Universidade Federal de São João del Rei
Programa de Pós Graduação em Física
Departamento de Física e Matemática

Gabriel Volino

Aspectos algébricos dos tensores de Faraday e Weyl

Ouro Branco
2021

Gabriel Volino

Aspectos algébricos dos tensores de Faraday e Weyl

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del Rei como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Gravitação e Cosmologia
Orientador: Prof. Dr. Érico Goulart de Oliveira Costa

Ouro Branco

2021

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MULTICÊNTRICO EM QUÍMICA

NOMEAÇÃO DE BANCA EXAMINADORA Nº 11 / 2021 - PPGMQ (13.31)

Nº do Protocolo: 23122.023762/2021-36

São João del-Rei-MG, 14 de julho de 2021.

A dissertação de mestrado **"Propriedades algébricas dos tensores de Faraday e Weyl"** elaborada por **Gabriel Volino da Silva** e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA:

__Assinado por concordância de acordo com ata enviada por email

Prof. Dr. Junior Diniz Toniato - UFOP

(Assinado digitalmente em 14/07/2021 15:21)
ERICO GOULART DE OLIVEIRA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 2351300

(Assinado digitalmente em 14/07/2021 17:10)
JOSE ELOY OTTONI
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1673925

Para verificar a autenticidade deste documento entre em **https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp** informando seu número: **11**, ano: **2021**, tipo: **NOMEAÇÃO DE BANCA EXAMINADORA**, data de emissão: **14/07/2021** e o código de verificação: **8bc4f7663c**

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V89a

Volino, Gabriel .
Aspectos algébricos dos tensores de Faraday e Weyl / Gabriel Volino ; orientador Érico Goulart. -- Ouro Branco, 2021.
106 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2021.

1. Cosmologia. 2. Gravitação. 3. Relatividade Geral. 4. Álgebra Tensorial. I. Goulart, Érico, orient. II. Título.

Dedico este trabalho às filhas e filhos da classe trabalhadora

Agradecimentos

À minha família;

Ao orientador;

À todos professores do DEFIM;

Em especial, às Prof^{a}s Tina Armond e Kelly Torres;

Aos amigos que Ouro Branco me trouxe;

À Universidade Federal de São João del Rei

Ao ProAstro, do Observatório do Valongo-UFRJ

Ao CBPF.

"*Quando se nasce pobre, ser estudioso é o maior ato de rebeldia contra o sistema*"

Autor desconhecido

"*Se não posso dançar, não é minha revolução.*"

Emma Goldman

Resumo

Ao começo do século XIX trabalhos como os de Faraday e Maxwell estabeleceram as regras do eletromagnetismo clássico. Utilizando formalismo vetorial o conjunto de equações diferenciais composto pelas equações de maxwell e a lei de força de Lorentz estabeleceram uma base sólida para diversos experimentos realizados em sua época. Ao final do século XIX, experimentos como os da fenda dupla, efeito foto-elétrico, experimento de Michaelson entre outros trouxeram-nos a necessidade de uma melhor explicação teórica para os resultados. Já no século XX Albert Einstein propõe em seus trabalhos alguns novos postulados e constrói assim uma base para uma nova física. Através de conceitos como a invariância da velocidade da luz e a independência do sistema de coordenadas adotado surge uma teoria para a gravitação, onde adotamos um formalismo tensorial através do qual podemos observar uma série de semelhanças entre a teoria eletromagnética e a teoria da gravitação. Conhecidos os principais tensores responsáveis pela descrição dos campos eletromagnético e gravitacional, iremos descrever algumas das principais características algébricas, e através dessa caracterização classificaremos tanto o tensor de Faraday quanto o tensor de Weyl. Nos preocuparemos em especial com a gravitação através do tensor de Weyl e a chamada classificação de Petrov. Discutiremos qualitativamente essa classificação e sua interpretação física, e veremos brevemente como ela pode nos ajudar em experimentos atuais propostos pela cosmologia observacional, como a geração e propagação de ondas gravitacionais, campos gerados por objetos massivos estáticos e sem carga, ou com rotação em torno de algum eixo e carregado e as forças de torção nos chamados efeitos de maré.

Abstract

In the early 19th century, works such as those by Faraday and Maxwell established the rules of classical electromagnetism. Using vector formalism, the set of differential equations composed of Maxwell's equations and Lorentz's force law established a solid basis for several experiments carried out in his time. At the end of the 19th century, experiments such as the double slit, the photo-electric effect, the Michaelson experiment, among others, brought us the need for a better theoretical explanation for the results. Already in the 20th century Albert Einstein proposed in his works some new postulates and thus built a basis for a new physics. Through concepts such as the invariance of the speed of light and the independence of the adopted coordinate system, a theory for gravitation emerges, where we adopt a tensor formalism through which we can observe a series of similarities between the electromagnetic theory and gravitation. Knowing the main tensors responsible for the description of the electromagnetic and gravitational fields, Describes some of the main physical characteristics, and through this characteristic we will classify both the Faraday tensor and the Weyl tensor. We will be particularly concerned with gravitation through the Weyl tensor and the so-called Petrov classification. We will qualitatively discuss this classification and its physical interpretation, and we will see briefly how it can help us in current experiments proposed by observational cosmology, such as the generation and propagation of gravitational waves, fields by static massive objects and without load, or with rotation around some axis and loaded and as for torsion cones in tide effects.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O eletromagnetismo de Maxwell (EM) e a teoria da relatividade geral de Einstein (TRG) constituem os dois exemplos típicos das chamadas teorias clássicas de campo. Enquanto a primeira é linear e vetorial, a segunda é altamente não-linear e naturalmente descrita por tensores de ordem elevada. Tal não-linearidade decorre diretamente do princípio de equivalência, segundo o qual a energia gravitacional deve também gravitar. Em outras palavras, o campo gravitacional é fonte de si mesmo, o que não encontra análogo no EM, uma vez que o campo eletromagnético não possui carga elétrica. Ademais, a TRG é uma teoria eminentemente geométrica, descrevendo todos os processos gravitacionais em termos de uma variedade quadridimensional pseudo-Riemanniana curva, ou seja: a matéria/energia curva o espaço-tempo segundo as equações de Einstein e esta curvatura guia a trajetória da matéria/energia segundo a equação da geodésica.

Do ponto de vista físico, o EM é descrito por um tensor de ordem dois antissimétrico, o *tensor de Faraday*, denotado por $F_{\mu\nu}$. Este objeto tem seis componentes independentes, diretamente relacionadas com os campos elétricos e magnéticos medidos por um dado observador v^{μ}. Tal tensor aparece explicitamente na força de Lorentz, que descreve o movimento de uma partícula teste carregada, com velocidade inicial arbitrária, mergulhada em um campo eletromagnético externo. Já na TRG, o objeto de interesse físico correspondente é um tensor de ordem quatro, o *tensor de Riemann*, denotado por $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, cujo sentido operacional é definido pela equação do desvio geodésico. Este tensor possui vinte componentes independentes e descreve as forças de maré experimentadas por uma coleção de partículas testes movendo em torno de uma trajetória fiducial, previamente definida. No vazio, tal tensor reduz-se ao chamado *tensor de Weyl*, usualmente denotado por $W^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, possuindo este dez componentes independentes. Tais tensores de ordem quatro possuem relação direta com o tensor métrico da variedade $g_{\mu\nu}$, assim como o tensor de Faraday pode ser derivado de um potencial vetor A^{μ}.

Como é sabido, as diferentes configurações possíveis do campo eletromagnético devem satisfazer as equações lineares de Maxwell. De forma análoga, as diferentes configurações possíveis do campo gravitacional devem satisfazer as equações não-lineares de Einstein. No caso do EM, o princípio de superposição facilita consideravelmente a obtenção de soluções: a soma de soluções é uma nova solução. Nada semelhante no caso da TRG. Em particular, não se conhece método geral para a obtenção de soluções exatas das equações de Einstein. Desta maneira, precisamos trabalhar caso a caso. Em geral, soluções aproximadas podem ser obtidas no regime de campo gravitacional fraco, enquanto soluções exatas são obtidas para situações com amplo grau de simetria: simetria esférica, simetria estática, simetria cilíndrica, simetria homogênea e isotrópica, etc. No entanto, é importante ressaltar que, mesmo sob as restrições de simetria, dificuldades extras aparecem, uma vez que a teoria é igualmente válida em qualquer sistema de coordenadas. Em outras palavras, se $g_{\mu\nu}(x)$ é solução das equações de movimento, então $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x})$ também é solução, desde que estes tensores estejam ligados por um difeomorfismo.

Dadas as dificuldades acima mencionadas, diversas *técnicas invariantes* foram construídas para se obter e analisar as soluções das equações de Einstein. Por técnicas invariantes, entendemos aquelas que refletem propriedades intrínsecas de tensores, sendo estas independentes do sistema de coordenadas utilizado. Note-se que esta não é uma questão trivial, pois é difícil comparar diferentes soluções apenas olhando para as componentes de um dado tensor. Ou seja, uma mesma solução pode parecer completamente diferente dependendo do sistema de coordenadas empregado. Neste trabalho investigaremos uma destas técnicas invariantes proposta por A.Z. Petrov[1] e posteriormente desenvolvida por F. Pirani, R. Penrose[2] e outros. A chamada *classificação de Petrov* estabelece um elegante sistema de técnicas algébricas capazes de classificar o tensor de Weyl $W^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, através das suas características intrínsecas. Essa classificação é, na verdade, um resultado da matemática pura que se aplica a qualquer variedade pseudo-Riemanniana, ou seja, existe independentemente do significado físico. No entanto, a classificação de Petrov facilita consideravelmente a obtenção de soluções exatas das equações de Einstein além de elucidar uma série de outras questões de interesse físico. Dentre estas mencionamos a caracterização de configurações radiativas, os teoremas de Goldberg-Sachs e Peeling(3), o formalismo quasi-Maxwelliano dentre outras.

O objetivo desta dissertação é discutir e demonstrar diversas propriedades algébricas do campo eletromagnético bem como do campo gravitacional. Uma vez que estamos interessados principalmente na classificação de Petrov, poderíamos adotar como ponto de partida as equações de Einstein, propostas já em seu trabalho base da TRG de 1915(4), e desenvolver todos os resultados em um espaço-tempo curvo. Porém, por razões pedagógicas, optamos por discutir inicialmente as equações de Maxwell(5), base do eletromagnetismo clássico, e obter uma série de propriedades satisfeitas pelo tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ no espaço-tempo plano. Tal abordagem tem a vantagem de adiantar métodos igualmente úteis no caso geral, porém desenvolvidos ainda no espaço plano de Minkowski, onde temos a classe privilegiada dos observadores inerciais.

Lembremos que, em meados do século XIX, os trabalhos de Faraday e Maxwell(6) consolidaram a base para o eletromagnetismo clássico. Seguido do desenvolvimento teórico, os resultados experimentais começaram a entrar em desacordo com a teoria. A proposta de que as leis de Maxwell deveriam ser as mesmas, independentemente do referencial, não era observada quando adotada uma transformação de referencial galileana. Estes episódios puseram a comunidade científica a se debruçar sobre as questões da propagação da radiação eletromagnética. Haveria um referencial inercial privilegiado (Éter)? Em 1905, no seu trabalho sobre a relatividade restrita(7), Albert Einstein propôs novos paradigmas que dariam conta de explicar as divergências entre os resultados obtidos em laboratório até então e a teoria vigente. Os novos postulados da teoria da relatividade restrita versam que: 1- As leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referenciais inerciais. 2- A velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais inerciais $c \approx 3.10^8 m/s$.

Na prática, essas mudanças transformaram a "arena" onde a luz e os fenômenos físicos se propagam. Essa nova arena é o espaço-tempo, como inicialmente proposto por Minkowski. Passamos então à utilizar um sistema de coordenadas quadridimensional, composto pelo espaço tridimensional junto com o tempo. Tecnicamente, dizemos que o espaço-tempo é uma *variedade quadridimensional* e é importante, então, introduzir o *formalismo tensorial* nesta variedade. Um segundo objetivo do nosso trabalho é estudar o comportamento dos campos eletromagnético e gravitacional nesse formalismo. Nesse processo iremos obter os principais tensores que estruturam as equações de Maxwell e de Einstein, como o tensor momento-energia e os tensores de Faraday, Ricci, Riemann e Weyl. Para essa discussão nos apoiaremos nas obras ([8]), ([9]), ([10]) e ([11]).

Em linhas gerais, a estrutura da dissertação é a seguinte. Num primeiro momento construiremos todo ferramental algébrico necessário, no contexto do cálculo tensorial. Demonstraremos algumas relações algébricas importantes satisfeitas pelos tensores relevantes isto é, os objetos responsáveis pela interpretação física do que chamamos de um *campo tensorial*. Veremos como se comportam o campo eletromagnético, e em seguida veremos suas semelhanças com o campo gravitacional. Por fim, de posse desses principais conceitos, faremos uma discussão qualitativa sobre a *Classificação de Petrov*.

No segundo capítulo começaremos a construir todo o ferramental necessário para as discussões propostas. Começaremos definindo os conceitos algébricos e geométricos básicos, introduziremos o conceito de variedade, vetores e tensores, veremos algumas propriedades tensoriais como derivação, simetria, covariância e contravariância.

No terceiro capítulo nós abordaremos as equações de Maxwell. Num primeiro momento apresentaremo-as no formalismo vetorial e em seguida passaremos a discuti-las no formalismo tensorial. Realizaremos a *decomposição 3 + 1*, construiremos os principais escalares que podem ser obtidos, e por fim faremos um tratamento tensorial do *lagrangeano do campo eletromagnético*.

No capítulo seguinte aprenderemos as principais identidades algébricas que podem ser obtidas através do tensor de Faraday e o tensor momento-energia. Em seguida veremos como podemos chegar nas *direções principais nulas* de um campo eletromagnético que se propaga.

No quinto capítulo trataremos do campo gravitacional ou *campo de Einstein*. Veremos as equações de Einstein em termos dos tensores de Riemann, Ricci e escalar de curvatura. Veremos também o que é uma *transformação* e *invariância conforme* e como podemos obter o tensor de Weyl. Aprenderemos também a decompor o tensor de curvatura na soma entre sua parte sem traço e seu traço, chamada de *decomposição irredutível*.

O próximo passo será realizar primeiramente uma discussão qualitativa da classificação de Petrov. Nesse momento, não nos importaremos em reproduzir todos processos algébricos que nos permitem contrair o tensor de Weyl com as direções principais nulas. Posteriormente, utilizaremos a abordagem de Newman-Penrose (tetradas nulas) para discutirmos a classificação em maiores detalhes.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

Neste capítulo revisaremos alguns conceitos matemáticos importantes para a discussão subsequente. Essencialmente, introduziremos aqui alguns elementos de geometria diferencial, cálculo tensorial e álgebra linear. Discutiremos também todas as definições, notações e convenções relevantes para a elaboração dos próximos capítulos. Por razões de espaço, nosso enfoque será mais operacional do que formal. No entanto, apresentaremos alguns resultados de formal geral, de maneira que eles possam ser aplicados também em contextos que não a teoria de campos. Para maiores detalhes, referimos o leitor interessado aos textos clássicos.

2.1 *Variedades*

2.1.1 *Variedade Topológica*

Neste capítulo nos apoiaremos em ampla literatura. Recomendamos especialmente (8) e (10). Nosso ponto de partida é a definição de uma variedade topológica, denotada por $\mathcal{M}$, de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Grosso modo, uma variedade é um espaço topológico onde as vizinhanças de todo ponto $p \in \mathcal{M}$ se parecem (localmente) com o espaço euclidiano de mesma dimensão, isto é, $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras, cada ponto possui uma vizinhança aberta homeomorfa aos abertos do espaço euclidiano. Dizemos que dois espaços são *homeomorfos* quando podemos transformar continuamente um espaço no outro, e a sua transformação inversa também é contínua. Em geral, para explicitarmos a dimensionalidade em questão escrevemos $\mathcal{M}^n$, a qual chamamos de n-variedade.

Mais precisamente, uma n-variedade tem por característica poder ser coberta por um conjunto finito de abertos U_i que interceptam-se, ou seja:

$$\mathcal{M}^n = \cup U_i. \tag{2.1}$$

Em geral, precisaremos de mais de um aberto para recobrirmos $\mathcal{M}^n$. No entanto, sempre poderemos escrever qualquer ponto $p \in U_i$ como $p(x^a)$ sendo x^a $(a = 1, ..., n)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ através de um homeomorfismo

$$\phi_i : U_i \subseteq \mathcal{M}^n \to U_i' \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Por ser uma bijeção, o mapa inverso também é bem definido, isto é

$$\phi_i^{-1} : U_i' \subseteq \mathbb{R}^n \to U_i \subseteq \mathcal{M}^n. \tag{2.3}$$

Portanto, cada ponto $p' \in \phi_i(U_i)$ deve satisfazer a relação $p = \phi^{-1}(p')$. Os matemáticos chamam o par (U_i, ϕ_i) de *carta* e a família completa $\{(U_i, \phi_i)\}$ de *atlas*. Note que cada ponto $p \in \mathcal{M}$ existe independentemente das coordenadas que utilizamos para descrevê-lo.

Podemos observar que essas definições não impedem que um ponto $p \in U_i$ também pertença à outro aberto de $U_j \subseteq \mathcal{M}^n$. Ou seja, $p \in U_i \cap U_j$, de forma que poderemos descrever $p = p(x^1, ..., x^n) = p(y^1, ..., y^n)$ através dos mapas ϕ^i e ϕ^j, respectivamente. Observe que podemos passar das coordenadas $(y^1, ..., y^n)$ para $(x^1, ..., x^n)$. Para isso, consideremos o diagrama

$$(y^1, ..., y^n) \to (\phi^j)^{-1} \to p \to \phi^i \to (x^1, ..., x^n). \tag{2.4}$$

Podemos observar que a aplicação $\Psi_{ij} = \phi_i(\phi_j^{-1}) := \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Escreveremos $(x^1, ..., x^n) = \Psi_{ij}(y^1, ..., y^n)$, ou abreviadamente

$$x^a = x^a(y), \qquad y^a = y^a(x), \tag{2.5}$$

o que configura uma transformação de coordenadas do ponto de vista da física. No contexto das variedades topológicas, tais transformações precisam ser apenas contínuas.

2.1.2 Variedade Diferenciável

Uma variedade diferenciável é um caso específico de uma variedade topológica que traz consigo a ideia de diferenciabilidade. Para isso, recorremos ao conceito de *difeomorfismo*, ou seja, assumimos que as aplicações Ψ_{ij} e Ψ_{ij}^{-1} são infinitamente diferenciáveis, isto é, são de classe C^∞.

Intuitivamente, o conceito de classe de diferenciabilidade C^∞ nos dá a noção de suavidade. Diferentemente do homeomorfismo, o difeomorfismo nos diz que além da deformação contínua e reversível dos mapas ϕ_i, suas derivadas e derivadas das suas inversas, como por exemplo,

$$\frac{\partial y^a}{\partial x^b}, \quad \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^b \partial x^c}, \quad \frac{\partial^3 y^a}{\partial x^b \partial x^c \partial x^d}, \quad ... \tag{2.6}$$

também são contínuas. De agora em diante assumiremos que as variedades são todas diferenciáveis de classe C^∞.

2.2 Vetores e Tensores

Campos tensoriais constituem o conjunto básico de elementos geométricos definidos nas estruturas de uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$. Um campo tensorial é equivalente a um tensor definido para cada ponto $p \in \mathcal{M}$. Desta maneira, começamos nossa análise a partir da noção de um vetor em um dado ponto. Tal construção nos levará naturalmente as noções de espaço tangente e cotangente. Como veremos, os mesmos são espaços vetoriais de mesma dimensão e constituem os ingredientes necessários para a definição de tensores arbitrários.

2.2.1 Vetores

Para começar, seja $\gamma(t)$ uma curva parametrizada, resultado de um mapa de um intervalo contínuo de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{M}$. Assumindo $\gamma(t)$ diferenciável, definimos o *vetor tangente* à curva no ponto $\gamma(t_0)$ como um operador linear que leva uma função real arbitrária f em um ponto $p \in \mathcal{M}$ à um número real. Tal operador é induzido pela derivada direcional da função ao longo da curva. Explicitamente, podemos escrever:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\gamma|_{t_0}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \left\{ f(\gamma(t_0+s)) - f(\gamma(t_0)) \right\} \tag{2.7}$$

Considerando um sistema de coordenadas x^a referente ao ponto em questão e utilizando a regra da cadeia escrevemos[1]

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\gamma|_{t_0}} = \frac{dx^a}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^a}|_{\gamma(t_0)} \tag{2.9}$$

Tal relação sugere a expressão

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^a}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{2.10}$$

onde abstraímos da presença da função f, já que ela é arbitrária. Note que, do lado direito, as n derivadas com relação ao parâmetro t funcionam como componentes do vetor enquanto as n derivadas parciais funcionam como elementos de base. Em geral, temos que qualquer vetor tangente à $\gamma(t_0)$ pode ser escrito como uma combinação linear das quantidades:

$$(\frac{\partial}{\partial x^1})|_p, ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})|_p, \tag{2.11}$$

por definição linearmente independentes e chamadas de base coordenada. Em outras palavras, um vetor arbitrário $\mathbf{v}$ no ponto p é um objeto geométrico que pode ser escrito sob a forma

$$\mathbf{v} = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}, \tag{2.12}$$

onde v^a são as componentes do vetor com relação a base dada. Ou seja, para especificarmos um vetor precisaremos combinar a coleção de n números reais $(v^1, v^2, ..., v^n)$ com os n elementos de base.

Em geral, tal base de vetores se modifica quando realizamos uma mudança de coordenadas $x^a \rightarrow x'^a(x)$. Entretanto, a nova base poderá sempre ser escrita em termos da base antiga, já que as derivadas parciais transformam-se sob a regra

$$\frac{\partial}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\frac{\partial}{\partial x^b} \tag{2.13}$$

A matriz $\partial x^b/\partial x'^a$ é chamada de *matriz jacobiana* e, para que o sistema de coordenadas x'^a seja bem comportado, devemos exigir sempre que a mesma satisfaça

$$\det\,(\partial x^b/\partial x'^a) \neq 0, \tag{2.14}$$

[1] Neste trabalho adotaremos a convenção de Einstein para somatórios, segundo a qual índices repetidos (também chamados de índices mudos) são sempre somados, isto é:

$$\frac{dx^a}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^a} \equiv \sum_{a=1}^{n} \frac{dx^a}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^a} \tag{2.8}$$

garantindo a existência de uma inversa. Obviamente, sabemos do cálculo que a relação

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x'^b} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x^c}{\partial x'^b} = \delta^a{}_b \tag{2.15}$$

é válida, onde $\delta^a{}_b$ é o *delta de Kronecker*, definido por

$$\delta^a{}_b = \begin{cases} 0, & \text{se } a \neq b \\ 1, & \text{se } a = b \end{cases} \tag{2.16}$$

Portanto, obtemos que a *matriz jacobiana inversa* é simplesmente dada por $\partial x'^a/\partial x^b$.

Vejamos como as componentes do vetor $\mathbf{v}$ transformam-se quando realizamos uma mudança de coordenadas. Expandindo o vetor na nova base e usando a regra da cadeia temos

$$\mathbf{v} = v'^a \frac{\partial}{\partial x'^a} = v'^a \frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\frac{\partial}{\partial x^b} \tag{2.17}$$

Comparando a expressão acima com a equação Eq. (2.12) e rearranjando os índices, temos

$$v'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} v^b. \tag{2.18}$$

Tal lei de transformação é chamada de *transformação contravariante* enquanto as componentes v^b e v'^a são chamadas de *componentes contravariantes*. Veremos adiante que as componentes contravariantes de tensores arbitrários transformam-se de acordo com a jacobiana inversa ao passo que as componentes covariantes transformam-se de acordo com a jacobiana. Note que, embora as componentes e a base modifiquem-se em uma transformação de coordenadas, o objeto $\mathbf{v}$ permanece inalterado. Tal invariância está na essência do cálculo tensorial, esperado.

2.2.2 Definição: Espaço Tangente

O conjunto de todos os vetores contravariantes em um dado ponto p de uma variedade n-dimensional $\mathcal{M}$ define um espaço vetorial de mesma dimensão, denotado por $T_p\mathcal{M}$. Tal espaço é chamado de *espaço tangente* no ponto p. Formalmente, podemos definir $T_p\mathcal{M}$ supondo que no ponto p existe uma carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ que contém p. Considere duas curvas γ_1 e $\gamma_2 \in \mathcal{M}$, onde $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, de modo que $\phi \circ \gamma_1$ e $\phi \circ \gamma_2$ são diferenciáveis em 0. Chamamos γ_1 e γ_2 de equivalentes a 0 se suas derivadas ordinárias coincidirem em 0, definindo assim uma relação de equivalência. Pode-se mostrar que as classes de equivalência de todas as possíveis curvas passando por p definem os vetores tangentes à $\mathcal{M}$ em p e tal construção independe da carta ϕ adotada.

2.2.3 Definição: Espaço Cotangente

Sabemos da álgebra linear que para todo espaço vetorial real V, de dimensão n, podemos sempre construir um novo espaço vetorial de mesma dimensão, denotado por V^* e chamado de *espaço dual*. Grosso modo, V^* é o espaço dos funcionais lineares $\boldsymbol{\omega} : V \to \mathbb{R}$ sobre o espaço vetorial em questão. Em outras palavras, se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{b}), \qquad \boldsymbol{\omega}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}). \tag{2.19}$$

Dada uma base de vetores $\{\mathbf{e}_a\}$ para V, podemos construir uma base $\{\mathbf{b}^a\}$ para V^* tal que

$$\mathbf{b}^a(\mathbf{e}_b) = \delta^a{}_b. \tag{2.20}$$

Tais bases são chamadas de bases duais. Desta maneira, se $\mathbf{v} \in V$ e $\boldsymbol{\omega} \in V^*$, temos as expansões

$$\mathbf{v} = v^a\mathbf{e}_a, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_a\mathbf{b}^a, \qquad a = 1, 2, ..., n. \tag{2.21}$$

No contexto da geometria diferencial, chamamos $\boldsymbol{\omega}$ de *covetor* ou 1-*forma* enquanto as n quantidades ω_a são chamadas de *componentes covariantes*. Note que a aplicação de $\boldsymbol{\omega}$ em $\boldsymbol{v}$ nos dá

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) = \omega_a\mathbf{b}^a(v^b\mathbf{e}_b) = \omega_a v_b\mathbf{b}^a(\mathbf{e}_b) = \omega_a v^a. \tag{2.22}$$

Considerando novamente uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ de dimensão n, associaremos ao espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ o seu espaço dual correspondente. Tal espaço é denotado por $T_p^*\mathcal{M}$ e chamado de *espaço cotangente*. Para defini-lo, consideramos uma função real arbitrária $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ e definimos um funcional linear pela regra $dh(\mathbf{v}) := \mathbf{v}(h)$. Aqui, o objeto

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x^a}dx^a \tag{2.23}$$

é o diferencial da função no sentido usual do cálculo e a operação

$$dh(\mathbf{v}) = \frac{\partial h}{\partial x^a}v^a \tag{2.24}$$

é a taxa de variação da função na direção do vetor $\mathbf{v}$. Desta maneira, podemos pensar nas quantidades $\{dx^a\}$ como base dual a $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$. Sua atuação em um vetor é obtida considerando as funções coordenadas como um conjunto específico de funções de $\mathcal{M}$ em $\mathbb{R}$, onde a diferencial da função coordenada atuando em um vetor nos dá a n-ésima componente desse vetor. Formalmente:

$$dx^a(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(x^a) = v^b \mathbf{e}_b(x^a) = v^b \frac{\partial x^a}{\partial x^b} = v^b \delta^a{}_b = v^a \tag{2.25}$$

Em particular, aplicando esse funcional linear num vetor coordenada $\mathbf{e}_b$:

$$dx^a(\mathbf{e}_b) = \delta^a{}_b \tag{2.26}$$

que é a relação de dualidade definida acima. Em resumo:

$$\boldsymbol{\omega} \in T_p^*\mathcal{M} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_a dx^a \tag{2.27}$$

$$\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = v^a \frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{2.28}$$

Vejamos agora como se transformam as componentes de um covetor $\boldsymbol{\omega} \in T_p^*\mathcal{M}$ ao realizarmos uma transformação de coordenadas $x^a \rightarrow x'^a(x)$. Pela regra da cadeia temos a seguinte lei de transformação para a base dual

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b. \tag{2.29}$$

Ou seja, cada vetor da nova base $\{dx'^a\}$ é uma combinação linear dos vetores da base antiga $\{dx^a\}$. Escrevendo o covetor na nova base, expandindo e comparando com sua expressão na base antiga, temos

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_a dx'^a = \omega'_a \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b = \omega_a dx^a \tag{2.30}$$

Portanto, obtemos

$$\omega_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \omega'_a \quad \rightarrow \quad \omega'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \omega_b. \tag{2.31}$$

Daqui percebemos que as componentes covariantes transformam-se de forma inversa as componentes covariantes. É importante ressaltar que tanto vetores quanto covetores são casos particulares de tensores e que tais definições são completamente independentes do sistema de coordenadas.

2.2.4 O produto tensorial

Para definirmos tensores genéricos em nossa variedade diferenciável $\mathcal{M}$ precisamos relembrar algumas propriedades básicas do produto tensorial. Na álgebra linear, o produto tensorial entre dois espaços vetoriais V_1 e V_2 é um novo espaço vetorial W, denotado por $V_1 \otimes V_2$, construído a partir de uma operação de composição bilinear de pares ordenados do produto cartesiano entre esses dois espaços de forma a generalizar o conceito de produto externo entre vetores. Em outras palavras, se $\{\boldsymbol{e}_a\}$ $(a = 1, 2, .., m)$ é uma base para V_1 e $\{\boldsymbol{f}_b\}$ é uma base para V_2, $(b = 1, 2, .., n)$, então as $m.n$ quantidades $\boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{f}_b$ formam uma base para W. Desta maneira, se $\boldsymbol{v} \in V_1$ e $\boldsymbol{w} \in V_2$, podemos expandi-los como

$$\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{e}_a = v^1 \boldsymbol{e}_1 + ... + v^m \boldsymbol{e}_m,$$
$$\boldsymbol{w} = w^b \boldsymbol{f}_b = w^1 \boldsymbol{f}_1 + ... + w^n \boldsymbol{f}_n,$$

e o objeto $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in W$ é definido pela expressão

$$\begin{aligned} v^a w^b \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{f}_b &= v^1 w^1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + ... + v^1 w^n \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_n \\ &+ v^2 w^1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1 + ... + v^2 w^n \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_n \\ &+ \quad ... \\ &+ v^m w^1 \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}_1 + ... + v^m w^n \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}_n. \end{aligned}$$

As seguintes propriedades decorrem diretamente***

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^T = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$$
$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$$
$$c(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes (c\mathbf{v}).$$

2.2.5 Tensores

Para definir diferentes tipos de tensores em um ponto $p \in \mathcal{M}$, os espaços vetoriais relevantes são os espaços tangente $T_p\mathcal{M}$ e cotangente $T_p^*\mathcal{M}$. Sabendo-se que estes espaços têm o mesmo número de dimensões e possuem como bases coordenadas as quantidades $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$ e $\{dx^a\}$, respectivamente, definimos um tensor do tipo (q, r) com $q, r \in \mathbb{N}$ como sendo o objeto

$$\mathbf{T} \in (T_p\mathcal{M})_1 \otimes ... \otimes (T_p\mathcal{M})_q \otimes (T_p^*\mathcal{M})^1 \otimes ... \otimes (T_p^*\mathcal{M})^r \tag{2.32}$$

e que pode ser expandido sob a forma

$$\mathbf{T} = T^{a_1...a_q}{}_{b_1...b_r}\frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{a_q}} \otimes dx^{b_1}... \otimes dx^{b_r}. \tag{2.33}$$

Ou seja, temos q-cópias do espaço tangente e r-cópias do espaço cotangente. Em outras palavras, o conjunto

$$\{\frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{a_q}} \otimes dx^{b_1}... \otimes dx^{b_r}\} \tag{2.34}$$

funciona como uma base para o espaço dos (q, r)-tensores enquanto as n^{q+r} quantidades reais $T^{a_1...a_q}{}_{b_1...b_r}$ funcionam como as componentes necessárias para descrever este objeto na dada base. Tensores do tipo $(q, 0)$ são chamados de *tensores contravariantes* de rank (ou ordem) q enquanto tensores do tipo $(0, r)$ são chamados de *tensores covariantes* de rank r. No caso geral, eles são chamados de *tensores mistos* de rank "$q + r$", ou tensores tipo (p, q).

Para efeito de ilustração, considere o tensor misto de ordem-2 dado por

$$\mathbf{T} = T^a{}_b\frac{\partial}{\partial x^a} \otimes dx^b \tag{2.35}$$

Este objeto pode ser pensado como um mapa bilinear que leva uma 1-forma $\boldsymbol{\omega} \in T_p^*\mathcal{M}$ e um vetor $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ a um número real, dado por

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = T(\omega_a dx^a, v^b\frac{\partial}{\partial x^b}) = \omega_a v^b T(dx^a, e_b) = \omega_a v^b T^a{}_b \tag{2.36}$$

Esta descrição de tensores como operadores multi-lineares é bem descrita na referência ...

Em geral, podemos mostrar que em uma transformação de coordenadas $x^a \to x'^a(x)$, as componentes de um tensor arbitrário, transformam-se sob a regra

$$T'^{a_1...a_q}{}_{b_1...b_r} = \frac{\partial x'^{a_1}}{\partial x^{c_1}}...\frac{\partial x'^{a_q}}{\partial x^{c_q}}\frac{\partial x^{d_1}}{\partial x'^{b_1}}...\frac{\partial x^{d_r}}{\partial x'^{b_r}}T'^{c_1...c_q}{}_{d_1...d_r}. \tag{2.37}$$

No caso particular do tensor de ordem-2 descrito acima, temos:

$$\begin{aligned} \bar{T}^m_n = \mathbf{T}'(\bar{dx}^m, \bar{e}_n) &= \mathbf{T}(\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a}dx^a, \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^b}e_b) \\ &= \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^b}\mathbf{T}(dx^a, e_b) \\ &= \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^a}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^b}T^a{}_b \end{aligned}$$

Podemos observar que essa transformação é composta por uma superposição das leis de transformações dos seus componentes ou seja: um índice covariante e outro índice contravariante.

Tensores são de extrema importância para a Relatividade Geral e a Teoria de Campos. O tempo todo nos depararemos com vetores e tensores de rank 2, 3 ou 4. Em geral, representaremos tensores diversos apenas a partir de suas componentes. Como exemplos, temos: o tensor responsável por representar o campo eletromagnético, o tensor de Faraday F_{ab}; o tensor momento-energia T^{ab}; o tensor de Levi-Civita ε_{abcd}; e os tensores de Riemann e Ricci $R^a{}_{bcd}$ e R_{ab} respectivamente, que nos dão informações sobre a curvatura da variedade.

2.2.6 Contração ou Traço

Dado um tensor com componentes $T^{a_1 \dots a_q}{}_{b_1 \dots b_r}$ podemos construir um novo tensor tomando a soma de um ou mais índices contravariantes com índices covariantes repetidos. Por exemplo, temos as possibilidades

$$T^{a_1 \dots a_q}{}_{b_1 \dots a_q} \tag{2.38}$$

ou

$$T^{b_1 \dots a_q}{}_{b_1 \dots a_q}. \tag{2.39}$$

Note que a contração reduz o rank do tensor de um fator de 2. No caso de um tensor de ordem 2, segue

$$T^a{}_a = \sum_{i=1}^{n} T^i{}_i. \tag{2.40}$$

que é, obviamente um escalar. No cálculo tensorial, escalares são pensados como tensores de ordem $(0, 0)$ ou, simplesmente, tensor de ordem 0. No caso acima, chamamos o escalar resultante de traço, também representado por $tr(\mathbf{T})$ ou $[T]$. Pode-se dizer de forma genérica que o traço é a soma dos elementos da diagonal de um tensor de ordem 2.

2.2.7 Tensores simétricos e antissimétricos

Um tensor é dito *simétrico* quando é invariante sob uma permutação das suas componentes. Bem como é *antissimétrico* quando troca de sinal através da permutação entre quaisquer pares consecutivos de índices. Este último, quando é covariante, também recebe o nome de forma diferencial.

A partir de agora usaremos os símbolos de simetria ( ) e antissimetria [ ] para representar tensores simétricos e anti-simétricos. Para tensores de ordem-2, por exemplo, temos as definições:

$$T_{(ab)} \equiv T_{ab} + T_{ba}$$

e

$$T_{[ab]} \equiv T_{ab} - T_{ba}$$

Desta forma, podemos sempre decompor um tal tensor em sua parte simétrica e antissimétrica:

$$T_{ab} = \frac{1}{2!}T_{(ab)} + \frac{1}{2!}T_{[ab]}$$

Podemos observar que essa definição também se aplica a tensores de rank maiores, onde tensores simétricos mantém-se com o mesmo sinal em todas as permutações de seus índices, enquanto um tensor antissimétrico tem em seu resultado um sinal negativo a cada permutação simples de cada um dos seus índices. Vejamos por exemplo a simetrização e antissimetrização de um tensor de rank 3:

$$T_{(abc)} = T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} + T_{bac} + T_{acb} + T_{cba}$$
$$T_{[abc]} = T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{bac} - T_{acb} - T_{cba}$$

Mais adiante nesse trabalho usaremos com frequência alguns tensores simétricos, como o tensor métrico (g_{ab}, g^{ab}), bem como tensores antissimétricos como o tensor de Faraday (F_{ab}, F^{ab}). Note que os conceitos de simetria e antissimetria se aplicam tanto a tensores covariantes como contravariantes.

2.3 O tensor métrico

Até agora temos nos preocupado com conceitos aplicados à um ponto p de uma variedade n-dimensional. Para começarmos a trabalhar o conceito de distância em uma variedade $\mathcal{M}$ precisamos definir um objeto capaz de nos dizer algebricamente como trataremos o deslocamento nessa variedade. Nosso ponto de partida para essa construção é definir um objeto $\boldsymbol{g} \in T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M}$, ou seja, um tensor covariante de rank 2. Além disso, exigiremos que as componentes desse objeto satisfaça as seguintes propriedades:

- $g_{ab} = g_{ba} = \frac{1}{2}g_{(ab)}$ (simétrico).

- $\det(g_{ab}) \neq 0$ (não-degenerado).

Consideremos agora dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{M}$. O tensor métrico é definido de forma que a contração de seus índices covariantes com dois vetores contravariantes nos retorna um número real. Em termos formais:

$$\boldsymbol{g} : T_p\mathcal{M} \otimes T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

Ao contrairmos os índices da métrica g_{ab} duas vezes com o mesmo vetor obtemos o que conhecemos na álgebra linear como a norma do vetor, isto é,

$$g_{ab}v^a v^b = ||\mathbf{v}||^2$$

Outra característica importante do tensor métrico que podemos reparar e que se dá pelo fato da métrica ser não-degenerada, é que (em um dado ponto) podemos escrever g_{ab} como uma matriz diagonal com r termos positivos e s termos negativos.

$$sgn(\boldsymbol{g}) \equiv \begin{vmatrix} +1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & +1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & -1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{diag}(+, +, ..., -, -)$$

Chamamos esta disposição de *assinatura da métrica*. Note que, em geral, não podemos passar de uma dada assinatura para outra sem que a métrica se degenere. Em particular, no caso de uma variedade quadridimensional, temos as seguintes possibilidades para a assinatura:

- Espaço Euclidiano: $sgn(\boldsymbol{g}) = (+, +, +, +)$.

- Espaço de Minkowski[2]: $sgn(\boldsymbol{g}) = (+, -, -, -)$.

- Espaço Ultrahiperbólico: $sgn(\boldsymbol{g}) = (+, +, -, -)$.

[2] Neste trabalho adotaremos esta assinatura, porém convém mencionar que se trata apenas de uma questão de notação, sendo comum encontrar em ampla literatura $sgn(\boldsymbol{g}) = (-, +, +, +)$

Além disso, a não-degenerescência da métrica implica na existência de uma inversa tal que:

$$\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{-1} = 1$$

Analogamente, em componentes, temos

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a{}^c$$

Agora veremos como se comportam objetos criados através da contração da métrica e sua inversa com tensores contravariantes e covariantes respectivamente. Seja $\mathbf{v}$ um vetor contravariante

$$\mathbf{v} = v^a \frac{\partial}{\partial x^a} \in T_p\mathcal{M}$$

Temos que

$$\boldsymbol{g}(\quad, \mathbf{v}) \equiv g_{ab}v^a dx^b \in T_p^*\mathcal{M}$$

onde

$$g_{ab}v^a \equiv v_b$$

De forma similar, partindo de um $\boldsymbol{\omega}$ covariante, temos

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_a dx^a \in T_p^*\mathcal{M}$$

Temos que

$$\boldsymbol{g}^{-1}(\quad, \boldsymbol{\omega}) \equiv g^{ab}\omega_a dx^a \in T_p\mathcal{M}$$

onde

$$g^{ab}\omega_a \equiv \omega^b$$

Nesse ponto vemos como a métrica funciona para subir ou descer índices. Podemos aplicar esses conceitos também aos tensores, como por exemplo:

$$T^{ab} = T^a{}_c g^{cb} = T_{cd}g^{ac}g^{bd}$$

Uma vez trabalhadas essas características, podemos enfim ver como a métrica nos dá o conceito de distância numa variedade. Imaginemos um deslocamento infinitesimal de $p \to p + dp$. Em termos das coordenadas temos um deslocamento infinitesimal dx^a. Aplicando as contrações da métrica com os vetores que representam um deslocamento infinitesimal, obtemos então a norma desse deslocamento, e assim podemos escrever o elemento de linha ds como:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = g_{ab}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}dt^2 \tag{2.41}$$

Dessa forma, temos o deslocamento s em termos da integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|g_{ab}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}|}dt \tag{2.42}$$

que nos dá o comprimento de arco ao longo de qualquer curva parametrizada.

2.4 *Símbolo e tensor de Levi-Civita*

Outro objeto de extrema importância no nosso trabalho é o *símbolo de Levi-Civita* $[a_1 a_2 ... a_n]$. Trata-se de um objeto completamente antissimétrico definido da seguinte forma:

$$[a_1 ... a_n] = \begin{cases} +1 \quad \text{para qualquer permutação par dos seus índices} \\ -1 \quad \text{para qualquer permutação impar dos seus índices} \\ 0 \quad \text{caso haja igualdade entre qualquer um dos seus indices} \end{cases}$$

Pode-se mostrar que este símbolo não se transforma como um verdadeiro tensor. Por outro lado, em uma variedade n-dimensional com métrica arbitrária o *tensor de Levi-Civita* é definido como:

$$\varepsilon_{a_1 ... a_n} = \sqrt{|g|}\ [a_1 ... a_n] \qquad \varepsilon^{a_1 ... a_n} = \text{sgn}(g)\frac{1}{\sqrt{|g|}}[a_1 ... a_n], \tag{2.43}$$

com $g \equiv \det(g_{ab})$. As seguintes identidades são conhecidas

$$\varepsilon^{a_1 ... a_m}\varepsilon_{b_1 ... b_m} = \text{sgn}(g)\delta^{a_1 ... a_m}{}_{b_1 ... b_m}$$

$$\varepsilon^{a_1 ... a_k a_{k+1} ... a_m}\varepsilon_{a_1 ... a_k b_{k+1} ... b_m} = \text{sgn}(g)\ k!\ \delta^{a_{k+1} ... a_m}{}_{b_{k+1} ... b_m} \tag{2.44}$$

onde

$$\delta^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_k} \equiv \begin{vmatrix} \delta^{a_1}{}_{b_1} & \delta^{a_1}{}_{b_2} & \dots & \delta^{a_1}{}_{b_k} \\ \delta^{a_2}{}_{b_1} & \delta^{a_2}{}_{b_2} & \dots & \delta^{a_2}{}_{b_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^{a_k}{}_{b_1} & \delta^{a_k}{}_{b_2} & \dots & \delta^{a_k}{}_{b_k} \end{vmatrix} \tag{2.45}$$

é o *delta de Kronecker generalizado.* Em particular, em uma variedade quadridimensional com $g_{ab} = \mathrm{diag}(+, -, -, -)$, como é o caso do espaço de Minkowski, nós obtemos

$$\varepsilon_{abcd} = \sqrt{|g|}\ [abcd], \qquad \varepsilon^{abcd} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}[abcd], \tag{2.46}$$

e as relações algébricas

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{pqrs} = -\delta^{abcd}{}_{pqrs}$$

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{pqrd} = -\delta^{abc}{}_{pqr}$$

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{pqcd} = -2\delta^{ab}{}_{pq}$$

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{pbcd} = -6\delta^{a}{}_{p}$$

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{abcd} = -24$$

2.5 Formas diferenciais e dualidade de Hodge

De posse das ferramentas e conhecimentos adquiridos até aqui, falaremos agora sobre objetos de especial importância para a compreensão das geometrias/topologias das variedades: as formas diferenciais. Mais adiante discutiremos o operador $\star$ de Hodge, que desempenha papel fundamental no contexto do eletromagnetismo.

2.5.1 k-formas

Uma k-forma diferencial $\boldsymbol{\omega}$ é simplesmente um tensor covariante de ordem k, totalmente antissimétrico. Ou seja, é um objeto que pode ser expandido sob a forma

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{a_1 a_2 \ldots a_k} dx^{a_1} \otimes dx^{a_2} \otimes \ldots \otimes dx^{a_k}, \tag{2.47}$$

porém com a condição de antissimetria

$$\omega_{a_1 a_2 \ldots a_k} = \frac{1}{k!} \omega_{[a_1 a_2 \ldots a_k]}. \tag{2.48}$$

O caso $k = 0$ é um caso particular de forma que é equivalente a um escalar. Note também que $k = 1$ é simplesmente um covetor. Podemos encontrar esses e maiores detalhes sobre as k formas em textos clássicos como ([10]) e ([11]).

Interessantemente, as propriedades de antissimetria refletem diretamente nas possibilidades para as k-formas, de acordo com a dimensionalidade n da variedade em questão. Comecemos exemplificando pelo caso bidimensional, $\mathcal{M}^2$. Vejamos quantas componentes independentes cada uma das possíveis k-formas possuem. Um cálculo direto de análise combinatória permite mostrar que:

1. 0-forma $\rightarrow$ 1 componente independente;

2. 1-forma $\rightarrow$ 2 componentes independentes;

3. 2-forma $\rightarrow$ 1 componente independente.

É simples mostrar que é impossível construir um objeto totalmente antissimétrico com $k \geq 3$ no caso bidimensional. Consideremos agora o caso tridimensional, $\mathcal{M}^3$:

1. 0-forma $\rightarrow$ 1 componente independente;

2. 1-forma $\rightarrow$ 3 componentes independentes;

3. 2-forma $\rightarrow$ 3 componente independente.

4. 3-forma $\rightarrow$ 1 componente independente

Similarmente, é impossível construir um objeto totalmente antissimétrico com $k \geq 4$ no caso tridimensional. Considerando agora o caso quadrimensional, $\mathcal{M}^4$, segue:

1. 0-forma $\to$ 1 componente independente;
2. 1-forma $\to$ 4 componentes independentes;
3. 2-forma $\to$ 6 componente independente.
4. 3-forma $\to$ 4 componente independente
5. 4-forma $\to$ 1 componente independente

Como podemos observar, o número de componentes independentes de uma k-forma é dado pelo Binômio de Newton:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.49}$$

Onde n é a dimensão da variedade $\mathcal{M}$. O conjunto de todas as k-formas possíveis numa variedade formam o espaço das formas diferenciais e pode ser representado como

$$\Lambda^k(T_p^*\mathcal{M}), \tag{2.50}$$

também chamado de *k-ésima potência exterior*. Em particular, para nós será de grande interesse os estudos das k-formas numa variedade quadridimensional. Vejamos exemplos de algumas possíveis k-formas de interesse:

0-forma $\to \phi, \psi \to$ Escalares
1-forma $\to A_a \to$ Potencial-Vetor
2-forma $\to F_{ab} \to$ Tensor de Faraday
3-forma $\to F_{[ab,c]} \to$ Equações de Maxwell
4-forma $\to \varepsilon_{abcd} \to$ Tensor de Levi-Civita

Outra característica importante das k-formas é o fato de podermos construir a chamada *derivação exterior*, um processo derivacional que não dependerá da métrica, diferentemente do processo de derivação covariante que será vista em breve nesse trabalho[3]. Grosso modo,

[3] Lembramos que podemos construir também uma derivação covariante que não dependa da métrica. Mas neste trabalho discutiremos em termos da conexão e da métrica.

podemos dizer que as k-formas e suas respectivas derivadas exteriores generalizam as noções de gradiente, divergente e rotacional como conhecemos.

Uma das aplicações das formas diferenciais e do tensor de Levi-Civita é o chamado mapa de Hodge (ou dual), denotado por $\star$. Considerando uma variedade $\mathcal{M}$ e uma métrica g_{ab}, definimos o mapa de Hodge como uma aplicação linear na forma

$$\star : \Lambda^k(T_p^*\mathcal{M}) \to \Lambda^{n-k}(T_p^*\mathcal{M}) \tag{2.51}$$

Esse mapa define um isomorfismo ente $\Lambda^k(T_p^*\mathcal{M})$ e $\Lambda^{n-k}(T_p^*\mathcal{M})$. Grosso modo podemos dizer que o dual de Hodge é um operador linear que leva tensores de rank k à tensores de rank $(n-k)$. Estamos particularmente interessados nessas relações tomando uma variedade quadridimensional, $n = 4$. Nesse caso, dado um *vetor* $v^{(k)}$ definimos seu dual de Hodge $\star v^{(4-k)}$ através do tensor de Levi-Civita como:

$$\begin{aligned}
\star v^a &= \varepsilon^{abcd} v_{bcd} \\
\star F^{ab} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd} F_{cd} \\
\star v^{abc} &= \varepsilon^{abcd} v_d
\end{aligned}$$

2.6 Derivação Covariante

Como mencionamos anteriormente, um campo tensorial em uma variedade diferenciável pode ser pensado como um tensor associado a cada ponto da variedade. Para descrevermos o campo em um dado sistema de coordenadas $\{x^a\}$, precisamos especificar suas componentes como funções de ponto, isto é:

$$T^{ab\ldots d}{}_{pq\ldots r} \to T^{ab\ldots d}{}_{pq\ldots r}(x)$$

Ao calcular as derivadas parciais do tensor, obtemos um novo objeto com um índice adicionado. Por simplicidade de notação, costuma-se escrever este objeto nas formas alternativas

$$\frac{\partial}{\partial x^m} T^{ab\ldots d}{}_{pq\ldots r} \equiv \partial_m T^{ab\ldots d}{}_{pq\ldots r} \equiv T^{ab\ldots d}{}_{pq\ldots r,m} \tag{2.52}$$

Em geral, usaremos a vírgula "," para representar as derivadas parciais simples. Pode-se mostrar que o objeto acima não se transforma como um tensor sob transformações arbitrárias de coordenadas. Tal propriedade decorre do fato de que não somente as componentes do tensor, mas também as bases de coordenadas nas quais ele é descrito também se modificam de ponto para ponto. Para construirmos novos tensores a partir de tensores conhecidos, precisamos introduzir a noção de uma derivação covariante bem como de uma conexão. Nós trataremos apenas as conexões métricas neste trabalho.

2.6.1 Derivação covariante

Comecemos por analisar o que acontece quando tentamos comparar os valores que um dado campo vetorial toma nos pontos x e $x + dx$. Podemos escrever

$$\mathbf{v}(x) = v^a(x)\ \mathbf{e}_a(x),$$
$$\mathbf{v}(x+dx) = v^a(x+dx)\ \mathbf{e}_a(x+dx),$$

onde $\{\mathbf{e}_a\}$ representa a base de coordenadas, por simplicidade. Note que $\mathbf{e}_a(x) \in T_x\mathcal{M}$ enquanto $\mathbf{e}_a(x + dx) \in T_{x+dx}\mathcal{M}$ isto é, as bases vivem em espaços tangentes infinitesimalmente próximos. Como dx é um objeto infinitesimal, expandimos as componentes da seguinte maneira

$$v^a(x+dx) = v^a(x) + \left.\frac{\partial v^a}{\partial x^b}\right|_x dx^b + ... \tag{2.53}$$

onde "..." representa termos de ordem superior. Desta maneira, temos:

$$\mathbf{v}(x+dx) = \left(v^a(x) + \left.\frac{\partial v^a}{\partial x^b}\right|_x dx^b + ...\right)\ \mathbf{e}_a(x+dx) \tag{2.54}$$

Já para comparar as bases, precisamos da noção de uma conexão. Isto é, assumimos que a base no ponto $x + dx$ pode ser expandida sob a forma

$$\mathbf{e}_a(x+dx) = \mathbf{e}_a(x) + \Gamma^c{}_{ab}(x)\mathbf{e}_c(x)dx^b + ..., \tag{2.55}$$

novamente com "..." representando termos de ordem superior em dx. Substituindo, segue

$$\mathbf{v}(x+dx) = \left(v^a(x) + \left.\frac{\partial v^a}{\partial x^b}\right|_x dx^b + ...\right)\ (\mathbf{e}_a(x) + \Gamma^c{}_{al}(x)\mathbf{e}_c(x)dx^l + ...). \tag{2.56}$$

Finalmente, multiplicando e rearranjando os termos fica

$$\mathbf{v}(x+dx) = \mathbf{v}(x) + [(v^a{}_{,b} + \Gamma^a{}_{bc}v^c)\mathbf{e}_a]|_x dx^b + ... \tag{2.57}$$

A conclusão é que, em primeira ordem, o vetor no ponto $x + dx$ difere do vetor no ponto x por um fator envolvendo a conexão. A quantidade entre parênteses

$$v^a{}_{;b} \equiv v^a{}_{,b} + \Gamma^a{}_{bc} v^c \tag{2.58}$$

recebe o nome de *derivada covariante* e pode-se mostrar que ela gera de fato um verdadeiro tensor de rank 2.

Dizemos que a conexão é compatível com a métrica se ela pode ser escrita sob a forma

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{da,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d}) \tag{2.59}$$

Neste caso ela recebe o nome de símbolos de Christoffel. Nós trabalharemos apenas com conexões deste tipo (sem torção). É direto mostrar que satisfaz

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} \Gamma^a{}_{(bc)} \tag{2.60}$$

Em outras palavras, os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices escrito embaixo.

Seguindo raciocínio semelhante para um tensor arbitrário, temos

$$\begin{aligned} T^{a...b}{}_{c...d;k} = T^{a...b}{}_{c...d,k} \quad &+ \quad \Gamma^a{}_{lk} T^{l...b}{}_{c...d} + ... + \Gamma^b{}_{lk} T^{a...l}{}_{c...d} \\ &- \quad \Gamma^l{}_{ck} T^{a...b}{}_{l...d} - ... - \Gamma^l{}_{dk} T^{a...b}{}_{c...l}. \end{aligned}$$

Em particular, para um escalar, segue

$$\phi_{;k} = \phi_{,k}.$$

Ou seja, neste caso a derivada covariante reduz-se a derivada simples. A condição de compatibilidade da derivada covariante com a métrica é equivalente a expressão

$$g_{ab;c} = 0 \qquad \rightarrow \qquad g^{ab}{}_{;c} = 0 \tag{2.61}$$

Em outras palavras, a derivada covariante da métrica em qualquer sistema de coordenadas é sempre nula. Note que quando estamos em um espaço Euclidiano em coordenadas cartesianas os símbolo de Cristoffel são identicamente nulos e a derivada covariante reduz-se a derivada simples.

É direto mostrar que a derivada covariante satisfaz a regra de Leibniz, isto é

$$(A^{ab...c} B_{c...de})_{;k} = A^{ab...c}{}_{;k} B_{c...de} + A^{ab...c} B_{c...de;k} \tag{2.62}$$

Sabendo-se que o resultado da derivação covariante é um novo tensor, pode-se tomar novamente sua derivada covariante. Daí, segue que o objeto

$$(T^{a...b}{}_{c...d})_{;k;l;...;m} \tag{2.63}$$

também é um tensor. Em particular, a derivada covariante de segunda ordem contraída com a métrica é chamada de D'alembertiano. No caso particular de um campo escalar, temos

$$\Box\phi \equiv g^{ab}\phi_{;a;b} = \phi^{;a}{}_{;a}. \tag{2.64}$$

Uma forma alternativa para definir o símbolo de Christoffel $\Gamma^{a}{}_{bc}$ em termos da métrica g_{ab} aparece no formalismo lagrangiano para uma partícula. Considere a lagrangiana de um sistema onde não existe Energia Potencial, ou seja, uma lagrangiana definida apenas pela energia cinética $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$. As equações de Euler-Lagrange têm a forma

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} = 0 \tag{2.65}$$

Onde x^i são as coordenadas generalizadas e $\dot{x}^i$ sua derivação em relação ao tempo. Sabemos também que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Comecemos com o primeiro termo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_k} = \frac{m}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{2.66}$$

Desenvolvendo o segundo termo da equação:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right]\cdot\frac{m}{2} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[(g_{ij}\dot{x}^j + g_{ik}\dot{x}^k)\right] \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= m\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{x}^j) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= m\left(\frac{dg_{ij}}{dt}\dot{x}^j + g_{ij}\frac{d\dot{x}^j}{dt}\right) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= m\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial\dot{x}^k}\frac{d\dot{x}^k}{dt}\dot{x}^j + g_{ij}\ddot{x}^j\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} = m\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^j + g_{ij}\ddot{x}^j\right) \tag{2.67}$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange fica

$$m\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^j + g_{ij}\ddot{x}^j\right)\right] = 0.$$

Manipulando os índices mudos convenientemente, utilizando a propriedade de simetria de g_{ij} e a notação de derivada parcial $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{ij,k}$ podemos reescrever a equação acima de forma mais conveniente:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^k\dot{x}^j(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) + g_{ij}\ddot{x}^j = 0$$

Para finalizar, podemos multiplicar toda a equação pelo inverso da métrica g^{li} e obtermos:

$$\frac{1}{2}g^{li}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i})\dot{x}^k\dot{x}^j + \ddot{x}^l = 0.$$

O termo $\frac{1}{2}g^{li}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i})$ é definido como Símbolo de Cristhoffel em termos da métrica.

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}). \tag{2.68}$$

2.7 Polinômios simétrico-elementares

Considere um campo tensorial misto de rank 2 em uma variedade m-dimensional. Em um dado ponto $p \in \mathcal{M}$, este objeto define um mapa do espaço tangente nele mesmo, isto é:

$$u^a \mapsto T^a{}_b u^b$$

Tal mapa define naturalmente o problema de auto-vetores (direções principais)

$$T^a{}_b u^b = \lambda u^a$$

onde λ é o autovalor associado. Sabemos da álgebra linear que, para que tal problema tenha solução, devemos ter

$$det(\lambda\delta^a{}_b - T^a{}_b) = 0$$

Da definição do determinante, segue

$$det(\lambda\delta^a{}_b - T^a{}_b) = \frac{1}{m!}\delta^{a_1\ldots a_m}{}_{b_1\ldots b_m}(\lambda\delta^{b_1}{}_{a_1} - T^{b_1}{}_{a_1})\ldots(\lambda\delta^{b_m}{}_{a_m} - T^{b_m}{}_{a_m}),$$

com $\delta^{a_1\ldots a_m}{}_{b_1\ldots b_n}$ os deltas generalizados de Kronecker definidos anteriormente. Usando a identidade de Newton podemos reescrever o polinômio característico sob a forma

$$det(\lambda\delta^a{}_b - T^a{}_b) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sigma_k\lambda^{m-k}, \tag{2.69}$$

com

$$\sigma_0 \equiv 1, \quad \sigma_k = \frac{1}{k!}\delta^{b_1...b_k}{}_{a_1...a_k}T^{a_1}{}_{b_1}...T^{a_k}{}_{b_k}. \tag{2.70}$$

As quantidades σ_k são chamadas de polinômios simétrico-elementares.

Vamos agora calcula os valores de σ_k para $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$.

- k=1

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{1!}\delta^{b_1}{}_{a_1}T^{a_1}{}_{b_1}\\ &= T^{a_1}{}_{a_1}\\ &= [T]\end{aligned}$$

- k=2

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2!}\delta^{b_1b_2}{}_{a_1a_2}T^{a_1}{}_{b_1}T^{b_2}{}_{a_2}\\ &= \frac{1}{2!}(\delta^{a_1}{}_{b_1}\delta^{a_2}{}_{b_2} - \delta^{a_1}{}_{b_2}\delta^{a_2}{}_{b_1})T^{a_1}{}_{b_1}T^{a_2}{}_{b_2}\\ &= \frac{1}{2!}(T^{a_1}{}_{a_1}T^{a_2}{}_{a_2} - T^{a_2}{}_{a_1}T^{a_1}{}_{a_2})\\ &= \frac{1}{2}([T]^2 - [T^2])\end{aligned}$$

- k=3

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \frac{1}{3!}\delta^{b_1b_2b_3}{}_{a_1a_2a_3}T^{a_1}{}_{b_1}T^{b_2}{}_{a_2}T^{b_3}{}_{a_3}\\ &= \frac{1}{6}([T]^3 - 3[T][T^2] + 2[T^3])\end{aligned}$$

- k=4

$$\begin{aligned}\sigma_4 &= \frac{1}{4!}\delta^{b_1b_2b_3b_4}{}_{a_1a_2a_3a_4}T^{a_1}{}_{b_1}T^{a_2}{}_{b_2}T^{a_3}{}_{b_3}T^{a_4}{}_{b_4}\\ &= \frac{1}{24}([T]^4 - 6[T]^2[T^2] + 8[T]T^{a_1}{}_{a_2}T^{a_2}{}_{a_3}T^{a_3}{}_{a_1} + 3[T^4] - 6T^{a_1}{}_{a_2}T^{a_2}{}_{a_3}T^{a_3}{}_{a_4}T^{a_4}{}_{a_1})\\ &= \frac{1}{24}([T]^4 - 6[T]^2[T^2] + 8[T][T^3] + 3[T^2][T^2] - 6[T^4])\\ &= \frac{1}{24}([T]^4 - 6[T]^2[T^2] + 8[T][T^3] + 3[T^2]^2 - 6[T^4])\end{aligned}$$

Desta forma escrevemos o determinante como:

$$\begin{aligned}det(\lambda\delta^a{}_b - T^a{}_b) = \lambda^4 - [T]\lambda^3 + \frac{1}{2}([T]^2 - [T^2])\lambda^2 - \frac{1}{6}([T]^3 - 3[T][T^2] + 2[T^3])\lambda +\\ + \frac{1}{24}([T]^4 - 6[T]^2[T^2] + 8[T][T^3] + 3[T^2]^2 - 6[T^4])\end{aligned}$$

No próximo capítulo começaremos com uma explanação das equações de Maxwell no formalismo vetorial, em seguida, ao desenvolvermos o formalismo tensorial utilizaremos todas as definições e conceitos abordados nesse capítulo. Aproveitamos para estabelecer que de forma geral neste trabalho utilizaremos uma variedade minkowskiana com métrica $g_{\mu\nu}$ $(\mathcal{M}^4, \mathbf{g})$, ou seja, uma variedade quadridimensional cuja assinatura da métrica é $\mathrm{sgn}(\mathbf{g}) = (+, -, -, -)$.

Capítulo 3

O Campo eletromagnético

Neste capítulo descreveremos com detalhes algumas das principais características do *Campo eletromagnético.* O primeiro passo é relembrar o formalismo vetorial, amplamente difundido nos cursos básicos de Eletromagnetismo e Fenômenos Eletromagnéticos. Relembraremos nesse formalismo as cinco equações que regem o eletromagnetismo e brevemente comentaremos e daremos um significado físico a cada uma delas. Para fechar essa parte do nosso trabalho definiremos o chamado *Vetor de Poynting.*

Em seguida partiremos para o *formalismo tensorial.* Discutiremos a partis das características da variedade diferenciável $(\mathcal{M}^4, \mathbf{g})$ que tomaremos como ponto de partida, seu tensor métrico característico. Desse ponto em diante, usaremos apenas o formalismo tensorial para descrever o campo eletromagnético e algumas das suas principais características e propriedades, como a *decomposição 3+1* e a *rotação dual*, redefiniremos o vetor de Poynting e calcularemos os principais *Invariantes* do campo. Por fim, estudaremos o *lagrangeano do campo eletromagnético*, e veremos o que podemos obter através dele.

3.1 Definições e Equações de Movimento

As equações diferenciais parciais conhecidas como equações de Maxwell[6], juntamente com a força de Lorentz compõem o que chamamos de Base do Eletromagnetismo Clássico. Podem ser descritas através de um formalismo vetorial, ou seja, são equações capazes de descrever o campo vetorial criado por uma determinada distribuição de carga ou corrente. São elas:

-Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

-Lei de Gauss para o Magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.2}$$

-Lei de Faraday da Indução

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{3.3}$$

-Lei de Circulação de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{3.4}$$

-Lei da Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3.5}$$

Onde $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são os campos elétricos e magnéticos respectivamente, ρ é a densidade de carga, ε_0 é a constante de permissividade elétrica do vácuo, μ_0 é a constante de permeabilidade magnética, $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente, q é a carga de uma partícula carregada e $\mathbf{v}$ é a velocidade de deslocamento da partícula.

A lei de Gauss relaciona o campo elétrico com as cargas geradoras desse campo, ou seja, relaciona o fluxo do campo elétrico em uma superfície fechada com as cargas interiores à essa superfície. A lei de Gauss para o magnetismo nos diz que não existe monopolo magnético. Podemos dizer que o fluxo magnético sobre qualquer superfície gaussiana é zero. A lei de Faraday nos diz como um campo elétrico que varia no tempo é capaz de induzir um campo magnético. Já a lei de Ampère nos mostra que podemos gerar campos magnéticos de duas formas, sendo através de uma corrente elétrica, ou através de um campo elétrico que varie no tempo. E por fim, temos a força de Lorentz que nos diz a força que atua numa partícula carregada q que se move no espaço, resultante da superposição das forças elétricas e magnéticas.

Além disso, podemos definir a quantidade de fluxo de energia, ou seja, a energia transferida por unidade de área, de um campo eletromagnético. Definimos essa através do vetor de Poynting $\mathbf{S}$, sendo:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{3.6}$$

3.2 Formalismo Tensorial

Como é sabido, em escalas muito pequenas (escala atômica) ou em altas velocidades (relativamente próximas à velocidade da luz) a Mecânica e o Eletromagnetismo Clássico passam a encontrar problemas e os resultados obtidos em laboratórios não condizem mais com as predições teóricas. Por exemplo, as equações de Maxwell não respeitam as transformações de Galileu, quando existe uma mudança no referencial. Como sabemos, vetores e tensores são objetos invariantes sob transformação de coordenadas, ou seja, devem se manter invariantes diante de uma mudança no referencial. Em seu trabalho de 1905 Albert Einstein propôs a teoria da relatividade restrita. Nela, o tempo não é absoluto, ou seja, a grosso modo, funciona também como uma coordenada a mais num sistema de coordenadas de um referencial. As três coordenadas espaciais conhecidas se unem à uma coordenada referente ao tempo, criando assim um espaço quadridimensional chamado Espaço-Tempo. Alternativamente, chamamos essa variedade de *espaço de Minkowski*.

O espaço de Minkowski, denotado por $\mathcal{M}^4$, possui assinatura da métrica $sgn(\boldsymbol{g}) = (+,-,-,-)$, onde podemos atribuir ao tempo a componente positiva da métrica e ao espaço tridimensional as componentes negativas. Doravante chamaremos especificamente a métrica do espaço de Minkowski de $\eta_{\mu\nu}$. Ou seja, $(\mathcal{M}^4, g_{\mu\nu}) \to (\mathcal{M}^4, \eta_{\mu\nu})$.

Elementos do espaço de Minkowski são chamados *quadri-tensores*. À critério de notação, a partir de agora representaremos as componentes dos quadritensores contidos no espaço de Minkowski com índices gregos, a fim de se adequar à notação comumente usada na literatura. No formalismo tensorial, em coordenadas inerciais, as equações de Maxwell no vácuo, podem ser escritas na forma:

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad\qquad \star F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{3.7}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é uma matriz 4x4, ou ainda, um tensor antissimétrico de rank 2, conhecido como o tensor de Faraday ou tensor de Intensidade de Campo

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Podemos escrever $F_{\mu\nu}$ em termos de um quadripotencial A^μ.

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{3.9}$$

Sendo $A_\mu = A_\mu(\phi, \mathbf{A})$, onde ϕ é o potencial elétrico (escalar) e $\mathbf{A}$ é o potencial vetor magnético. Antes disso, construiremos algumas relações entre tensores antissimétricos genéricos que serão de grande importância nesse trabalho. Para isso nos apoiamos mais uma vez em ampla literatura e referimos especial os clássicos ([12]) e ([13]).

3.3 Campo de observadores e decomposição 3+1

Dado um campo vetorial v^μ de caráter arbitrário e um campo tensorial antissimétrico $F_{\mu\nu}$ arbitrário, temos a relação algébrica:

$$\star\,[v^\lambda(\star F_{\lambda[\mu}v_{\nu]})] = (v_\lambda v^\lambda)F_{\mu\nu} + v^\lambda F_{\lambda[\mu}v_{\nu]} \tag{3.10}$$

Para a prova, basta contrair os tensores de Levi-Civita correspondentes de forma apropriada e expandí-los em termos dos deltas generalizados de Kronecker.

Em $(\mathcal{M}^4, \eta_{\mu\nu})$, podemos definir para qualquer evento um vetor tipo tempo v^μ, orientado para o futuro e normalizado. Tal atribuição define o que chamamos de um *campo de observadores* (ou congruência de observadores) na variedade. A condição de normalização escreve-se

$$\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1 \tag{3.11}$$

e podemos então construir um projetor $h_{\mu\nu}$ pela relação

$$h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu. \tag{3.12}$$

Note que h possui as seguintes propriedades:

(i) $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$

(ii) $h_{\mu\nu}v^\mu = h_{\mu\nu}v^\nu = 0$

(iii) $h_{\mu\nu}h^\nu{}_\lambda = h_{\mu\lambda}$

Ao contrairmos ambos os índices de um tensor genérico $F^{\mu\nu}$ com o projetor $h_{\mu\nu}$ ganhamos a projeção perpendicular de $F^{\mu\nu}$ com relação a v^μ, isto é

$$F^{\mu\nu}h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta = F^{\alpha\beta}_{perp} \tag{3.13}$$

Trabalhando o lado esquerdo da equação, temos:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta &= F^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu - v_\mu v^\alpha)h_\nu{}^\beta \\ &= [F^{\alpha\nu} - F^{\mu\nu}v_\mu v^\alpha](\delta^\beta_\nu - v_\nu v^\beta) \\ &= F^{\alpha\beta} - (F^{\alpha\nu}v_\nu)v^\beta - (F^{\mu\beta}v_\mu)v^\alpha + F^{\mu\nu}v_\mu v_\nu v^\alpha v^\beta. \end{aligned}$$

Pela antissimetria de $F^{\mu\nu}$ o termo $F^{\mu\nu}v_\mu v_\nu v^\alpha v^\beta = 0$.

Voltando em (3.13) e rearranjando os termos, segue:

$$F^{\alpha\beta} = (F^{\alpha\nu}v_\nu)v^\beta + (F^{\mu\beta}v_\mu)v^\alpha + F^{\alpha\beta}_{perp}$$

Escrevemos, portanto:

$$F^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}_{paral} + F^{\alpha\beta}_{perp} \tag{3.14}$$

com

$$F^{\alpha\beta}_{paral} = (F^{\alpha\nu}v_\nu)v^\beta + (F^{\mu\beta}v_\mu)v^\alpha \tag{3.15}$$

Os termos "paralelo"e "perpendicular"justificam-se neste contexto, pois

$$F^{\alpha\beta}_{paral}v_\beta = F^{\alpha\beta}v_\beta, \qquad F^{\alpha\beta}_{perp}v_\beta = 0. \tag{3.16}$$

Agora, definindo os campos vetoriais

$$E^\alpha = F^{\alpha\beta}v_\beta \qquad e \qquad B^\alpha = -\star F^{\alpha\beta}v_\beta \tag{3.17}$$

podemos mostrar, usando a Eq. (3.10), que

$$F^{\alpha\beta}_{paral} = E^\alpha v^\beta - E^\beta v^\alpha \qquad e \qquad F^{\alpha\beta}_{perp} = \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}B^\mu v^\nu. \tag{3.18}$$

Portanto, temos a relação importante

$$F^{\alpha\beta} = E^\alpha v^\beta - E^\beta v^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}B^\mu v^\nu \tag{3.19}$$

conhecida como decomposição (3+1) do campo eletromagnético. Os campos vetoriais E^α e B^α são interpretados como os campos elétricos e magnéticos medidos pelo observador v^μ e, segue diretamente de suas definições que

$$E^\alpha v_\alpha = 0, \qquad B^\alpha v_\alpha = 0, \tag{3.20}$$

isto é, são campos do tipo espaço, como esperado. Portanto, em geral, utilizaremos a notação

$$E^\alpha E_\alpha = -E^2, \qquad B^\alpha B_\alpha = -B^2. \tag{3.21}$$

3.4 Rotação Dual

Podemos calcular agora o dual de $F^{\mu\nu}$ em termos de E^μ e B^μ. Em $(\mathcal{M}^4, \mathbf{g})$:

$$\begin{aligned}
\star F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}(E^\mu v^\nu - E^\nu v^\mu + \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}B^\lambda v^\rho) \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^\mu v^\nu - \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^\nu v^\mu + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}B^\lambda v^\rho) \\
&= \frac{1}{2}[2\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^\mu v^\nu - 2(\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\rho - \delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\lambda)B^\lambda v^\rho] \\
&= [\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^\mu v^\nu - (B^\alpha v^\beta - B^\beta v^\alpha)].
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, temos

$$\star F^{\alpha\beta} = -(B^\alpha v^\beta - B^\beta v^\alpha) + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^\mu v^\nu. \tag{3.22}$$

Percebemos então que no processo de dualização, $F \longrightarrow \star F$, valem as relações

$$E \longrightarrow -B, \qquad B \longrightarrow E, \tag{3.23}$$

que constituem um caso particular da chamada *rotação duais*.

3.5 Vetor de Poynting

Podemos agora abordar o correspondente tensorial do vetor de Poynting em termos de E, B e v. Uma vez que este objeto foi definido inicialmente como $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ e sendo $E^\alpha = F^{\alpha\beta}v_\beta$ e $B^\alpha = - * F^{\alpha\beta}v_\beta$, temos:

$$S^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}E_\beta B_\mu v_\nu, \tag{3.24}$$

de onde segue, utilizando a notação anterior, a relação

$$\begin{aligned}
S^2 = -S^\alpha S_\alpha &= -\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}E^\beta B^\mu v^\nu \varepsilon^{\alpha\lambda\rho\xi}E_\lambda B_\rho v_\xi \\
&= +\delta^{\lambda\rho\xi}_{\beta\mu\nu}E^\beta E_\lambda B^\mu B_\rho v^\nu v_\xi \\
&= +(\delta^\lambda_\beta\delta^\rho_\mu\delta^\xi_\nu + \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu\delta^\xi_\beta + \delta^\lambda_\nu\delta^\rho_\beta\delta^\xi_\mu - \delta^\lambda_\beta\delta^\rho_\nu\delta^\xi_\mu - \delta^\lambda_\nu\delta^\rho_\mu\delta^\xi_\beta - \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\beta\delta^\xi_\nu)E^\beta E_\lambda B^\mu B_\rho v^\nu v_\xi \\
&= +E^\beta E_\beta B^\mu B_\mu v^\nu v_\nu + E^\beta v_\beta B^\mu v_\mu B^\nu E_\nu + E^\beta B_\beta E^\mu v_\mu B^\nu v_\nu \\
&\quad -E^\beta E_\beta B^\nu v_\nu B^\rho v_\rho - E^\beta v_\beta B^\nu B_\nu E^\mu v_\mu - E^\beta B_\beta E^\mu B_\mu v^\nu v_\nu.
\end{aligned}$$

Como $E^\mu v_\mu = B^\mu v_\mu = 0$ e $v^\mu v_\mu = 1$, chegamos à:

$$S^2 = E^\beta E_\beta B^\mu B_\mu - E^\beta B_\beta E^\mu B_\mu$$

Usando as convenções anteriores, $E_\mu E^\mu = -E^2$ e $B_\mu B^\mu = -B^2$, chegamos à:

$$\begin{aligned} S^2 &= E^2 B^2 - E^\mu B_\mu E^\beta B_\beta \\ &= E^2 B^2 sen^2\theta, \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre o campo elétrico e o campo magnético medidos pelo observador v^μ. Portanto, $S^2 = 0$ quando os campos são paralelos.

3.6 Invariantes

3.6.1 Principais Invariantes

Sabendo-se calcular o dual de um tensor antissimétrico de rank 2 $F_{\mu\nu}$, podemos construir dois invariantes (escalares) contraindo seus índices. Mais uma vez em $(\mathcal{M}^4, \mathbf{g})$, são eles:

$$(I) \quad \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \equiv \psi \qquad\qquad (II) \quad \frac{1}{2} * F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \equiv \phi$$

Em termos de E^μ e B^μ, temos:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}(E^\alpha v^\beta - E^\beta v^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} B^\mu v^\nu)(E_\alpha v_\beta - E_\beta v_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho} B_\lambda v_\rho) \\ &= \frac{1}{2}(E^\alpha v^\beta E_\alpha v_\beta - E^\alpha v^\beta E_\beta v_\alpha + E^\alpha v^\beta \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho} B_\lambda v_\rho - \\ &\quad - E^\beta v^\alpha E_\alpha v_\beta + E^\beta v^\alpha E_\beta v_\alpha - E^\beta v^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho} B_\lambda v_\rho + \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} B^\mu v^\nu E_\alpha v_\beta - \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} B^\mu v^\nu E_\beta v_\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} B^\mu v^\nu \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho} B_\lambda v_\rho). \end{aligned}$$

Novamente, usando $E^\alpha v_\alpha = B^\alpha v_\alpha = 0$, os termos $(-E^\alpha v^\beta E_\beta v_\alpha)$, $(E^\beta v^\alpha E_\alpha v_\beta)$ são iguais a zero. Também, os termos do tipo $(E^\alpha v^\beta \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho} B_\lambda v_\rho)$, $(E^\beta v^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho} B_\lambda v_\rho)$, $(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} B^\mu v^\nu E_\alpha v_\beta)$ e $(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} B^\mu v^\nu E_\beta v_\alpha)$ cancelam-se devido a antissimetria do tensor de Levi-Civita. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}[E^\alpha E_\alpha + E^\beta E_\beta - 2(\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\lambda)(B_\mu v_\nu B^\lambda v^\rho)] \\ &= \frac{1}{2}[E^\alpha E_\alpha + E^\alpha E_\alpha - 2B^\alpha B_\alpha] \end{aligned}$$

Usando, mais uma vez, as definições $E_\mu E^\mu = -E^2$ e $B_\mu B^\mu = -B^2$, chegamos à:

$$\psi = B^2 - E^2. \tag{3.25}$$

Agora, trabalhando em (II):

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{4}[2\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^{\mu}v^{\nu} - 2(B^{\alpha}v^{\beta} - B^{\beta}v^{\alpha})](E_{\alpha}v_{\beta} - E_{\beta}v_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}B_{\lambda}v_{\rho}) \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^{\mu}v^{\nu}E_{\alpha}v_{\beta} - \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^{\mu}v^{\nu}E_{\beta}v_{\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^{\mu}v^{\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}B_{\lambda}v_{\rho} - \\
&\quad -B^{\alpha}v^{\beta}E_{\alpha}v_{\beta} + B^{\alpha}v^{\beta}E_{\beta}v_{\alpha} - B^{\alpha}v^{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}B_{\lambda}v_{\rho} + B^{\beta}v^{\alpha}E_{\alpha}v_{\beta} - \\
&\quad -B^{\beta}v^{\alpha}E_{\beta}v_{\alpha} + B^{\beta}v^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}B_{\lambda}v_{\rho})
\end{aligned}$$

Mais uma vez usamos $E^{\alpha}v_{\alpha} = B^{\alpha}v_{\alpha} = 0$. Portanto, os termos $(E^{\alpha}v^{\beta}E_{\beta}v_{\alpha})$, $(E^{\beta}v^{\alpha}E_{\alpha}v_{\beta})$ são iguais a zero. Os termos do tipo $(B^{\alpha}v^{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}B_{\lambda}v_{\rho})$, $(B^{\beta}v^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\lambda\rho}B_{\lambda}v_{\rho})$, $(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^{\mu}v^{\nu}E_{\alpha}v_{\beta})$ e $(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}E^{\mu}v^{\nu}E_{\beta}v_{\alpha})$ também se cancelam devido a antissimetria do tensor de Levi-Civita. Além disso, mais uma vez utilizando a equação (3.11), segue:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{2}[-B_{\alpha}E^{\alpha} - B_{\beta}E^{\beta} - 2(\delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\rho}_{\mu})E^{\mu}v^{\nu}B_{\lambda}v_{\rho}] \\
&= \frac{1}{2}(-4E^{\alpha}B_{\alpha})
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$\phi = 2\vec{E}\cdot\vec{B}. \tag{3.26}$$

Uma vez construídos os invariantes ψ e ϕ, podemos então construir um terceiro invariante, um campo escalar κ pela relação:

$$\kappa = \frac{1}{2}(\psi^2 + \phi^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{E^4 + B^4 + 2E^2B^2\cos(2\theta)} \tag{3.27}$$

onde θ denota novamente o ângulo entre o campo elétrico e magnético e o fato $\frac{1}{2}$ é devido a notação escolhida. Através desses invariante podemos classificar os tipos de campos em um dado ponto $p \in \mathcal{M}^4$ como:

- se $\kappa \neq 0 \rightarrow$ Campo Regular
- se $\kappa = 0 \rightarrow$ Campo Nulo. $(B^2 = E^2$ e $\vec{B} \perp \vec{E})$
- se $\phi = 0 \rightarrow$ Campo Simples $(\vec{B} \perp \vec{E})$

Vejamos agora algumas propriedades importantes dos casos acima.

3.6.2 Campo Nulo ($\kappa = 0$)

Para $\kappa = 0$ temos que $\psi = \phi = 0$. Nesse caso, podemos perceber que $E^2 = B^2$, bem como $\vec{E}$ é perpendicular à $\vec{B}$. Desta forma, podemos criar uma base ortonormalizada $\{v^\mu, e^\mu, b^\mu, s^\mu\}$, de forma que:

$$e^\mu e_\mu = b^\mu b_\mu = s^\mu s_\mu = -1 \qquad e \qquad e^\mu b_\mu = e^\mu s_\mu = b^\mu s_\mu = 0$$

Além disso,

$$e^\mu v_\mu = b^\mu v_\mu = s^\mu v_\mu = 0.$$

Podemos perceber que existe uma relação fechada de forma que:

$$s^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} e_\beta b_\mu v_\nu, \qquad e^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} b_\beta s_\mu v_\nu \qquad \text{e} \qquad b^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} s_\beta e_\mu v_\nu$$

Desta forma, definimos a chamada *tetrada* no ponto $p \in \mathcal{M}$, composta pelo observador v^μ e os vetores ortonormalizados e^μ, b^μ e s^μ que apontam, respectivamente, nas direções do campo elétrico, magnético e do vetor de Poynting.

Voltando ao tensor de Faraday, $F_{\mu\nu}$, podemos reescrevê-lo em termos dos elementos da tetrada. Assim, $E_\mu = p e_\mu$ e $B^\alpha = p b^\alpha$, e segue

$$F_{\mu\nu} = E_{[\mu} v_{\nu]} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^\alpha v^\beta = p(e_{[\mu} v_{\nu]} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b^\alpha v^\beta).$$

Reescrevendo com b^μ em termos de e^μ e s^μ:

$$F_{\mu\nu} = p(e_{[\mu} v_{\nu]} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\lambda\rho\chi} s_\lambda e_\rho v_\chi v^\beta). \tag{3.28}$$

Vamos desenvolver agora o termo $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\lambda\rho\chi} s_\lambda e_\rho v_\chi v^\beta$. Usando as propriedades dos tensores de Levi-Civita, fica

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\lambda\rho\chi} s_\lambda e_\rho v_\chi v^\beta &= (-\delta^\lambda_\mu \delta^\rho_\nu \delta^\chi_\beta - \delta^\lambda_\beta \delta^\rho_\mu \delta^\chi_\nu - \delta^\lambda_\nu \delta^\rho_\beta \delta^\chi_\mu + \delta^\lambda_\mu \delta^\rho_\beta \delta^\chi_\nu + \delta^\lambda_\beta \delta^\rho_\mu \delta^\chi_\nu + \delta^\lambda_\nu \delta^\rho_\mu \delta^\chi_\beta) s_\lambda e_\rho v_\chi v^\beta \\
&= -s_\mu e_\nu v_\beta v^\beta - s_\beta e_\mu v_\nu v^\beta - s_\nu e_\beta v_\mu v^\beta + s_\mu e_\beta v_\nu v^\beta + s_\beta e_\mu v_\nu v^\beta + s_\nu e_\mu v_\beta v^\beta.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, como $v_\beta v^\beta = 1$ e os outros vetores são perpendiculares ao observador:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\lambda\rho\chi} s_\lambda e_\rho v_\chi v^\beta = s_\nu e_\mu - s_\mu e_\nu = e_{[\mu} s_{\nu]}.$$

Retomando a equação (3.28):

$$F_{\mu\nu} = p(e_{[\mu} v_{\nu]} + e_{[\mu} s_{\nu]})$$

Definimos aqui o objeto $l_\nu = v_\nu + s_\nu$, tal que $l^\nu l_\nu = (v_\nu + s_\nu)^2 = 0$. Finalmente, reescrevemos o tensor de Faraday sob a forma

$$F_{\mu\nu} = pe_{[\mu}l_{\nu]} \tag{3.29}$$

Observe que l_ν é um vetor nulo, ou seja, tipo luz, de forma que ganhamos as seguintes propriedades:

$$l_\nu e^\nu = (v_\nu + s_\nu)e^\nu = l_\nu b^\nu = (v_\nu + s_\nu)b^\nu = 0$$

$$l_\nu v^\nu = (v_\nu + s_\nu)v^\nu = 1 \qquad e \qquad l_\nu s^\nu = (v_\nu + s_\nu)s^\nu = -1$$

3.6.3 Campo Regular ($\kappa \neq 0$)

Para o caso do campo regular ($\kappa \neq 0$), pode-se mostrar que sempre existe um observador, v^μ, tal que que o vetor de Poynting se anula, $S^\mu = 0$. Chamamos esse campo específico normalizado de *observador wrench*. Para tal obsevador existe um vetor do tipo espaço w^μ satisfazendo as relações

$$w_\mu v^\mu = 0 \qquad e \qquad w_\mu w^\mu = -1$$

tal que

$$E_\mu = pw_\mu \qquad e \qquad B_\mu = qw_\mu \tag{3.30}$$

onde p e q são funções escalares arbitrárias. Neste caso, o tensor de Faraday admite a representação simplificada:

$$F_{\mu\nu} = pw_{[\mu}v_{\nu]} + q\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho.$$

Na sequência faremos os estudo do lagrangiano do campo eletromagnético, através do qual chegaremos à equação da onda e ao tensor momento energia

3.7 Lagrangiano do campo eletromagnético

A *mecânica lagrangiana* trata-se de uma formulação alternativa da mecânica clássica para partículas e campos, construída geralmente em termos de vetores. Neste formalismo, as leis de conservação de momento linear e da energia aparecem de forma simples. A chamada *densidade lagrangiana de campos* ($\mathcal{L}$) consiste numa generalização da lagrangiana para sistemas com infinitos graus de liberdade. Nesta seção abordaremos brevemente duas formas de se obter o *tensor momento-energia*, denotado por $T^{\mu\nu}$, a partir da densidade lagrangiana do campo eletromagnético e seu funcional $\mathcal{S}$. Além disso, reobteremos também as equações de Maxwell no formalismo tensorial com $F_{\mu\nu}$ e seu potencial A_μ.

3.7.1 Variação do Funcional

Nosso ponto de partida no caso de partículas é a função de Lagrange, que visa resumir a dinâmica de um sistema em uma equação bastante simples:

$$L = T - V \tag{3.31}$$

Onde T é a energia cinética do sistema e V é a energia potencial. De posse da função de Lagrange podemos obter as equações de movimento através da minimização do funcional

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{3.32}$$

No caso de campos, podemos escrever a lagrangiana em termos de uma integral no espaço tridimensional

$$L = \int_V \mathcal{L} dV \tag{3.33}$$

com $\mathcal{L}$ a densidade lagrangiana e $dV = \sqrt{-g}d^3x$, o elemento de volume do 3-espaço. Desta maneira, podemos escrever a ação sob a forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}\sqrt{-g}d^3x dt \tag{3.34}$$

Partimos do conceito de que a ação deve ser Invariante de Lorentz, uma vez que não depende do sistema de coordenadas inerciais. Desta forma, o funcional da ação $\mathcal{S}$ deve também ser um escalar. Logo, a densidade lagrangiana também deve ser um escalar. Além disso, construiremos as variáveis dinâmicas em termos do quadripotencial A^μ. Temos também que a invariância nos impõe que a lagrangiana seja função apenas de $F_{\mu\nu}$ e $\star F_{\mu\nu}$. Vamos começar pelo invariante $F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}$ em termos do quadripotencial A^μ:

$$F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial^\mu A^\nu)(\partial^\alpha A^\beta)$$

Pela antissimetria do tensor de Levi-Civita em relação à permuta dos índices:

$$F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\mu(A^\nu(\partial^\alpha A^\beta))$$

Com a construção dessa quadridivergência, podemos utilizar o teorema de Gauss em quatro dimensões para calcular a integral de superfícies no infinito. Como as variações nas bordas são zero, podemos desconsiderar esse termo na equação de movimento.

Desta forma resta-nos construir a densidade lagrangiana num sistema livre de fontes com o escalar $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Esta lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.35}$$

Lembrando que $F_{\mu\nu}$ é invariante por transformações de calibre, isto é,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]} \tag{3.36}$$

escrevemos a ação sob a forma

$$\mathcal{S}[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$

Vamos calcular a variação do funcional em termos de A^μ:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}[A_\mu] &= -\frac{1}{4}\int \delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\frac{1}{4}\int (\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\frac{1}{4}\int 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\frac{1}{2}\int F^{\mu\nu}\delta\nabla_{[\mu}A_{\nu]}\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\frac{1}{2}\int F^{\mu\nu}\delta(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\int F^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta A_\nu\sqrt{-g}d^4x \\
&= -\int [\nabla_\mu(F^{\mu\nu}\delta A_\nu) - \nabla_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu]\sqrt{-g}d^4x \\
&= \int \nabla_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu\sqrt{-g}d^4x
\end{aligned}$$

Nesse desenvolvimento usamos as características de antissimetria e o teorema de Gauss a fim de eliminar termos de superfície.

Notamos que, para que a variação seja zero, o termo $(\nabla_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu\sqrt{-g}d^4x)$ precisa ser igualmente zero. Isso nos leva para qualquer δA_ν arbitrário a:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.37}$$

Decorrente da definição de $F^{\mu\nu}$ em termos do potencial, segue diretamente a chamada identidade de Bianchi

$$F_{[\mu\nu;\alpha]} = 0. \tag{3.38}$$

Em termos do potencial as equações de Maxwell no vazio ficam

$$\nabla_\mu(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) = 0, \tag{3.39}$$

ou, equivalentemente,

$$\Box A^\nu - \nabla^\nu(\nabla_\mu A^\mu) = 0 \tag{3.40}$$

onde $\Box$ é o operador é o D'alembertiano. Nesse momento, fixamos o calibre impondo as condições de Lorenz, ou seja,

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \tag{3.41}$$

Tal condição é sempre possível, uma vez que temos a liberdade de calibre

$$A_\mu \to A_\mu + \nabla_\mu \lambda.$$

Chegamos assim à *equação da onda*

$$\Box A^\nu = 0 \tag{3.42}$$

3.7.2 Variação da ação em termos da métrica: tensor momento-energia

Agora obteremos o tensor momento-energia do campo eletromagnético através da variação do funcional em termos da métrica. Realizamos esse procedimento porque trabalharemos num espaço com coordenadas curvilíneas, ou seja, escrevemos a densidade lagrangeana como $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x}, \phi, \partial_\mu \phi)$, onde ϕ é um campo arbitrário.

O tensor momento-energia é definido pela expressão

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.43}$$

Alternativamente, escrevemos

$$T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}(\delta\sqrt{-g}\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}) \tag{3.44}$$

Nesse ponto, recorreremos à um resultado conhecido do cálculo variacional, deixando a critério do leitor a demonstração:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{3.45}$$

Além disso, também podemos reescrever a variação do lagrangiano em termos da métrica na forma:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta} \tag{3.46}$$

Tomando essas igualdades (3.45) e (3.46), reescrevemos:

$$T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\mathcal{L} - \frac{1}{2}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right)$$

Rearranjando os índices, e substituindo a forma explícita da lagrangiana, fica

$$T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \quad = \quad (F_{\alpha\mu}F^{\mu}{}_{\beta} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g_{\alpha\beta})\delta g^{\alpha\beta}$$

Comparando os lados e substituindo a definição do invariante, temos

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu}F^{\mu}{}_{\beta} + \frac{1}{2}\psi g_{\alpha\beta}. \tag{3.47}$$

É simples mostrar que tal tensor satisfaz uma lei de conservação do tipo

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{3.48}$$

em consequência das equações de movimento. Note que o tensor momento-energia do campo eletromagnético possui traço nulo, isto é

$$T^{\mu}{}_{\mu} = 0. \tag{3.49}$$

Agora de posse do tensor momento-energia e cientes do significado físico das direções principais nulas e das possíveis formas de de classificar um tensor através dessa sua característica, no próximo capítulo iremos explorar essas propriedades e desenvolver algumas contrações algébricas que podem ser realizadas tanto com o tensor de Faraday e seu dual quanto com o tensor momento-energia. Nosso objetivo é mostrar uma forma de abordar esse mesmo problema nas equações de Einstein a fim de conseguirmos caracterizar o fenômeno de propagação da radiação gravitacional através das suas direções principais nulas. R$\equiv \frac{N}{r} + \frac{III}{r^2} + \frac{II}{r^3} + \frac{I}{r^4} + \frac{I'}{r^5} + \mathcal{O}(r^{-6})$

Capítulo 4

Classificação algébrica do campo eletromagnético

Nesta seção, nós demonstraremos uma série de identidades algébricas envolvendo o campo eletromagnético F_{ab}, seu dual $\star F_{ab}$ e o tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}$ correspondente. Como veremos, tais identidades desempenharão papel importante na classificação algébrica do campo eletromagnético e de seu respectivo dual.

4.1 *Identidades Algébricas*

4.1.1 *Tensor de Faraday*

Iniciaremos nossa análise pelo tensor de Faraday e seu dual. Nosso ponto de partida é o seguinte resultado

Lema: Sejam A_{ab} e B_{ab} dois campos tensoriais antissimétricos em um espaço-tempo quadridimensional. Então, segue a identidade algébrica quadrática

$$\star A^{ac} \star B_{cb} - B^{ac} A_{cb} = \frac{1}{2}(A_{cd}B^{cd})\delta^a{}_b. \tag{4.1}$$

Prova: Desenvolvendo explicitamente os tensores duais em termos dos tensores de Levi-

Civita, temos:

$$
\begin{aligned}
\star A^{ac} \star B_{cb} - B^{ac}A_{cb} &= \frac{1}{4}\varepsilon^{acpq}\varepsilon_{cbrs}A_{pq}B^{rs} - B^{ac}A_{cb} \\
&= \frac{1}{4}\delta^{apq}{}_{brs}A_{pq}B^{rs} - B^{ac}A_{cb} \\
&= \frac{1}{4}(\delta^a{}_b\delta^p{}_r\delta^q{}_s + \delta^a{}_s\delta^p{}_b\delta^q{}_r + \delta^a{}_r\delta^p{}_s\delta^q{}_b \\
&\quad -\delta^a{}_r\delta^p{}_b\delta^q{}_s - \delta^a{}_s\delta^p{}_r\delta^q{}_b - \delta^a{}_b\delta^p{}_s\delta^q{}_r)A_{pq}B^{rs} - B^{ac}A_{cb} \\
&= \frac{1}{4}(\delta^a{}_bA_{rs}B^{rs} + A_{br}B^{ra} + A_{sb}B^{as} \\
&\quad -A_{bs}B^{as} - A_{rb}B^{ra} - \delta^a{}_bA_{sr}B^{rs}) - B^{ac}A_{cb} \\
&= \frac{1}{4}(2\delta^a{}_bA_{rs}B^{rs} + 4B^{ar}A_{rb}) - B^{ac}A_{cb} \\
&= \frac{1}{2}(A_{rs}B^{rs})\delta^a{}_b.
\end{aligned}
$$

Dois corolários importantes seguem da relação Eq. (4.1). Nós podemos obtê-los a partir das identificações a seguir.

corolário 1: Quando $A_{ab} = B_{ab} = F_{ab}$, então:

$$\star F^{ac} \star F_{cb} - F^{ac}F_{cb} = \psi\delta^a{}_b \tag{4.2}$$

corolário 2: Quando $A_{ab} = F_{ab}$ e $B_{ab} = \star F_{ab}$, então:

$$\star F^{ac}F_{cb} = -\frac{1}{2}\phi\delta^a{}_b \tag{4.3}$$

A partir destes corolários podemos gerar outras relações algébricas de ordem maior. Por exemplo, de um cálculo direto segue a relação de terceira ordem:

$$F_a{}^cF_c{}^dF_{db} = -\psi F_{ab} - \frac{1}{2}\phi \star F_{ab} \tag{4.4}$$

De fato, desenvolvendo o lado esquerdo da equação e usando os corolários em sequência, segue o tensor antissimétrico

$$
\begin{aligned}
F_a{}^cF_c{}^dF_{db} &= F_a{}^c(\star F_c{}^d \star F_{db} - \psi g_{cb}) \\
&= -\frac{1}{2}\phi \star F_{ab} - \psi F_{ab}.
\end{aligned}
$$

Similarmente, temos a relação de quarta ordem

$$F_a{}^cF_c{}^dF_d{}^eF_{eb} = -\psi F_a{}^cF_{cb} + \frac{1}{4}\phi^2 g_{ab} \tag{4.5}$$

Mais uma vez, desenvolvendo o lado esquerdo da equação utilizando os corolários supracitados:

$$\begin{aligned} F_a{}^cF_c{}^dF_d{}^eF_{eb} &= F_a{}^c(-\frac{1}{2}\phi \star F_{cb} - \psi F_{cb}) \\ &= -\frac{1}{2}\phi F_a{}^c \star F_{cb} - \psi F_a{}^cF_{cb} \\ &= -\frac{1}{2}\phi(-\frac{1}{2}\phi g_{ab}) - \psi F_a{}^cF_{cb} \\ &= \frac{1}{4}\phi^2 g_{ab} - \psi F_a{}^cF_{cb} \end{aligned}$$

Podemos também construir relações semelhantes com o dual $\star F_a{}^c$. Assim, temos:

$$\star F_a{}^c \star F_c{}^d \star F_{db} = \psi \star F_{ab} - \frac{1}{2}\phi F_{ab} \tag{4.6}$$

Seguindo o processo anterior, desenvolveremos o lado esquerdo da equação utilizando mais uma vez os corolários:

$$\begin{aligned} \star F_a{}^c \star F_c{}^d \star F_{db} &= \star F_a{}^c(\psi g_{cb} + F_c{}^dF_{db}) \\ &= \psi \star F_a{}^c g_{cb} + \star F_a{}^cF_c{}^dF_{db}) \\ &= \psi \star F_{ab} - \frac{1}{2}\phi\delta_a{}^dF_{db} \\ &= \psi \star F_{ab} - \frac{1}{2}\phi F_{ab} \end{aligned}$$

Do mesmo modo, a relação de quarta ordem:

$$\star F_a{}^c \star F_c{}^d \star F_d{}^e \star F_{eb} = \psi \star F_a{}^c \star F_{cb} + \frac{1}{4}\phi^2 \tag{4.7}$$

De posse das identidades obtidas, desenvolvemos mais uma vez o lado esquerdo da equação:

$$\begin{aligned} \star F_a{}^c \star F_c{}^d \star F_d{}^e \star F_{eb} &= \star F_a{}^c(\psi \star F_{cb} - \frac{1}{2}\phi F_{cb}) \\ &= \psi \star F_a{}^c \star F_{cb} - \frac{1}{2}\phi \star F_a{}^cF_{cb} \\ &= \psi \star F_a{}^c \star F_{cb} - \frac{1}{2}\phi(-\frac{1}{2}\phi g_{ab}) \\ &= \psi \star F_a{}^c \star F_{cb} + \frac{1}{4}\phi^2 g_{ab} \end{aligned}$$

Além disso, podemos também obter identidades mistas, ou seja, identidades obtidas através da contração do tensor $F_a{}^c$ e seu dual $\star F_a{}^c$. Alguns exemplos:

$$F_a{}^c \star F_c{}^d \star F_{db} = -\frac{1}{2}\phi \star F_{ab} \tag{4.8}$$

Repetindo o procedimento:

$$\begin{aligned}
F_a{}^c \star F_c{}^d \star F_{db} &= F_a{}^c(F_c{}^d F_{db} - \psi g_{cb}) \\
&= F_a{}^c F_c{}^d F_{db} + \psi F_a{}^c g_{cb} \\
&= -\psi F_{ab} - \frac{1}{2}\phi \star F_{ab} + \psi F_{ab} \\
&= -\frac{1}{2}\phi \star F_{ab}
\end{aligned}$$

E ainda:

$$F_a{}^c F_c{}^d \star F_{db} = -\frac{1}{2}\phi F_{ab} \tag{4.9}$$

Nesse caso a prova é bastante simples:

$$\begin{aligned}
F_a{}^c F_c{}^d \star F_{db} &= F_a{}^c(-\frac{1}{2}\phi g_{cb}) \\
&= -\frac{1}{2}\phi F_{ab}
\end{aligned}$$

4.1.2 Tensor Momento-Energia

O tensor momento-energia do campo eletromagnético é dado por

$$T_{ab} = F_{ac}F^c{}_b + \frac{1}{2}\psi g_{ab}. \tag{4.10}$$

Desenvolveremos agora algumas identidades algébricas satisfeitas por este objeto. Comecemos por relembrar que tal tensor tem traço nulo.
De fato, segue *Prova*:

$$\begin{aligned}
T^a{}_a &= F^a{}_c F^c{}_a + \frac{1}{2}\psi \delta^a{}_a \\
&= -F^c{}_a F^c{}_a + \frac{1}{2}\psi 4 \\
&= -2\psi + 2\psi \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para desenvolver as novas identidades, partiremos da equação (4.10) e utilizaremos algumas das identidades já desenvolvidas até aqui. A primeira delas será a identidade quadrática construída apenas com o Tensor Momento-Energia. Segue:

$$T^a{}_c T^c{}_b = \kappa^2 \delta^a{}_b \tag{4.11}$$

Para essa prova desenvolveremos o lado esquerdo da equação em termos de F_{ab}:

$$\begin{aligned}
T^a{}_c T^c{}_b &= (F^a{}_p F^p{}_c + \frac{1}{2}\psi\delta^a{}_c)(F^c{}_q F^q{}_b + \frac{1}{2}\psi\delta^c{}_b) \\
&= F^a{}_p F^p{}_c F^c{}_q F^q{}_b + F^a{}_p F^p{}_c \frac{1}{2}\psi\delta^c{}_b + F^c{}_q F^q{}_b \frac{1}{2}\psi\delta^a{}_c + \frac{1}{4}\psi^2\delta^a{}_b \\
&= F^a{}_p F^p{}_c F^c{}_q F^q{}_b + F^a{}_p F^p{}_b \frac{1}{2}\psi + F^a{}_q F^q{}_b \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{4}\psi^2\delta^a{}_b \\
&= (-\psi F^a{}_c F^c{}_b + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b) + F^a{}_p F^p{}_b \psi + \frac{1}{4}\psi^2\delta^a{}_b \\
&= \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b + \frac{1}{4}\psi^2\delta^a{}_b \\
&= \kappa^2\delta^a{}_b
\end{aligned}$$

Podemos agora construir uma igualdade de terceira ordem, como a seguir:

$$T^a{}_c T^c{}_d T^d{}_b = F^{ap} F_{pb} \kappa^2 + \frac{1}{2}\psi\kappa^2\delta^a{}_b \tag{4.12}$$

Repetimos o processo desenvolvendo o lado esquerdo e utilizando as identidades obtidas até aqui:

$$\begin{aligned}
T^a{}_c T^c{}_d T^d{}_b &= T^a{}_c(\kappa^2\delta^c{}_b) \\
&= (F^a{}_p F^p{}_b + \frac{1}{2}\psi\delta^a{}_c)\kappa^2\delta^c{}_b \\
&= F^a{}_p F^p{}_b \kappa^2 + \frac{1}{2}\psi\kappa^2\delta^a{}_b
\end{aligned}$$

Construiremos agora um termo de quarta ordem:

$$T^a{}_c T^c{}_d T^d{}_e T^e{}_b = \kappa^4\delta^a{}_b \tag{4.13}$$

Existem diversas formas de se demonstrar a igualde seguinte. Optamos por desenvolver o lado esquerdo da equação utilizando as equações (4.10) e (4.12).

$$\begin{aligned}
T^a{}_c T^c{}_d T^d{}_e T^e{}_b &= (F^a{}_p F^p{}_c + \frac{1}{2}\psi\delta^a{}_c)(F^c{}_q F^q{}_b \kappa^2 + \frac{1}{2}\psi\kappa^2\delta^c{}_b) \\
&= F^a{}_p F^p{}_c F^c{}_q F^q{}_b \kappa^2 + F^a{}_p F^p{}_c \frac{1}{2}\psi\kappa^2\delta^c{}_b + \frac{1}{2}\psi\delta^a{}_c F^c{}_q F^q{}_b \kappa^2 + \frac{1}{4}\psi\delta^a{}_c \psi\kappa^2\delta_c{}^b \\
&= \kappa^2(\frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b - \psi F^a{}_c F^c{}_b) + \psi F^a{}_c F^c{}_b \kappa^2 + \frac{1}{4}\psi^2\kappa^2\delta^a{}_b \\
&= \frac{1}{4}\phi^2\kappa^2\delta^a{}_b + \frac{1}{4}\psi^2\kappa^2\delta^a{}_b \\
&= \kappa^4\delta^a{}_b
\end{aligned}$$

Para finalizar, desenvolveremos agora igualdades entre combinações dos tensores T_{ab} com F_{ab}. Observe a igualdade:

$$T^a{}_c F^c{}_b = -\frac{1}{2}(F^a{}_b\psi + \star F^a{}_b\phi) \tag{4.14}$$

Para provarmos essa igualdade, basta substituir T_{ab} em termos de F_{ab} e seus escalares e em seguida utilizarmos as igualdades já obtidas:

$$\begin{aligned}
T^a{}_c F^c{}_b &= (F^a{}_p F^p{}_c + \frac{1}{2}\psi\delta^a{}_c)F^c{}_b \\
&= F^a{}_p F^p{}_c F^c{}_b + \frac{1}{2}\psi F^c{}_b \delta^a{}_c \\
&= (-\psi F^a{}_b - \frac{1}{2}\phi \star F^a{}_b) + \frac{1}{2}\psi F^a{}_b \\
&= -\frac{1}{2}(F^a{}_b\psi + \star F^a{}_b\phi)
\end{aligned}$$

Agora podemos observar as seguintes igualdade de terceira ordem:

$$F^a{}_c T^c{}_d F^d{}_b = -\frac{1}{2}F^a{}_c F^c{}_b\psi + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b \tag{4.15}$$

Utilizando as igualdades já obtidas e desenvolvendo o lado esquerdo da equação:

$$\begin{aligned}
F^a{}_c T^c{}_d F^d{}_b &= F^a{}_c(-\frac{1}{2}F^c{}_b\psi - \frac{1}{2}\star F^c{}_b\phi) \\
&= -\frac{1}{2}F^a{}_c F^c{}_b\psi - \frac{1}{2}F^a{}_c \star F^c{}_b\phi \\
&= -\frac{1}{2}F^a{}_c F^c{}_b\psi + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b \\
&= -\frac{1}{2}(\star F^a{}_c \star F^c{}_b - \psi\delta^a{}_b)\psi + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\delta^a{}_b F^c{}_d F^c{}_d + F^a{}_c F^c{}_b - \psi\delta^a{}_b)\psi + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b \\
&= -\frac{1}{2}(\psi\delta_a{}^b + F^a{}_c F^c{}_b - \psi\delta^a{}_b)\psi + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b
\end{aligned}$$

Para finalizar, desenvolveremos essa igualdade também de terceira ordem:

$$T^a{}_c F^c{}_d T^d{}_b = \kappa^2 F^a{}_b \tag{4.16}$$

Repetindo o processo, desenvolvendo o lado esquerdo e utilizando as igualdades até aqui obtidas:

$$
\begin{aligned}
T^a{}_cF^c{}_dT^d{}_b &= (-\frac{1}{2}F^a{}_d\psi - \frac{1}{2}\star F^a{}_d\phi)(F^d{}_pF^p{}_b + \frac{1}{2}\psi\delta_b{}^d) \\
&= -\frac{1}{2}F^a{}_d\psi F^d{}_pF^p{}_b - \frac{1}{2}F^a{}_d\psi\frac{1}{2}\psi\delta_b{}^d - \frac{1}{2}\star F^a{}_d\phi F^d{}_pF^p{}_b - \frac{1}{2}\star F^a{}_d\phi\frac{1}{2}\psi\delta_b{}^d \\
&= -\frac{1}{4}\psi^2F^a{}_b - \frac{1}{4}\psi\phi\star F^a{}_b - \frac{1}{2}\psi(F^a{}_dF^d{}_pF^p{}_b) - \frac{1}{2}\phi(\star F^a{}_dF^d{}_p)F^p{}_b \\
&= -\frac{1}{4}\psi^2F^a{}_b - \frac{1}{4}\psi\phi\star F^a{}_b - \frac{1}{2}\psi(-\psi F^a{}_b - \frac{1}{2}\phi\star F^a{}_b) - \frac{1}{2}\phi F^p{}_b(-\frac{1}{2}\phi\delta_p{}^a) \\
&= -\frac{1}{4}\psi^2F^a{}_b - \frac{1}{4}\psi\phi F^a{}_b + \frac{1}{2}\psi^2F^a{}_b + \frac{1}{4}\psi\phi\star F^a{}_b + \frac{1}{4}\phi^2F^a{}_b \\
&= \frac{1}{4}\psi^2F^a{}_b + \frac{1}{4}\phi^2F^a{}_b \\
&= (\frac{1}{4}\psi^2 + \frac{1}{4}\phi^2)F^a{}_b \\
&= \kappa^2F^a{}_b
\end{aligned}
$$

Compilando os resultados:

(4.4) $F_a{}^cF_c{}^dF_{db} = -\psi F_{ab} - \frac{1}{2}\phi\star F_{ab}$

(4.5) $F_a{}^cF_c{}^dF_d{}^eF_{eb} = -\psi F_a{}^cF_{cb} + \frac{1}{4}\phi^2g_{ab}$

(4.6) $\star F_a{}^c\star F_c{}^d\star F_{db} = \psi\star F_{ab} - \frac{1}{2}\phi F_{ab}$

(4.7) $\star F_a{}^c\star F_c{}^d\star F_d{}^e\star F_{eb} = \psi\star F_a{}^c\star F_{cb} + \frac{1}{4}\phi^2$

(4.8) $F_a{}^c\star F_c{}^d\star F_{db} = -\frac{1}{2}\phi\star F_{ab}$

(4.9) $F_a{}^cF_c{}^d\star F_{db} = -\frac{1}{2}\phi F_{ab}$

(4.11) $T^a{}_cT^c{}_b = \kappa^2\delta^a{}_b$

(4.12) $T^a{}_cT^c{}_dT^d{}_b = F^{ap}F_{pb}\kappa^2 + \frac{1}{2}\psi\kappa^2\delta^a{}_b$

(4.13) $T^a{}_cT^c{}_dT^d{}_eT^e{}_b = \kappa^4\delta^a{}_b$

(4.14) $T^a{}_cF^c{}_b = -\frac{1}{2}(F^a{}_b\psi + \star F^a{}_b\phi)$

(4.15) $F^a{}_cT^c{}_dF^d{}_b = -\frac{1}{2}F^a{}_cF^c{}_b\psi + \frac{1}{4}\phi^2\delta^a{}_b$

(4.16) $T^a{}_cF^c{}_dT^d{}_b = \kappa^2F_{ab}$

4.2 Direções Principais nulas

A classificação algébrica do campo eletromagnético e de seu dual é baseada em um problema de autovetor/autovalor construído com os respectivos tensores. Para começar, consideremos o tensor $F^\mu{}_\nu$ em um dado ponto $p \in \mathcal{M}$. Percebemos que a equação

$$F^\mu{}_\nu X^\nu = Y^\mu \tag{4.17}$$

define um mapa linear do espaço tangente nele mesmo. Assim como na álgebra linear, podemos nos perguntar sobre os autovetores/autovalores deste mapa, isto é

$$F^{\mu}{}_{\nu}X^{\nu} = \lambda X^{\mu} \tag{4.18}$$

Note que, se o autovalor é diferente de zero ($\lambda \neq 0$), segue

$$g_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} = 0, \tag{4.19}$$

uma vez que $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico. Ou seja, neste caso os autovetores são automaticamente nulos. Um autovetor nulo é também chamado de *direção principal nula* e veremos adiante que o tipo algébrico do tensor de campo depende do número destas direções linearmente independentes. Veremos também que o caso $\lambda = 0$ também possui direções principais nulas.

Sabemos que o problema de autovetor/autovalor terá soluções não-triviais se

$$\det(\lambda\delta^{\mu}_{\nu} - F^{\mu}{}_{\nu}) = 0. \tag{4.20}$$

Utilizando a relação (2.69) podemos calcular o determinante acima sob a seguinte forma

$$\det(\lambda\delta^{\mu}_{\nu} - F^{\mu}{}_{\nu}) = \frac{1}{4!}[\delta^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\lambda\delta^{\mu_1}_{\nu_1} - F^{\mu_1}{}_{\nu_1})...(\lambda\delta^{\mu_4}_{\nu_4} - F^{\mu_4}{}_{\nu_4})] = 0$$

Note que em dimensão par a ordem dos tensores no lado esquerdo não faz diferença. Tanto podemos escrever $(\lambda\delta^{\mu}_{\nu} - F^{\mu}{}_{\nu})$ como $(F^{\mu}{}_{\nu} - \lambda\delta^{\mu}_{\nu})$. Lembrando da definição dos polinômios simétrico-elementares (2.69) e (2.70), segue:

$$\sigma_0\lambda^4 - \sigma_1\lambda^3 + \sigma_2\lambda^2 - \sigma_3\lambda^1 + \sigma_4\lambda^0 = 0$$

Calculando explicitamente os valores de σ_k em termos dos invariantes, chegamos à:

$$\sigma_0 = 1, \qquad \sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = \psi, \qquad \sigma_3 = 0 \qquad e \qquad \sigma_4 = -\frac{\phi^2}{4}$$

Segue, portanto, a equação para os autovalores

$$\lambda^4 + \psi\lambda^2 - \frac{\phi^2}{4} = 0, \tag{4.21}$$

uma que é uma equação biquadrática facilmente resolvida substituindo $\lambda^2 = \Lambda$. Escrevendo

$$\Lambda^2 + \psi\Lambda - \frac{\phi^2}{4} = 0,$$

calculamos o discriminante Δ em termos dos invariantes:

$$\begin{aligned}\Delta &= (\psi^2) - 4.1.(\frac{-\phi^2}{4}) \\ &= \psi^2 + \phi^2 \\ &= 4\kappa^2\end{aligned}$$

Chegamos assim à duas raízes para Λ:

$$\Lambda_1 = -\frac{\psi}{2} + \kappa \qquad \text{e} \qquad \Lambda_2 = -\frac{\psi}{2} - \kappa$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +\sqrt{-\frac{\psi}{2} + \kappa}, \qquad & \lambda_2 &= -\sqrt{-\frac{\psi}{2} + \kappa}, \\ \lambda_3 &= +\sqrt{-\frac{\psi}{2} - \kappa}, \qquad & \lambda_4 &= -\sqrt{-\frac{\psi}{2} - \kappa}.\end{aligned}$$

Portanto, em geral, teremos quatro autovalores distintos. Para investigar o que acontece em maiores detalhes é conveniente separar a análise em dois casos: o campo nulo e o caso regular.

4.2.1 Direções Principais do Campo Nulo

Para um campo nulo, temos $\psi = 0$ e $\phi = 0$, o que implica em $\kappa = 0$. Logo, todos os autovalores possíveis são identicamente nulos. Retomando a Eq. (4.18) com $\lambda = 0$, temos:

$$F^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} = 0 \tag{4.22}$$

Pela equação (3.29):

$$pe_{[\mu} l_{\nu]} X^{\nu} = 0$$

$$p(e^{\mu} l_{\nu} - e_{\nu} l^{\mu}) X^{\nu} = 0$$

$$(l_{\nu} X^{\nu}) e^{\mu} = (e_{\nu} X^{\nu}) l^{\mu} \tag{4.23}$$

Como e^{μ} e l^{μ} são linearmente independentes, segue que:

$$(i)\ l_{\nu} X^{\nu} = 0 \qquad \text{e} \qquad (ii)\ e_{\nu} X^{\nu} = 0$$

Consideremos agora o autovetor X^μ a ser determinado expandido na base de tetrada $\{v^\mu, e^\mu,\ b^\mu,\ s^\mu\}$, introduzida no capítulo anterior. Da primeira relação acima obtemos a equação

$$l_\nu(Ae^\nu + Bb^\nu + Cs^\nu + Dv^\nu) = 0 \tag{4.24}$$

onde A, B, C e D são constantes arbitrárias. Desenvolvendo os termos, fica

$$Al_\nu e^\nu + Bl_\nu b^\nu + Cl_\nu s^\nu + Dl_\nu v^\nu = 0$$

Lembrando que $l_\nu e^\nu = l_\nu b^\nu = 0$, $l_\nu v^\nu = 1$ e $l_\nu s^\nu = -1$ chegamos a

$$C = D$$

Agora, partindo de (ii) temos:

$$e_\nu(Ae^\nu + Bb^\nu + Cs^\nu + Dv^\nu) = 0$$

$$Ae_\nu e^\nu + Be_\nu b^\nu + Ce_\nu s^\nu + De_\nu v^\nu = 0 \tag{4.25}$$

Como $e_\nu l^\nu = e_\nu b^\nu = e_\nu s^\nu = 0$ e $e_\nu e^\nu = 1$ chegamos a:

$$A = 0$$

Consequentemente, podemos reescrever o autovetor sob a forma

$$X^\nu = Bb^\nu + C(s^\nu + v^\nu)$$

Como $s^\nu + v^\nu = l^\nu$, segue a forma geral

$$X^\nu = Bb^\nu + Cl^\nu. \tag{4.26}$$

Dizemos que $\{X^\nu\}$ é o *span* de b^ν e l^ν. Como b^ν é ortogonal à v^ν e s^ν podemos perceber que o conjunto dos autovetores construído desta forma nos dá um plano gerado pela combinação linear de b^ν e l^ν.

Podemos repetir o procedimento anterior no caso do dual $\star F^\mu{}_\nu$. Em outras palavras, buscamos a solução para o problema de autovalor

$$\star\, F^\mu{}_\nu Y^\nu = \lambda Y^\mu \tag{4.27}$$

Um cálculo direto permite mostrar que os autovalores admissíveis também são identicamente nulos neste caso. O cálculo dos autovetores torna-se mais simples lembrando que, pela rotação dual, basta levar

$$e^\mu \to -b^\mu \qquad\qquad b^\mu \to e^\mu.$$

isto é,

$$\star F^\mu{}_\nu = -pb_{[\mu}l_{\nu]} \tag{4.28}$$

Contraindo esta relação com Y^ν, temos

$$p(b_\mu l_\nu - b_\nu l_\mu)Y^\nu = 0, \quad \to \quad (l_\nu Y^\nu)b^\mu = (b_\nu Y^\nu)l^\mu$$

Analogamente ao apresentado anteriormente, seguem as relações algébricas

$$(i)\ l_\nu Y^\nu = 0 \qquad\quad e \qquad\quad (ii)\ b_\nu Y^\nu = 0.$$

Expandindo Y^μ em termos da base de tetrada $\{v^\mu, e^\mu, b^\mu, s^\mu\}$, e desenvolvendo as expressões anteriores, chegamos respectivamente à: $C = D$ e $B = 0$. Desta forma temos a forma geral dos autovetores

$$Y^\nu = Ae^\nu + Cl^\nu \tag{4.29}$$

Similarmente ao caso anterior, dizemos que $\{Y^\nu\}$ é span de e^ν e l^ν. Ou seja, o conjunto de autovetores de $\star F^\mu{}_\nu$ é gerado pela combinação linear de e^ν com l^ν, o que nos dá novamente um plano.

Combinando os resultados, podemos construir um objeto que seja a intercessão entre $\{X^\nu\}$ e $\{Y^\nu\}$. Utilizando as igualdades (4.26) e (4.29) podemos perceber que para o caso de um campo nulo, tal interseção é dada por

$$\{X^\nu\} \cap \{Y^\nu\} = \mathrm{span}(l^\nu) \tag{4.30}$$

Chamamos qualquer vetor proporcional a l^ν de *direção principal nula*. O fato de que o campo nulo possui apenas uma direção principal nula está em constraste com o caso do campo regular. Como veremos adiante, este último possuirá sempre duas direções nulas deste tipo.

4.2.2 Direções Principais do Campo Regular

Para o campo regular, onde $\kappa \neq 0$, vimos anteriormente que podemos assumir a existência de um campo de observadores v^{μ} normalizado chamado de observador *wrench*. Para tal observador, e^{μ} e b^{μ} são paralelos e podemos escrever

$$F_{\mu\nu} = p w_{[\mu} v_{\nu]} + q \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} w^{\lambda} v^{\rho} \tag{4.31}$$

Em termos das componentes p e q, os invariantes adquirem as seguintes formas

$$\psi = q^2 - p^2, \qquad \phi = 2pq, \qquad \kappa = \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

Aqui, abriremos um parênteses para comentar uma importante característica que pode ser observada a respeito do invariante $\psi = q^2 - p^2$. Podemos reparar que para $|q| > |p| \rightarrow \psi > 0$, bem como para $|q| < |p| \rightarrow \psi < 0$. Sabemos que num campo de observadores *wrench* a função escalar p está associada a intensidade do campo elétrico $\mathbf{E}$ enquanto a função escalar q esta associada a intensidade do campo magnético $\mathbf{B}$, conforme nos dizem as equações (3.30). Desta maneira é natural a terminologia

- $\psi < 0$, o campo é *eletricamente dominado*;
- $\psi > 0$, o campo é *magneticamente dominado*;
- $\psi = 0$, o campo é *balanceado ou neutro.*

Por razões de simplicidade, consideraremos aqui apenas o caso $p > 0$ e $q > 0$. Pode-se mostrar que todos os outros casos regulares podem ser obtidos de maneira similar. Dos autovalores calculados anteriormente:

$$\lambda_1 = +\sqrt{-\frac{\psi}{2} + \kappa}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{-\frac{\psi}{2} + \kappa},$$
$$\lambda_3 = +\sqrt{-\frac{\psi}{2} - \kappa}, \qquad \lambda_4 = -\sqrt{-\frac{\psi}{2} - \kappa},$$

podemos reparar que as duas primeiras raízes (λ_1 e λ_2) são reais enquanto (λ_3 e λ_4) são complexas. De fato, um cálculo direto permite mostrar que

$$\lambda_1 = +p, \qquad \lambda_2 = -p, \qquad \lambda_3 = +iq, \qquad \lambda_4 = -iq.$$

Vejamos agora o que acontece com os autovetores, analisando cada caso individualmente. Para simplificar a análise, utilizaremos nos cálculos a seguir uma base de tetradas $\{v^\mu, w^\mu, y^\mu, z^\mu\}$ onde

$$v^\mu v_\mu = 1, \qquad w^\mu w_\mu = y^\mu y_\mu = z^\mu z_\mu = -1, \tag{4.32}$$

com todos os produtos cruzados identicamente nulos, sendo v^μ também um observador *wrench*. Desta maneira, expandiremos o autovetor sob a forma

$$X^\mu = Av^\mu + Bw^\mu + Cy^\mu + Dz^\mu. \tag{4.33}$$

Antes de desenvolvermos cada um dos casos, vamos reescrever o lado esquerdo da igualdade $F^\mu{}_\nu X^\nu = \lambda X^\mu$ de forma a nos facilitar as conclusões. Utilizando (4.31), reescrevemos:

$$\begin{gathered} F^\mu{}_\nu X^\nu \\ (pw_{[\mu}v_{\nu]} + q\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho)X^\nu \\ pw_{[\mu}v_{\nu]}X^\nu + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}qw^\lambda v^\rho X^\nu \end{gathered} \tag{4.34}$$

Focando apenas no primeiro termo:

$$p(w_\mu v_\nu - w_\nu v_\mu)(Av^\nu + Bw^\nu + Cy^\nu + Dz^\nu)$$

Abrindo esse produto e utilizando as relações (4.32) chegamos ao primeiro termo:

$$p(Aw_\mu + Bv_\mu) \tag{4.35}$$

Agora focando no segundo termo:

$$\begin{gathered} q\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho X^\nu \\ q\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho(Av^\nu + Bw^\nu + Cy^\nu + Dz^\nu) \end{gathered} \tag{4.36}$$

Mais uma vez, abrindo esse produto, utilizando as relações (4.32) e a antissimetria do tensor de Levi-Civita chegamos a:

$$q(C\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho y^\nu + D\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho z^\nu) \tag{4.37}$$

Os termos $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho y^\nu$ e $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho z^\nu$ representam a generalização do produto vetorial em quatro dimensões. O resultado do produto vetorial entre três componentes da base tetrada nos dá um objeto proporcional ao quarto elemento da base. Logo, com $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho y^\nu \equiv -z_\mu$ e $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}w^\lambda v^\rho z^\nu \equiv y_\mu$.

Obtidos esses termos, reescrevemos o lado esquerdo da equação usando (4.35) e (4.37):

$$p(Aw_\mu + Bv_\mu) + q(-Cz_\mu + Dy_\mu) \tag{4.38}$$

Primeiro caso: $\lambda = p$:

$$p(Aw_\mu + Bv_\mu) + q(-Cz_\mu + Dy_\mu) = p(Av_\mu + Bw_\mu + Cy_\mu + Dz_\mu) \tag{4.39}$$

Analisando essa equação podemos montar dois sistemas de equações vinculadas a fim de encontrarmos os coeficientes A, B, C e D. O primeiro:

$$\begin{cases} pAw_\mu = pBw_\mu \\ pBv_\mu = pAv_\mu \end{cases} \tag{4.40}$$

É fácil perceber que a solução desse sistema é $A = B$. Já o segundo sistema tem a forma:

$$\begin{cases} -qCz_\mu = pDz_\mu \\ qDy_\mu = pCy_\mu \end{cases} \tag{4.41}$$

e é igualmente fácil perceber que existe apenas a solução trivial para esse sistema, onde $C = D = 0$. Uma vez obtidos os coeficientes, podemos escrever o conjunto de autovetores X^μ para $\lambda_1 = p$ sob a forma:

$$X^\mu = A(v^\mu + w^\mu) \tag{4.42}$$

Definimos $l^\mu = (v^\mu + w^\mu)$, de forma que $l^\mu l_\mu = 0$. Consequentemente, l^μ é uma das *direções principais nulas* do campo regular.

Segundo caso: $\lambda = -p$:

$$p(Aw_\mu + Bv_\mu) + q(-Cz_\mu + Dy_\mu) = -p(AV_\mu + Bw_\mu + Cy_\mu + Dz_\mu) \tag{4.43}$$

Mais uma vez, ao analisarmos a equação acima podemos montar dois sistemas de equações vinculadas a fim de determinar os coeficientes. Do primeiro sistema:

$$\begin{cases} pAw_\mu = -pBw_\mu \\ pBv_\mu = -pAv_\mu \end{cases} \tag{4.44}$$

é fácil perceber que a solução é $A = -B$. Do segundo sistema:

$$\begin{cases} -qCz_\mu = -pDz_\mu \\ qDy_\mu = -pCy_\mu \end{cases} \tag{4.45}$$

obtemos $C = D = 0$. Consequentemente, podemos escrever o conjunto de autovetores X^μ para $\lambda_2 = -p$ sob a forma:

$$X^\mu = A(v^\mu - w^\mu) \tag{4.46}$$

Analogamente, definimos $n^\mu = (v^\mu - w^\mu)$, de forma que $n^\mu n_\mu = 0$. Dizemos, portanto, que k^μ também é uma das *direções principais nulas*.

Convém observar que o campo regular produz sempre duas direções principais nulas reais (l^μ e n^μ), enquanto o campo nulo produz apenas uma. Além disso, similarmente ao executado para o campo nulo, pode-se mostrar que o dual $\star F^{\mu\nu}$ também possui as mesmas direções principais nulas l^μ e n^μ, embora associadas a autovalores diferentes.

Uma vez obtidas as direções principais nulas, podemos descrever através delas o campo eletromagnético regular. Para isso, notamos que v^μ e w^μ escrevem-se, alternativamente, sob a forma

$$v_\mu = \frac{l_\mu + n_\mu}{2}, \tag{4.47}$$
$$w_\mu = \frac{l_\mu - n_\mu}{2}. \tag{4.48}$$

Voltando à eq. (4.31), reescrevemos:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= p\left[\left(\frac{l_{[\mu} + n_{[\mu}}{2}\right)\left(\frac{l_{\nu]} - n_{\nu]}}{2}\right)\right] + q\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left[\left(\frac{l^\lambda + n^\lambda}{2}\right)\left(\frac{l^\rho - n^\rho}{2}\right)\right] \\ &= \frac{p}{4}(l_{[\mu}l_{\nu]} + l_{[\mu}n_{\nu]} - n_{[\mu}l_{\nu]} - n_{[\mu}n_{\nu]}) + \frac{q}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(l^\lambda l^\rho + l^\lambda n^\rho - n^\lambda l^\rho - n^\lambda n^\rho) \\ &= \frac{p}{4}(l_{[\mu}n_{\nu]} - n_{[\mu}l_{\nu]}) + \frac{q}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(l^\lambda n^\rho - n^\lambda l^\rho) \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$F_{\mu\nu} = \frac{p}{2}l_{[\mu}n_{\nu]} + \frac{q}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}l^\lambda n^\rho \tag{4.49}$$

Para finalizar nossa análise, analisaremos também os valores de $\lambda \in \mathbb{C}$.

Terceiro caso: $\lambda = iq$:

$$p(Aw_\mu + Bv_\mu) + q(-Cz_\mu + Dy_\mu) = iq(Av_\mu + Bw_\mu + Cy_\mu + Dz_\mu) \tag{4.50}$$

Mais uma vez podemos montar dois sistemas de equações vinculadas a fim de encontrar os coeficientes. O primeiro sistema:

$$\begin{cases} pAw_\mu = iqBw_\mu \\ pBv_\mu = iqAv_\mu \end{cases} \tag{4.51}$$

Esse sistema nos dá como solução $A^2 = B^2$. Porém, ao substituirmos esses valores na equação (4.50) percebemos que esse resultado torna a equação inconsistente. Sendo assim, esse sistema possui apenas a solução trivial, ou seja $A = B = 0$. Já do segundo sistema:

$$\begin{cases} -qCz_\mu = iqDz_\mu \\ qDy_\mu = iqCy_\mu \end{cases} \tag{4.52}$$

podemos perceber facilmente que a solução desse sistema é $D = iC$. Uma vez de posse dos coeficientes, reescrevemos o conjunto de autovetores X^μ na forma:

$$\{X^\mu\} = C(y^\mu + iz^\mu) \tag{4.53}$$

Definimos $m^\mu = (y^\mu + iz^\mu)$ de forma que $m^\mu m_\mu = 0$. Portanto m^μ é uma direção principal nula complexa.

Quarto caso: $\lambda = -iq$:

$$p(Aw_\mu + Bv_\mu) + q(-Cz_\mu + Dy_\mu) = -iq(Av_\mu + Bw_\mu + Cy_\mu + Dz_\mu) \tag{4.54}$$

Podemos, novamente, mostrar os dois sistemas de equações vinculadas. O primeiro:

$$\begin{cases} pAw_\mu = -iqBw_\mu \\ pBv_\mu = -iqAv_\mu \end{cases} \tag{4.55}$$

Analogamente, mais uma vez a solução $A^2 = B^2$ torna a equação (4.54) inconsistente, nos restando apenas a solução trivial $A = B = 0$. Partimos então para o segundo sistema:

$$\begin{cases} -qCz_\mu = -iqDz_\mu \\ qDy_\mu = -iqCy_\mu \end{cases} \tag{4.56}$$

Fica fácil perceber que a solução desse sistema é $D = -iC$. Mais uma vez de posse dos coeficientes, reescrevemos o conjunto de autovetores X^μ:

$$\{X^\mu\} = C(y^\mu - iz^\mu) \tag{4.57}$$

Como podemos perceber, uma vez definido $m^\mu = y^\mu + iz^\mu$, o termo $y^\mu - iz^\mu$ é o complexo conjugado de m^μ, ou seja, $\overline{m}^\mu = (y^\mu - iz^\mu)$. Podemos ainda observar que $\overline{m}^\mu \overline{m}_\mu = 0$.

Agora de posse dessas potentes propriedades e igualdades, e após a construção dos termos bases da chamada *tetrada nula* $(l, n, m, \overline{m})$, iremos estender esse raciocínio à gravitação e as equações de Einstein. No próximo capítulo inciaremos discutindo as equações de Einstein e sua estrutura. Tão logo sejam conhecidos os tensores que a compõem e suas principais características, utilizaremos suas propriedades e repetiremos boa parte do processo realizado até aqui com as equações de Maxwell. Através de um problema de autovalor/autovetor identificaremos as direções principais nulas, exploraremos suas características e através das mesmas realizaremos em fim a classificação de Petrov.

Capítulo 5

O Campo de Einstein

Nesse capítulo, de forma análoga ao desenvolvido até aqui, iremos trabalhar as principais relações algébricas dos tensores que descrevem a gravitação. Começaremos com a *equação de Einstein*, a equação responsável por descrever o campo gravitacional em termos da curvatura do espaço-tempo e do tensor momento-energia. Veremos também algumas relações e identidades que podem ser obtidas através de uma análise direta da mesma. Lembramos que neste capítulo nos apoiaremos nos clássicos ([8]) e ([10]).

A partir da métrica ($g_{\mu\nu}$) chegaremos ao *Tensor de Riemann* ($R^{a}{}_{\nu\lambda\rho}$), o *Tensor de Ricci* ($R_{\nu\rho}$) e o *Escalar de Curvatura* (R). Abordaremos as identidades e simetrias do tensor de Riemann e discutiremos sobre o *Tensor de Weyl*.

Por fim, veremos algumas soluções importantes da equação de Einstein e a importância do tensor de Weyl neste processo.

5.1 A Equação de Einstein

Nosso primeiro passo nesse capítulo é apresentar a equação de Einstein e mostrar algumas das relações obtidas a partir dela. Considerando $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{5.1}$$

Onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica da variedade, R é o escalar de curvatura, $\frac{8\pi G}{c^4}$ é constante e para fins de cálculos em nosso trabalho consideraremos como 1, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento energia do sistema.

Chamamos o lado esquerdo da equação de *tensor de Einstein* ($G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$). Logo, podemos reescrever:

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} \tag{5.2}$$

Temos pela *identidade de Bianchi* que os termos dessa igualdade são covariantemente conservados, ou seja:

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 0 \\ T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Para que a igualdade seja mantida na equação de Einstein, os traços dos tensores também devem ser iguais, ou seja, $G = -T$. Isso nos mostra que:

$$\begin{aligned} R^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\mu}R &= -T \\ R - \frac{1}{2}4R &= -T \\ -R &= -T \\ R &= T \end{aligned}$$

Reescrevemos, alternativamente:

$$R_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \tag{5.3}$$

5.2 *Tensor de Riemann, Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura*

Dada a métrica $g_{\mu\nu}$, sabemos da seção **2.6** como construir a conexão de Levi-Civita $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$, vide (2.68). Utilizamos a conexão para calcular a derivada covariante de um tensor num espaço curvo. Sabemos também que a derivação covariante em espaços curvos não é comutativa. Sendo assim, define-se o tensor de Riemann como:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V_\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V_\rho = R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} V_\lambda \tag{5.4}$$

Por ser construído dessa forma, o tensor de Riemann segue as seguintes propriedades de simetria:

i) $R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho}, \quad R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda}$

ii) $R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu}$

iii) $R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\mu\rho\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\rho\nu} = 0 \longrightarrow$ Primeira Identidade de Bianchi

Contraindo dois de seus índices, chegamos ao tensor de Ricci, dado como:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \tag{5.5}$$

E mais uma vez, contraindo os índices do tensor de Ricci com a métrica, chegamos ao escalar de curvatura:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{5.6}$$

Como mencionado anteriormente, a curvatura do espaço-tempo no vazio é dada pelo tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$. No que segue, introduziremos este tensor a partir da chamada invariância conforme.

5.3 Transformação conforme

No começo do século XX houveram diversas tentativas de se criar uma teoria que unificasse o eletromagnetismo com a gravitação. Apesar de não se ter obtido sucesso, algumas consequências dessas tentativas findaram por nos acrescentar diversos resultados amplamente utilizados na teoria da relatividade geral e teoria quântica de campos, por exemplo. Um deles foi o resultado obtido por Hermann Weyl, que versa sobre uma transformação de escala dependente de ponto na métrica na forma:

$$\overline{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{5.7}$$

Onde Ω é uma função real de x. Tal transformação é chamada de *transformação conforme.*

Essa transformação, como dito a cima, muda a escala da métrica, porém preserva os ângulos formados. Sabemos da álgebra linear que podemos calcular os ângulos entre dois vetores arbitrários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como:

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \\ &= \frac{g(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sqrt{g(\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}} \end{aligned}$$

Utilizando (5.7):

$$\begin{aligned} cos\overline{\theta} &= \frac{\overline{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sqrt{\overline{g}(\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{\overline{g}(\mathbf{v},\mathbf{v})}} \\ &= \frac{\Omega^2 g(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sqrt{\Omega^2 g(\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{\Omega^2 g(\mathbf{v},\mathbf{v})}} \\ &= \frac{g(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sqrt{g(\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{g(\mathbf{v},\mathbf{v})}} \\ &= cos\theta \end{aligned}$$

Podemos agora calcular como se comportam outros elementos importantes para nossos estudos diante dessa transformação. Começaremos com o cálculo da conexão $\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu}$:

$$\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\overline{g}^{\rho\lambda}(\overline{g}_{\mu\lambda,\nu} + \overline{g}_{\lambda\nu,\mu} - \overline{g}_{\nu\mu,\lambda})$$

Aqui utilizaremos, além da eq. (5.7), a identidade $\overline{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2}g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\lambda}[(\Omega^2 g_{\mu\lambda})_{,\nu} + (\Omega^2 g_{\lambda\nu})_{,\mu} - (\Omega^2 g_{\nu\mu})_{,\lambda}] \\ &= \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\lambda}[2\Omega(\Omega_{,\nu})g_{\mu\lambda} + \Omega^2 g_{\mu\lambda,\nu} + 2\Omega(\Omega_{,\mu})g_{\lambda\nu} + \Omega^2 g_{\lambda\nu,\mu} - 2\Omega(\Omega_{,\lambda})g_{\nu\mu} + \Omega^2 g_{\nu\mu,\lambda}] \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, segue

$$\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Omega^{-1}(\delta^{\rho}{}_{\mu}\Omega_{,\nu} + \delta^{\rho}{}_{\nu}\Omega_{,\mu} - g^{\rho\lambda}g_{\mu\nu}\Omega_{,\lambda}). \tag{5.8}$$

De posse da conexão transformada, podemos determinar o novo tensor de curvatura $\overline{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu}$. Substituindo a eq. (5.7) em (5.4) em termos da conexão:

$$\overline{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu,\lambda} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\lambda,\nu} + \overline{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\nu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\kappa} - \overline{\Gamma}^{\kappa}{}_{\lambda\mu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\kappa}$$

Deixaremos a cargo do leitor os cálculos das derivadas e produtos a cima. Reorganizando convenientemente os termos, chegamos a:

$$\overline{R}^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} + g_{\mu\lambda}B_{\nu}{}^{\rho} - g_{\mu\nu}B_{\lambda}{}^{\rho} + \delta^{\rho}{}_{\nu}g_{\mu\gamma}B_{\lambda}{}^{\gamma} - \delta^{\rho}{}_{\lambda}g_{\mu\gamma}B_{\nu}{}^{\gamma} \tag{5.9}$$

Onde definimos

$$B_{\kappa}{}^{\lambda} = g^{\lambda\mu}\nabla_{\kappa}(\Omega^{-1}\Omega_{,\mu}) - g^{\lambda\mu}(\Omega^{-1}\Omega_{,\kappa})(\Omega^{-1}\Omega_{,\mu}) + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{\kappa}g^{\mu\nu}(\Omega^{-1}\Omega_{,\mu})(\Omega^{-1}\Omega_{,\nu}). \tag{5.10}$$

Nosso próximo passo é calcular o tensor de Ricci $\overline{R}_{\mu\nu}$. Para isso, basta contrairmos os índices do tensor de Riemann $\overline{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$, isto é

$$\overline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}B_{\nu}{}^{\rho} - g_{\mu\nu}B_{\rho}{}^{\rho} + \delta^{\rho}{}_{\nu}B_{\rho\mu} - \delta^{\rho}{}_{\rho}B_{\nu\mu}$$

Alternativamente, temos a forma:

$$\overline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} B_{\rho}{}^{\rho} - (\delta^{\rho}{}_{\rho} - 2) B_{\mu\nu}. \tag{5.11}$$

Por fim, podemos calcular o escalar de curvatura $\overline{R}$. Primeiro subiremos um dos índices para, em seguida, determinar seu traço. Segue:

$$\begin{aligned} \overline{g}^{\kappa\mu}\overline{R}_{\mu\nu} = \overline{R}^{\kappa}{}_{\nu} &= \Omega^{-2}[g^{\kappa\mu} R_{\mu\nu} - \delta^{\kappa}{}_{\nu} B^{\rho}{}_{\rho} - (\delta^{\rho}{}_{\rho} - 2) g^{\kappa\mu} B_{\mu\nu}] \\ &= \Omega^{-2}[g^{\kappa\mu} R_{\mu\nu} - \delta^{\kappa}{}_{\nu} B^{\rho}{}_{\rho} - (\delta^{\rho}{}_{\rho} - 2) B_{\nu}{}^{\kappa}] \end{aligned}$$

Finalmente, calculando o traço para chegarmos ao escalar de curvatura:

$$\overline{R} = \overline{R}^{\kappa}{}_{\kappa} = \Omega^{-2}[g^{\kappa\mu} R_{\mu\kappa} - \delta^{\kappa}{}_{\kappa} B^{\rho}{}_{\rho} - (\delta^{\rho}{}_{\rho} - 2) B_{\kappa}{}^{\kappa}]$$

Reorganizando os índices:

$$\overline{R} = \Omega^{-2}[R - 2(\delta^{\rho}{}_{\rho} - 2) B_{\kappa}{}^{\kappa}] \tag{5.12}$$

5.4 *Invariância conforme e o tensor de Weyl*

De posse das transformações obtidas na seção anterior, nosso objetivo agora será reescrever a equação (5.9) apenas em termos dos tensores de Riemann e Ricci e o escalar de curvatura. Para isso, utilizaremos as identidades abaixo, que podem ser obtidas através de alguma manipulação algébrica simples. Buscando manter o enfoque operacional e devido aos critérios adotados nesse trabalho, deixaremos a cargo do leitor observar as provas dessas igualdades que podem ser encontradas em (ref*).

Nosso primeiro passo é escrever o tensor de Riemann na forma:

$$\overline{R}_{\kappa\mu\rho\nu} = \overline{g}_{\kappa\lambda}\overline{R}^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} = \Omega^2 g_{\kappa\lambda}(R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} + g_{\mu\rho} B_{\nu}{}^{\lambda} - g_{\mu\nu} B_{\rho}{}^{\lambda} + \delta^{\lambda}{}_{\nu} B_{\rho\mu} - \delta^{\lambda}{}_{\rho} B_{\nu\mu})$$

$$\overline{R}_{\kappa\mu\rho\nu} = \Omega^2(R_{\kappa\mu\rho\nu} + g_{\mu\rho} B_{\nu\kappa} - g_{\mu\nu} B_{\rho\kappa} + g_{\kappa\nu} B_{\rho\mu} - g_{\kappa\rho} B_{\nu\mu}) \tag{5.13}$$

Nesse ponto, utilizaremos:

$$B_{\mu\nu} = \frac{\overline{g}_{\mu\nu}\overline{R} - g_{\mu\nu} R}{2(\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2)(\delta^{\nu}{}_{\nu} - 1)} + \frac{R_{\mu\nu} - \overline{R}_{\mu\nu}}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2} \tag{5.14}$$

Podemos agora substituir a eq. (5.14) em (5.9), e os passos que se seguem são apenas manipulações algébricas, as quais mais uma vez deixaremos a cargo do leitor conferir os resultados. Organizaremos convenientemente os termos de forma que no lado esquerdo da igualdade fiquem apenas os termos barrados, enquanto do lado direito, encontram-se todos os termos sem barra. Chegamos à seguinte igualdade:

$$\Omega^{-2}[\overline{R}_{\kappa\mu\rho\nu} + \frac{1}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2}(\overline{g}_{\mu\rho}\overline{R}_{\kappa\nu} - \overline{g}_{\mu\nu}\overline{R}_{\kappa\rho} + \overline{g}_{\kappa\nu}\overline{R}_{\mu\rho} - \overline{g}_{\kappa\rho}\overline{R}_{\mu\nu}) + \frac{\overline{R}}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2}(\overline{g}_{\mu\nu}\overline{g}_{\kappa\rho} - \overline{g}_{\mu\rho}\overline{g}_{\kappa\nu})] =$$
$$= [R_{\kappa\mu\rho\nu} + \frac{1}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2}(g_{\mu\rho}R_{\kappa\nu} - g_{\mu\nu}R_{\kappa\rho} + g_{\kappa\nu}R_{\mu\rho} - g_{\kappa\rho}R_{\mu\nu}) + \frac{R}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2}(g_{\mu\nu}g_{\kappa\rho} - g_{\mu\rho}g_{\kappa\nu})]$$

Reescrevemos:

$$\Omega^{-2}\overline{W}_{\kappa\mu\rho\nu} = W_{\kappa\mu\rho\nu} \tag{5.15}$$

Onde

$$W_{\kappa\mu\rho\nu} = R_{\kappa\mu\rho\nu} + \frac{1}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2}(g_{\mu\rho}R_{\kappa\nu} - g_{\mu\nu}R_{\kappa\rho} + g_{\kappa\nu}R_{\mu\rho} - g_{\kappa\rho}R_{\mu\nu}) + \frac{R}{(\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2)(\delta^{\mu}{}_{\mu} - 1)}(g_{\mu\nu}g_{\kappa\rho} - g_{\mu\rho}g_{\kappa\nu}) \tag{5.16}$$

É o *tensor de Weyl*.

5.5 Propriedades do tensor de Weyl

Antes de começarmos a trabalhar as principais características do tensor de Weyl, vamos reescreve-lo explicitando sua antissimetria intrínseca:

$$W_{\kappa\rho\mu\nu} = R_{\kappa\rho\mu\nu} + \frac{1}{\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2}(g_{\kappa[\nu}R_{\mu]\rho} + g_{\rho[\mu}R_{\nu]\kappa}) + \frac{Rg_{\kappa[\mu}g_{\nu]\rho}}{(\delta^{\mu}{}_{\mu} - 2)(\delta^{\mu}{}_{\mu} - 1)} \tag{5.17}$$

Agora podemos voltar à eq. (5.15) e multiplica-la pelo inverso da métrica $g^{\kappa\lambda}$:

$$g^{\kappa\lambda}\Omega^{-2}\overline{W}_{\kappa\rho\mu\nu} = g^{\kappa\lambda}W_{\kappa\rho\mu\nu}$$

Ou seja, diante de uma transformação conforme, temos que o tensor de Weyl em sua forma $1,3$ é invariante.

$$\overline{W}^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = W^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} \tag{5.18}$$

Vamos calcular agora o traço do tensor de Weyl. Antes disso, vamos fixar de uma vez por todas nossa variedade $\mathcal{M} = \mathcal{M}^4$, ou seja, uma variedade quadridimensional. Logo temos $\delta^{\mu}{}_{\mu} = 4$.

$$\begin{aligned}
W^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu} &= R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu} + \frac{1}{4-2}(g_{\mu\kappa}R_{\nu}{}^{\kappa} - g_{\mu\nu}R_{\kappa}{}^{\kappa} + \delta^{\kappa}{}_{\nu}R_{\kappa\mu} - 4R_{\mu\nu}) + \frac{R}{(4-2)(4-1)}(g_{\mu\nu}\delta^{\kappa}{}_{\kappa} - \delta^{\kappa}{}_{\mu}g_{\nu\kappa}) \\
&= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}) + \frac{R}{6}(4g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) \\
&= R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}R}{2} - \frac{g_{\mu\nu}R}{2}
\end{aligned}$$

Isso nos mostra que

$$W_{\mu\nu} = 0 \tag{5.19}$$

O tensor de Weyl é um tensor sem traço.

Podemos observar que o tensor de Weyl segue as mesmas características de simetria do tensor de Riemann, além de uma característica extra devido a sua construção como tensor sem traço. Segue:

i) $W_{\mu\nu\lambda\rho} = -W_{\nu\mu\lambda\rho}, \quad W_{\mu\nu\lambda\rho} = -W_{\mu\nu\rho\lambda}$

ii) $W_{\mu\nu\lambda\rho} = W_{\lambda\rho\mu\nu}$

iii) $W_{\mu\nu\lambda\rho} + W_{\mu\rho\nu\lambda} + W_{\mu\lambda\rho\nu} = 0 \longrightarrow$ Primeira Identidade de Bianchi

iv) $W^{\mu}{}_{\mu\nu\rho} = W^{\mu}{}_{\nu\mu\rho} = W^{\mu}{}_{\nu\rho\mu} = 0$

5.6 Decomposição Irredutível

Acabamos de observar uma característica muito importante do tensor de Weyl, que é o fato de se tratar de um tensor sem traço. Vimos também qual a relação entre ele e os demais tensores e escalar de curvatura, de forma que podemos escrever o tensor de Riemann em termos da soma do seu traço, com sua parte sem traço. Observe que:

$$R_{\kappa\rho\mu\nu} = W_{\kappa\rho\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\kappa[\nu}R_{\mu]\rho} + g_{\rho[\mu}R_{\nu]\kappa}) + \frac{R}{12}g_{\kappa[\mu}g_{\nu]\rho}$$

Essa decomposição de um tensor em seu traço somado com sua parte sem traço é chamada *decomposição irredutível*. Podemos aplicar essa decomposição também ao tensor de Ricci, dividindo mais uma vez seu traço da sua parte sem traço. Para o tensor de Ricci, essa decomposição se dá na forma:

$$R_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}$$

onde o tensor $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}$ é apenas a parte sem traço do tensor, enquanto $\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}$ é, naturalmente, a parte do traço do tensor de Ricci.

5.7 Dualidade, parte elétrica e parte magnética

De forma geral, num tensor de rank quatro, podemos definir duas formas diferentes de dualidade. Considerando um tensor genérico de rank quatro $X_{\mu\nu\alpha\beta}$ (satisfazendo as mesmas identidades do tensor de Riemann) podemos tirar o seu dual à esquerda $\star X_{\rho\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\lambda}{}^{\mu\nu} X_{\mu\nu\alpha\beta}$ e podemos também tirar o seu dual à direita $X_{\rho\lambda\alpha\beta}\star = \frac{1}{2}X_{\rho\lambda\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$. Genericamente:

$$\star X_{\mu\nu\alpha\beta} \neq X_{\mu\nu\alpha\beta}\star$$

Porém, ao aplicarmos ambas as formas de dualidade especificamente no tensor de Weyl, sua característica de ser um tensor sem traço nos dá:

$$\star W_{\mu\nu\alpha\beta} = W_{\mu\nu\alpha\beta}\star$$

De forma análoga ao tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$, se aplicarmos duas vezes a dualidade no tensor de Weyl ganhamos um sinal negativo:

$$\star\star W_{\mu\nu\alpha\beta} = W_{\mu\nu\alpha\beta}\star\star = -W_{\mu\nu\alpha\beta}$$

Vamos retomar agora o conceito já trabalhado na seção **3.3** de um campo de observadores normalizado $v^\mu v_\mu = 1$. Similarmente ao caso eletromagnético, onde $F_{\mu\nu}v^\nu = E_\mu$ e $\star F_{\mu\nu}v^\nu = B_\mu$, podemos contrair o tensor de Weyl e o seu dual com o campo de observadores duas vezes a fim de separarmos o tensor em sua parte elétrica e magnética

$$E_{\mu\nu} = W_{\mu\nu\alpha\beta}v^\nu v^\beta \tag{5.20}$$

$$B_{\mu\nu} = \star W_{\mu\nu\alpha\beta}v^\nu v^\beta \tag{5.21}$$

Definidos dessa forma, tanto $E_{\alpha\beta}$ quanto $B_{\alpha\beta}$ carregam algumas características de simetria do tensor de Weyl. Em particular, segue:

$$(i) \qquad E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}$$

$$(ii) \qquad E_{\mu\nu}v^\mu = E_{\mu\nu}v^\nu = 0$$

$$(iii) \qquad g^{\mu\nu}E_{\mu\nu} = E^\mu{}_\mu = 0$$

Note que todas as propriedades listadas acima também se aplicam ao tensor $B_{\mu\nu}$.

Agora, de posse dessas definições podemos escrever o tensor de Weyl na seguinte forma:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta} = \{g_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta}) - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta})\}v^\lambda v^\phi \tag{5.22}$$

com $g_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}$.

Podemos calcular o dual do tensor de Weyl em termos de $E_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$. Temos:

$$\star W_{\theta\chi\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\theta\chi}{}^{\mu\nu} W_{\mu\nu\alpha\beta}$$

Para fins de organização faremos as contrações de $\varepsilon_{\theta\chi}{}^{\mu\nu}$ com os termos $g_{\mu\nu\rho\lambda}$ e $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ da eq. (5.22). Primeiramente:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\theta\chi}{}^{\mu\nu} g_{\mu\nu\rho\lambda} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\theta\chi}{}^{\mu\nu}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\theta\chi\rho\lambda} - \varepsilon_{\theta\chi\lambda\rho}) \\
&= \varepsilon_{\theta\chi\rho\lambda}
\end{aligned}$$

Na prática a métrica com quatro índices funciona analogamente à métrica convencional, servindo para subir ou descer índices. Agora, contraindo com o outro termo:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\theta\chi}{}^{\mu\nu}(-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}) = -g_{\theta\chi\alpha\beta}$$

Chegamos assim a:

$$\star\, W_{\mu\nu\alpha\beta} = \{\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta}) + g_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta})\}v^\lambda v^\phi \tag{5.23}$$

Vejamos agora como se comporta a contração do tensor de Weyl duas vezes com um campo de observadores. Partindo de (5.22):

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}v^\nu v^\beta = \{g_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta}) + \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta})\}v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta$$

Vamos separar e calcular termo a termo. Começamos com:

$$\begin{gathered}
g_{\mu\nu\rho\lambda}g_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta}v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta = \\
g_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\delta}g_{\beta\phi} - g_{\alpha\phi}g_{\beta\delta})E^{\rho\delta}v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta = \\
g_{\mu\nu\rho\lambda}(E^\rho{}_\alpha v^\lambda v^\phi v^\nu v_\phi - E^\rho{}_\beta v^\lambda v_\alpha v^\nu v^\beta) = \\
(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})(E^\rho{}_\alpha v^\lambda v^\nu) = \\
E_{\mu\alpha}v_\nu v^\nu - E_{\nu\alpha}v_\mu v^\nu = \\
= E_{\mu\alpha}
\end{gathered}$$

O próximo termo:

$$\begin{gathered}
g_{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta}v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta = \\
\varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})B^{\rho\delta}v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta = \\
\varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}B_\mu{}^\delta v_\nu v^\phi v^\nu v^\beta - B_\nu{}^\delta v_\mu v^\phi v^\nu v^\beta = \\
= \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}B_\mu{}^\delta v^\phi v^\beta
\end{gathered}$$

Em seguida:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} g_{\alpha\beta\delta\phi} B^{\rho\delta} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta =$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\delta} g_{\beta\phi} - g_{\alpha\phi} g_{\beta\delta}) B^{\rho\delta} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta =$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(B^\rho{}_\alpha v^\lambda v_\beta v^\nu v^\beta - B^\rho{}_\beta v^\lambda v_\alpha v^\nu v^\beta) =$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} B^\rho{}_\alpha v^\lambda v^\nu$$

E finalmente o último termo:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi} E^{\rho\delta} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta$$

Como $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é totalmente antissimétrico, e as partes elétrica/megnética são ortogonais a v^μ, vários termos cancelam-se. Desta forma chegamos à:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta} v^\nu v^\beta = E_{\mu\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi} B_\mu{}^\delta v^\phi v^\beta - \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} B^\rho{}_\alpha v^\lambda v^\nu$$

e manipulando convenientemente os índices, temos:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta} v^\nu v^\beta = E_{\mu\alpha} \tag{5.24}$$

Como podemos reparar, ao contrair o tensor de Weyl com o campo de observadores ganhamos uma expressão somente em termos de $E_{\mu\nu}$, como esperado.

Agora vamos repetir o processo contraindo o dual do tensor de Weyl $\star W_{\mu\nu\alpha\beta}$. Partindo de (5.23) Segue:

$$\star W_{\mu\nu\alpha\beta} v^\nu v^\beta = \{\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi} E^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi} B^{\rho\delta}) + g_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\beta\delta\phi} B^{\rho\delta} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi} E^{\rho\delta})\} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta$$

Mais uma vez, calcularemos termo a termo. O primeiro:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} g_{\alpha\beta\delta\phi} E^{\rho\delta} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta =$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\delta} g_{\beta\phi} - g_{\alpha\phi} g_{\beta\delta}) E^{\rho\delta} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta =$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}(E^\rho{}_\alpha v^\lambda v_\beta v^\nu v^\beta - E^\rho{}_\beta v^\lambda v_\alpha v^\nu v^\beta) =$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} E^\rho{}_\alpha v^\lambda v^\nu$$

O segundo termo:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi} B^{\rho\delta} v^\lambda v^\phi v^\nu v^\beta$$

O terceiro termo:

$$
\begin{gathered}
g_{\mu\nu\rho\lambda}g_{\alpha\beta\delta\phi}B^{\rho\delta}v^{\lambda}v^{\phi}v^{\nu}v^{\beta} = \\
g_{\mu\nu\rho\lambda}(g_{\alpha\delta}g_{\beta\phi} - g_{\alpha\phi}g_{\beta\delta})B^{\rho\delta}v^{\lambda}v^{\phi}v^{\nu}v^{\beta} = \\
g_{\mu\nu\rho\lambda}(B^{\rho}{}_{\alpha}v^{\lambda}v^{\phi}v^{\nu}v_{\phi} - B^{\rho}{}_{\beta}v^{\lambda}v_{\alpha}v^{\nu}v^{\beta}) = \\
(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})(B^{\rho}{}_{\alpha}v^{\lambda}v^{\nu}) = \\
B_{\mu\alpha}v_{\nu}v^{\nu} - E_{\nu\alpha}v_{\mu}v^{\nu} = \\
= B_{\mu\alpha}
\end{gathered}
$$

E finalmente:

$$
\begin{gathered}
g_{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E^{\rho\delta}v^{\lambda}v^{\phi}v^{\nu}v^{\beta} = \\
\varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})E^{\rho\delta}v^{\lambda}v^{\phi}v^{\nu}v^{\beta} = \\
\varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E_{\mu}{}^{\delta}v_{\nu}v^{\phi}v^{\nu}v^{\beta} - E_{\nu}{}^{\delta}v_{\mu}v^{\phi}v^{\nu}v^{\beta} = \\
= \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E_{\mu}{}^{\delta}v^{\phi}v^{\beta}
\end{gathered}
$$

Juntando os termos e usando as propriedades de antissimetria e ortogonalidade, chegamos à:

$$\star W_{\mu\nu\alpha\beta}v^{\nu}v^{\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}E^{\rho}{}_{\alpha}v^{\lambda}v^{\nu} + B_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta\delta\phi}E_{\mu}{}^{\delta}v^{\phi}v^{\beta}$$

Mais uma vez, reorganizando os índices convenientemente, chegamos à:

$$\star\, W_{\mu\nu\alpha\beta}v^{\nu}v^{\beta} = B_{\mu\alpha} \tag{5.25}$$

Como o esperado, analogamente ao executado anteriormente, quando contraímos o dual do tensor de Weyl com o campo de observadores ganhamos uma expressão somente em termos de $B_{\mu\nu}$. O tensor $E_{\mu\nu}$ é chamado de *parte elétrica* enquanto o tensor $B_{\mu\nu}$ é chamado de *parte magnética*. O tensor de Weyl é de especial importância para a teoria da gravitação, pois descreve o *desvio geodésico* no vácuo causado por alguma fonte.

Analogamente ao estudado no campo eletromagnético, onde o campo é gerado por uma fonte, seja ela uma carga pontual, uma distribuição de cargas, ou a propagação de uma onda eletromagnética, na gravitação o campo é gerado por uma determinada distribuição de matéria, ou algum evento como a colisão de buracos negros ou estrelas de nêutrons. Como podemos observar na equação de Einstein (5.3), numa região onde não existe matéria, podemos dizer que o tensor momento-energia é zero. Com isso, o tensor de Ricci também se iguala a zero.

No vácuo, como $T_{\mu\nu} = 0$, $T = 0$, $R = 0$ e $R_{\mu\nu} = 0$, consequentemente $S_{\mu\nu} = 0$. De forma que o tensor que nos dá a alteração do campo no vácuo, ou seja, o desvio geodésico, através do tensor de curvatura (ou tensor de Riemann) é tão somente a parte sem traço, ou seja, o tensor de Weyl ($W_{\mu\nu\lambda\rho}$). Podemos citar dois exemplos de soluções às equações de Einstein calculadas através do tensor de Weyl. A solução de Schwarzchild nos diz o comportamento de um campo nas proximidades de uma distribuição de massa estática e esfericamente simétrica como uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. E a solução de Kerr nos diz como se comporta o campo nas proximidades de uma estrela ou buraco negro com rotação diferencial, prevendo o efeito de *frame dragging*, medido experimentalmente em 2011.

Capítulo 6

Classificação de Petrov

Neste capítulo nós estudaremos qualitativamente a chamada classificação de Petrov. Como veremos, a mesma permite o agrupamento do campo gravitacional em diferentes classes complementares. Ademais, tal agrupamento é realizado de maneira completamente invariante, isto é, independente do sistema de coordenadas utilizado. O leitor perceberá que a presente classificação tem paralelo direto com o caso do campo eletromagnético. Neste último, vimos que existem apenas duas possibilidades, caracterizadas pelo número de direções principais nulas independentes. Já no caso gravitacional, pelo fato de o tensor de Weyl ser um objeto de quatro índices, temos um total de seis possibilidades distintas. Estas possibilidades têm a ver com a existência de, no máximo, quatro direções principais nulas e suas eventuais degenerescências. Nós discutiremos aqui apenas os principais aspectos da classificação, deixando para uma análise futura as provas detalhadas.

Atualmente, existem diferentes abordagens complementares para a classificação de Petrov. De certa maneira, todos são derivados de um problema de autobivetor e da análise das direções principais nulas resultantes. Resultados semelhantes aos de Petrov foram obtidos por Pirani(14), Debever(15), Bel(16) e Penrose(17). A conexão entre os formalismos de Penrose e Bel pode ser consultada nos trabalhos de Adler e Sheffield(18) e Ludwig(19). Referimos o leitor interessado aos textos de Synge(20) e Pirani(21) para maiores detalhes.

6.1 O Problema de autobivetor e a notação de Petrov

Sabemos que o Tensor de Weyl é um tensor de rank 4 e sem traço. Efetivamente, acrescentando as simetrias deste tensor, obtemos 10 componentes independentes. Além disso, sabemos que se trata de um tensor antissimétrico em seus pares de índices. Essas características nos permitem elaborar um problema de autovalores, analogamente ao executado no campo eletromagnético. De fato, Petrov considera um bivetor genérico $X^{\alpha\beta}$, e contrai com o tensor de Weyl para obter um segundo bivetor que seja proporcional ao primeiro. Obtemos, então, a relação

$$\frac{1}{2}W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} = \lambda X^{\mu\nu}, \tag{6.1}$$

onde o fator 1/2 é introduzido para evitar a soma de termos repetidos, uma vez que um bivetor satisfaz a relação de antissimetria

$$X^{\alpha\beta} = -X^{\beta\alpha}.$$

Notando que tal bivetor possui, em geral, 6 componentes independentes, podemos desenvolver a equação de autobivetor, sob a forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} &= W^{\mu\nu}{}_{01}X^{01} + W^{\mu\nu}{}_{02}X^{02} + W^{\mu\nu}{}_{03}X^{03} \\ &+ W^{\mu\nu}{}_{32}X^{32} + W^{\mu\nu}{}_{13}X^{13} + W^{\mu\nu}{}_{21}X^{21} = \lambda X^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Para evitar o uso excessivo de índices, Petrov propõe reagrupar as componentes $X^{\alpha\beta}$ do bivetor em um novo objeto de natureza essencialmente vetorial $X^A \in \mathbb{R}^6$. Para tal, ele introduz a idéia de índice coletivo $A = 1, 2, .., 6$. Em particular, tomando o ordenamento sugerido pela equação anterior

$$1 \to (01) \quad 2 \to (02) \quad 3 \to (03) \quad 4 \to (32) \quad 5 \to (13) \quad 6 \to (21),$$

realizamos a associação

$$X^{\alpha\beta} \quad \to \quad X^A,$$

também conhecida como *equivalente de Petrov* do objeto em questão. Em outras palavras, representamos o dado bivetor por uma identificação do tipo

$$X^A = (X^{01}, X^{02}, X^{03}, X^{32}, X^{13}, X^{21}). \tag{6.3}$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao tensor de Weyl, segue:

$$W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \quad \to \quad W^A_B,$$

de onde concluímos que o tensor de Weyl pode ser pensado como um mapa (no sentido usual da álgebra linear) do espaço de bivetores nele mesmo, isto é:

$$W : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6, \qquad X^A \mapsto W^A{}_B X^B.$$

Explicitamente, tal mapa tem as componentes

$$W^A{}_B = \begin{pmatrix} W^{01}{}_{01} & W^{01}{}_{02} & W^{01}{}_{03} & W^{01}{}_{32} & W^{01}{}_{13} & W^{01}{}_{21} \\ W^{02}{}_{01} & W^{02}{}_{02} & W^{02}{}_{03} & W^{02}{}_{32} & W^{02}{}_{13} & W^{02}{}_{21} \\ W^{03}{}_{01} & W^{03}{}_{02} & W^{03}{}_{03} & W^{03}{}_{32} & W^{03}{}_{13} & W^{03}{}_{21} \\ W^{32}{}_{01} & W^{32}{}_{02} & W^{32}{}_{03} & W^{32}{}_{32} & W^{32}{}_{13} & W^{32}{}_{21} \\ W^{13}{}_{01} & W^{13}{}_{02} & W^{13}{}_{03} & W^{13}{}_{32} & W^{13}{}_{13} & W^{13}{}_{21} \\ W^{21}{}_{01} & W^{21}{}_{02} & W^{21}{}_{03} & W^{21}{}_{32} & W^{21}{}_{13} & W^{21}{}_{21} \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Similarmente, podemos obter os equivalentes de Petrov de outros tensores importantes. Primeiramente, notando que

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta\epsilon\rho} X^{\epsilon\rho}, \qquad W_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta\epsilon\rho} W^{\epsilon\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{6.5}$$

onde

$$g_{\alpha\beta\epsilon\rho} = g_{\alpha\epsilon} g_{\beta\rho} - g_{\alpha\rho} g_{\beta\epsilon}, \tag{6.6}$$

percebemos que tal tensor desempenha o papel de uma métrica para o espaço dos bivetores. Em outras palavras, utilizando o procedimento

$$g_{\alpha\beta\epsilon\rho} \quad \to \quad g_{AB},$$

podemos definir as seguintes versões covariantes

$$X_A = g_{AB} X^B, \qquad W_{AB} = g_{AC} W^C{}_B, \tag{6.7}$$

onde

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{0101} & g_{0102} & g_{0103} & g_{0132} & g_{0113} & g_{0121} \\ g_{0201} & g_{0202} & g_{0203} & g_{0232} & g_{0213} & g_{0221} \\ g_{0301} & g_{0302} & g_{0303} & g_{0332} & g_{0313} & g_{0321} \\ g_{3201} & g_{3202} & g_{3203} & g_{3232} & g_{3213} & g_{3221} \\ g_{1301} & g_{1302} & g_{1303} & g_{1332} & g_{1313} & g_{1321} \\ g_{2101} & g_{2102} & g_{2103} & g_{2132} & g_{2113} & g_{2121} \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Segue de um cálculo direto que, tomando $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$, a matriz acima reduz-se a forma simples

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

de onde conclui-se que $\det(g_{AB}) \neq 0$, o que é fundamental para a caracterização de uma métrica. É importante ressaltar, no entanto, que a métrica resultante não é positiva-definida e que este fato deve ser levado em consideração ao abaixar/subir índices coletivos. Em particular, temos, neste frame, as igualdades

$$X_A = (X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{32}, X_{13}, X_{21}) = (-X^{01}, -X^{02}, -X^{03}, X^{32}, X^{13}, X^{21})$$

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \begin{pmatrix} W_{0101} & W_{0102} & W_{0103} & W_{0132} & W_{0113} & W_{0121} \\ W_{0201} & W_{0202} & W_{0203} & W_{0232} & W_{0213} & W_{0221} \\ W_{0301} & W_{0302} & W_{0303} & W_{0332} & W_{0313} & W_{0321} \\ W_{3201} & W_{3202} & W_{3203} & W_{3232} & W_{3213} & W_{3221} \\ W_{1301} & W_{1302} & W_{1303} & W_{1332} & W_{1313} & W_{1321} \\ W_{2101} & W_{2102} & W_{2103} & W_{2132} & W_{2113} & W_{2121} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -W^{01}{}_{01} & -W^{01}{}_{02} & -W^{01}{}_{03} & -W^{01}{}_{32} & -W^{01}{}_{13} & -W^{01}{}_{21} \\ -W^{02}{}_{01} & -W^{02}{}_{02} & -W^{02}{}_{03} & -W^{02}{}_{32} & -W^{02}{}_{13} & -W^{02}{}_{21} \\ -W^{03}{}_{01} & -W^{03}{}_{02} & -W^{03}{}_{03} & -W^{03}{}_{32} & -W^{03}{}_{13} & -W^{03}{}_{21} \\ W^{32}{}_{01} & W^{32}{}_{02} & W^{32}{}_{03} & W^{32}{}_{32} & W^{32}{}_{13} & W^{32}{}_{21} \\ W^{13}{}_{01} & W^{13}{}_{02} & W^{13}{}_{03} & W^{13}{}_{32} & W^{13}{}_{13} & W^{13}{}_{21} \\ W^{21}{}_{01} & W^{21}{}_{02} & W^{21}{}_{03} & W^{21}{}_{32} & W^{21}{}_{13} & W^{21}{}_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Note também que, em consequência das identidades algébricas do tensor de Weyl, seu equivalente de Petrov satisfaz identicamente as relações

$$W_{AB} = W_{BA}, \qquad g^{AB} W_{AB} = 0. \tag{6.11}$$

Vejamos agora como se comporta o equivalente de Petrov do tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{AB}.$$

Segue a matriz

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{0101} & \varepsilon_{0102} & \varepsilon_{0103} & \varepsilon_{0132} & \varepsilon_{0113} & \varepsilon_{0121} \\ \varepsilon_{0201} & \varepsilon_{0202} & \varepsilon_{0203} & \varepsilon_{0232} & \varepsilon_{0213} & \varepsilon_{0221} \\ \varepsilon_{0301} & \varepsilon_{0302} & \varepsilon_{0303} & \varepsilon_{0332} & \varepsilon_{0313} & \varepsilon_{0321} \\ \varepsilon_{3201} & \varepsilon_{3202} & \varepsilon_{3203} & \varepsilon_{3232} & \varepsilon_{3213} & \varepsilon_{3221} \\ \varepsilon_{1301} & \varepsilon_{1302} & \varepsilon_{1303} & \varepsilon_{1332} & \varepsilon_{1313} & \varepsilon_{1321} \\ \varepsilon_{2101} & \varepsilon_{2102} & \varepsilon_{2103} & \varepsilon_{2132} & \varepsilon_{2113} & \varepsilon_{2121} \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Devido as simetrias algébricas do tensor de Levi-Civita obtemos, no frame descrito acima, a matriz

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

uma vez que $\sqrt{-g} = 1$ neste frame. Observe que temos as seguintes simetrias

$$g_{AB} = g_{BA}, \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_{BA}, \tag{6.14}$$

como esperado. Note também que podemos operar com estes objetos da forma usual. Considere, por exemplo, a versão mista do tensor de Levi-Civita no espaço-tempo

$$\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta\lambda\rho} \varepsilon_{\lambda\rho\mu\nu}. \tag{6.15}$$

É fácil ver que seu equivalente de Petrov é dado pela relação

$$\varepsilon^{A}{}_{B} = g^{AC} \varepsilon_{CB}, \qquad g^{AC} g_{CB} = \delta^{A}{}_{B}, \tag{6.16}$$

e um cálculo simples resulta em

$$\varepsilon^A{}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Similarmente, através de uma simples multiplicação matricial, obtemos a relação

$$\varepsilon^A{}_C \varepsilon^C{}_B = -\delta^A{}_B. \tag{6.18}$$

Finalmente, o equivalente de Petrov do bivetor dual $\star X^{\alpha\beta}$ é dado pela relação

$$\star\, X^A = \varepsilon^A{}_B X^B \tag{6.19}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \star X^A &= (\star X^{01}, \star X^{02}, \star X^{03}, \star X^{32}, \star X^{13}, \star X^{21}) \\ &= (X^{32}, X^{13}, X^{21}, -X^{01}, -X^{02}, -X^{03}). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Assim, um cálculo direto permite mostrar que $\star(\star X^A) = -X^A$, enquanto os invariantes do bivetor reduzem-se a

$$X^A X_A = g_{AB} X^A X^B, \qquad \star X^A X_A = \varepsilon_{AB} X^A X^B. \tag{6.21}$$

Observamos então que a notação de Petrov simplifica consideravelmente diversas expressões envolvendo bivetores, seus respectivos duais, e tensores de ordem maior.

De posse das ferramentas discutidas, voltemos agora ao nosso problema de autobivetor. Substituindo os equivalentes de Petrov correspondentes na expressão inicial, temos

$$W^A_B X^B = \lambda X^A, \tag{6.22}$$

que é um problema de autovetor/autovalor para uma matriz real 6×6. Da álgebra linear, sabemos que o problema acima apresenta soluções não-triviais caso

$$\det(W^A_B - \lambda \delta^A{}_B) = 0. \tag{6.23}$$

Portanto, o polinômio característico resultante reduz-se a uma equação de sexta ordem para λ. Em termos dos polinômios simétrico-elementares discutidos na primeira seção desta dissertação, temos

$$\lambda^6 - \lambda^5\sigma_1 + \lambda^4\sigma_2 - \lambda^3\sigma_3 + \lambda^2\sigma_4 - \lambda\sigma_5 + \sigma_6 = 0. \tag{6.24}$$

Em princípio, deveríamos calcular explicitamente todos os polinômios simétrico-elementares e posteriormente analisar o comportamento das raízes da equação. No entanto, Petrov utiliza um método engenhoso para estudar tal equação. Vejamos o procedimento.

Primeiramente, notamos que o problema de autovetor/autovalor anterior é inteiramente equivalente ao problema

$$W_{AB}X^B = \lambda g_{AB}X^B, \tag{6.25}$$

onde simplesmente abaixamos o índice coletivo "A" com o equivalente de Petrov da métrica. Agora, utilizamos no ponto p em questão uma tetrada ortonormalizada e decompomos o tensor de Weyl em suas partes elétrica e magnética como discutido no capítulo anterior. Para tal, utilizamos o observador $v^\mu = \delta^\mu{}_0$ nesta base. Um cálculo direto permite então mostrar que

$$W_{AB} = \begin{pmatrix} E_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & -E_{ij} \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

Ou explicitamente:

$$W_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} & 0 & B_{12} & B_{13} \\ E_{21} & 0 & E_{23} & B_{21} & 0 & B_{23} \\ E_{31} & E_{32} & 0 & B_{31} & B_{32} & 0 \\ 0 & B_{12} & B_{13} & 0 & -E_{12} & -E_{13} \\ B_{21} & 0 & B_{23} & -E_{21} & 0 & -E_{23} \\ B_{31} & B_{32} & 0 & -E_{31} & -E_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

com $i, j = 1, 2, 3$ e as condições de traços nulos

$$\delta^{ij}E_{ij} = 0, \qquad \delta^{ij}B_{ij} = 0. \tag{6.28}$$

Portanto, o polinômio característico anterior também pode ser obtido a partir da expressão

$$\det \begin{pmatrix} E_{ij} + \lambda\delta_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & -E_{ij} - \lambda\delta_{ij} \end{pmatrix}.$$

A partir de agora vamos aplicar operações elementares na matriz acima, que como é sabido, não modifica seus divisores elementares bem como suas características. Adicionando a cada uma das três primeiras colunas as correspondentes três últimas colunas, multiplicadas por i, temos

$$\det\begin{pmatrix} E_{ij}+iB_{ij}+\lambda\delta_{ij} & B_{ij} \\ -i(E_{ij}+iB_{ij}+\lambda\delta_{ij}) & -E_{ij}-\lambda\delta_{ij} \end{pmatrix};$$

Adicionando a cada uma das três últimas linhas as correspondentes três primeiras linhas multiplicadas por i, temos

$$\det\begin{pmatrix} E_{ij}+iB_{ij}+\lambda\delta_{ij} & B_{ij} \\ 0 & -E_{ij}-\lambda\delta_{ij}+iB_{ij} \end{pmatrix};$$

Finalmente, multiplicando as três primeiras colunas por $i/2$ e adicionando as últimas três colunas e depois fazendo o mesmo com as últimas três linhas, nós obtemos a matriz

$$\det\begin{pmatrix} P_{ij} & 0 \\ 0 & -\bar{P}_{ij} \end{pmatrix} = -\det(P_{ij})\det(\bar{P}_{ij}). \tag{6.29}$$

com

$$P_{ij} \equiv E_{ij}+iB_{ij}+\lambda\delta_{ij} \tag{6.30}$$

e $\bar{P}_{ij}(\lambda)$ o complexo conjugado. Portanto, vemos que o problema anterior reduz-se ao estudo dos autovalores de uma única matriz 3×3 simétrica, complexa e sem traço, dada por

$$Q_{ij} \equiv E_{ij}+iB_{ij}. \tag{6.31}$$

Os processos algébricos envolvidos nessa resolução serão omitidos nesse trabalho, uma vez que nosso objetivo nesse ponto é trazer uma discussão qualitativa dessa classificação. Os cálculos desenvolvidos podem ser encontrados em ampla literatura como (ref*).

6.2 Formalismo de Newman-Penrose

O *Formalismo de Newman-Penrose* trata-se de um conjunto de notações que lida com a relatividade geral, introduzindo formas complexas no formalismo espinorial, projetando os tensores sobre uma base vetorial completa, a fim de refletir alguma simetria da variedade.

Nesse caso, utilizamos como base as bases de tetradas nulas $(l_\mu, n_\mu, m_\mu, \overline{m}_\mu)$ para descrever os bivetores dessa variedade. Lembramos:

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \overline{m}^\mu \overline{m}_\mu = 0 \tag{6.32}$$

$$l^\mu n_\mu = -m^\mu \overline{m}_\mu = 1 \tag{6.33}$$

Com isso podemos construir alguns bivetores:

$$V_{\mu\nu} = l_{[\mu}\overline{m}_{\nu]} \tag{6.34}$$

$$U_{\mu\nu} = n_{[\mu}m_{\nu]} \tag{6.35}$$

$$M_{\mu\nu} = l_{[\mu}n_{\nu]} + \overline{m}_{[\mu}m_{\nu]} \tag{6.36}$$

Vamos calcular agora a contração desses tensores:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}U^{\mu\nu} &= (n_\mu m_\nu - n_\nu m_\mu)(n^\mu m^\nu - n^\nu m^\mu) \\ &= n_\mu m_\nu n^\mu m^\nu - n_\mu m_\nu n^\nu m^\mu - n_\nu m_\mu n^\mu m^\nu + n_\nu m_\mu n^\nu m^\mu \\ &= -n_\mu n^\nu m_\nu m^\mu - n_\nu n^\mu m_\mu m^\nu \\ &= -2 n_\mu n^\nu m_\nu m^\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$U_{\mu\nu}U^{\mu\nu} = 0 \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} &= (l_\mu \overline{m}_\nu - l_\nu \overline{m}_\mu)(l^\mu \overline{m}^\nu - l^\nu \overline{m}^\mu) \\ &= l_\mu \overline{m}_\nu l^\mu \overline{m}^\nu - l_\mu \overline{m}_\nu l^\nu \overline{m}^\mu - l_\nu \overline{m}_\mu l^\mu \overline{m}^\nu + l_\nu \overline{m}_\mu l^\nu \overline{m}^\mu \\ &= -l_\mu l^\nu \overline{m}_\mu \overline{m}^\nu - l_\nu l^\mu \overline{m}_\nu \overline{m}^\mu \\ &= -2 l_\mu l^\nu \overline{m}_\nu \overline{m}^\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} = 0 \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} &= (l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu \overline{m}_\nu - m_\nu \overline{m}_\mu)(l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu) \\ &= -l_\mu n_\nu l^\nu n^\mu - l_\nu n_\mu l^\mu n^\nu - m_\mu \overline{m}_\nu m^\nu \overline{m}^\mu - m_\nu \overline{m}_\mu m^\mu \overline{m}^\nu \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = -4 \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}U^{\mu\nu} &= (l_\mu \overline{m}_\nu - l_\nu \overline{m}_\mu)(n^\mu m^\nu - n^\nu m^\mu) \\ &= l_\mu \overline{m}_\nu n^\mu m^\nu - l_\mu \overline{m}_\nu n^\nu m^\mu - l_\nu \overline{m}_\mu n^\mu m^\nu + l_\nu \overline{m}_\mu n^\nu m^\mu \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$V_{\mu\nu}U^{\mu\nu} = 2 \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}M^{\mu\nu} &= (l_\mu \overline{m}_\nu - l_\nu \overline{m}_\mu)(l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu) \\ &= l_\mu \overline{m}_\nu l^\mu n^\nu - l_\mu \overline{m}_\nu l^\nu n^\mu + l_\mu \overline{m}_\nu m^\mu \overline{m}^\nu - l_\mu \overline{m}_\nu m^\nu \overline{m}^\mu - l_\nu \overline{m}_\mu l^\mu n^\nu + \\ &\quad + l_\nu \overline{m}_\mu l^\nu n^\mu - l_\nu \overline{m}_\mu m^\mu \overline{m}^\nu + l_\nu \overline{m}_\mu m^\nu \overline{m}^\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$V_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = 0 \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}M^{\mu\nu} &= (n_\mu m_\nu - n_\nu m_\mu)(l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu) \\ &= n_\mu m_\nu l^\mu n^\nu - n_\mu m_\nu l^\nu n^\mu + n_\mu m_\nu m^\mu \overline{m}^\nu - n_\mu m_\nu m^\nu \overline{m}^\mu - n_\nu m_\mu l^\mu n^\nu + \\ &\quad + n_\nu m_\mu l^\nu n^\mu - n_\nu m_\mu m^\mu \overline{m}^\nu + n_\nu m_\mu m^\nu \overline{m}^\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$U_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = 0 \tag{6.42}$$

Com esses tensores podemos construir o tensor de Weyl como uma combinação linear dos mesmos. Segue:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu\alpha\beta} &= C_1(V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}) + C_2(V_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + M_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}) + C_3(M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + V_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} + U_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}) + \\ &\quad + C_4(U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + M_{\mu\nu}U_{\alpha\beta}) + C_5(U_{\mu\nu}U_{\alpha\beta}) + C.C. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Onde $C.C.$ são os complexos conjugados de cada um dos termos. Na prática, como apenas os termos m_μ e $\overline{m}_\mu$ são termos imaginários, temos que $m_\mu \longrightarrow \overline{m}_\mu$ e $\overline{m}_\mu \longrightarrow m_\mu$.

Podemos contrair o tensor de Weyl escrito dessa forma com os termos da base tetrada nula de cinco formas diferentes. São elas:

$$\begin{aligned} (i) &\quad W_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu m^\nu l^\alpha m^\beta \\ (ii) &\quad W_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu n^\nu l^\alpha m^\beta \\ (iii) &\quad W_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu m^\nu \overline{m}^\alpha n^\beta \\ (iv) &\quad W_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu n^\nu \overline{m}^\alpha n^\beta \\ (v) &\quad W_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu \overline{m}^\nu n^\alpha \overline{m}^\beta \end{aligned}$$

Por uma questão de organização calcularemos separadamente cada termo do tensor de Weyl escrito dessa forma, e depois realizaremos a contração.

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} &= (l_\mu\overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu l_\nu)(l_\alpha\overline{m}_\beta - \overline{m}_\alpha l_\beta) \\ &= l_\mu\overline{m_\nu}l_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu l_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta + \overline{m}_\mu l_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta \end{aligned}$$

$$V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} = l_\mu\overline{m_\nu}l_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu l_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta + \overline{m}_\mu l_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + M_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} &= (l_\mu\overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu l_\nu)(l_\alpha n_\beta - n_\alpha l_\beta + m_\alpha\overline{m}_\beta - \overline{m}_\alpha m_\beta) \\ &\quad + (l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu\overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu)(l_\alpha\overline{m}_\beta - \overline{m}_\alpha l_\beta) \\ &= l_\mu\overline{m}_\nu l_\alpha n_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu n_\alpha l_\beta + l_\mu\overline{m}_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha m_\beta - \\ &\quad - \overline{m}_\mu l_\nu l_\alpha n_\beta + \overline{m}_\mu l_\nu n_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu l_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta + \\ &\quad + l_\mu n_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu n_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - n_\mu l_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta + n_\mu l_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - \\ &\quad + m_\mu\overline{m}_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta - m_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu m_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta + n_\mu l_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + M_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} &= l_\mu\overline{m}_\nu l_\alpha n_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu n_\alpha l_\beta + l_\mu\overline{m}_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha m_\beta - \\ &\quad - \overline{m}_\mu l_\nu l_\alpha n_\beta + \overline{m}_\mu l_\nu n_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu l_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta + \\ &\quad + l_\mu n_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu n_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - n_\mu l_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta + n_\mu l_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - \\ &\quad + m_\mu\overline{m}_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta - m_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu m_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta + n_\mu l_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta \end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta} + V_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} + U_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} &= (l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu\overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu)(l_\alpha n_\beta - n_\alpha l_\beta + m_\alpha\overline{m}_\beta - \overline{m}_\alpha m_\beta) + \\ &\quad + (l_\mu\overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu l_\nu)(n_\alpha m_\beta - m_\alpha n_\beta) \\ &\quad + (n_\mu m_\nu - m_\mu n_\nu)(l_\alpha\overline{m}_\beta - \overline{m}_\alpha l_\beta) \\ &= l_\mu n_\nu l_\alpha n_\beta - l_\mu n_\nu n_\alpha l_\beta + l_\mu n_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta - l_\mu n_\nu\overline{m}_\alpha m_\beta - \\ &\quad - n_\mu l_\nu l_\alpha n_\beta + n_\mu l_\nu n_\alpha l_\beta - n_\mu l_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta + n_\mu l_\nu\overline{m}_\alpha m_\beta + \\ &\quad + m_\mu\overline{m}_\nu l_\alpha n_\beta - m_\mu\overline{m}_\nu n_\alpha l_\beta + m_\mu\overline{m}_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta - m_\mu\overline{m}_\nu\overline{m}_\alpha m_\beta - \\ &\quad - \overline{m}_\mu m_\nu l_\alpha n_\beta + \overline{m}_\mu m_\nu n_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu m_\nu m_\alpha\overline{m}_\beta + \overline{m}_\mu m_\nu\overline{m}_\alpha m_\beta + \\ &\quad + l_\mu\overline{m}_\nu n_\alpha m_\beta - l_\mu\overline{m}_\nu m_\alpha n_\beta + \overline{m}_\mu l_\nu m_\alpha n_\beta - \overline{m}_\mu l_\nu n_\alpha m_\beta - \\ &\quad - n_\mu m_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta + n_\mu m_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta - m_\mu n_\nu\overline{m}_\alpha l_\beta + m_\mu n_\nu l_\alpha\overline{m}_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}+V_{\mu\nu}U_{\alpha\beta}+U_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} &= l_\mu n_\nu l_\alpha n_\beta - l_\mu n_\nu n_\alpha l_\beta + l_\mu n_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta - l_\mu n_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta - \\
&\quad - n_\mu l_\nu l_\alpha n_\beta + n_\mu l_\nu n_\alpha l_\beta - n_\mu l_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta + n_\mu l_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta + \\
&\quad + m_\mu \overline{m}_\nu l_\alpha n_\beta - m_\mu \overline{m}_\nu n_\alpha l_\beta + m_\mu \overline{m}_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta - m_\mu \overline{m}_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta - \\
&\quad - \overline{m}_\mu m_\nu l_\alpha n_\beta + \overline{m}_\mu m_\nu n_\alpha l_\beta - \overline{m}_\mu m_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta + \overline{m}_\mu m_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta + \\
&\quad + l_\mu \overline{m}_\nu n_\alpha m_\beta - l_\mu \overline{m}_\nu m_\alpha n_\beta + \overline{m}_\mu l_\nu m_\alpha n_\beta - \overline{m}_\mu l_\nu n_\alpha m_\beta - \\
&\quad - n_\mu m_\nu \overline{m}_\alpha l_\beta + n_\mu m_\nu l_\alpha \overline{m}_\beta - m_\mu n_\nu \overline{m}_\alpha l_\beta + m_\mu n_\nu l_\alpha \overline{m}_\beta
\end{aligned} \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}+M_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} &= (n_\mu m_\nu - m_\mu n_\nu)(l_\alpha n_\beta - n_\alpha l_\beta + m_\alpha \overline{m}_\beta - \overline{m}_\alpha m_\beta) + \\
&\quad + (l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu)(n_\alpha m_\beta - m_\alpha n_\beta) \\
&= n_\mu m_\nu l_\alpha n_\beta - n_\mu m_\nu n_\alpha l_\beta + n_\mu m_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta - n_\mu m_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta - \\
&\quad - m_\mu n_\nu l_\alpha n_\beta + m_\mu n_\nu n_\alpha l_\beta - m_\mu n_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta + m_\mu n_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta + \\
&\quad + l_\mu n_\nu n_\alpha m_\beta - l_\mu n_\nu m_\alpha n_\beta + n_\mu l_\nu m_\alpha n_\beta - n_\mu l_\nu n_\alpha m_\beta - \\
&\quad - m_\mu \overline{m}_\nu m_\alpha n_\beta + m_\mu \overline{m}_\nu n_\alpha m_\beta - \overline{m}_\mu m_\nu n_\alpha m_\beta + \overline{m}_\mu m_\nu m_\alpha c_\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}+M_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} &= n_\mu m_\nu l_\alpha n_\beta - n_\mu m_\nu n_\alpha l_\beta + n_\mu m_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta - n_\mu m_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta - \\
&\quad - m_\mu n_\nu l_\alpha n_\beta + m_\mu n_\nu n_\alpha l_\beta - m_\mu n_\nu m_\alpha \overline{m}_\beta + m_\mu n_\nu \overline{m}_\alpha m_\beta + \\
&\quad + l_\mu n_\nu n_\alpha m_\beta - l_\mu n_\nu m_\alpha n_\beta + n_\mu l_\nu m_\alpha n_\beta - n_\mu l_\nu n_\alpha m_\beta - m_\mu \overline{m}_\nu m_\alpha n_\beta + \\
&\quad + m_\mu \overline{m}_\nu n_\alpha m_\beta - \overline{m}_\mu m_\nu n_\alpha m_\beta + \overline{m}_\mu m_\nu m_\alpha c_\beta
\end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} &= (n_\mu m_\nu - m_\mu n_\nu)(n_\alpha m_\beta - m_\alpha n_\beta) \\
&= n_\mu m_\nu n_\alpha m_\beta - n_\mu m_\nu m_\alpha n_\beta + m_\mu n_\nu m_\alpha n_\beta - m_\mu n_\nu n_\alpha m_\beta
\end{aligned}$$

$$U_{\mu\nu}U_{\alpha\beta} = n_\mu m_\nu n_\alpha m_\beta - n_\mu m_\nu m_\alpha n_\beta + m_\mu n_\nu m_\alpha n_\beta - m_\mu n_\nu n_\alpha m_\beta \tag{6.48}$$

Além desses termos, teríamos que calcular todos os seus conjugados. Mas como dito anteriormente, os únicos termos complexos são m e $\overline{m}$, Logo o conjugado de cada termo é calculado levando $m \longrightarrow \overline{m}$ e $\overline{m} \longrightarrow m$.

Agora, podemos realizar cada uma das cinco contrações propostas. Como podemos observar, alguns desses termos são bastante extensos. Por isso, nós utilizaremos as relações que nos dizem que:

(i)O produto escalar de qualquer um dos termos da tetrada nula com ele mesmo é sempre nulo:

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\nu = m_\mu m^\mu = \overline{m}_\mu \overline{m}^\mu = 0 \tag{6.49}$$

(ii)Os únicos produtos escalares entre os termos cruzados da tetrada nula que não se anulam são:

$$l^{\mu}n_{\mu} = -m^{\mu}\overline{m}_{\mu} = 1 \tag{6.50}$$

De posse dessas informações, será mais prático realizar essas contrações por inspeção. Procuraremos em cada termo a contração que não se anulará. Vejamos:

A primeira contração (i) é realizada com o termo $l^{\mu}m^{\nu}l^{\alpha}m^{\beta}$. Para que a contração não se anule e utilizando as propriedades que acabamos de relembrar, temos por inspeção que o termo a ser contraído deve ser $n_{\mu}\overline{m}_{\nu}n_{\alpha}\overline{m}_{\beta}$. Por inspeção, encontramos o termo necessário no conjugado do termo referente ao C_5. Logo:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}m^{\nu}l^{\alpha}m^{\beta} = \overline{C_5}$$

Para nos adequarmos a notação amplamente utilizada na literatura, podemos tirar o complexo conjugado em ambos os lados da equação acima. Reescrevemos na forma:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}\overline{m}^{\nu}l^{\alpha}\overline{m}^{\beta} = C_5 \tag{6.51}$$

A segunda contração $(ii)W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}l^{\alpha}m^{\beta}$, por inspeção, nos diz que devemos procurar pelo termo $n_{\mu}l_{\nu}n_{\alpha}\overline{m}_{\beta}$. Encontramos esse termo no conjugado do termo referente ao C_4. Logo:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}l^{\alpha}m^{\beta} = -\overline{C_4}$$

Aqui, mais uma vez tiraremos o complexo conjugado da equação. Segue

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}l^{\alpha}\overline{m}^{\beta} = -C_4 \tag{6.52}$$

Em seguida, a contração $(iii)W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}m^{\nu}\overline{m}^{\alpha}n^{\beta}$, também por inspeção, nos diz que precisamos de um termo $n_{\mu}\overline{m}_{\mu}m_{\alpha}l_{\beta}$. Encontramos esse termo no conjugado do termo referente ao C_3. Já tomando o complexo conjugado em ambos os termos da equação:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}\overline{m}^{\nu}m^{\alpha}n^{\beta} = -C_3 \tag{6.53}$$

Contraindo $(iv)W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}\overline{m}^{\alpha}n^{\beta}$ reparamos que é preciso contraí-lo com $n_{\mu}l_{\nu}m_{\alpha}l_{\beta}$. Encontramos esse termo no conjugado do termo referente ao C_2. Tomando o complexo conjugado:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}m^{\alpha}n^{\beta} = C_2 \tag{6.54}$$

E finalmente, por último, a contração $W_{\mu\nu\alpha\beta}n^{\mu}\overline{m}^{\nu}n^{\alpha}\overline{m}^{\beta}$ é feita por inspeção, e precisamos de um termo na forma $l_{\mu}m_{\nu}l_{\alpha}m_{\beta}$. Encontramos esse termo no conjugado de C_1. Tomando o complexo conjugado:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}n^{\mu}m^{\nu}n^{\alpha}m^{\beta} = C_1 \tag{6.55}$$

6.3 A Classificação de Petrov

Agora, de posse dessas contrações, podemos classificar o tensor de Weyl de acordo com suas constantes. Chamamos os escalares de *N-P Escalares de Petrov*. Vejamos como se dá essa classificação:

- Tipo 1: $C_1 = 0$
- Tipo 2: $C_1 = C_2 = 0$
- Tipo 3: $C_1 = C_2 = C_3 = 0$
- Tipo D: $C_1 = C_2 = C_4 = C_5 = 0$, Apenas $C_3 \neq 0$
- Tipo N: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, Apenas $C_5 \neq 0$
- Tipo O: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$

O tensor de Weyl classificado desta forma nos dá diferentes interpretações físicas para cada um dos tipos. Vamos comentar o que cada item dessa classificação nos diz sobre a propagação do campo gravitacional em termos das direções nulas:

O Tipo 1 nos diz que o campo gravitacional se propaga em quatro direções principais nulas simples. O Tipo 2 nos diz que duas dessas direções principais nulas estão juntas (Formam um dublete) enquanto a propagação nas outras duas direções principais são simples. O Tipo 3, semelhante ao anterior nos diz que três das direções principais nulas formam um triplete, enquanto a outra direção principal nula segue simples. O Tipo D se caracteriza pela propagação em dois dubletes, ou seja, duas das direções principais nulas se juntam formando dois pares. Já no Tipo N, todas as quatro direções principais nulas se juntam formando apenas um quadruplete. E finalmente, no Tipo O, não existe propagação no campo gravitacional, ou seja, o tensor de Weyl é nulo.

O Tipo D também é conhecido como *termo Coulombiano*, uma vez que esse efeito é similar ao que ocorre quando uma distribuição de matéria sente a atração gravitacional sob a lei do quadrado-inverso da distância, como na lei de Coulomb. Neste caso, as acelerações causam uma distorção simetricamente esférica centrada no observador, onde o principal eixo de direção é a mesma direção do vetor de Poynting. Os dubletes de direções principais nulas definem radialmente as congruências nulas de entrada e saída nas proximidades do objeto fonte do campo gravitacional. Os *tensores de maré* são um exemplo de classificação Tipo D, chamados de *tensores eletro-gravitacional* e se aproximam bastante da gravitação clássica descrita por Newton,uma vez que as soluções podem também serem obtidas através do formalismo vetorial. Já um corpo com rotação diferencial, como proposto nas soluções de Kerr, além das forças de maré, são adicionados algum efeito *magnético-gravitacional*, como a *força spin-spin* sentida por um observador.

Já o Tipo N nos diz características sobre as regiões que possuem uma radiação gravitacional transversa. É caracterizada pela existência de um vetor nulo l^μ tal que $R_{\mu\nu\alpha\beta}l^\mu = 0$, de forma que um observador num espaço tipo N que siga a geodésica com quadrivelocidade u^μ sofrerá uma aceleração relativa nas direções do plano perpendicular à direção de propagação do vetor de Poynting, na qual a frente de onda se propaga. Pelo fato desse efeito ser completamente independente da velocidade de deslocamento do observador, os campos desse tipo de espaço caracterizam a existência de ondas gravitacionais puramente transversais, ou seja, o tipo de radiação detectada por experimentos como LIGO e VIRGO. De forma mais compacta, dizemos que o quadruplete de direções principais nulas correspondem ao *Vetor de onda* da propagação da radiação gravitacional. Como mostrado em Hogan e O'shea ([22]), onde numa cosmologia isotrópica, ou seja, com uma hiper-superfície de propagação nula e livre de cisalhamento, analisou a frente de onda numa geometria de Robertson-Walker gerada por um stress anisotrópico.

As regiões classificadas como Tipo 3 possuem um tipo de radiação gravitacional longitudinal, como uma força de torção nos efeitos de maré. É caracterizada por um vetor nulo $l^m u$ tal que $l_\mu l_{[\lambda}R^\mu{}_{\nu]\alpha\beta} = 0$. Como no caso anterior, a distribuição da aceleração relativa se dá também num plano, mas de forma que uma das direções principais nulas esteja alinhada coma frente de propagação da onda, ou seja, espaços tipo N são interpretados como uma componente longitudinal ao longo da direção do vetor de Poynting.

As regiões Tipo 1 e 2 são regiões que apresentam os efeitos dos Tipo D, Tipo 3 e Tipo N de uma forma não linear. Pode ser visualizado como um campo coulombiano juntamente com uma componente longitudinal sainte sobreposta (Tipo 2) ou surgem componentes de campos longitudinais sobrepostas ao campo coulombiano (Tipo 1).

E por fim, as regiões Tipo O são chamadas de *regiões conformalmente planas.* O modelo de FLWR é um exemplo de região Tipo O.

Além disso, a potência da classificação de Petrov nos permite também analisar o comportamento de tensores-escalares e tensores-vetores após uma transformação disforme em teorias de gravidade modificada, conforme mostrado por Achour, Felice, Gorji, Mukohyama e Pookkillath em ([23]).

A seguir, discutiremos brevemente os resultados do critério de Bell, um procedimento algébrico que vise simplificar o processo de análise e classificação de Petrov através de pequenas contrações algébricas e passaremos rapidamente pelo *teorema de peeling*, uma importante conclusão que se baseia totalmente na classificação de Petrov.

6.4 *Critério de Bel e teorema de peeling*

Louis Bel e Robert Debever criaram uma série de critérios que são capazes de definir que tipo Petrov encontramos num ponto $p \in (\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$. Vejamos esses critérios.

Seja K^{μ} e K'^{μ} dois tensores genéricos e linearmente independentes:

Dizemos que $W_{\mu\nu\alpha\beta}$ é do Tipo N quando:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\beta} = 0$$

Dizemos que $W_{\mu\nu\alpha\beta}$ é Tipo 3 quando:

$$W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\nu}K^{\beta} = \star W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\nu}K^{\beta} = 0$$

Dizemos que $W_{\mu\nu\alpha\beta}$ é Tipo 2 quando:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\nu}K^{\beta} &= \gamma K_{\mu}K_{\alpha} \\ \star W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\nu}K^{\beta} &= \chi\beta K_{\mu}K_{\alpha} \end{aligned}$$

Com $\gamma\chi \neq 0$.

Dizemos que $W_{\mu\nu\alpha\beta}$ é Tipo D quando:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\nu}K^{\beta} &= \gamma K_{\mu}K_{\alpha} \\ \star W_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\nu}K^{\beta} &= \chi K_{\mu}K_{\alpha} \\ W_{\mu\nu\alpha\beta}K'^{\nu}K'^{\beta} &= \delta K'_{\mu}K'_{\alpha} \\ \star W_{\mu\nu\alpha\beta}K'^{\nu}K'^{\beta} &= \phi K'_{\mu}K'_{\alpha} \end{aligned}$$

Com $\gamma\chi \neq 0$ e $\delta\phi \neq 0$.

A adoção desses critérios nos facilita na hora em que devemos determinar que tipo de tensor de Weyl encontramos na região de interesse.

Para finalizar nossa discussão podemos comentar sobre o *teorema de peeling*. Em 1962 Sachs analisou uma função de onda que se propaga para o futuro com uma dependência de r e t produzida por uma fonte isolada. Utilizando a teoria linear e expandiu assintoticamente o tensor de Riemann em termos de um parâmetro que se propaga tangencialmente à geodésica nula e obteve o tensor de Riemann na seguinte forma:

$$R \equiv \frac{N}{r} + \frac{III}{r^2} + \frac{II}{r^3} + \frac{I}{r^4} + \frac{I'}{r^5} + \mathcal{O}(r^{-6}) \tag{6.56}$$

Isso nos mostra que $r \to \infty$ o termo dominante passa a ser N, ou seja, as quatro direções principais apontam para uma mesma direção. Conforme os termos vão se aproximando, ou seja, em r^{-2} o tensor passa a ser tipo III, com suas três direções principais nulas na mesma direção e uma em outra direção, assim sucessivamente até que em r^{-4} o tensor passa a ser tipo I, ou seja, cada uma das quatro direções principais nulas apontam em direções diferentes.

Capítulo 7

Conclusão

Começamos nosso trabalho definindo todos os preceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento proposto. Partimos de definições básicas como o conceito de variedade e a construção de objetos como vetores e tensores. Optamos pela proposta de apresentar algumas das principais características algébricas desses objetos, de forma que num próximo momento as interpretações físicas surgirão como consequências das mesmas. Além disso, como proposta de abordar a TRG como uma teoria geométrica, apresentamos e discutimos brevemente os objetos responsáveis por discriminar as características geométricas da "arena" na qual os fenômenos físicos acontecem (espaço-tempo).

Optamos também por fazer uma breve apresentação do eletromagnetismo clássico em seu formalismo vetorial, não apenas como uma proposta pedagógica mas também com o objetivo de contextualizar historicamente a necessidade da construção de outro formalismo baseado em novos paradigmas.

Esse outro formalismo (tensorial) herda a principal características dos vetores, utilizados até então, que trata-se da sua invariância em relação ao sistema de coordenadas adotado. Porém, esses objetos construídos através do produto tensorial apresentam novas características algébricas que, mais uma vez, independente do significado físico, são válidas em qualquer referencial adotado, em acordo com um dos postulados propostos por Einstein, quer versa sobre a independência das leis da física independentemente do sistema de coordenadas.

Ainda sobre o campo eletromagnético, através do tratamento algébrico fomos capazes de observar algumas das suas principais características. Vimos que podemos decompor o campo através da decomposição 3+1 e como essa mesma decomposição culmina na existência de um campo de observadores, ou seja, um referencial que pode ser adotado de forma a facilitar o estudo do campo. Utilizamos o conceito de dualidade através o tensor de Levi-Civita e consequentemente fomos capazes de conceber a rotação dual. De posse dessa ferramenta pudemos assimilar um significado físico e construir com facilidade o vetor de Poynting.

Em seguida exploramos os principais invariantes (escalares) que podem ser obtidos através da contração do tensor de Faraday e seu dual. Vimos também como podemos descrever o campo eletromagnético em termos desses invariantes. Através do invariante κ podemos caracterizar o campo eletromagnético como nulo ou regular e trabalhamos algumas das propriedades desses dois tipos de campo. Em ambos os casos chegamos ao que chamamos de direção principal nula, cujo significado físico nos diz a respeito da direção de propagação da radiação eletromagnética.

Uma vez que exploramos essas características algébricas do campo eletromagnético, nós nos debruçamos sobre o Lagrangeano do campo em uma região sem fonte, ou seja, livre de carga. Através da variação do funcional e fazendo a escolha de fixação de calibre adequada chegamos à equação de propagação da onda eletromagnética. Ato contínuo nos dedicamos à trabalhar a variação do funcional num cenário onde existe também a variação da métrica $g_{\mu\nu}$, e ao desenvolvermos os termos obtemos como resultado o tensor momento-energia.

Nosso próximo passo tratou-se de um trabalho puramente algébrico, onde exploramos os resultados das contrações não apenas de segunda, bem como as de terceira e quarta ordem, num primeiro momento composto apenas pelo tensor de Faraday, em seguida apenas com o tensor momento-energia, e por fim as contrações entre ambos os tensores. Uma vez obtidas essas contrações, voltamos a buscar um significado físico. Utilizando resultados amplamente difundidos da álgebra linear como o problema de auto-valor e auto-vetor, através do polinômio característico exploramos o comportamento das direções principais nulas nos casos do campo nulo e regular. Vimos que enquanto um campo nulo possui apenas uma direção principal nula, o campo regular conta com duas delas.

De posse dessas caracterizações algébricas do campo eletromagnético, passamos a nos preocupar com o campo gravitacional ou campo de Einstein. Partindo da equação de Einstein pudemos descriminar os tensores que a compõem e trabalhar algumas das suas características. Definimos o tensor de Einstein, e vimos sua relação com o tensor momento-energia. Pudemos também observar que devido a sua relação que o traço do tensor momento-energia se reduz ao escalar de curvatura R. Pelas características da derivação covariante chegamos ao tensor de Riemann e exploramos as suas características de simetria, além de obtermos o tensor de Ricci através do seu traço, bem como o escalar de curvatura través da contração desse último com o tensor métrico.

Através da chamada transformação conforme, uma transformação que não interfere nos ângulos formados na variedade e sim na sua escala, podemos obter o tensor de Weyl. Nosso próximo passo foi explorar as características deste tensor, que como vimos, trata-se de um tensor sem traço, e que além dessa sua característica, ele herda as simetrias contidas no tensor de Riemann. Deste ponto, como sabemos que o tensor de Weyl não possui traço, pudemos construir a decomposição irredutível que nada mais é do que decompor um tensor entre seu traço e sua parte sem traço.

Como significado físico, observamos que numa determinada região na ausência de matéria, o tensor de Riemann reduz-se ao tensor de Weyl. E para finalizar essa caracterização, através da dualidade dos tensores de ordem quatro e pela sua característica de não possuir traços pudemos separar o tensor de Weyl em uma parte elétrica $E_{\mu\nu}$ e magnética $B_{\mu\nu}$.

Finalizamos nosso trabalho com a classificação de Petrov, um engenhoso conjunto de procedimentos puramente algébricos, ou seja, independente do significado físico, capaz de transformar um complexo problema de auto-valor e auto-vetor obtidos na contração de um tensor de rank quatro com um tensor de rank dois, através do espaço dos bivetores num problema simples muito próximo ao desenvolvido no campo eletromagnético, onde contraímos tensores de rank dois com vetores.

O problema de auto-valor no espaço dos bivetores nos trás como resultado que a contração do tensor de Weyl com os termos da tetrada nula é obtido em termos de cinco escalares distintos, construído tão somente em termos da tetrada nula. De acordo com essas contrações e com os valores obtidos em termos dos N-P escalares de Petrov fomos capazes de classificar o campo gravitacional que se propaga numa região livre de matéria. Chegamos assim a seis tipos de tensores de Weyl, baseados nas suas quatro direções principais nulas e suas degenerescências. Cada tipo de tensor de Weyl é capaz de nos dizer importantes características sobre a fonte geradora dessa radiação gravitacional, seja ela uma fonte estática, com rotação diferencial ou um evento de colisão entre objetos massivos.

A classificação de Petrov é uma importante ferramenta utilizada nos mais recentes experimentos que envolvem radiação gravitacional, como por exemplo a detecção das ondas gravitacionais, que se dá através de um tensor de Weyl do tipo N, os tensores de maré na existência ou não da torção gravitacional, tensores do tipo D, e o efeito de *frame dragging* que recentemente pode ser medido experimentalmente.

Referências Bibliográficas

[1] A. Z. Petrov, “The classification of spaces defining gravitational fields,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 32, no. 8, pp. 1665–1685, 2000.

[2] R. Penrose, “A spinor approach to general relativity,” *Annals of Physics*, vol. 10, no. 2, pp. 171–201, 1960.

[3] R. K. Sachs, “Gravitational waves in general relativity viii. waves in asymptotically flat space-time,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 270, no. 1340, pp. 103–126, 1962.

[4] A. Einstein, *Relativity.* Princeton University Press, 2015.

[5] J. C. Maxwell, “On physical lines of force,” *Philosophical Magazine*, vol. 90, no. S1, pp. 11–23, 2010.

[6] J. C. Maxwell, *A dynamical theory of the electromagnetic field.* Wipf and Stock Publishers, 1996.

[7] A. Einstein, “Zur elektrodynamik bewegter körper,” *Annalen der physik*, vol. 4, 1905.

[8] K. S. Thorne, C. W. Misner, and J. A. Wheeler, *Gravitation.* Freeman, 2000.

[9] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics.* CRC press, 2003.

[10] H. C. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and spacetime.* Cambridge University Press, 2013.

[11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, vol. 1. Cambridge university press, 1973.

[12] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, vol. 2. Elsevier, 2013.

[13] G. Y. Rainich, "Electrodynamics in the general relativity theory," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 27, no. 1, pp. 106–136, 1925.

[14] F. A. Pirani, "Invariant formulation of gravitational radiation theory," *Physical Review*, vol. 105, no. 3, p. 1089, 1957.

[15] R. Debever, "Super-energy in general relativity," *Bull. Soc. Math. Belg*, vol. 10, pp. 112–147, 1958.

[16] L. Bel, *La radiation gravitationnelle.* PhD thesis, Paris., 1960.

[17] R. Penrose, "A spinor approach to general relativity," *Annals of Physics*, vol. 10, no. 2, pp. 171–201, 1960.

[18] R. J. Adler and C. Sheffield, "Classification of space-times in general relativity," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 14, no. 4, pp. 465–469, 1973.

[19] G. Ludwig, "Classification of electromagnetic and gravitational fields," *American Journal of Physics*, vol. 37, no. 12, pp. 1225–1238, 1969.

[20] G. Hall, "On the petrov classification of gravitational fields," *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, vol. 6, no. 5, p. 619, 1973.

[21] F. A. Pirani, "Introduction to gravitational radiation theory," *Lectures on general relativity*, vol. 1, pp. 249–373, 1964.

[22] P. Hogan and E. O'Shea, "Gravitational wave propagation in isotropic cosmologies," *Physical Review D*, vol. 65, no. 12, p. 124017, 2002.

[23] J. B. Achour, A. D. Felice, M. A. Gorji, S. Mukohyama, and M. C. Pookkillath, "Disformal map and petrov classification in modified gravity," 2021.