma a forma simplificada

$$\vec{V} = V^i\vec{e}_i \quad (1.4)$$

Similarmente, se \vec{A} e \vec{B} são dois vetores linearmente independentes e se \vec{V} é a combinação linear de ambos, teremos

$$\vec{V} = a\vec{A} + b\vec{B} \rightarrow V^i \vec{e}_i = (aA^i + bB^i) \vec{e}_i \quad (1.5)$$

onde a e b são números (escalares). Desta equação concluímos que $V^i = aA^i + bB^i$, é um exemplo simples de uma expressão tensorial. Em geral, em uma igualdade tensorial deveremos sempre ter o mesmo número de índices livres (não somados) em ambos os lados da equação.

Consideremos agora uma nova base (não necessariamente orto-normalizada), denotada por \vec{e}'_i . Claramente, cada elemento da nova base poderá ser escrito como uma combinação linear da base antiga, de tal forma que segue

$$\vec{e}'_i = a_i^j \vec{e}_j = a_i^1 \vec{e}_1 + a_i^2 \vec{e}_2 + a_i^3 \vec{e}_3 \quad (1.6)$$

onde a_i^j é chamada de matriz de transformação de base. Tal matriz deve ser necessariamente invertível (não-singular), isto é devemos exigir que $\det(a_i^j) \neq 0$. Portanto, escrevendo a matriz da transformação inversa como $(a^{-1})_i^j$, devemos ter

$$a_k^i (a^{-1})_j^k = (a^{-1})_k^i a_k^j = \delta_j^i \quad (1.7)$$

onde que δ_j^i é o chamado Delta de Kronecker, definido como

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (1.8)$$

Note-se que o mesmo possui um índice contravariante e um índice covariante e que, em notação matricial, tal objeto escreve-se sob a forma

$$\delta_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

de onde percebemos que o mesmo funciona como uma matriz identidade escrita em notação tensorial. Multiplicando a equação (1.6) por $(a^{-1})_k^i$ e utilizando as relações da equação (1.7), teremos

$$(a^{-1})^i_k \vec{e}'_i = (a^{-1})^i_k a^j_i \vec{e}_j = \delta^j_k \vec{e}_j \quad (1.10)$$

que nos mostra que a base antiga \vec{e}_i também deve ser uma combinação linear da nova base \vec{e}'_i e que a matriz de transformação correspondente nada mais é do que a matriz inversa da transformação inicial, como esperado.

Estamos agora em condições de obter a lei de transformação para as componentes de um vetor genérico. Decompondo o vetor \vec{V} primeiramente com respeito à base \vec{e}_i posteriormente com relação à base \vec{e}'_i obtemos a igualdade

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i = V'^i \vec{e}'_i \quad (1.11)$$

que reflete o fato de a escolha de base em um espaço vetorial ser inteiramente arbitrária. Agora, utilizando a Eq. (1.10) com uma simples manipulação dos índices no segundo termo da equação acima, obtemos

$$[(a^{-1})^j_i V^i] \vec{e}'_j = V'^j \vec{e}'_j \quad (1.12)$$

Notando que as componentes estão expressas agora na mesma base, devemos ter a igualdade entre as componentes, isto é, segue

$$V'^i = (a^{-1})^i_j V^j \quad (1.13)$$

Tal lei de transformação é chamada de *contravariante*, pois envolve a inversa da matriz de transformação da base. Em geral, um objeto cujas componentes V^i se transformam de acordo com a Eq. (1.13) é chamado de *vetor contravariante*. Similarmente, um objeto cujas componentes se transformam sob a lei

$$W'_i = a^j_i W_j \quad (1.14)$$

é chamado de *vetor covariante* ou, dependendo do contexto, de co-vetor ou 1-forma. Note-se que usamos sobrescritos para os índices dos vetores contravariantes e subscritos para os índices dos vetores covariantes.

Estamos agora em condições de definir os tensores no espaço vetorial tridimensional. Os mesmos são generalizações dos conceitos de vetores covariantes e contravariantes e possuem um dado número de índices livres, como por exemplo

$$g_{ij}, g^{ij}, F_{ij}, W_{ijk}, R_{jkl}^i \quad (1.15)$$

O número de índices livres define a ordem do tensor, enquanto a posição dos mesmos (sobrescritos ou subscritos) define o grau de contravariância ou covariância. Na Eq. (1.15), por exemplo, g_{ij} é um tensor covariante de ordem 2, g^{ij} é um tensor contravariante de ordem 2, W_{ijk} é um tensor covariante de ordem 3 e assim por diante.

De forma geral, as componentes de um tensor contra-variante de ordem- k possuem a seguinte lei de transformação

$$T'^{i_1 i_2 \dots i_k} = (a^{-1})_{j_1}^{i_1} (a^{-1})_{j_2}^{i_2} \dots (a^{-1})_{j_k}^{i_k} T^{j_1 j_2 \dots j_k} \quad (1.16)$$

enquanto as componentes de um tensor co-variante de ordem- k possui a seguinte lei de transformação

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_k} = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_k}^{j_k} T_{j_1 j_2 \dots j_k} \quad (1.17)$$

de onde percebemos a presença de k vezes a matriz inversa no primeiro caso e de k vezes a matriz no segundo. Finalmente, tensores cujas componentes possuem k índices contra variantes e 1 índice covariante são chamados de tensores mistos. Tais objetos satisfazem a lei de transformação

$$T'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} = [(a^{-1})_{m_1}^{i_1} (a^{-1})_{m_2}^{i_2} \dots (a^{-1})_{m_k}^{i_k}] [a_{j_1}^{n_1} a_{j_2}^{n_2} \dots a_{j_l}^{n_l}] T^{m_1 m_2 \dots m_k}_{n_1 n_2 \dots n_l} \quad (1.18)$$

que possui um bloco contendo k vezes a presença da matriz inversa e outro bloco contendo l vezes a matriz de transformação inicial. É comum dizer de forma abreviada que um tensor misto deste tipo é um tensor do tipo (k, l) . Em geral, a combinação linear de dois tensores do tipo (k, l) definem um terceiro tensor do tipo (k, l) , isto é

$$C^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} = aA^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} + bB^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} \quad (1.19)$$

De forma análoga o produto de um tensor (k, l) com um tensor (u, v) gera um tensor do tipo $(k + u, l + v)$

$$C^{i_1 i_2 \dots i_k a_1 a_2 \dots a_u}_{j_1 j_2 \dots j_l b_1 b_2 \dots b_v} = A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} \cdot B^{a_1 a_2 \dots a_u}_{b_1 b_2 \dots b_v} \quad (1.20)$$

isto é, devemos somar a ordem da parte contra-variante e também somar a ordem da parte covariante, obtendo um novo tensor de ordem total $(k + u, l + v)$. De acordo com esta convenção, um escalar é um tensor do tipo $(0,0)$ isto é, um objeto que não se transforma quando realizamos uma mudança de base. Tais objetos também recebem o nome de *invariante*.

1.2 Algumas propriedades dos tensores. Definição do tensor métrico

1.2.1 Contração ou traço

Este é um processo que se dá quando dois índices de um tensor de ordem (k, l) , sendo um contravariante e um covariante são igualados, sendo transformados em índices mudos. Como resultado, obtemos um tensor do tipo $(k - 1, l - 1)$. A título de exemplo, vamos igualar os índices do tensor de segunda ordem T^i_j , produzindo o objeto T^i_i . Pela lei de transformação de um tensor misto de segunda ordem Eq. (1.18), temos

$$T'^i_j = (a^{-1})^i_k a^l_j T^k_l \quad (1.21)$$

Ao igualar os índices livres temos

$$T'^i_i = (a^{-1})^i_k a^l_i T^k_l = \delta^l_k T^k_l = T^i_i \quad (1.22)$$

onde usamos a relação Eq. (1.7). Desta feita, percebe-se que o tensor de segunda ordem, quando submetido a uma contração, tornou-se um invariante, ou seja, um escalar. Em geral, a contração de um tensor reduz por 2 o número de sua ordem. Pode-se dizer de forma geral que o traço é a soma dos elementos da diagonal de um tensor de ordem 2.

1.2.2 Simetria e antissimétrica de tensores

Chama-se tensor simétrico aquele em que a troca da posição dos índices não altera o tensor, isto é

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1.23)$$

Por sua vez o tensor antissimétrico é aquele em que a troca dos índices altera o sinal do tensor.

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (1.24)$$

Dado o tensor covariante de ordem dois arbitrário, podemos escrever a relação

$$T_{ij} = \frac{1}{2}T_{(ij)} + \frac{1}{2}T_{[ij]} \quad (1.25)$$

Por convenção, representam-se os tensores simétricos por () e antissimétrico por [], de forma que

$$T_{(ij)} = T_{ij} + T_{ji} \quad T_{[ij]} = T_{ij} - T_{ji} \quad (1.26)$$

Nota-se que a contração total de um tensor simétrico com um antissimétrico, de forma geral, é nula. Um exemplo importante de tensor simétrico é o chamado tensor métrico, importante na geometria diferencial e na teoria da relatividade, enquanto um exemplo importante de tensor antissimétrico é o tensor de Faraday, essencial na descrição covariante do campo eletromagnético, como veremos.

1.3 Tensor métrico

Para começarmos a trabalhar o conceito de distância em um espaço vetorial, precisamos definir um objeto que algebricamente forneça informações de como tratar os *comprimentos* e os *ângulos* entre os vetores, que é a métrica [7, 8]. O termo *métrico* está diretamente relacionado às medidas, referindo-se a uma ferramenta matemática que nos informa as propriedades geométricas do dado espaço [7].

Comecemos por escolher no espaço tri-dimensional uma base de vetores \vec{e}_i e tomemos todos produtos escalares possíveis entre os elementos da base. Obteremos então um total de nove (9) relações algébricas da forma

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} \quad (1.27)$$

Ao conjunto de nove números do lado direito, isto é g_{ij} , chamamos tensor métrico. Ademais, pela simetria do produto escalar, tal tensor deve ser simétrico isto é, $g_{ij} = g_{ji}$. Vejamos que tal objeto transforma-se, de fato, como um tensor covariante de ordem 2. Tomando uma nova base \vec{e}'_i , podemos escrever

$$g'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = a_i^k a_j^l (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l) = a_i^k a_j^l g_{kl} \quad (1.28)$$

que comprova este fato. Dados dois vetores \vec{A} e \vec{B} , tem-se

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A^i) \vec{e}_i + (B^j) \vec{e}_j = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) A^i B^j = g_{ij} A^i B^j \quad (1.29)$$

O resultado desta operação é um número que não deve depender da escolha particular de base. De fato, a lei de transformação da Eq. (1.28) é o fato de termos

$$A'^i = (a^{-1})^i_m A^m \quad , \quad B'^j = (a^{-1})^j_n A^n \quad (1.30)$$

para as componentes dos vetores garante que

$$g'_{ij} A'^i B'^j = g_{ij} A^i B^j \quad (1.31)$$

No caso de $\vec{A} = \vec{B}$, temos

$$\|\vec{A}\|^2 \equiv \vec{A} \cdot \vec{A} = g_{ij} A^i A^j \quad (1.32)$$

onde $\|\vec{A}\|$ é o módulo ou o “comprimento” do dado vetor. Ao considerarmos uma base ortogonalizada, como de costume, o tensor métrico toma a forma simplificada

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (1.33)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (1.34)$$

é o delta de Kronecker totalmente covariante. Neste caso, o produto escalar entre dois vetores e a norma de um dado vetor reduzem-se às expressões usuais

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij}A^iB^j = \delta_{ij}A^iB^j = A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 \quad (1.35)$$

$$\|\vec{A}\|^2 = A^1A^1 + A^2A^2 + A^3A^3 \quad (1.36)$$

É importante ressaltar que isso ocorre apenas no caso cartesiano. Portanto, se o sistema em questão é o sistema cartesiano ortogonal convencional, a métrica é justamente o delta de Kronecker.

As componentes do tensor métrico em um dado sistema de coordenadas devem ser descritas por uma matriz não-singular, isto é, $g \equiv \det(g_{ij}) \neq 0$. Uma vez que o tensor métrico é invertível, podemos definir também a sua versão contravariante g^{ij} . Devemos, então, ter a seguinte relação

$$g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i \quad (1.37)$$

Usa-se o tensor métrico contravariante g^{kj} para elevar índices de tensores, transformando índices covariantes em contravariantes, ao passo que o tensor métrico covariante g_{ik} é usado para abaixar índices, isto é, transformar um índice contravariante em índice covariante. Seguem abaixo alguns exemplos destas operações

$$A_i = g_{ij}A^j, \quad A^i = g^{ij}A_j, \quad F_{ij} = g_{ik}g_{jl}F^{kl}, \quad F^{ij} = g^{ik}g^{jl}F_{kl}.$$

1.4 Campos tensoriais

Até este momento, vimos que os diferentes tipos de tensores são definidos de acordo com uma certa lei de transformação quando mudamos de base em um dado espaço vetorial. Por razões de simplicidade, começamos pelo espaço tri-dimensional usual, por ser intuitivamente mais acessível. No entanto, tais leis de transformação podem ser facilmente generalizadas para espaços vetoriais de dimensões arbitrárias, geralmente denotada por n .

Em diversas situações de interesse da geometria e da física, precisamos trabalhar com tensores variando continuamente de ponto para ponto em uma certa variedade diferenciável M . Grosso modo, uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço localmente equivalente ao \mathbb{R}^n , que pode ser mapeado por coordenadas x^k onde $k = 1, 2, \dots, n$. Ao passarmos das coordenadas x^k para um outro conjunto de coordenadas x'^k , podemos definir os seguintes objetos

$$a_j^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \quad (a^{-1})_j^i \equiv \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \quad (1.38)$$

onde a_j^i é a chamada matriz jacobiana da transformação e deve satisfazer $\det(a_j^i) \neq 0$. Note-se que, devido à regra da cadeia para funções de várias variáveis, temos

$$a_j^i (a^{-1})_k^j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i \quad (1.39)$$

Desta maneira, um tensor do tipo (k, l) passa a ser definido como um conjunto de funções de ponto, $T^{m_1 m_2 \dots m_k}_{n_1 n_2 \dots n_l}(x)$, cujas componentes transformam-se segundo a lei

$$T'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} = [(a^{-1})_{m_1}^{i_1} (a^{-1})_{m_2}^{i_2} \dots (a^{-1})_{m_k}^{i_k}] [a_{j_1}^{n_1} a_{j_2}^{n_2} \dots a_{j_l}^{n_l}] T^{m_1 m_2 \dots m_k}_{n_1 n_2 \dots n_l} \quad (1.40)$$

onde agora, os índices variam entre 1 e n e as matrizes a_j^i e $(a^{-1})_j^i$ são dadas pelas expressões da Eq. (1.38). O exemplo mais simples de um campo tensorial em uma variedade diferenciável é um campo escalar $T(x)$, isto é um tensor do tipo $(0, 0)$. De acordo com a equação acima, temos

$$T' = T \quad (1.41)$$

O segundo tipo mais simples é o caso de um campo vetorial $T^i(x)$, isto é, um tensor do tipo $(1, 0)$. De acordo com a Eq. (1.40), temos

$$T'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} T^j \quad (1.42)$$

Nota-se que tal lei de transformação equivale à lei de transformação dos diferenciais das coordenadas (deslocamento infinitesimal), bem conhecida do cálculo de várias variáveis

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \quad (1.43)$$

Já para um campo tensorial do tipo $(0, 1)$, segue

$$T'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} T_j \quad (1.44)$$

Tal campo também recebe o nome de forma diferencial e um exemplo do mesmo aparece no gradiente de um campo escalar. De fato, definindo as derivadas parciais com relação às coordenadas x^i e x'^i , respectivamente por

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \partial'_i \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i} \quad (1.45)$$

e usando a regra da cadeia, temos

$$\partial'_i T \equiv \frac{\partial T}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial T}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \partial_j T \quad (1.46)$$

Como mencionado anteriormente, a estrutura geométrica de um dado espaço vetorial é dada pelo tensor métrico g_{ij} . No caso de uma variedade diferenciável, tal estrutura deverá ser

especificada por um campo tensorial não-degenerado do tipo (0,2), isto é, o conjunto de funções de ponto $g_{ij}(x)$. Associado à tal objeto, temos o chamado elemento de linha

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad (1.47)$$

que nos fornece a “distância” entre dois pontos infinitesimalmente próximos x^i e $x^i + dx^i$. Quando $g_{ij}(x)$ é positivo definido, dizemos que a variedade é Riemanniana (ou de assinatura elíptica) e quando $g_{ij}(x)$ possui um único auto-valor positivo e todos os outros negativos, dizemos que a variedade é pseudo-riemanniana (ou de assinatura hiperbólica).

Se existir na variedade diferenciável um sistema de coordenadas global tal que o tensor métrico seja uma constante, tal variedade é dita plana (ou flat). No caso Riemanniano tri-dimensional, pode-se mostrar que sempre existirá um sistema de coordenadas tal que

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g^{ik} = \delta^{ik} \quad (1.48)$$

de tal maneira que o elemento de linha reduz-se à forma

$$ds^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.49)$$

que define o espaço Euclidiano usual da geometria clássica no sistema de coordenadas cartesianas. Todavia, quando descrevemos o espaço Euclidiano em um sistema de coordenadas curvilíneo (não necessariamente ortogonal), o tensor métrico adquire uma forma específica para cada tipo de sistema. Em particular, para coordenadas esféricas, $x^i = (r, \theta, \varphi)$, os tensores métricos e o elemento de linha tomam as formas:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

$$ds^2 = dx^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (1.51)$$

No caso da Relatividade Geral, os espaços relevantes têm dimensão $n = 4$ com tensor métrico de assinatura hiperbólica. Tal espaço é chamado de espaço-tempo e a teoria prevê que, na

ausência de campos gravitacionais, existirá sempre um sistema global de coordenadas, com $x^\mu = (t, x, y, z)$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$, onde a métrica reduz-se à chamada métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.53)$$

Nota-se que no espaço de Minkowski, temos três tipos distintos de distâncias. Existem as distâncias tipo-espaço $ds^2 < 0$ as distâncias tipo-tempo $ds^2 > 0$ e as distâncias tipo luz $ds^2 = 0$. Em um dado ponto (evento) do espaço-tempo de Minkowski, o conjunto de vetores nulos, isto é, aqueles que satisfazem a relação

$$\eta_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu = 0 \quad (1.54)$$

define o chamado cone de luz no dado ponto. Tal nome deriva-se do fato de que as ondas luminosas na teoria eletromagnética de Maxwell “viajam” sob tal cone.

Finalizamos esta seção enumerando alguns exemplos de campos tensoriais no espaço-tempo de importância para a teoria de campos e para a geometria diferencial: o tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ responsável por representar o campo eletromagnético, o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, o tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ e os tensores de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ e Ricci $R_{\alpha\beta}$, que fornecem, respectivamente, informações sobre a curvatura do espaço-tempo.

1.5 Derivada covariante

Dada uma variedade M diferenciável de métrica $g_{\mu\nu}$ e um campo tensorial $T^{m_1 m_2 \dots m_k}_{n_1 n_2 \dots n_l}(x)$, pode-se mostrar que as derivadas parciais simples não se transformam como um tensor. De fato, derivando a Eq. (1.40) com relação à x'^1 e utilizando a regra da cadeia segue

$$\partial'_i T'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} = a_q^p \partial_p [(a^{-1})^{i_1}_{m_1} (a^{-1})^{i_2}_{m_2} \dots (a^{-1})^{i_k}_{m_k}] [a^{n_1}_{j_1} a^{n_2}_{j_2} \dots a^{n_l}_{j_l}] T^{m_1 m_2 \dots m_k}_{n_1 n_2 \dots n_l} \quad (1.55)$$

Utilizando a regra do produto do lado direito, percebemos que

$$\partial'_i T'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l} = [(a^{-1})^{i_1}_{m_1} (a^{-1})^{i_2}_{m_2} \dots (a^{-1})^{i_k}_{m_k}] [a^{n_1}_{j_1} a^{n_2}_{j_2} \dots a^{n_l}_{j_l}] a_q^p \partial_p T^{m_1 m_2 \dots m_k}_{n_1 n_2 \dots n_l} + \dots \quad (1.56)$$

Onde “...” significa termos envolvendo derivadas segundas com relação às coordenadas. Para remediar tal situação define-se a chamada derivada covariante, denotada por “;”. Tal derivada envolve os termos de conexão, definidos por

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il} (g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}) \quad (1.57)$$

Existe uma expressão geral para a derivada covariante de tensores de ordem arbitrária, mas explicitaremos aqui apenas as derivadas covariantes de tensores de ordem, no máximo 2. Para um escalar, temos

$$T_{;k} = T_{,k} \quad (1.58)$$

Para um vetor contravariante, temos

$$T^i_{;j} = T^i_{,j} + \Gamma^i_{jk} T^k \quad (1.59)$$

Para um vetor covariante (co-vetor), temos

$$T_{i;j} = T_{i,j} - \Gamma^k_{ij} T_k \quad (1.60)$$

Finalmente para um tensor covariante de ordem 2, segue

$$T_{ij;k} = T_{ij,k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} \quad (1.61)$$

Nota-se que, em geral, teremos termos positivos para índices contravariantes e termos negativos para índices covariantes. Pode-se mostrar com um cálculo simples que a derivada covariante da métrica nos espaços (pseudo) riemannianos é sempre nula

$$g_{ij;k} = 0 \quad g^{ij;k} = 0 \quad (1.62)$$

1.6 Princípio variacional

Como alternativa ao formalismo vetorial, em que torna-se necessário identificar todas as forças que agem sobre cada partícula a fim de encontrar as equações de movimento, pode-se obter as mesmas equações a partir de um único princípio, o princípio variacional. Este princípio é bastante prático em lidar com problemas que se referem a valores máximos e mínimos de qualquer situação fenomenológica (problemas relacionados a geodésicas, problema da braquistócrona e outros) por esta razão, os físicos têm estudado de forma incessante problemas do género, tais como: o caminho percorrido pela luz, movimento dos planetas, movimento dos líquidos e gases e o caminho percorrido pelas ondas de rádio [10, 11, 12, 13].

Portanto, o cálculo das variações como também é assim chamado, procura determinar extremos (máximos ou mínimos) de funcionais, sendo que um funcional é definido como uma função real cujo domínio é o espaço de funções, associando um número real a cada função [10].

Se assumirmos que existe uma função duas vezes diferenciável $y = y(x)$, satisfazendo as condições $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$ e que forneça um mínimo para a integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1.63)$$

consideremos uma família de funções dada por

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (1.64)$$

onde ϵ é o parâmetro da família e $\eta(x)$ é uma função diferenciável arbitrária para a qual

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (1.65)$$

A condição estabelecida na Eq. (1.65), garante que $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$ e $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$, o que significa que todas funções possuem o mesmo ponto inicial e final da função $y(x)$. Entretanto se trocarmos y e y' por $Y(x)$ e $Y'(x)$, respectivamente na Eq. (1.63), obtemos

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx \quad (1.66)$$

de acordo com a Eq. (1.64), o argumento Y' desta última integral será dado por

$$Y' = Y'(x) = y'(x) + \epsilon \eta'(x) \quad (1.67)$$

Quando $\epsilon = 0$, podemos trocar Y e Y' por y e y' , respectivamente, então a integral da Eq. (1.66) é um mínimo com respeito a ϵ para $\epsilon = 0$, portanto a derivada primeira de I com relação a ϵ se anula em $\epsilon = 0$, ou seja

$$I'(0) = 0 \quad (1.68)$$

Para isto precisamos de um resultado que nos permita derivar a integral (1.66). Com recurso ao teorema e o lema básico do cálculo variacional, ambos demonstrados em [10], depois de todas manipulações algébricas resulta

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0 \quad (1.69)$$

e desta obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.70)$$

esta última equação é conhecida como *equação de Euler-Lagrange*. A sua solução, para qualquer problema típico de variações, nos dá uma função duas vezes diferenciável que fornece um mínimo (ou máximo) para a integral do problema. O integrando $f(x, y, y')$ é conhecido como função lagrangiana ou, simplesmente, lagrangiana.

1.6.1 Geodésicas

Uma geodésica é uma curva cujo valor é estacionário com respeito a pequenas variações arbitrárias, mantendo os extremos fixos. E isso em espaços planos, corresponde ao menor caminho entre dois pontos [10, 14].

$$\delta \int_A^B ds = 0 \quad (1.71)$$

A geodésica é um conceito muito importante para a compreensão da geometria de superfícies curvas em que se assenta a relatividade geral.

Suponhamos que uma curva é parametrizada pelo próprio comprimento de arco $x^\mu = x^\mu(s)$ e definindo, por simplicidade, $p^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ como um vetor unitário tangente à curva

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = p_\nu p^\nu = 1 \quad (1.72)$$

e

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (1.73)$$

Portanto a equação resultante para a geodésica será dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\lambda} = 0 \quad (1.74)$$

considera-se que o vetor p^λ propaga-se paralelamente ao longo da curva. De forma explícita

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (1.75)$$

para um parâmetro t qualquer, esta última equação tem a forma

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{d^2 t/ds^2}{(dt/ds)^2} \quad (1.76)$$

Comumente é utilizado um parâmetro tal que $d^2t/ds^2 = 0$ e a Eq. (1.75) pode ser utilizada. Note-se que a equação da geodésica é idêntica a de uma curva parametrizada em s , cuja definição da derivada absoluta para tensores contravariantes é dado por

$$\frac{\delta T^{\mu\nu}}{\delta s} = \nabla_\lambda T^{\mu\nu} \frac{dx^\lambda}{ds} \quad (1.77)$$

Portanto a equação da geodésica é dada

$$\frac{\delta dx^\lambda}{\delta s ds} = 0 \quad (1.78)$$

O conceito de transporte paralelo pode ser aplicado para definir a curvatura intrínseca de um espaço. Se um vetor se propaga paralelamente por uma curva fechada em um espaço plano, o vetor final é paralelo ao inicial, já em um espaço curvo, isto não é necessariamente válido.

Por outro lado, é indispensável falar das geodésicas nulas, pois estas descrevem o movimento da luz na teoria da relatividade geral. As geodésicas nulas ocorrem quando, dado um parâmetro λ o seguinte conjunto de equações deve ser satisfeito

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.79)$$

e

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0 \quad (1.80)$$

O estudo das geodésicas nulas, é de grande importância nesta teórica, particularmente no estudo das soluções de buracos negros, por revelarem características importantes do espaço-tempo.

Capítulo 2

2 PRINCIPAIS PROPRIEDADES DO CAMPO DE MAXWELL NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

A teoria de campos é uma teoria física que descreve a interação dos campos com a matéria conhecida, sendo que um campo físico pode ser entendido como a atribuição de uma certa quantidade física em todos os pontos do espaço-tempo. Por sua vez, a expressão “*Teoria Clássica de Campos (TCC)*” é reservada para descrever as teorias físicas onde os processos de quantização não são considerados [1, 15, 16]. Neste capítulo são apresentadas as equações de Maxwell na sua forma vetorial e tensorial bem como a interpretação física de cada uma delas. Define-se ainda o tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ a partir do potencial elétrico ϕ e o potencial vetor magnético \mathbf{A} .¹

2.1 Equações de Maxwell

Na teoria clássica de campos, a produção do campo eletromagnético e a sua propagação são descritas pelas chamadas equações de Maxwell que associadas à lei de força de Lorentz estabelecem as bases do eletromagnetismo clássico. Portanto, quando se fala das equações de Maxwell trata-se de quatro tipos de equações diferenciais parciais lineares que em conjunto descrevem o campo vetorial produzido por uma distribuição de cargas estacionárias ou em movimento (corrente elétrica), pois o seu desenvolvimento e a sua representação matemática constituem generalizações do comportamento dos campos elétricos e magnéticos com relação as suas respectivas fontes.

1- Note-se que por uma questão de convenção adota-se a partir deste capítulo uma nova representação de vetores que passam a serem representados por *bold* (letras negritas).

Na verdade, as leis que constituem as chamadas equações de Maxwell, foram descobertas muito antes de Maxwell por autores conhecidos (Gauss, Faraday e Ampère), sendo que este apenas corrigiu a lei de Ampère e reagrupou-as de acordo com o significado físico que cada uma contém para a compreensão dos fenómenos eléctricos e magnéticos [17, 18].

Utilizando o formalismo vetorial, o conjunto de equações diferenciais que constituem as equações de Maxwell são apresentadas abaixo.

(i) Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.1)$$

(ii) Lei de Gauss para o Magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

(iii) Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

(iv) Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

onde ρ e \mathbf{J} são as densidades volumétrica de carga e de corrente, respetivamente, \mathbf{E} e \mathbf{B} são os vetores campo eléctrico e campo magnético, respetivamente, ϵ_0 e μ_0 por sua vez são as constantes de permissividade eléctrica do vácuo e de permeabilidade magnética no vácuo, respetivamente.

2.1.1 Interpretação física das leis que constituem as equações de Maxwell

i) Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

O divergente do vetor campo elétrico mede o quanto o campo elétrico sai de um ponto ou superfície de um objeto com certa simetria, estabelecendo a relação entre o campo e a sua fonte. Desta relação chega-se a algumas conclusões importantes tais como:

- Cargas elétricas estacionárias contidas em uma superfície de um objeto fonte com certa simetria geram campo elétrico;

- Sendo que o divergente do vetor campo elétrico pode ser negativo, nulo ou positivo, isto prova a existência de monopólos elétricos, de modo que:

$\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$; quando ρ é positiva;

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$; no espaço ou superfície livre de carga elétrica;

$\nabla \cdot \mathbf{E} < 0$; quando ρ é negativa.

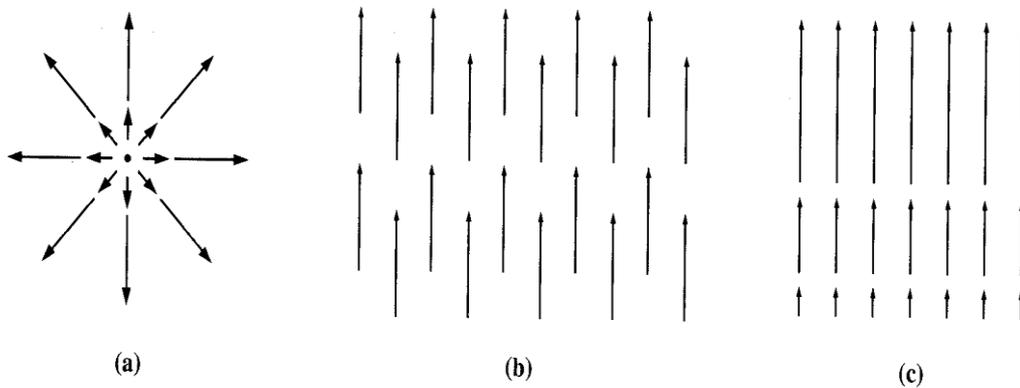


Figura 1- Linhas do vetor campo elétrico saindo da fonte [17]

ii) Lei de Gauss para o Magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esta seria a lei de Gauss para o vetor campo magnético e suas respectivas fontes. Portanto, desta lei conclui-se que:

- O vetor campo magnético não brota do nada de nenhum ponto do "Universo", pois, não existem monopólios magnéticos (carga magnética) no universo.

iii) Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

O rotacional do vetor campo elétrico é uma medida do quanto este gira em torno de um ponto ou superfície de um objeto fonte, como resultado da variação do vetor campo magnético (segundo os experimentos de Faraday). Desta lei conclui-se que:

- Quando o campo magnético varia exercendo uma força sobre as cargas elétricas em repouso, originando assim a corrente elétrica no ponto ou superfície exposta a este campo;
- Um campo magnético variável induz um campo elétrico.

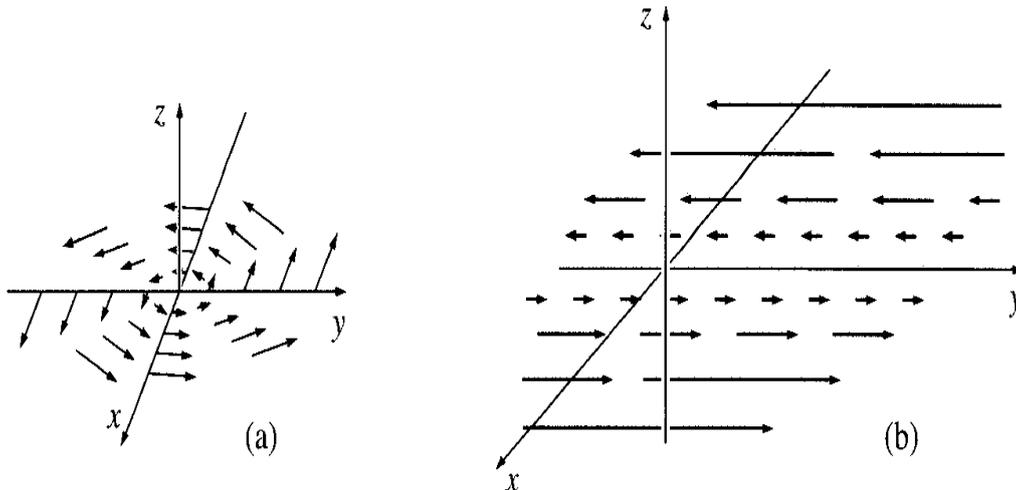


Figura 2- Linhas do vetor campo elétrico em rotação [17].

iv) Lei de Ampère- Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Esta é referente ao fenómeno no qual uma certa corrente elétrica ou um campo elétrico variável com o tempo, gera um campo magnético.

Assim, tem-se a força de Lorentz que diz que, a força que atua numa partícula carregada, com uma determinada carga, que se move no espaço é resultante da superposição das forças elétricas e magnéticas e, é representada pela equação

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.5)$$

2.2 Equações de Maxwell no formalismo tensorial

Em sistemas físicos de escala atômica ou com velocidades próximas a velocidade da luz, as equações de Maxwell não respeitam as transformações de Galileu, quando existe uma mudança no referencial [1, 19].

Com base em simetrias de fenômenos eletromagnéticos, em 1905 Einstein propôs que a eletrodinâmica deveria obedecer um princípio de relatividade semelhante à da mecânica clássica [19], supondo a invariância da velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas, apresentou sua teoria da relatividade restrita onde as transformações de Galileu, que conectam referenciais inerciais definidos pela mecânica Newtoniana, foram substituídas pelas transformações de Lorentz, sendo que nesta teoria o tempo não é visto como entidade separada e absoluta, mais como uma quarta coordenada de um sistema de referencias criando assim um espaço quadridimensional denominado Espaço – Tempo ou espaço de Minkowski.

No espaço de Minkowski o campo eletromagnético é dado por $F^{\mu\nu}$, que é um tensor antissimétrico conhecido como tensor de Faraday ou tensor de intensidade do campo eletromagnético, pois graças à notação tensorial, é possível reescrever as equações de movimento do eletromagnetismo em uma forma covariante por transformações de Lorentz a partir das relações:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\nu} \quad (2.6)$$

onde $J^{\nu} = (\mathbf{J}, c\rho)$, chama-se quadricorrente

$$\partial_{\mu} F_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} F_{\mu\alpha} + \partial_{\alpha} F_{\beta\mu} = 0 \quad (2.7)$$

isto é, considerando $c = 1$.

A equação (2.6) descreve como as fontes se acoplam ao campo eletromagnético e a partir desta obtém-se a equação de Gauss para o campo elétrico e a equação de Ampere-Maxwell e, por vez, a equação (2.7) tem relação direta com o quadripotencial e recupera a equação de Gauss para o campo magnético e a equação de Faraday. O tensor de Faraday é uma matriz 4×4 , dada por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

desenvolvendo a equação (2.6), vem:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = 4\pi J^0$$

$$0 + \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 4\pi\rho$$

sabe-se que:

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \mathbf{E}$$

então:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.9)$$

Para uma questão de semelhança com a eq. (2.1), consideremos para este caso em particular, a presença da velocidade da luz e nesta logica depois de efetuadas todas as passagens a eq. (2.9) é reescrita na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi c^2 \rho = \frac{4\pi\rho}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.9a)$$

De maneira análoga ao procedimento anterior, tem-se

$$\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = 4\pi J^1$$

$$-\partial_t E_x + 0 + \partial_y B_z - \partial_z B_y = 4\pi J^1 \quad (2.10)$$

$$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} = 4\pi J^2$$

$$-\partial_t E_y - \partial_x B_z + 0 + \partial_z B_x = 4\pi J^2 \quad (2.11)$$

$$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} = 4\pi J^3$$

$$-\partial_t E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x + 0 = 4\pi J^3 \quad (2.12)$$

somando as equações (2.10), (2.11) e (2.12), resulta em:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.13)$$

A equação (2.13) representa a lei de Ampere-Maxwell já apresentada na equação (2.4). Tomando a equação (2.7) e fazendo a mesma abordagem feita com a equação (2.6), tem-se

$$\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} = 0$$

$$\partial_1 F_{32} + \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21} = 0$$

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0$$

onde resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é o análogo à lei de Gauss para o magnetismo. Pelo mesmo procedimento usado para a equação (2.14), tem-se as relações:

$$\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} = 0$$

$$\partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} + \partial_0 F_{13} = 0$$

$$-\partial_z E_x + \partial_x E_z + \partial_t B_y = 0$$

resultando em:

$$\partial_x E_z - \partial_z E_x = -\partial_t B_y$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = -\partial_t B_y \quad (2.15)$$

$$\partial_3 F_{02} + \partial_2 F_{30} + \partial_0 F_{23} = 0$$

$$-\partial_z E_y + \partial_y E_z - \partial_t B_x = 0$$

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\partial_t B_x$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = -\partial_t B_x \quad (2.16)$$

analogamente tem-se também

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -\partial_t B_z \quad (2.17)$$

somando as equações (2.15), (2.16) e (2.17), resulta em

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.18)$$

esta última equação representa a lei de Faraday. Portanto, reunidas as equações (2.9a), (2.13), (2.14) e (2.18), juntas constituem as chamadas equações de Maxwell

$$i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$ii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

2.3 Potenciais eletromagnéticos

Ainda à luz da relatividade restrita, pela definição dada ao campo eletromagnético o seu tensor pode ser escrito com base em um quadripotencial, pela relação:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.19)$$

com

$$A^\mu = \varphi(\phi, \mathbf{A}) \quad (2.20)$$

onde ϕ é o potencial elétrico e \mathbf{A} é o potencial vetor magnético. Desta definição decorre imediatamente que o campo eletromagnético é invariante pelas transformações

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi \quad e \quad \partial^\mu \partial^\nu \psi = \partial^\nu \partial^\mu \psi \quad (2.21)$$

O que significa dizer que existe um conjunto infinito de A^μ que satisfaz o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$. O campo eletromagnético é invariante pelas transformações de *gauge* (transformação de calibre). A partir do tensor campo eletromagnético, pode-se definir um invariante de Lorentz F , dado por

$$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$F = (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) + (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$$

$$F = 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$$

Então

$$F = 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (2.22)$$

Portanto, F varia apenas de ponto-a-ponto. Aplicando as propriedades dos quadrivetores ao tensor campo eletromagnético definido na equação (2.21), recupera-se os resultados anteriormente já obtidos, sendo que este tensor se transforma de um sistema de referência para outro a partir da sua definição [19].

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

Estas transformações são simétricas pela troca simultânea $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$. Aplicando esta troca simultânea em $F^{\mu\nu}$ obtém-se o chamado tensor dual, que é linearmente independente. Escrito na forma

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

O tensor dual do campo eletromagnético ainda pode ser definido a partir de

$$\hat{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita. Podemos ainda reescrever a equação (2.22) na forma

$$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(E^2 - B^2) \quad (2.26)$$

E por sua vez a partir do tensor campo eletromagnético e o seu dual, podemos definir outro invariante de Lorentz G , dado por:

$$G = F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (2.27)$$

Por serem invariantes, possuem o mesmo valor em qualquer sistema de referência inercial. Propriedades interessantes do sistema podem ser deduzidas a partir deles. Entretanto, devido às transformações do campo eletromagnético, outro sistema de referência observando o mesmo

sistema irá medir uma mistura dos campos elétrico e magnéticos. A invariância de G nestes casos implicará que os campos elétrico e magnéticos necessariamente deverão ser perpendiculares. A situação inversa também é verdadeira, se os campos elétrico e magnético são transversais em um sistema de referência e $F \neq 0$, é possível encontrar um sistema de referência puramente eletrostático ou magnetostático [19].

Capítulo 3

3 EQUAÇÕES DE MAXWELL NO FORMALISMO LAGRAGIANO E CONSTRUÇÃO DA MÉTRICA EFETIVA NO ELETROMAGNETISMO NÃO-LINEAR

O formalismo Lagrangiano é uma formulação alternativa da mecânica clássica de se abordar a teoria clássica de partículas e campos. Portanto, trata-se de uma nova forma de apresentar o campo eletromagnético, considerando a chamada densidade lagrangiana de campos (\mathcal{L}), devido ao aspecto contínuo dos campos e o funcional dos campos \mathbb{S} .

Através das equações de Euler-Lagrange, recuperamos as duas equações não homogêneas de Maxwell e as outras duas equações, como se sabe, são consequência da definição do tensor eletromagnético. Portanto, o formalismo Lagrangiano tem a vantagem de explicitar as simetrias da teoria clássica de campos. A densidade lagrangiana de Maxwell é explicitamente invariante por transformações de Lorentz, propriedade que as equações de movimento correspondentes possuem, entretanto, para que a lagrangiana seja invariante por transformações de calibre, devemos assumir $\partial_\mu J^\mu = 0$, que é a conservação da carga elétrica [6].

Neste capítulo reobteremos as equações de Maxwell no formalismo tensorial com $F^{\mu\nu}$ e seu potencial A^μ . Abordaremos também de forma sucinta as limitações que encontram as equações de Maxwell na descrição do campo eletromagnético sob determinadas condições. Na sequência, são apresentadas as lagrangianas associadas à generalização do eletromagnetismo de Maxwell, fazendo referência a algumas teorias sobre o eletromagnetismo não-linear, bem como a demonstração algébrica da construção da métrica efetiva a partir da lagrangiana de F (sendo que vamos nos ater apenas na lagrangiana de F pois esta nos fornece informações suficientes para nossa abordagem e a lagrangiana de F e G é apresentada apenas de forma acabada para complementar). Por fim se estabelece um paralelo entre a métrica do espaço-tempo de Minkowski e a métrica efetiva.

3.1 Lagrangiana do campo eletromagnético

Seja \mathbb{S} a acção ou funcional do campo de Maxwell dado por

$$\mathbb{S} = \int \mathcal{L} d^4x \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} é a densidade lagrangiana definida como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F \quad (3.2)$$

Portanto

$$\mathbb{S} = -\frac{1}{4} \int F d^4x \quad (3.3)$$

Duas análises importantes podem ser feitas desta última equação.

1º Caso: Para um certo A_μ

Vimos no capítulo anterior que

$$F = 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$$

Então podemos reescrever a equação (3.3) em termos de A_μ

$$\mathbb{S}|_{A_\mu} = -\frac{1}{4} \int 2[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)] d^4x \quad (3.4)$$

2º Caso: Para um certo $A_\mu + \delta A_\mu$

Considerando que δA_μ seja uma perturbação infinitesimal, tal que

$$\delta A_\mu \delta A^\mu \approx 0$$

portanto

$$\mathbb{S}|_{A_\mu + \delta A_\mu} = -\frac{1}{4} \int 2 \left[\left\{ (\partial_\mu (A_\nu + \delta A_\nu)) (\partial^\mu (A^\nu + \delta A^\nu)) \right\} - \left\{ (\partial_\mu (A_\nu + \delta A_\nu)) (\partial^\nu (A^\mu + \delta A^\mu)) \right\} \right] d^4x$$

$$\mathbb{S}|_{A_\mu + \delta A_\mu} = -\frac{1}{2} \int \left[\left\{ (\partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \delta A^\nu) \right\} - \left\{ (\partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \delta A^\mu) \right\} \right] d^4x$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}|_{A_\mu + \delta A_\mu} = & -\frac{1}{2} \int \left[\left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu \delta A^\nu) + (\partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + (\partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\mu \delta A^\nu) \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu \delta A^\mu) + (\partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\nu \delta A^\mu) \right\} \right] d^4x \end{aligned}$$

Lembrando que $\delta A_\mu \delta A^\mu \approx 0$, resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{S}|_{A_\mu + \delta A_\mu} = & \int \left[\left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu \delta A^\nu) + (\partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu \delta A^\mu) + (\partial_\mu \delta A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) \right\} \right] d^4x \end{aligned}$$

portanto

$$\mathbb{S}|_{A_\mu + \delta A_\mu} = \mathbb{S}|_{A_\mu} + \delta \mathbb{S} \quad (3.5)$$

onde

$$\delta \mathbb{S} = -\frac{1}{2} \int 2 \left[\left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu \delta A^\nu) \right\} - \left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu \delta A^\mu) \right\} \right] d^4x$$

$$\delta \mathbb{S} = - \int \left[\partial_\mu A_\nu \partial^\mu \delta A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu \delta A^\nu \right] d^4x$$

$$\delta \mathbb{S} = - \int \left[\partial^\mu \delta A^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right] d^4x$$

Assim

$$\delta \mathbb{S} = - \int (F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu) d^4x \quad (3.6)$$

Pela regra do produto

$$\partial^\mu(F_{\mu\nu}\delta A^\nu) = (\partial^\mu F_{\mu\nu})\delta A^\nu + F_{\mu\nu}(\partial^\mu\delta A^\nu)$$

Entretanto, a equação (3.6) pode ser reescrita na forma

$$\delta \mathbb{S} = - \int \partial^\mu(F_{\mu\nu} \partial^\mu\delta A^\nu) d^4x + \int (\partial^\mu F_{\mu\nu})\delta A^\nu d^4x$$

$$\delta \mathbb{S} = \int (\partial^\mu F_{\mu\nu})\delta A^\nu d^4x$$

pelo princípio da ação mínima vale que

$$\delta \mathbb{S} = 0$$

Logo

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{3.7}$$

recuperando assim a equação para o caso sem fontes.

3.1.1 Generalização da densidade Lagrangiana

Vimos que a densidade lagrangiana foi definida pela equação $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F$, sendo F um invariante, podemos generalizar a densidade Lagrangiano escrevendo-a como uma série de potência

$$\mathcal{L}(F) = -a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + \dots + \tag{3.8}$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são constantes arbitrárias e, sendo \mathcal{L} uma função arbitrária também, vale escrever

$$\mathbb{S} = \int \mathcal{L}(F) d^4x \tag{3.9}$$

Queremos fazer uma variação da lagrangiana $\delta\mathbb{S} = \int \delta\mathcal{L}(F) d^4x$, pode-se mostrar que estas variações têm uma série de propriedades, tais como

$$\text{i)} \quad \delta F = \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = (\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

$$\text{ii)} \quad \delta\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dF}\delta F = \mathcal{L}_F\delta F \quad (3.11)$$

Portanto, a variação da lagrangiana pode ser reescrita

$$\delta\mathbb{S} = \int \mathcal{L}_F\delta F d^4x = 2 \int \mathcal{L}_F F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} d^4x \quad (3.12)$$

$$\text{iii)} \quad \delta F_{\mu\nu} = \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = (\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu) \quad (3.13)$$

Entretanto, (3.12) pode ser reescrito na forma

$$\delta\mathbb{S} = 2 \int \mathcal{L}_F F^{\mu\nu}(\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu) d^4x$$

$$\delta\mathbb{S} = 4 \int \mathcal{L}_F F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu d^4x \quad (3.14)$$

Pela regra do produto, tem-se

$$\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu = \partial_\mu(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}\delta A_\nu) - [\partial_\mu(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu})]\delta A_\nu$$

Então a equação (3.14) é reescrita como

$$\delta\mathbb{S} = 4 \int [\partial_\mu(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}\delta A_\nu) - \{\partial_\mu(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu})\}\delta A_\nu] d^4x \quad (3.15)$$

sendo que

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}) = 0$$

$$(\partial_\mu\mathcal{L}_F)F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_F(\partial_\mu F^{\mu\nu}) = 0$$

donde resulta que

$$\delta\mathbb{S} = 0 \tag{3.16}$$

3.2 Eletromagnetismo não-linear no formalismo lagrangiano

A eletrodinâmica de Maxwell é caracterizada por uma série de propriedades. Se trata de uma teoria relativística, invariante por transformações de calibre (*gauge*) e possui equações de movimento lineares de segunda ordem no potencial. Abrir mão de uma ou várias destas propriedades permite desenvolver generalizações do eletromagnetismo clássico.

Todavia, desde que as equações de Maxwell foram tidas como limitadas sob determinadas condições em que são empregadas, muitos são os estudos que têm incidido o seu foco nas generalizações das mesmas. Portanto, aspectos associados à existência de modos massivos em baixa e/ou em altas energias, campo de matéria associado ao próton, descrição do eletromagnetismo aplicado na teoria das cordas, dentre outros, constituem o motivo desta generalização [20].

3.2.1 Generalização do eletromagnetismo de Maxwell

3.2.1.1 Algumas teorias conhecidas do eletromagnetismo não-linear

Com o intuito de corrigir as equações de Maxwell, tornando-as mais compactas e gerais algumas teorias tem explorado os aspectos não-lineares destas equações, formando um grupo específico conhecido como teorias não-lineares do Electromagnetismo. Dentre as teorias não-lineares conhecidas sobre o electromagnetismo, citam-se as eletrodinâmicas de [6, 20]:

Born-Infeld;

Heisenberg-Euler

Proposta em 1934, a eletrodinâmica de Born-Infeld atua no sentido de corrigir a divergência da auto-energia do elétron impondo um limite superior para o módulo do campo elétrico. Esta se baseia na forma como a relatividade restrita restringe o valor máximo da velocidade, sendo que a forma da sua Lagrangiana tem semelhança com o fator de Lorentz. Contudo, esta eletrodinâmica é particularmente distinta por surgir em diversos cenários de teorias de cordas e com ampla aplicação no contexto de gravitação, como em cenários alternativos de inflação e buracos negros do tipo Reissner-Nordström

e possui algumas propriedades interessantes, sendo a única a não apresentar o efeito de birrefringência no vácuo [6, 20, 21].

A eletrodinâmica de Heisenberg-Euler é resultado da tese de doutorado de Euler em 1936 e parte da investigação do espalhamento fóton-fóton previsto por Halpern e Debye a partir da teoria relativística do elétron de Dirac. Esta corrige a eletrodinâmica de Maxwell incorporando, de forma não perturbativa, os efeitos da polarização do vácuo. Esta correção é exata quando devido a um campo eletromagnético constante de fundo e aproximada para campos de fundo que variam lentamente com relação ao comprimento de onda de Compton e intensidades muito menores.

Portanto, nestas e em outras teorias não lineares que possam surgir, as equações de movimento devem ser as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais, pois a covariância pelas transformações de Lorentz limita consideravelmente a forma que a lagrangiana que descreve estas teorias pode assumir.

3.2.2 Métrica efetiva. Definição do conceito

Em diferentes estados do vácuo, tem-se observado certas modificações na propagação da luz. Quer dizer que, sob distinto vácuo não trivial (relacionado à várias circunstâncias, como efeitos da temperatura, condições de contorno particulares, polarização quântica, e muito mais), o movimento da luz pode ser visto como ondas eletromagnéticas propagando-se através de um meio dispersivo. Isto é, o meio induz modificações nas equações de movimento [22, 23], neste contexto os fótons se propagam ao longo de geodésicas que não são mais nulas no espaço-tempo de Minkowski.

As modificações sofridas pelas equações de movimento, remetem a uma descrição do campo eletromagnético em termos de não-linearidades. Neste caso, os efeitos desta modificação do campo podem ser descritos (simulados) por uma lagrangiana eficaz que depende apenas dos dois invariantes de calibre F e G . Esta descrição é chamada de geometria efetiva ou simplesmente de métrica efetiva [24, 25, 26].

A métrica efetiva é entendida como a geometrização da interação entre um campo eletromagnético externo de fundo auto-interagente e uma perturbação plana infinitesimal do tipo onda que gera certas modificações na propagação da luz [24, 25, 26].

A abordagem geral de todas teorias do eletromagnetismo não-linear é baseada em uma ação efetiva invariante de calibre, que leva em consideração a contagem de modificações da eletrodinâmica de Maxwell induzida por diferentes tipos de processos. Tal procedimento tendia a lidar com o vácuo quântico como se fosse um meio clássico. Outra consequência importante de tal ponto de vista é a possibilidade de interpretar todas essas modificações de vácuo no que diz respeito a propagação do fóton como uma mudança efetiva das propriedades da métrica do espaço-tempo. Este resultado permite apelar para uma analogia com a propagação de ondas eletromagnéticas em espaço-tempo curvos devido à fenômenos gravitacionais [23].

3.2.3 Construção da métrica efetiva no eletromagnetismo não-linear

Modificações de propagação de luz mostram que, na presença do vácuo não trivial, o movimento da luz pode ser visto como ondas eletromagnéticas propagando-se através de um meio dispersivo. O meio induz modificações nas equações de movimento, que são descritas em termos de não linearidades do campo, portanto, em tal estrutura não linear, os fótons se propagam ao longo de curvas não geodésicas no espaço-tempo de Minkowski, mas em geodésicas nulas em outra geometria efetiva [23, 24, 25, 26]. Neste caso, os efeitos podem ser simulados por uma lagrangiana efetiva que depende apenas dos dois invariantes de calibre F e G do campo eletromagnético, definidos pelas equações (2.25) e (2.26), respectivamente.

Todavia, para o presente trabalho nos limitaremos apenas no lagrangiano do parâmetro F (\mathcal{L}_F), pois se mostrou suficiente em termos de informações para o nosso tipo de abordagem.

3.2.3.1 Lagrangiana do parâmetro F

Partindo da equação

$$(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu})_{,\nu} = \mathcal{L}_{F,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_F F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (3.17)$$

vamos analisar algumas soluções desta equação por meio de duas abordagens distintas que são: a linearização e a aproximação eikonal.

3.2.3.2 Linearização

Partimos do princípio de que se $F_{\mu\nu}$ é solução exata da equação (3.17) se uma pequena perturbação a esta solução do tipo $\delta F_{\mu\nu}$ também for solução, então podemos escrever uma solução geral na forma

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

Considerando que $\delta F_{\mu\nu} \ll F_{\mu\nu}$ e a perturbação é tão pequena, tal que $\delta F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = 0$. Portanto, em termos da perturbação a equação (3.17) pode ser reescrita

$$\delta(\mathcal{L}_{F,\nu} F^{\mu\nu}) + \delta(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}_{,\nu}) = 0$$

sendo

$$\partial_\nu \mathcal{L}_F = \partial_\nu F \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial F}$$

Entretanto,

$$\delta(\mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} F^{\mu\nu}) + \delta(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}_{,\nu}) = 0 \quad (3.19)$$

Desenvolvendo por parte as parcelas da equação (3.19), tem-se

$$\delta(\mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} F^{\mu\nu}) = (\delta\mathcal{L}_{FF}) F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} (\delta F_{,\nu}) F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} (\delta F^{\mu\nu})$$

$$\delta(\mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} F^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{FFF} \delta F F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} \delta F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} \delta F^{\mu\nu} \quad (3.20)$$

e, por sua vez,

$$\delta(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}_{,\nu}) = (\delta\mathcal{L}_F) F^{\mu\nu}_{,\nu} + \mathcal{L}_F (\delta F^{\mu\nu}_{,\nu})$$

$$\delta(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu}_{,\nu}) = \mathcal{L}_{FF} \delta F F^{\mu\nu}_{,\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na equação (3.19), tem-se

$$\mathcal{L}_{FFF} \delta F F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} \delta F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} \delta F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} \delta F F^{\mu\nu}_{,\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (3.22)$$

Para continuarmos a desenvolver a equação (3.22), precisamos inicialmente conhecer o valor de F e δF . Lembrando que para este caso estamos a considerar uma solução geral representada simbolicamente pelo tensor de Faraday precedido por um traço por cima. Portanto, pelas análises anteriores, busca-se a partir de

$$F = \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} = (F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu})$$

$$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}$$

$$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} \quad (3.23)$$

e

$$\delta F = \delta(\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}) = (\delta \bar{F}_{\mu\nu}) \bar{F}^{\mu\nu} + \bar{F}_{\mu\nu} (\delta \bar{F}^{\mu\nu})$$

$$\delta F = (\delta F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu}) + (F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu})(\delta F^{\mu\nu} + \delta^2 F^{\mu\nu})$$

$$\delta F = (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) + (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta^2 F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu})$$

$$\delta F = \delta F_{\mu\nu} (F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu}) + (F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}) \delta F^{\mu\nu}$$

$$\delta F = \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\delta F = 2F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

Uma vez conhecido o valor de δF , podemos reescrever a equação (3.22), como

$$\mathcal{L}_{FFF} \delta F F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} \delta F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} \delta F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} \delta F F^{\mu\nu}_{,\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

$$2\mathcal{L}_{FFF} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} \delta F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} F_{,\nu} \delta F^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{FF} \delta F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}_{,\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

$$2\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (\mathcal{L}_{FFF} F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu}_{,\nu}) + \mathcal{L}_{FF} (\delta F_{,\nu} F^{\mu\nu} + F_{,\nu} \delta F^{\mu\nu}) + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (3.25)$$

Portanto, para que a igualdade da equação acima se verifique, entende-se que todos termos entre parenteses juntamente com o último termo, sejam iguais a zero.

3.2.3.3 Aproximação Eikonal

Para se estudar o comportamento dos raios de luz na óptica geométrica, um dos métodos que tem sido eficiente é a chamada aproximação eikonal [10]. Semelhantemente, vamos aplicar a aproximação eikonal como um método de solução da equação (3.17), sendo que consideramos

$$\delta F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} e^{i\Sigma(x)} \quad (3.26)$$

onde $f_{\mu\nu}$ é a amplitude da solução e $\Sigma(x)$ corresponde a fase. Entretanto, considerando um vetor de onda dado por

$$k_\alpha = \Sigma(x)_{,\alpha} \quad (3.27)$$

fazendo:

$$\begin{aligned} (\delta F_{\mu\nu})_{,\alpha} &= (f_{\mu\nu} e^{i\Sigma(x)})_{,\alpha} \\ (\delta F_{\mu\nu})_{,\alpha} &= (f_{\mu\nu})_{,\alpha} e^{i\Sigma(x)} + (f_{\mu\nu} e^{i\Sigma(x)}) i k_\alpha \end{aligned} \quad (3.28)$$

Suponhamos que a variação da fase da onda seja muito maior que a de sua amplitude, tal que $(f_{\mu\nu})_{,\alpha} = 0$, quando se considera pequenos comprimentos de onda. Portanto, da equação (3.27) resulta

$$(\delta F_{\mu\nu})_{,\alpha} = i \delta F_{\mu\nu} k_\alpha \quad (3.29)$$

Finalmente podemos reescrevermos a equação de movimento

$$\mathcal{L}_{FF} \delta F_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

$$\mathcal{L}_{FF} (2F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta})_{,\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

$$2\mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta,\nu} \delta F^{\alpha\beta} + 2\mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta}_{,\nu} + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

$$2i \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta} k_\nu + i \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu} k_\nu = 0$$

Portanto

$$2 \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta} k_\nu + \mathcal{L}_F \delta F^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (3.30)$$

3.2.4 Descontinuidade do campo não-linear

Vamos começar por considerar algumas propriedades de propagação na teoria não-linear. Partindo do princípio de que vale para esta teoria as equações de movimento

$$(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (3.31)$$

$$F_{\alpha\beta,\nu} + F_{\nu\alpha,\beta} + F_{\beta\nu,\alpha} = 0 \quad (3.32)$$

Se escrevermos mais uma vez $\delta F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{i\Sigma}$; $(\delta F^{\mu\nu})_{,\nu} = i\delta f_{\mu\nu} k_\nu$, podemos reescrever as equações (3.30) e (3.32), respectivamente

$$2 \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu} f_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} k_\nu + \mathcal{L}_F f^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (3.33)$$

$$f_{\alpha\beta} k_\nu + f_{\nu\alpha} k_\beta + f_{\beta\nu} k_\alpha = 0 \quad (3.34)$$

Tomando $f_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \eta$ e $k_\alpha k^\alpha = k^2 = g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta$, podemos multiplicar a equação (3.34) por k^ν onde resulta que

$$f_{\alpha\beta} k^2 + f_{\nu\alpha} k_\beta k^\nu + f_{\beta\nu} k_\alpha k^\nu = 0 \quad (3.35)$$

Multiplicando ainda a equação (3.34) por $F^{\alpha\beta}$, vem

$$\eta k^2 - f_{\alpha\nu} F^{\alpha\beta} k_\beta k^\nu - f_{\alpha\nu} F^{\alpha\beta} k_\beta k^\nu = 0 \quad (3.36)$$

Depois de todas manipulações algébricas, a equação (3.36), resulta em

$$\eta k^2 - 2f_{\alpha\mu} k^\alpha F^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (3.37)$$

Por sua vez, a equação (3.33), ainda pode ser também reescrita na forma

$$\mathcal{L}_F f^{\mu\nu} k_\nu + 2 \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\nu} \eta k_\nu = 0$$

$$f^{\mu\alpha} k_\alpha = -\frac{2\eta}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\alpha} k_\alpha \quad (3.38)$$

Substituindo esta última expressão na equação (3.37), vem

$$\eta k^2 + 2 \left(-\frac{2\eta}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\alpha} k_\alpha \right) F_{\mu\nu} k^\nu = 0$$

$$\eta \left(k^2 - \frac{4}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\alpha} F_{\mu\beta} k_\alpha k^\beta \right) = 0 \quad (3.39)$$

Considerando a condição imposta anteriormente, podemos fatorar a equação (3.39). Portanto, podemos reescrever esta equação como

$$\eta \left(g^{\alpha\beta} - \frac{4}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} F^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta} \right) k_\alpha k_\beta = 0$$

$$\left(\mathcal{L}_F g^{\alpha\beta} - 4 \mathcal{L}_{FF} F^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta} \right) k_\alpha k_\beta = 0; \quad (\text{tomando } \eta \neq 0) \quad (3.40)$$

No caso de uma teoria não linear, a dispersão não é compatível com a da teoria de Maxwell, fazendo com que a equação (3.40) sugira uma interpretação que leve a considerar a auto-interação do campo de fundo $F^{\mu\nu}$; em que tal interação concerne nas discontinuidades de propagação eletromagnética, como se tivesse induzido uma modificação na métrica do espaço-tempo, levando à geometria efetiva. Portanto, esta pode ser escrita na forma

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - 4 \frac{\mathcal{L}_{FF}}{\mathcal{L}_F} F^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta} \quad (3.41)$$

Sendo que por simplicidade definimos que $N = -\frac{4 \mathcal{L}_{FF}}{\mathcal{L}_F}$. Portanto

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + N F^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta} \quad (3.41a)$$

A equação (3.41a) representa a chamada *métrica efetiva*.

Por sua vez, a equação (3.40) pode ser reescrita de forma simples

$$\eta \hat{g}^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 \quad (3.42)$$

ou simplesmente

$$\hat{g}^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 \quad (3.43)$$

A equação (3.43) representa a chamada *relação de dispersão da métrica efetiva*.

Sabe-se por definição que

$$\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (3.44)$$

Onde por analogia para o inverso da métrica efetiva pode-se assumir que

$$\hat{g}_{\alpha\nu} = Ag_{\alpha\nu} + BF_\alpha^\gamma F_{\gamma\nu} \quad (3.45)$$

Para facilitar os cálculos, consideremos duas identidades algébricas importantes que são:

$$1) \quad \hat{F}^{\mu\alpha} \hat{F}_{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} F \delta^\mu_\nu \quad (3.46)$$

$$2) \quad \hat{F}^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = -\frac{1}{4} G \delta^\mu_\nu \quad (3.47)$$

Portanto

$$\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = A \mathcal{L}_F \delta^\mu{}_\nu + B \mathcal{L}_F F^{\mu\gamma} F_{\gamma\nu} - 4A \mathcal{L}_{FF} F^{\mu\gamma} F_{\gamma\nu} - 4B \mathcal{L}_{FF} F^\mu{}_\beta F^{\alpha\beta} F_\alpha{}^\gamma F_{\gamma\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

$$\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = A \mathcal{L}_F \delta^\mu{}_\nu + F^{\mu\gamma} F_{\gamma\nu} (B \mathcal{L}_F - 4A \mathcal{L}_{FF}) - 4B \mathcal{L}_{FF} F^\mu{}_\beta F^{\alpha\beta} F_\alpha{}^\gamma F_{\gamma\nu} = \delta^\mu{}_\nu \quad (3.48)$$

Recorrendo às identidades definidas $\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu$, temos que

$$i) A \mathcal{L}_F - \frac{1}{4} B \mathcal{L}_{FF} = 1 \quad (3.49)$$

$$ii) B \mathcal{L}_F - 4A \mathcal{L}_{FF} + 2B \mathcal{L}_{FF} = 0 \quad (3.50)$$

sendo $N = -\frac{4 \mathcal{L}_{FF}}{\mathcal{L}_F}$ depois de efetuadas todas as passagens as constantes A e B são dadas por

$$A = \frac{1}{\mathcal{L}_F} + \frac{1}{16} \left[\frac{N^2}{\mathcal{L}_F \left(1 - \frac{N}{2} - \frac{N^2}{16}\right)} \right] \quad e \quad B = - \left[\frac{N}{\mathcal{L}_F \left(1 - \frac{N}{2} - \frac{N^2}{16}\right)} \right]$$

3.2.5 Lagrangiano de dois parâmetros F e G

Para este caso, a lagrangiana é função de F e G, tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F, G)$, portanto as equações de movimento tomam a forma

$$(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_G \hat{F}^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (3.51)$$

Aplicando o procedimento análogo ao aplicado na Lagrangiano de F e efetuada toda análise algébrica necessária, teremos a métrica efetiva escrita na forma

$$\hat{g}_\pm^{\mu\nu} = \mathcal{L}_F g^{\mu\nu} - 4[(\mathcal{L}_{FF} - \Omega_\pm \mathcal{L}_{FG}) F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + (\mathcal{L}_{FG} + \Omega_\pm \mathcal{L}_{GG}) F^\mu{}_\lambda \hat{F}^{\lambda\nu}] \quad (3.51)$$

E por sua vez a relação e dispersão será

$$\hat{g}_{\pm}^{\mu\nu} k_{\alpha} k_{\beta} = 0 \quad (3.53)$$

onde Ω_{\pm} define-se como uma quantidade cujos valores possíveis estão associados à relação de dispersão da eq. (3.53).

3.2.6 Paralelo entre a métrica efetiva e a métrica do espaço-tempo de Minkowski

De toda análise feita acima, podemos inferir que a estrutura não-linear das equações apresentadas deve-se a auto-interação de um campo eletromagnético de fundo consigo próprio e com uma perturbação do tipo onda que se propaga neste campo. Portanto, isto afeta a propagação da radiação, que em princípio deveria satisfazer apenas a métrica de Minkowski [20]. Dado este fato, aplica-se uma nova forma de geometrizar esta interação que permeia o espaço-tempo, que é a chamada métrica efetiva descrita nas equações (3.41a) e (3.45).

Adotar uma descrição de métrica efetiva que é a geometrização da interação de campos implica empregar as ferramentas da teoria da relatividade geral. Entretanto, é razoável esperar que o acoplamento mínimo aplicado a métrica do espaço-tempo, também possa ser aplicado a métrica efetiva.

Para efeitos de comparação entre os significados físicos das duas métricas, afirma-se que $g^{\alpha\beta}$ descreve como uma fonte de campo gravitacional e com carga afeta o movimento de partículas. Ao passo que a métrica efetiva $\hat{g}^{\alpha\beta}$ leva em conta os efeitos dos campos gravitacionais e eletromagnético de fundo, indicando o caminho percorrido pelo fóton [20, 22].

Capítulo 4

4 COMPORTAMENTO GEODÉSICO DA RADIAÇÃO NÃO-LINEAR

As teorias não-lineares do eletromagnetismo são de um modo geral caracterizadas pelo fenómeno da auto-interação, que é caracterizado pela existência de um campo externo (campo de fundo) $F^{\mu\nu}$ que age sobre $\delta F^{\mu\nu}$ que é uma pequena perturbação do tipo onda e não interagente consigo próprio e, que se propaga no campo de fundo de $F^{\mu\nu}$ [20, 21, 22, 23]. Neste capítulo abordaremos aspectos relacionados a propagação de campos eletromagnéticos não lineares, com referência nas possíveis configurações do campo em dependência do comportamento dos invariantes F e G, como consequência da influência do campo de fundo.

4.1 Propagação da radiação não-linear

Partindo do fenómeno da auto-interação, resulta um campo completo escrito na forma

$$f^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

Vemos claramente que a equação (4.1) é análoga a equação (3.18), obtida no capítulo anterior e demonstrou-se que aplicada a equação de movimento

$$(\mathcal{L}_F f^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (4.2)$$

que por manipulações algébricas e considerando certas propriedades do campo não-linear, construiu-se a métrica efetiva dada por

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + NF^\alpha{}_\mu F^{\mu\beta} \quad (4.3)$$

podemos construir a inversa da métrica efetiva descrita por analogia na equação (3.44). Partindo de $\hat{g}^{\mu\alpha}\hat{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, podemos mostrar que

$$\hat{g}_{\alpha\nu} = Ag_{\alpha\nu} + BF_\alpha{}^\gamma F_{\gamma\nu} \quad (4.4)$$

4.1.1 Geodésicas nulas na métrica efetiva

Imaginemos que estejamos a escrever o espaço de Minkowski em coordenadas arbitrárias de modo que nos permite escrever a relação de dispersão em termos de

$$g^{\mu\nu}\ell_\mu\ell_\nu = 0 \quad (4.5)$$

isto permite escrever a equação da geodésica nesta métrica na forma

$$\ell^\mu{}_{;\nu}\ell^\nu = 0 \quad (4.6)$$

onde uma geodésica nula além de satisfazer a equação (4.5), satisfaz também a condição imposta na equação (4.6).

No caso da métrica efetiva, vimos que existe uma relação de dispersão dada por

$$\hat{g}^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0 \quad , \text{ com } \Sigma_{,\mu} = k_\mu \quad (4.7)$$

onde podemos definir

$$p^\mu = \hat{g}^{\mu\nu}k_\nu \quad (4.8)$$

de modo que

$$\hat{g}_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad (4.9)$$

Definimos também a chamada conexão efetiva dada por

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} (\hat{g}_{\beta\mu,\nu} + \hat{g}_{\nu\beta,\mu} - \hat{g}_{\mu\nu,\beta}) \quad (4.10)$$

sendo que

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\mu} \quad (4.11)$$

ou seja, a conexão é simétrica.

Podemos representar a derivada covariante efetiva simbolicamente por (\parallel), onde temos

$$i) \quad A^{\alpha}_{\parallel\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\beta} A^{\lambda} \quad (4.12)$$

$$ii) \quad A_{\alpha\parallel\beta} = A_{\alpha,\beta} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} A_{\lambda} \quad (4.13)$$

$$iii) \quad A_{\alpha\beta\parallel\lambda} = A_{\alpha\beta,\lambda} - \hat{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\lambda} A_{\gamma\beta} - \hat{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\lambda} A_{\alpha\gamma} \quad (4.14)$$

Em particular pode-se mostrar

$$\hat{g}_{\alpha\beta\parallel\lambda} = 0, \quad \hat{g}^{\alpha\beta}_{\parallel\lambda} = 0 \quad (4.15)$$

que é a chamada *condição de metricidade*.

Entretanto, derivando a relação de dispersão, tem

$$(\hat{g}^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu})_{\parallel\alpha} = 0$$

$$\hat{g}^{\mu\nu}_{\parallel\alpha} k_{\mu} k_{\nu} + \hat{g}^{\mu\nu} k_{\mu\parallel\alpha} k_{\nu} + \hat{g}^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu\parallel\alpha} = 0 \quad (4.16)$$

da equação (4.16) podemos tirar as seguintes conclusões

Conclusão 1

$$\hat{g}^{\mu\nu} k_{\mu\parallel\alpha} k_{\nu} = 0 \quad (4.17)$$

Conclusão 2

Sendo que $\Sigma_{,\mu} = k_{\mu}$, o que nos permite escrever

$$k_{\mu\parallel\nu} = k_{\mu,\nu} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} k_{\alpha} \quad (4.18)$$

e

$$k_{\nu\parallel\mu} = k_{\nu,\mu} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\mu} k_{\alpha} \quad (4.19)$$

sendo

$$k_{\mu\parallel\nu} - k_{\nu\parallel\mu} = \Sigma_{,\mu\parallel\nu} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} \Sigma_{,\alpha} - (\Sigma_{,\nu\parallel\mu} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\mu} \Sigma_{,\alpha}) = 0$$

Portanto conclui-se que

$$k_{\mu\parallel\nu} = k_{\nu\parallel\mu} \quad (4.20)$$

válido para todo gradiente.

Conclusão 3

$$\hat{g}^{\mu\nu} k_{\alpha\parallel\mu} k_{\nu} = 0 \quad (5.21)$$

Conclusão 4

Sendo que, por definição, $p^{\mu} = \hat{g}^{\mu\nu} k_{\nu}$, então tem-se

$$p^{\mu}{}_{\parallel\alpha} = \hat{g}^{\mu\nu} k_{\nu\parallel\alpha} = \hat{g}^{\mu\nu} k_{\alpha\parallel\nu} \quad (5.22)$$

portanto

$$\hat{g}^{\alpha\beta}(k_{\alpha \parallel \mu} p^{\mu}) = (\hat{g}^{\alpha\beta} k_{\alpha})_{\parallel \mu} p^{\mu} = 0$$

$$p^{\beta}_{\parallel \mu} p^{\mu} = 0 \quad (4.23)$$

que é a equação da geodésica na métrica efetiva que equivale a equação (4.6) na métrica de Minkowski. Podemos ainda escrever a equação (4.22) de forma mais aberta de modo a mostrar que trata-se da equação da geodésica nula apresentada no capítulo 1 pela expressão $\frac{d^2 x^{\rho}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0$. Assim, tomando $p^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$, a equação da geodésica pode ser escrita

$$(p^{\beta}_{\parallel \mu} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} p^{\nu}) p^{\mu} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} p^{\beta} \right) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \quad (4.24)$$

ou simplesmente

$$\frac{d^2 x^{\beta}}{d\lambda^2} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \quad (4.24)$$

e

$$\hat{g}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \quad (4.25)$$

4.1.2 Particularidades dos invariantes F e G , na propagação da radiação não-linear

Vimos que existem apenas dois invariantes do campo eletromagnético que são

$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ e $G = F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Conforme mostrado nas equações (2.25) e (2.26), respectivamente. Portanto, podemos tomar duas considerações particulares:

i)-Degenerescência

Se

$$F = G = 0 \quad (4.26)$$

Isto implica que $E^2 = B^2$ e $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Entretanto a radiação eletromagnética é descrita pelas leis de Maxwell e tem a forma conhecida como se apresenta na figura 4

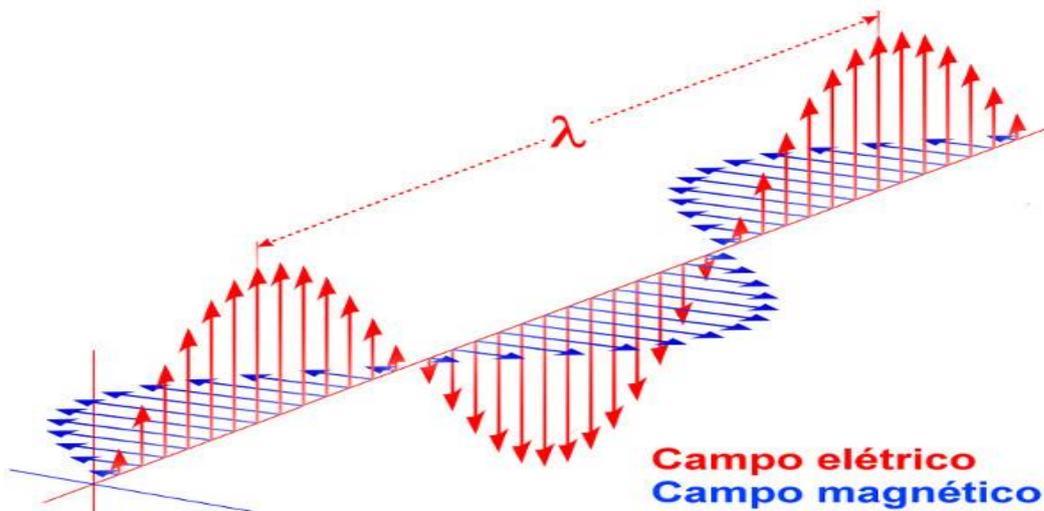


Figura 3 Radiação eletromagnética (Researchgate.net)

ii)-Configuração plana

Se pelo menos um dos invariantes for diferente de zero, para estudarmos a métrica efetiva vamos nos restringir a configuração nula. Portanto, podemos reescrever o tensor campo eletromagnético como

$$F_{\mu\nu} = a_\mu \ell_\nu - a_\nu \ell_\mu \quad (4.27)$$

Sendo que $a_\mu a^\mu < 0$; $a_\mu \ell^\mu = 0$ e $\ell_\mu \ell^\mu = 0$, onde a_μ está ligado com a polarização da onda, sendo chamado vetor polarização e ℓ_μ , é o vetor propagação.

Podemos mostrar na NLED que

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (a_\mu\ell_\nu - a_\nu\ell_\mu)(a^\mu\ell^\nu - a^\nu\ell^\mu) = F \\ F^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(a^\alpha\ell^\beta - a^\beta\ell^\alpha)(a^\mu\ell^\nu - a^\nu\ell^\mu) = G \end{cases} \quad (4.28)$$

Desenvolvendo separadamente estas expressões, tem-se

$$F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2a_\mu\ell_\nu(-a^\nu\ell^\mu) \quad (4.29)$$

e

$$G = F^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}a^\alpha\ell^\beta a^\mu\ell^\nu = 0 \quad (4.30)$$

Todavia, estamos interessados no caso em que $F = 0$ e $G = 0$, onde por hipótese supõe-se que a derivada covariante de $F_{\mu\nu}$ é nulo, quer dizer

$$\mathcal{L}_F(F^{\mu\nu})_{,v} = 0 ; \quad (F^{\mu\nu})_{,v} = 0.$$

Isto considerando \mathcal{L}_F constante.

Toda solução nula das equações de Maxwell também é uma solução nula numa teoria não-linear.

Lembrando que definimos a métrica efetiva como $\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + NF^\mu_\alpha F^{\alpha\nu}$ e sendo que o tensor de campo o redefinimos na forma $F_{\mu\nu} = a_\mu\ell_\nu - a_\nu\ell_\mu$ e aplicando as relações $a_\mu a^\mu < 0$; $a_\mu\ell^\mu = 0$ e $\ell_\mu\ell^\mu = 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} &= (a^\mu\ell_\alpha - a_\alpha\ell^\mu)(a^\alpha\ell^\nu - a^\nu\ell^\alpha) = -(a_\alpha a^\alpha)\ell^\mu\ell^\nu \\ F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} &= a^2\ell^\mu\ell^\nu \end{aligned} \quad (4.31)$$

Portanto, podemos reescrever a métrica efetiva como

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + Na^2\ell^\mu\ell^\nu \quad (4.32)$$

Se considerarmos

$$Na^2 = H(x)$$

onde

$$H(x) \equiv \frac{4}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF}(a_\mu a^\mu) \quad (4.33)$$

Então escrevemos

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + H(x)\ell^\mu\ell^\nu \quad (4.34)$$

A equação (4.34) é a métrica efetiva representada na forma da *métrica de Kerr-Schild*.

Podemos escrever esta métrica esta métrica com índices covariantes e a partir de $\hat{g}^{\mu\alpha}\hat{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, estabelecer a relação entre A e H

$$(g^{\mu\nu} + H\ell^\mu\ell^\nu)(g_{\alpha\nu} + A\ell_\mu\ell_\nu) = \delta^\mu_\alpha$$

$$\delta^\mu_\alpha + Ag^{\mu\nu}\ell_\alpha\ell_\nu + Hg_{\alpha\nu}\ell^\mu\ell^\nu + AH\ell_\alpha\ell^\mu\ell_\nu\ell^\nu = \delta^\mu_\alpha \quad (4.35)$$

Portanto, considerando as relações $a_\mu a^\mu < 0$; $a_\mu \ell^\mu = 0$ e $\ell_\mu \ell^\mu = 0$, podemos inferir de (4.29) que $A = -H$.

Então

$$\hat{g}_{\alpha\nu} = g_{\alpha\nu} - H\ell_\alpha\ell_\nu \quad (4.36)$$

4.2 Influência do campo de fundo na propagação da radiação

A existência de um campo externo de fundo $F^{\mu\nu}$ e o resultado de sua interação com uma pequena perturbação $\delta F^{\mu\nu}$ numa visão geral constitui o principal foco do presente estudo, sendo que esta interação produz uma propagação dos campos, fora das equações de Maxwell. Uma das consequências diretas é o *desvio geodésico de um raio luminoso*. Quer dizer, devido a configuração dos campos o raio de luz já não segue linhas retas, mas sim descreve geodésicas nulas como demonstrado acima através da métrica efetiva. Neste caso, o comportamento da luz no passado, presente e futuro é governado pela equação

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + NF^\alpha_\mu F^{\mu\beta} \quad (4.37)$$

pois a métrica de Minkowski já não mais satisfaz a descrição do comportamento da luz, salvo em certos casos excepcionais. Portanto, o campo de fundo se comporta como se fosse um plano

de refração da luz, porém móvel dispersando os raios de luz em cada ponto, processo que pode ser muito útil no estudo de eventos que ocorrem no espaço-tempo curvo, por analogia.

4.2.1 Forma do cone de luz

O cone de luz de Minkowski num certo ponto é definido como

$$C_M = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad (4.38)$$

Para o caso da métrica efetiva, podemos partir do mesmo raciocínio que se apresenta na equação (4.38), substituindo apenas $g_{\mu\nu}$ por $\hat{g}_{\mu\nu}$, entretanto:

$$C_E = \hat{g}_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad (4.39)$$

Onde C_E representa o cone de luz efetivo e $\hat{g}_{\mu\nu}$ é a já conhecida métrica efetiva dada como se apresenta na equação (4.35) e substituindo esta equação em (4.39), vem

$$C_E = (g_{\mu\nu} - H\ell_\mu\ell_\nu)p^\mu p^\nu = 0$$

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu - H\ell_\mu\ell_\nu p^\mu p^\nu = 0$$

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = H(\ell_\mu p^\mu)^2 \quad (4.40)$$

Da equação (4.34), faz-se a seguinte análise:

- $H > 0 \rightarrow \frac{1}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} < 0$, para velocidades menores ou iguais à velocidade da luz;

- $H < 0 \rightarrow \frac{1}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} > 0$, para velocidades maiores ou iguais à velocidade da luz.

Entretanto, abrindo a expressão do lado direito da equação (4.34), tem-se

$$H(\ell^\mu p^\mu)^2 = H(\ell^0 p^0 - \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{p})^2 \quad (4.41)$$

Sendo que por definição

$$\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{p} = \ell^1 p^1 + \ell^2 p^2 + \ell^3 p^3 = \ell p \cos \theta \quad (4.42)$$

Voltando para a equação (4.40), podemos reescrevê-la

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = H(\ell^\mu p^\mu)^2$$

$$(p^\mu)^2 = H(\ell^0 p^0 - \ell p \cos \theta)^2 \quad (4.43)$$

Considerando

$(\ell^\mu)^2 = (\ell^0)^2 - \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\ell} = 0$ e $\ell^0 = \ell$, e tomando em particular $\ell^0 = p^0 = 1$, tem-se

$$1 - p^2 = H(1 - p \cos \theta)^2 \quad (4.44)$$

A equação (4.44), descreve o comportamento do cone efetivo, cuja forma se apresenta na figura abaixo.

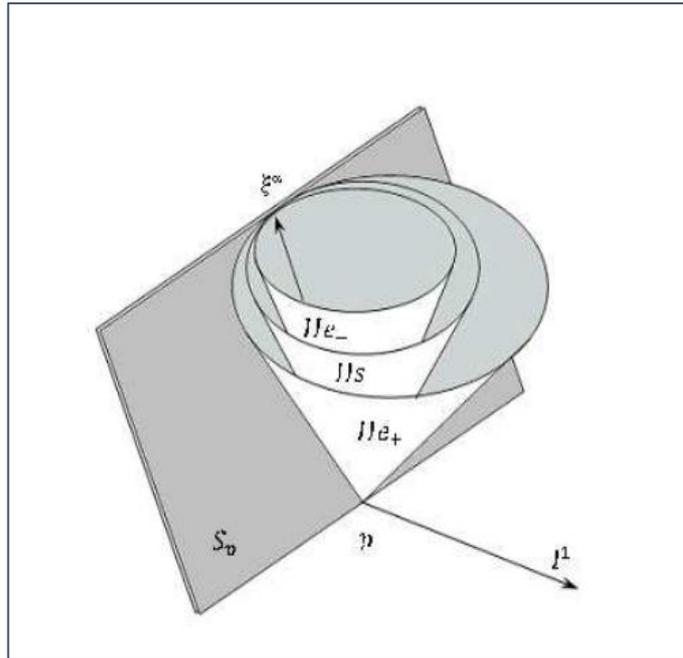


Figura 4- Forma do cone de luz na métrica efetiva

Capítulo 5

5 SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA LUZ PELA MÉTRICA EFETIVA

A interação não-linear entre os campos eletromagnéticos (EMF) ocorre quando a polarização do vácuo em eletrodinâmica quântica (QED) acontece. Todavia o campo eletromagnético não-linear que pode resultar dessa interação pode constituir uma base para se estudar eventos gravitacionais na teoria eletrodinâmica, bem como abrir a possibilidade de realizar experiências sobre a TRG em laboratórios terrestres.

5.1 Algumas teorias alternativas a gravitação

São assim chamadas por investigarem a possibilidade de se geometrizar alguns aspectos da relatividade geral, identificando algumas propriedades típicas da geometria Riemanniana em sistemas físicos de naturezas diversas e utilizar analogias para simular aspectos da teoria gravitacional de Einstein em laboratórios terrestres [21; 22, 23, 24,].

O estudo de modelos análogos à gravitação, depende em grande parte do grau de profundidade dos aspectos gravitacionais que se exploram e principalmente da métrica efetiva utilizada quando se olha para a propagação de flutuações em torno de alguma solução de fundo para as equações de movimento de qualquer sistema dinâmico [25, 26, 27, 28, 29, 30].

Dentre os sistemas clássicos e quânticos mais estudados recentemente, citam-se: a acústica de fluidos em movimento, óptica em meios dielétricos não-lineares, sistemas lagrangianos com muitos graus de liberdade, eletrodinâmica não-linear, física de superfluidos e hélio líquido e condensado de Bose-Einstein [25, 27, 28,].

No caso da eletrodinâmica não-linear substitui-se a lagrangiana da eletrodinâmica de Maxwell por uma função mais complicada de campo, resultando nas eletrodinâmicas não-lineares já referenciadas no quarto capítulo. Entretanto, as não linearidades na equação de campo resultante tem origem nos efeitos que levam os fótons a seguir geodésicas de uma métrica efetiva, que é uma função algébrica associada ao campo eletromagnético de fundo.

Ao estudar e simular em laboratórios terrestres eventos gravitacionais, como um buraco negro análogo por exemplo, especificamente horizontes de eventos e ergoregiões, pode-se recorrer a qualquer um desses modelos.

5.2 Desvio da luz pela métrica efetiva

O desvio da luz (assim como o desvio para o vermelho) é abordado como consequência do princípio de equivalência, na teoria gravitacional. Contudo, o seu valor pode ser obtido conhecendo-se a métrica do espaço-tempo local.

Um raio de luz emitido sofre uma certa deflexão nas proximidades da superfície de um objeto massivo, descrevendo as conhecidas geodésicas tipo luz $ds^2 = 0$. Na relatividade geral a órbita da luz é determinada a partir da métrica de Schwarzschild e é dada por [34, 35, 36]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos\phi + \frac{m}{r_0^2} (1 + \sin^2\phi) \quad (5.1)$$

Onde sob considerações próprias de cálculo, a deflexão de um raio de luz será

$$\delta = 2\alpha \quad (5.2)$$

sendo α o ângulo de emissão e vale $\alpha = \frac{2m}{r_0}$.

Na utilização da métrica efetiva, em particular, e, uma vez que os raios eletromagnéticos em uma teoria não-linear coincidem com as geodésicas nulas de um espaço efetivo de métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$, podemos descrevê-los a partir do princípio variacional

$$\delta \int d\hat{s} = 0 \quad (5.3)$$

onde o comprimento fundamental é construído com a métrica dada por

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.4)$$

No caso em que a geometria do *background* não é Minkowskiana, a métrica efetiva tem a mesma estrutura com a substituição natural de $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica curva (gravitacional) correspondente [5, 37].

Uma vez que a métrica efetiva usada na análise geral do presente trabalho é descrita em função da langragiana que depende apenas do invariante F, como já foi apresentado no quarto capítulo e, sendo que esta tem simetria esférica, o caminho dos raios de luz (fótons) torna-se

$$\delta \int (\hat{g}_{tt}\dot{t}^2 + \hat{g}_{rr}\dot{r}^2 + \hat{g}_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + \hat{g}_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2) ds = 0 \quad (5.5)$$

onde o ponto sobre os quadrados de t, r, θ e φ indica a derivada com relação a s .

Para a variável θ , a equação mostra que pode-se escolher convenientemente a condição de tal maneira que esta permaneça constante, onde assumimos $\theta = \pi/2$ por analogia com o movimento planetário [5, 34, 37]. Entretanto, as equações de movimento correspondentes para as outras variáveis são

$$r^2\dot{\varphi} = h_0 \quad (5.6)$$

$$\hat{g}_{tt}\dot{t} = E_0 \quad (5.7)$$

Onde h_0 e E_0 são constantes do movimento. É conveniente obter a equação para r utilizando-se do fato de que estamos lidando com uma curva nula no espaço-tempo efetivo. Portanto

$$\hat{g}_{tt}\dot{t}^2 + \hat{g}_{rr}\dot{r}^2 + \hat{g}_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + \hat{g}_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (5.8)$$

Então, usando as equações acima para a evolução de t, r e φ , obtemos

$$\dot{r}^2 = E_0^2 - V(r) \quad (5.9)$$

onde o potencial toma a forma

$$V(r) = \hat{g}_{tt} \frac{E_0^2}{\hat{g}_{tt}^2} + \frac{\hat{g}_{rr} \dot{r}^2}{\hat{g}_{tt}} + r^2 \frac{h_0^2}{r^4} = 0 \quad (5.10)$$

As equações acima admitem a possibilidade de que existam órbitas circulares para os raios de luz, isto é $r = r_0 = \text{constant}$. Neste caso, é suficiente que o valor da componente tt -da métrica efetiva no ponto r_0 tome o valor

$$\hat{g}_{tt}(r_0) = \frac{1}{b^2} r_0^2 \quad (5.11)$$

onde temos, por comparação com o movimento planetário, o parâmetro de impacto

$$b \doteq \frac{h_0}{E_0} \quad (5.12)$$

5.3 Ensaando um horizonte de eventos usando a métrica efetiva

De um modo geral, a nossa análise no presente trabalho consiste em obter $a_\mu(x)$ e $\ell_\mu(x)$, tal que a métrica efetiva $\hat{g}_{\mu\nu}$ coincida com a métrica de Schwarzschild, sendo que nesta $a_\mu(x)$ e $\ell_\mu(x)$, dependem do ponto.

Vimos que as equações de movimento são dadas segundo (3.30) e (3.31), respectivamente. Buscamos por uma solução nula, isto é, do tipo

$F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$ e $G = F_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} = 0$, onde $F_{\mu\nu} = a_\mu\ell_\nu - a_\nu\ell_\mu = a_{[\mu}\ell_{\nu]}$ com $a_\mu a^\mu < 0$; $a_\mu\ell^\mu = 0$ e $\ell_\mu\ell^\mu = 0$. Como $\mathcal{L}_F(0)$ é uma constante, entretanto temos

$$(F^{\mu\nu})_{,v} = 0; \quad a^\mu{}_{,v}\ell^\nu + a^\nu\ell^\mu{}_{,v} - a^\nu{}_{,v}\ell^\mu - a^\nu\ell^\mu{}_{,v} = 0 \quad (5.13)$$

e

$$(\hat{F}^{\mu\nu})_{,v} = 0; \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(a_{\alpha,v}\ell_\beta + a_\alpha\ell_{\beta,v}) = 0 \quad (5.14)$$

Consideremos agora uma onda plana com $\ell^\mu = \text{const}$, portanto as equações (5.1) e (5.14) tomam a forma

$$a^\mu{}_{,v}\ell^\nu - a^\nu{}_{,v}\ell^\mu = 0 \quad (5.15)$$

e

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(a_{\alpha,v} \ell_\beta) = 0 \quad (5.16)$$

Uma vez que sabemos que $\ell^\mu = \text{const}$, nos interessa saber a^μ , que pode ser expresso inicialmente na forma

$$\mathbf{a}^\mu = a^\mu R\{e^{i(\ell_\alpha x^\alpha + \varphi)}\} = a^\mu \cos(\ell_\alpha x^\alpha + \varphi) \quad (5.17)$$

Sendo que $\hat{a}^\mu \hat{a}_\mu < 0$; $\ell_\mu \hat{a}^\mu = 0$ e $\ell_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \ell^\beta$ e por sua vez

$$\ell_\alpha x^\alpha = \ell_0 t + \ell_x x + \ell_y y + \ell_z z \quad (5.18)$$

entretanto

$$a^\mu{}_{,v} = \hat{a}^\mu e^{i(\ell_\alpha x^\alpha + \varphi)} i \ell_\nu = i a^\mu \ell_\nu \quad (5.19)$$

logo as equações (5.15) e (5.16) ficam

$$(i a^\mu \ell_\nu) \ell^\nu - (i a^\nu \ell_\nu) \ell^\mu = 0 \quad (5.20)$$

e

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (i a_\alpha \ell_\nu) \ell_\beta = 0 \quad (5.21)$$

Então uma solução pode ser escrita na forma

$$F^{\mu\nu} = a^{[\mu} \ell^{\nu]} = e^{i(\ell_\alpha x^\alpha + \varphi)} \hat{a}^{[\mu} \ell^{\nu]} = \cos[\omega(t - z)] \hat{a}^{[\mu} \ell^{\nu]} \quad (5.22)$$

5.3.1 Solução tipo onda plana e suas propriedades

Vamos considerar um caso particular da solução (5.22) para uma onda plana, partindo das seguintes considerações ou propriedades:

$$\eta^{\mu\nu} \ell_\nu = \ell^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \quad ; \quad \eta_{\mu\nu} \ell^\nu = \ell_\mu = (\omega, 0, 0, -\omega) \quad (5.23)$$

e

$$\hat{a}^\mu = (0, A, 0, 0) ; \quad \eta_{\mu\nu} \hat{a}^\mu \ell^\nu = 0 \quad (5.24)$$

tal que

$$\eta_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu = (\ell^0)^2 - (\ell^3)^2 = 0 \quad e \quad \hat{a}^\mu \hat{a}_\mu < 0 \quad (5.25)$$

Donde resulta

$$\ell_\mu x^\mu = \omega t - \omega z = \omega(t - z) \rightarrow \ell_\mu dx^\mu = \omega dt - \omega dz = \omega(dt - dz) \quad (5.26)$$

Para este caso e sob as condições definidas, podemos reescrever a métrica efetiva na forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{4}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu}$$

Onde já sabemos que $\frac{4}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} = N$ e por sua vez $F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu}$ é definido em função dos novos parâmetros como

$$F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} = \cos^2[\omega(t - z)] \cdot \{\hat{a}_\mu \ell^\alpha - \hat{a}^\alpha \ell_\mu\} \cdot \{\hat{a}_\alpha \ell_\nu - \hat{a}_\nu \ell_\alpha\}$$

$$F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} = \cos^2[\omega(t - z)] \cdot A^2 \ell_\mu \ell_\nu \quad (5.27)$$

então, a métrica efetiva será

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - NA^2 \cos^2[\omega(t - z)] \cdot \ell_\mu \ell_\nu \quad (5.28)$$

Entretanto tratando-se de geodésicas tipo luz, tem-se

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$$

$$d\hat{s}^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - NA^2 \cos^2[\omega(t-z)]\omega^2(dt-dz)^2 = 0 \quad (5.29)$$

definindo

$$\varepsilon = N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] \quad (5.30)$$

onde A e ω são a amplitude e a frequência da onda, respectivamente e $N = \frac{4}{\mathcal{L}_F}$ \mathcal{L}_{FF} é o parâmetro associado a não-linearidade de propagação da onda. Contudo, temos a equação (5.29) reescrita na forma

$$d\hat{s}^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \varepsilon(dt^2 - 2dtdz + dz^2) = 0$$

$$d\hat{s}^2 = (1 - \varepsilon)dt^2 - dx^2 - dy^2 - (1 + \varepsilon)dz^2 + 2\varepsilon dtdz = 0 \quad (5.31)$$

Vamos nos restringir apenas na direção z , portanto

$$(1 - \varepsilon)dt^2 - (1 + \varepsilon)dz^2 + 2\varepsilon dtdz = 0 \quad (5.32)$$

Para a parte da onda que se propagam para direita e considerando um cone do tipo luz $dt = dz$, a condição de (5.32) se verifica imediatamente. Para o caso da onda que se desloca para esquerda a análise é um pouco mais profunda.

Começamos por multiplicar equação (5.32) por $-\frac{1}{dt^2}$, portanto

$$(1 + \varepsilon)\dot{z}^2 - 2\varepsilon\dot{z} - (1 - \varepsilon) = 0 \quad (5.33)$$

Resolvendo a equação formada, resulta

$$\dot{z}_{\pm} = \frac{2\varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon^2 + 4(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)}}{2(1 + \varepsilon)} = \frac{2(\varepsilon \pm 1)}{2(1 + \varepsilon)}$$

$$\dot{z}_{\pm} = \begin{cases} \dot{z}_+ = 1 \\ \dot{z}_- = \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)} \end{cases} \quad (5.34)$$

O resultado $\dot{z}_+ = 1$, indica a propagação da parte onda que viaja para a direita, pois corrobora com o resultado da equação (5.33). Concomitantemente, $\dot{z}_- = \frac{(\varepsilon-1)}{(\varepsilon+1)}$, indica a parte da onda que se desloca para esquerda, merecendo uma análise mais profunda sobre o seu comportamento. Sendo que $\dot{z}_- = \frac{(\varepsilon-1)}{(\varepsilon+1)}$; $(\varepsilon - 1)dt = (\varepsilon + 1)dz$, podemos por similitude considerar o espaço vetorial

$$\mu\mathbf{V} = \mu(V_x\hat{i} + V_y\hat{j}) \quad (5.36)$$

portanto

$$\mathbf{V} = \left(1; \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)}\right) = (\dot{z}_+; \dot{z}_-)$$

$$\mathbf{V} = \left\{1; \frac{N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] - 1}{1 + N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)]}\right\} \quad (5.37)$$

Sob determinadas considerações, podemos determinar a solução particular e geral, respectivamente, e, a forma da onda na sua propagação.

Começamos por fazer algumas observações bastante óbvias sobre o comportamento de $\dot{z}_- = \frac{N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] - 1}{1 + N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)]}$, antes de qualquer análise mais profunda.

Observação 1:

Se um dos parâmetros dentre N , A e ω tiver valor nulo, tem-se $\dot{z}_- = 1$, sendo que se este valor for N , tratando-se de uma onda que se propaga linearmente, e, concomitantemente sob nenhum efeito não-linear e se tal valor for de A ou de ω , na verdade não se trata de uma onda.

Observação 2:

Sendo

$$N = \frac{4}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF}$$

Conclui-se:

- i) $N < 0$, quando $\frac{1}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} < 0$, portanto $N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] < 0$, e neste caso $\dot{z}_- > 0$, exceto quando $N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] = -1$, que faz com que $\dot{z}_- \rightarrow \infty$;
- ii) $N > 0$, quando $\frac{1}{\mathcal{L}_F} \mathcal{L}_{FF} > 0$, portanto $N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] > 0$, e neste caso $\dot{z}_- > 0$, exceto quando $N\omega^2 A^2 \cos^2[\omega(t-z)] = 1$, que faz com que $\dot{z}_- = 0$.
- iii) $N = 0$, recupera-se a linealidade das equações do movimento, i.e, as equações de Maxwell.

Com recurso a alguns *softwares* matemáticos (usamos no presente trabalho o *Wolfram Alpha: Computational Intelligence*), podemos ver o comportamento da onda plana na sua propagação, através da variação do campo vetorial.

Se tomarmos $N = 1$, $A = 1$ e $\omega = 1$, temos

$$\dot{z}_- = \frac{\cos^2(t-z) - 1}{\cos^2(t-z) + 1}$$

$$\mathbf{V} = \left\{ 1; \frac{\cos^2(t-z) - 1}{\cos^2(t-z) + 1} \right\} \quad (5.38)$$

O que faz com que o comprimento do vetor resultante seja dado por

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{\left| \frac{\cos^2(t-z) - 1}{\cos^2(t-z) + 1} \right|^2 + 1} \quad (5.39)$$

Cujas curvas integrais do campo têm a forma apresentada na figura abaixo

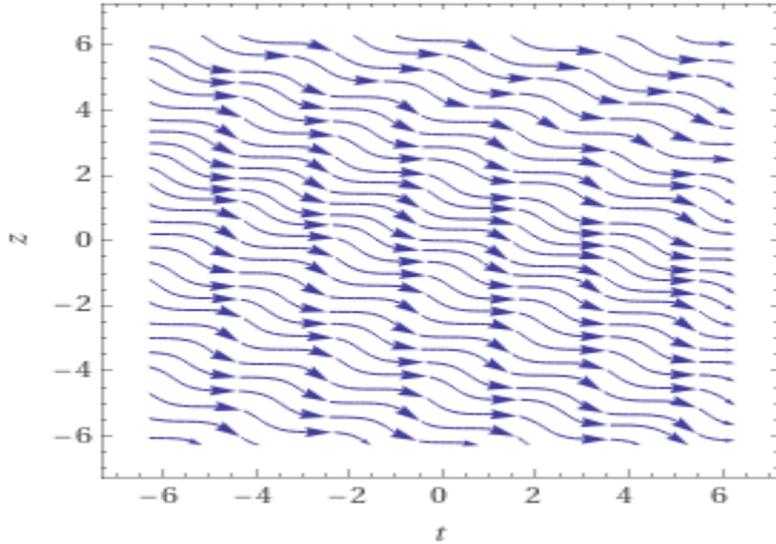


Figura 5: curvas integrais do campo vetorial ($N = 1$, $A = 1$ e $\omega = 1$)

Fonte: WolframAlpha

Se tomarmos $N = 1$, $A = -2$ e $\omega = -2$, temos

$$\dot{z} = \frac{8\cos^2(2z - 2t) - 1}{8\cos^2(2z - 2t) + 1}$$

$$\mathbf{V} = \left\{ 1; \frac{8\cos^2(2z - 2t) - 1}{8\cos^2(2z - 2t) + 1} \right\} \quad (5.40)$$

o comprimento do vetor resultante será

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{\left| \frac{8\cos^2(2z - 2t) - 1}{8\cos^2(2z - 2t) + 1} \right|^2 + 1} \quad (5.41)$$

curvas integrais do campo

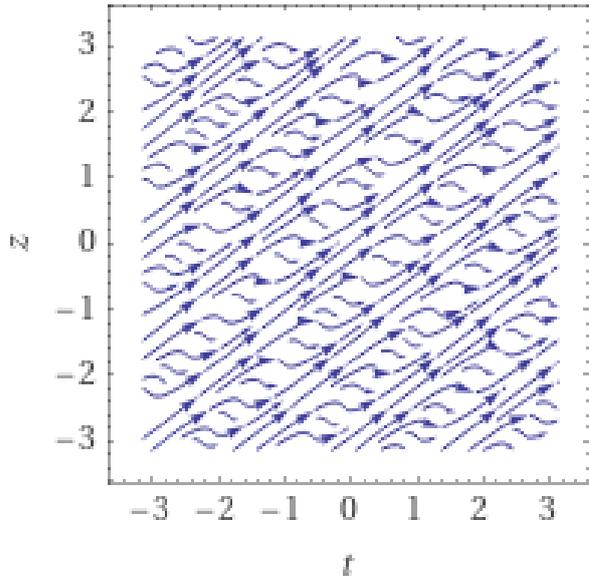


Figura 6: curvas integrais do campo vetorial ($N = 1$, $A = 2$ e $\omega = -2$)

Fonte: WolframAlpha

Se tomarmos $N = 1$, $A = 1$ e $\omega = -5$, temos

$$\dot{z}_- = \frac{5\cos^2(5z - 5t) - 1}{5\cos^2(5z - 5t) + 1}$$

$$\mathbf{V} = \left\{ 1; \frac{5\cos^2(5z - 5t) - 1}{5\cos^2(5z - 5t) + 1} \right\} \quad (5.40)$$

o comprimento do vetor resultante será

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{\left| \frac{25\cos^2(5z - 5t) - 1}{25\cos^2(5z - 5t) + 1} \right|^2 + 1} \quad (5.41)$$

curvas integrais do campo

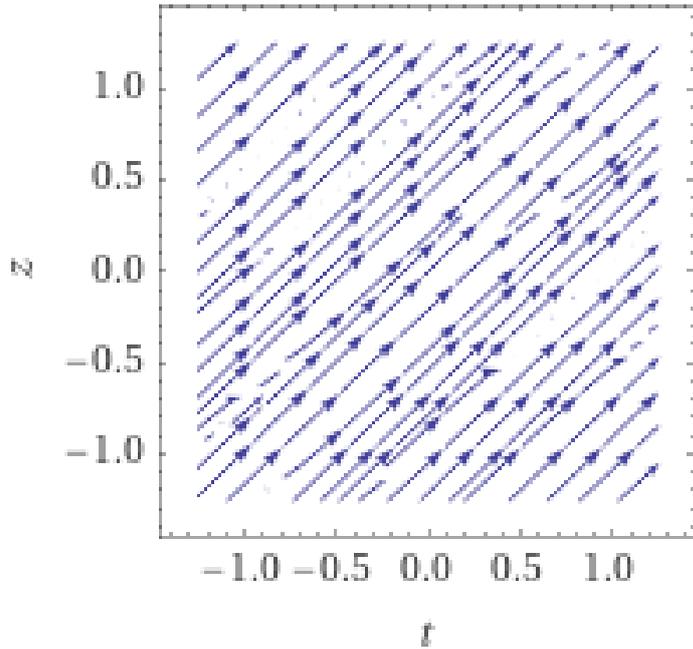


Figura 7: curvas integrais do campo vetorial ($N = 1$, $A = 1$ e $\omega = -5$)

Fonte: WolframAlpha

Os dois valores diferentes de z indicam que em cada direção do campo a onda propaga-se com uma velocidade diferente e estas velocidades estão associadas às relações de dispersão e as direções relacionadas com a polarização da radiação, portanto, isso nos permite escrever a métrica efetiva de forma mais explícita

$$\hat{g}_{\pm}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - N_{\pm} F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha\nu} \quad (5.40)$$

CONCLUSÕES

Uma vez que a teoria eletromagnética de Maxwell e a teoria da relatividade geral de Einstein são consideradas teorias clássicas de campos, pelas suas naturezas cada uma demanda uma matemática específica para a sua descrição. É a partir desta que mostrou-se que o campo eletromagnético de Maxwell é vetorial por ter a forma linear e o campo gravitacional é tensorial. Grosso modo, a base do eletromagnetismo de Maxwell e as suas propriedades é a notação vetorial ao passo que a teoria da relatividade geral de Einstein assenta-se na notação tensorial. Portanto, embora o vetor seja um tipo de tensor (tensor de rank 1), separadamente um do outro, o vetor e o tensor descrevem com uma certa exatidão os campos lineares (espaços planos) e campos curvos (espaços curvos), respectivamente.

No contexto do cálculo tensorial, em particular, ainda é possível reproduzir as equações de movimento de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski por transformações de Lorentz através de $F^{\mu\nu}$ que é um tensor antissimétrico conhecido como tensor de Faraday ou tensor de intensidade do campo eletromagnético, a partir das relações

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu \quad e \quad \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} = 0$$

onde a primeira expressão descreve como as fontes se acoplam ao campo eletromagnético e, consequentemente reproduz, as equações de Gauss para o campo elétrico e de Ampère-Maxwell. E por vez, a segunda expressão tem relação direta com o quadripotencial, o que conduz a recuperação das equações de Gauss para o campo magnético e de Faraday. Pelo fato do campo eletromagnético ser invariante por transformações de calibre, ainda dentro da relatividade restrita, é possível definir o tensor de Faraday com base no potencial elétrico e o potencial vetor magnético que constituem um quadripotencial dado por $A^\mu = A(\phi, \mathbf{A})$, sendo que por tais transformações pode-se definir o invariante F.

A partir da análise das peculiaridades apresentadas pelas equações de Maxwell, sendo que estas permitem que sob determinadas condições sejam reproduzidas em diferentes formalismos (por mais de uma ferramenta matemática) para descrevem campos, muitos estudos têm incidido no processo inverso, tal como, reproduzir as equações de campo da teoria da relatividade geral de Einstein, na teoria de campos eletromagnéticos, por meio das métricas efetivas. Foi com base nesta premissa, que construímos uma métrica efetiva $\hat{g}_{\mu\nu}$ e a correspondente relação de dispersão a partir do lagrangiano que depende apenas do invariante

F e, que por meio desta métrica é possível mostrar que a radiação eletromagnética descreve geodésicas nulas (geodésicas tipo luz), na sua propagação e a partir dali, fazer uma análise profunda sobre o comportamento da luz ao interagir com luz, buscando simular algumas soluções exatas das equações de Einstein, sobretudo os chamados *horizontes efetivos*.

Grosso modo, o presente estudo enquadra-se na abordagem das teorias análogas à gravitação por meio da não-linearização do tensor de Faraday (eletrodinâmica não-linear) e motivada essencialmente pela limitação que existe na realização de experimentos na relatividade geral pois tais experimentos são extraordinariamente difíceis porque gerar e manipular campos gravitacionais fracos (até mesmo os mais fracos possíveis), implica mexer com massas em escala planetária. Porém este fato está muito além da capacidade de tecnológica atual e além disso, se se conseguir gerar um verdadeiro buraco negro no laboratório, por exemplo, tal ação seria catastrófica. Diante deste cenário todo vem se trabalhando em certos modelos que tendem a simular eventos da relatividade geral usando certas métricas e meios materiais específicos. No presente estudo, fez-se uma abordagem tal, consubstanciada no desenvolvimento das equações que conduziram na construção da métrica efetiva e sua aplicação com o intuito de reproduzir linhas de curvas diferenciais dentro de um campo de vetores, portanto, acreditamos que isso constitui uma boa base que abre a possibilidade de simular um horizonte de eventos, senão mesmo um buraco negro pela mesma métrica efetiva e abrindo a possibilidade de realização de experimentos em laboratórios terrestres.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G. VOLINO, (2021). *Aspectos Algébricos dos tensores de Faraday e Weyl. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, em associação ampla com a Universidade Federal de Alfenas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.*
- [2] NOVELLO & COSTA, (2010). *Eletrodinâmica não-linear. Causalidade efeitos cosmológicos.*
- [3] W,UNRUH, (1981). Phys. Rev. Lett. 46, 1351.
- [4] GORDON, W., (1923). Zur lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie. Ann, Phys. (Lipzing), **72**, 421-456
- [5] E. G. O. COSTA., (2012). *Modelos análogos de gravitação. Fundamentos e aplicações.*
- [6] P.N, AKMANSOY, (2018) *Vínculos de Eletrodinâmicas Não Lineares. Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.*
- [7] G. A. F, SIQUEIRA, (2016). *Ondas gravitacionais: Uma aplicação da relatividade. Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito para a obtenção do título de bacharel em Física.*
- [8] M, COSTA, (2006). *Um estudo de cálculo tensorial apoiada na tradução da estrutura do espaço-tempo de Erwin Schroedinger. Tese e dissertação submetida como elemento parcial para o cumprimento dos requisitos na obtenção do grau de mestre em Matemática/Educação.*
- [9] P. F. CARLESSO, (2010). *Introdução à Relatividade Geral. Monografia de graduação em Física.*
- [10] LIMA, (2004) *Calculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.*
- [11] A. P. X. FLORES, (2011). *Cálculo variacional: Aspectos teóricos e aplicações. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação- Mestrado Profissional em*

Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

[12] C. A. L. CAMPOS, (2017). *Algumas Aplicações de Cálculo Variacional: da Braquistócrona à Desigualdade de Hardy-Sobolev. Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.*

[13] D. L. MACEDO, (2004). “*Aplicações do cálculo variacional: Braquistócrona e o princípio de Fermat*”

[14] C. ALEXANDRE, (2011). *Uma introdução à Relatividade Restrita e Geral para professores do ensino médio. Parte II: Gravitação e Geometria.*

[15] C.A, DARTORA, (2009). *Teoria do campo eletromagnético e ondas*

[16] A. P. B. OBERZINER, (2008). *Equações de Maxwell e Aplicações. Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para obtenção de grau de licenciado em Matemática.*

[17] D. GRIFFITH, (2011). *Electrodinâmica. 3ª edição. Pearson editor, SP.*

[18] YOUNG & FREEDMAN, (2009). *Física III- Electromagnetismo. 12ª edição Pearson editor, SP.*

[19] H. C. OHANIAN & R. RUFFINI, (2013). *Gravitation and Spacetime. Third edition.*

[20] K.C, VASCONCELOS, (2016). *Efeitos da Eletrodinâmica não-linear na Propagação de Radiação em torno de objetos compactos carregados. Tese de doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.*

[21] BATTISTI, R.; RIZZO, C. (2012). *Magnetic and electric properties of a quantum vacuum. Reports on Progress in Physics, IOP Publishing, v. 76, n. 1, p. 016401, dec 2012.*

Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/1/016401>>.

- [22] NOVELLO & COSTA, (2010). Eletrodinâmica não-linear. Causalidade efeitos cosmológicos.
- [23] NOVELLO, LORENCI & KLIPPERT, (1999). *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*.
- [24] BIALYNICKI, B, I., (1970). *Phys. Ver D2(10)*, 2341.
- [25] I.G. MEDEIROS, (2013). *Notas de aulas: eletrodinâmica não linear. UFRN, 2013*.
- [26] J. SCHWINGER, (1951). *Phys. Ver. 82*, 664 (1951).
- [27] V. P. FROLOV, & I.D. NOVIKOV, (1997). *Black Holes Physics: Basic Concepts and New Developments*
- [28] S. CARROLL, (2004). *Spacetime and Geometry: On introduction to general relativity. Pearson Education*.
- [29] R. M. WALD, (1984). *General Relativity The University of Chicago Press*
- [30] NOVELLO; VISSER & VOLOVIK, (2002). *Artificial Black Holes. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. P O Box 128, Farrer Road, Singapore 912805*
- [31] W.G. UNRUH, (1981). "Experimental black hole evaporation?", *Phys. Rev. Lett.* 46, 1351 (1981). "Dumb holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation", *Phys. Rev. D* 51, 2827 (1995) [gr-qc/9409008]. (Title changed in journal: "Sonic analog of black holes and...")
- [32] NOVELLO; LORENCI & FREITAS, (1997). *Do the gravitational waves travel at light velocity?*, *Anrials Phys.* 254 (1997) 83.
- [33] GARAY; ANGLIN; CIRAC, & ZOLLER, (2001). *Phys. Rev. Lett.* 85, 4643 (200) *Phys. Rev. A* 63, 023611 (2001).
- [34] UNRUH, (1981) "Experimental black hole evaporation?", *Phys. Rev. Lett.*,46, (1981) 1351-1353.
- [35] RYDER, (2009), *Introdution to General Relativity, Cambridge University Press, 2009*.
- [36] VIDEIRA A. A. P., (2005). "Einstein e o Eclipse de 1919", *Física na Escola*, v. 6, n. 1, 2005

[37] GUIMARÃES, L. F. O., (2015). *Soluções d Buracos Negros na Relatividade Geral. Trabalho de monografia apresentado ao curso de graduação em Física - Bacharelado, da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à conclusão do curso.*