

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

Propriedades dinâmicas de um modelo *bouncer* em
campo não homogêneo

Felipe Augusto Oliveira Silveira

Ouro Branco, MG
Abril de 2020

Felipe Augusto Oliveira Silveira

PROPRIEDADES DINÂMICAS DE UM MODELO *BOUNCER* EM
CAMPO NÃO HOMOGÊNIO

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física Estatística e Sistemas Não-Lineares.

Orientador: Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira

Coorientador: Prof. Dr. Sidiney Geraldo Alves

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno, orientada pelo Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira e pelo Prof. Dr. Sidiney Geraldo Alves.

Ouro Branco– MG

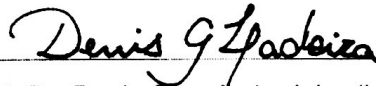
Abril de 2020

São João del-Rei, 23 de abril de 2020

A Dissertação “**Propriedades dinâmicas de um modelo bouncer em campo não homogêneo**”, elaborada por **Felipe Augusto Oliveira Silveira** e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira (UFSJ)

Orientador



Prof. Dr. Sidiney Geraldo Alves (UFSJ)

Coorientador



Prof. Dr. Edson Denis Leonel (UNESP)



Profa. Dra. Letícia Ribeiro de Paiva (UFSJ)

À minha mãe, Nilce.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Denis, pela amizade, pela infinita paciência e pela dedicação com a minha formação e com este trabalho. Serei eternamente grato por seu esforço.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Sidiney, pela atenção e pelos conselhos preciosos.

Aos demais professores do DEFIM, em especial o Prof. Dr. Humberto, pela contribuição a este trabalho, e a Prof. Dra. Letícia, por toda a ajuda no estágio de docência.

Ao meu irmão, Gilson, e à minha mãe, Nilce, exemplos de amor terno e profundo, que sempre me envolveram em sentimentos de apoio, incentivo, dedicação e confiança.

Aos amigos da UFSJ especialmente, Crislayne, Manu e Marlon pelo apoio, amizade, pelas conversas edificantes e pelos momentos de descontração.

A UFSJ, CNPq e FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Organização do trabalho	3
2	Noções de sistemas dinâmicos e leis de escala	5
2.1	Pontos fixos	5
2.2	Caos e expoentes de Lyapunov	10
2.3	Sistemas tridimensionais	11
2.4	Seções de Poincaré e Mapas	12
2.4.1	Órbitas periódicas e estabilidade	14
2.5	Teoria de escala	15
3	O modelo <i>bouncer</i> em campo não homogêneo	18
3.1	O sistema	18
3.2	O mapa	20
3.3	O modelo simplificado	23
3.4	Estabilidade dos pontos fixos	25
3.5	Expoentes de Lyapunov	29
3.6	Análise de escala	34
4	Conclusões	49
	Referências Bibliográficas	51

LISTA DE FIGURAS

1.1	A figura ilustra o modelo Fermi-Ulam.	2
2.1	Ponto fixo instável.	8
2.2	Ponto fixo estável.	8
2.3	A figura ilustra dois pontos de sela e algumas trajetórias próximas.	8
2.4	A figura ilustra um ponto espiral estável.	9
2.5	A figura ilustra um ponto espiral instável.	9
2.6	A figura ilustra um ponto fixo elíptico e o comportamento de trajetórias próximas.	10
2.7	A figura ilustra a trajetória de um sistema tridimensional e suas interseções na superfície de Poincaré, neste caso o plano $X_1 \times X_2$	13
3.1	A figura ilustra o modelo <i>bouncer</i> em campo não homogêneo.	19
3.2	Os referenciais S e S' e os vetores posição da partícula \vec{R} e \vec{R}' e o da parede \vec{R}_w	21
3.3	O espaço de fase do <i>bouncer</i> com campo não homogêneo para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$	22
3.4	A figura mostra três espaços de fases para valores diferentes de Ω e com $\varepsilon = 10^{-3}$. Elevar o valor Ω resulta no aumento da correlação entre a posição da parede na colisão n e a colisão $n+1$, o que leva ao surgimento de regiões de movimento regular na espaço de fases.	24

3.5	A figura ilustra que existe um valor de Ω abaixo do qual o espaço de fase fica praticamente inalterado.	24
3.6	Espaço de fases do modelo simplificado para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$	25
3.7	A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\Omega = 10^{-2}$. Λ_π e Λ_0 são, respectivamente, os autovalores dos pontos fixos em $\phi^* = \pi$ e $\phi^* = 0$ e m um número inteiro que corresponde ao número de oscilações que a parede móvel completou entre colisões.	28
3.8	A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 10^{-2}$	28
3.9	A figura mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov em função de ε	33
3.10	A figura mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov em função de Ω	33
3.11	Curvas de rugosidade em função do número de colisões para o modelo completo.	36
3.12	A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $\sigma/n_1^\alpha \times \varepsilon$	37
3.13	A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $\sigma_{sat} \times \varepsilon$	38
3.14	O gráfico de n_x em função de ε . A linha em vermelho representa o ajuste feito para determinar δ	40
3.15	A figura mostra o colapso de dez curvas de rugosidade em uma curva universal.	40
3.16	Curvas de energia em função do número de colisões para o modelo completo.	41
3.17	A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $E/n_1^\alpha \times \varepsilon$	42
3.18	A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $E_{sat} \times \varepsilon$	43
3.19	A figura mostra o colapso de dez curvas de energia em uma curva universal.	44
3.20	A figura mostra as curvas de velocidade em função do número de colisões para diferentes valores de parâmetro.	45
3.21	A figura mostra o gráfico de $V_{inv} \times \varepsilon$ e o melhor ajuste obtido.	46
3.22	A figura mostra curvas de velocidade em função do número de iterações para valores diferentes de ε'	47

LISTA DE FIGURAS

3.23 A figura mostra o colapso das curvas de velocidade para uma
única curva universal. 47

RESUMO

O modelo *bouncer* consiste em uma partícula clássica, sujeita à aceleração da gravidade, que colide com uma parede que se comporta como pistão, oscilando com o tempo. Esse modelo foi proposto como um sistema alternativo para estudar a aceleração de Fermi, fenômeno que consiste no ganho ilimitado de energia da partícula devido as colisões com a parede móvel. Neste trabalho estudamos uma versão do modelo *bouncer* em que o campo no qual a partícula está inserido não é homogêneo. O mapa do sistema foi construído para fornecer a velocidade da partícula e a fase da parede após cada colisão. Para certas combinações de valores de parâmetros e condições iniciais a dinâmica apresenta comportamento caótico. Esse fenômeno não linear foi quantificado através dos expoentes de Lyapunov para as regiões de mais baixa energia. Os pontos fixos e suas estabilidades também foram encontrados numericamente para valores diferentes de parâmetro. Finalmente, estudamos a transição do regime integrável para o não integrável utilizando análise de escala. Mostramos que a energia média, a rugosidade (variância da velocidade média) e velocidade média de um conjunto de partículas não interagentes obedecem funções de escala. A descrição de escala foi encontrada para as regiões caóticas abaixo da primeira curva invariante.

ABSTRACT

The *bouncer* model consists of a classical particle, subject to the acceleration of gravity, which collides with a wall that behaves like a piston, oscillating with time. This model was proposed as an alternative system for studying *Fermi acceleration*, phenomenon that consists of unlimited gain of particle energy due to collisions with the moving wall. In this work we study a version of the *bouncer* model in which the field that acts on the particle is not homogeneous. The system map was constructed to provide the particle's velocity and the wall's phase after each collision. Depending on both initial conditions and control parameters, the dynamics displays chaotic behavior. This non-linearity phenomenon was quantified via Lyapunov exponents. Fixed points and their stability were also found numerically for different parameters values. Finally, we studied the transition from the integrable to the non-integrable regime using scale analysis. We show that the average energy, roughness (variance of the average speed) and the average velocity of an ensemble of non intractable particles obey scaling functions. The scaling analysis was made for the chaotic region bellow the first spanning curve.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares tem se tornado cada vez mais relevante. Este tem fornecido novas ferramentas teóricas e conceituais, possibilitando a caracterização de vários problemas. Além disso, comportamentos caóticos similares podem ser observados em sistemas distintos, tendo características universais, tanto qualitativas quanto quantitativas [1]. A classe de problemas dos bilhares constitui um dos tipos mais simples de sistemas dinâmicos [2]. Eles consistem de uma partícula confinada numa região do espaço delimitada por uma fronteira com a qual sofre colisões, podendo essas serem elásticas ou inelásticas. A fronteira atua como uma força externa e sua posição pode ser dependente do tempo. Ainda que os bilhares possam ser descritos através da formulação Hamiltoniana, frequentemente é mais prático descrevê-los por meio de mapas discretos. Como o movimento da partícula entre as colisões é relativamente trivial, estes mapas descrevem a dinâmica dos bilhares no instante de cada colisão.

Esses sistemas são interessantes por apresentarem uma rica estrutura do espaço de fases¹. Para certas combinações de valores dos parâmetros de controle e das condições iniciais, podemos observar comportamentos periódicos, quase-periódicos e caóticos [3]. Quando a posição da fronteira do bilhar é dependente do tempo, a energia cinética da partícula pode apresentar crescimento ilimitado [4], fenômeno conhecido como aceleração de Fermi.

¹Na teoria de sistemas dinâmicos, espaço de fase (ou espaço de estados) é um espaço no qual todos os estados possíveis de um sistema são representados, com cada estado possível correspondendo a um ponto único no espaço de fase.

O modelo de Fermi foi proposto por Enrico Fermi em 1949 [5] com o fim de explicar o processo pelo qual raios cósmicos adquirem altas energias. No sistema proposto, as partículas são aceleradas ao interagirem com intensos campos magnéticos oscilantes de estrelas e galáxias. Uma versão deste sistema é o modelo Fermi-Ulam, que consiste de uma partícula confinada entre uma parede rígida e outra que se move periodicamente no tempo, sofrendo colisões elásticas. Nesse modelo não existe qualquer campo interagindo com a partícula e, portanto, a velocidade da partícula não se altera entre as colisões. Dependendo de como a parede está se movendo no instante da colisão, a partícula pode ganhar ou perder energia.

A figura 1.1 ilustra o modelo Fermi-Ulam. A parede móvel oscila em torno da posição $x = L$ de acordo com a equação $x = L + \epsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$, em que ϵ é amplitude de oscilação, ω a frequência, t' o tempo e ϕ_0 a fase inicial. A partícula se move e, eventualmente, chega na zona de colisão que fica entre $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$. Lá ela colide com a parede móvel e sua velocidade V se altera. A partícula então se move até a parede fixa em $x = 0$ que inverte o sinal da velocidade da partícula. Dessa forma, a parede fixa é o mecanismo pelo qual a partícula retorna à parede móvel.

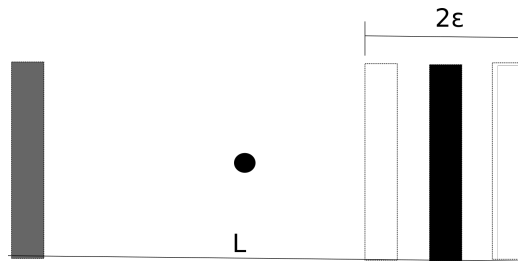


Figura 1.1: A figura ilustra o modelo Fermi-Ulam.

Esse sistema apresenta comportamento caótico para $\epsilon > 0$. Para $\epsilon = 0$ a parede da direita está fixa, apenas alterando o sinal da velocidade da partícula, e o sistema é integrável ¹. O crescimento ilimitado de energia, ou aceleração de Fermi, não é observada nesse sistema dinâmico, devido a presença de um conjunto de curvas invariantes [6].

Posteriormente, diferentes variações desse sistema foram estudadas, como modelos com colisões inelásticas [7, 8], com arraste [9, 10] e o modelo quântico

¹Classificamos como integráveis os sistemas cujo número de quantidades conservadas (constantes de movimentos) é igual ao número de graus de liberdade.

[11, 12]. O estudo destes sistemas é de grande importância, pois pode ser aplicado em várias áreas da física como física atômica [13] e astrofísica [14].

Uma versão semelhante ao modelo de Fermi, chamado de *bouncer*, foi proposta por Pustynnikov [15]. A dinâmica neste modelo consiste basicamente de uma partícula de massa m sujeita a um campo gravitacional. Quando a partícula desce devido ao efeito do campo ela colide com uma parede que se move periodicamente no tempo de acordo com a equação $y_w(t) = \epsilon \cos(\omega t')$, em que ϵ é a amplitude da parede, ω a frequência e t' o tempo.

Uma característica importante do modelo *bouncer* é que, ao contrário do modelo Fermi-Ulam, a energia da partícula pode crescer ilimitadamente, fenômeno conhecido como aceleração de Fermi, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros utilizados. Essa diferença entre os dois modelos foi explicada por Lichtenberg et al [2]. Ele mostrou que o modelo *bouncer* de Pustynnikov é equivalente ao mapa padrão [16], proposto por Chirikov em 1979, se feitas as devidas transformações de variáveis. A não linearidade deste sistema é controlada por um parâmetro K . Se K for pequeno o suficiente, o espaço de estados é caracterizado por uma estrutura mista, composta por ilhas *Kolmogorov–Arnold–Moser* (KAM), regiões de movimento caótico e curvas *spanning* que as limitam. Acima de um valor crítico $K_c \approx 0.9716$, todas as curvas *spanning* do mapa padrão são destruídas. O mapa de Chirikov tem um par de variáveis, I (ação) e θ (a variável conjugada do ângulo). Para $K > K_c$ temos que I^2 cresce, na média, sem limites. Esse crescimento ilimitado de I^2 corresponde à aceleração de Fermi no modelo *bouncer*.

Diferentes versões desse modelo também foram estudadas para diferentes aplicações, como modelos com arraste [17, 18], com colisões inelásticas [19] e modelos híbridos Fermi-Ulam-Bouncer [3, 20, 21].

Neste trabalho estudamos as propriedades do espaço de fases de uma versão do modelo *bouncer*. Este modelo consiste em uma partícula que sofre colisões com uma parede que oscila como um pistão sob o efeito de um campo não homogêneo. Após a colisão com a parede móvel a partícula pode ganhar ou perder energia de modo que a variável de interesse é a velocidade da partícula imediatamente após os choques.

1.1 Organização do trabalho

No capítulo seguinte apresentamos alguns conceitos relacionados a sistemas dinâmicos que são fundamentais para a realização desse trabalho. Nele introduziremos o conceito de pontos fixos, seções de Poincaré e mapas. Além

1.1. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

disso, abordaremos brevemente o conceito de leis de escala.

No terceiro capítulo abordamos de fato o modelo *bouncer* em campo não homogêneo. Apresentamos as equações que regem o movimento da partícula no modelo e o mapa que descreve a dinâmica do sistema. Com isso estudamos algumas características do espaço de fases do sistema e apresentamos uma versão simplificada do modelo. Fazendo uso do modelo simplificado encontramos as coordenadas e estabilidade dos pontos fixos. Ainda nesse capítulo caracterizamos algumas órbitas do sistema em termos da sensibilidade às condições iniciais usando os expoente de Lyapunov.

Estudamos também a transição do regime integrável para o não integrável através de uma análise de escala. As propriedades de escala foram estudadas utilizando quantidades médias calculadas como funções do número de iterações. Por fim, o capítulo 4 resume os resultados obtidos no trabalho.

CAPÍTULO 2

NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E LEIS DE ESCALA

2.1 Pontos fixos

Nesta seção introduziremos o conceito de pontos fixos e suas classificações em sistemas descritos por equações diferenciais. Por simplicidade, consideremos inicialmente um sistema unidimensional que possui somente uma variável de estado X . A equação dinâmica é dada por

$$\dot{X} = f(X). \quad (2.1)$$

Para sistemas que são descritos por equações diferenciais, o ponto X^* é um ponto fixo se $f(X^*) = 0$ é satisfeito, ou seja, uma trajetória que inicia no ponto fixo X^* permanecerá lá indefinidamente. Os pontos fixos são classificados de maneira a caracterizar o que ocorre com as trajetórias nas proximidades desses pontos. Se órbitas convergem para o ponto fixo, dizemos que o ponto fixo é um atrator ou nó assintoticamente estável. Quando as trajetórias se afastam dele, o ponto fixo é um repulsor ou ponto fixo instável. Caso as trajetórias se aproximam em uma direção mas se afastam em outra dizemos que o ponto fixo é um ponto de sela. A análise da estabilidade de X^* pode ser feita utilizando a expansão em série de Taylor na vizinhança do ponto fixo, até a primeira ordem:

$$f(X) \approx f(X^*) + (X - X^*) \left. \frac{df}{dX} \right|_{X^*}. \quad (2.2)$$

2.1. PONTOS FIXOS

Pela definição do ponto fixo temos que $f(X^*) = 0$. Como estamos interessados na evolução temporal da distância de um ponto da trajetória a X^* fazemos a substituição $x = X - X^*$:

$$\dot{x} = x \frac{df}{dX}. \quad (2.3)$$

De forma geral, a solução da equação (2.3) é escrita como

$$x = Ce^{\Lambda t}, \quad (2.4)$$

onde C é uma constante e

$$\Lambda = \left. \frac{df}{dX} \right|_{X^*}, \quad (2.5)$$

ou seja, Λ é o valor característico do ponto fixo. Para $\Lambda > 0$ temos um ponto fixo instável, as trajetórias próximas ao ponto fixo afastam-se exponencialmente dele, caracterizando-o como ponto fixo repulsor. Caso $\Lambda < 0$ temos um ponto fixo assintoticamente estável, pois as trajetórias próximas se aproximam assintoticamente de X^* . Este ponto fixo é também chamado de atrator.

Quando o valor característico é zero analisamos a primeira e segunda derivada de f em relação a X . Para um ponto de sela, a segunda derivada tem o mesmo sinal em ambos os lados de X^* , dessa forma a trajetória é repelida de um lado e atraída pelo outro.

Para pontos atratores e repulsores com $\Lambda = 0$, o sinal da segunda derivada muda em X^* . Ela é positiva à esquerda do ponto fixo e negativa à direita para os atratores, e negativa à esquerda e positiva à direita para repulsores. Tais pontos fixos repelem ou atraem trajetórias mais lentamente que os pontos fixos cujo valor característico é diferente de zero [1].

Em sistemas com dois graus de liberdade¹ existem outras possibilidades quanto a natureza dos pontos fixos. Consideremos agora um sistema que seja descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f_X(X, Y), \\ \dot{Y} &= f_Y(X, Y). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Semelhante ao caso anterior, se $f_X(X^*, Y^*) = f_Y(X^*, Y^*) = 0$ então (X^*, Y^*) é um ponto fixo. De maneira similar ao que foi feito para sistemas unidimensionais, fazemos a expansão em série de Taylor de $f_X(X, Y)$ e

¹Na mecânica clássica, o número de graus de liberdade se refere ao número de par de variáveis necessário para descrever o sistema [1].

CAPÍTULO 2. NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E LEIS DE ESCALA

$f_Y(X, Y)$ em torno das coordenadas do ponto fixo (X^*, Y^*) até a primeira ordem:

$$\begin{aligned} f_X(X, Y) &= f_X(X^*, Y^*) + (X - X^*) \frac{\partial f_X}{\partial X} \Big|_{X^*, Y^*} + (Y - Y^*) \frac{\partial f_X}{\partial Y} \Big|_{X^*, Y^*}, \\ f_Y(X, Y) &= f_Y(X^*, Y^*) + (X - X^*) \frac{\partial f_Y}{\partial X} \Big|_{X^*, Y^*} + (Y - Y^*) \frac{\partial f_Y}{\partial Y} \Big|_{X^*, Y^*}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

no qual, pela definição de ponto fixo, $f_X(X^*, Y^*) = f_Y(X^*, Y^*) = 0$. Definindo $\Delta\eta_1 = X - X^*$ e $\Delta\eta_2 = Y - Y^*$ podemos escrever a equação (2.7) como

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\eta}_1 \\ \Delta\dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_X}{\partial X} & \frac{\partial f_X}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_Y}{\partial X} & \frac{\partial f_Y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Definimos $\Delta\tilde{\eta}$ como sendo a matriz coluna do lado direito da equação (2.8). A matriz 2×2 nesta equação é a jacobiana do sistema e é representada pelo símbolo J . Dessa forma, temos:

$$\Delta\dot{\tilde{\eta}} = J\Delta\tilde{\eta}. \quad (2.9)$$

De forma geral a solução da expressão acima é escrita como

$$\Delta\tilde{\eta}(t) = \tilde{C}_1 e^{\Lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\Lambda_2 t}, \quad (2.10)$$

em que \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 são constantes de integração, e Λ_1 e Λ_2 são os autovalores em termos dos quais determinamos a estabilidade dos pontos fixos. Os valores de Λ são obtidos resolvendo a expressão

$$\det(J - \Lambda I) = 0, \quad (2.11)$$

em que I é a matriz identidade 2×2 . Resolvendo o determinante acima obtemos a equação

$$\Lambda^2 - \left(\frac{\partial f_X}{\partial X} + \frac{\partial f_Y}{\partial Y} \right) \Lambda + \frac{\partial f_X}{\partial X} \frac{\partial f_Y}{\partial Y} - \frac{\partial f_X}{\partial Y} \frac{\partial f_Y}{\partial X} = 0, \quad (2.12)$$

na qual o termo entre parênteses é o traço e $\frac{\partial f_X}{\partial X} \frac{\partial f_Y}{\partial Y} - \frac{\partial f_X}{\partial Y} \frac{\partial f_Y}{\partial X}$ é o determinante da jacobiana. A expressão acima fornece duas soluções, dadas por

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{Tr}J \pm \sqrt{(\text{Tr}J)^2 - 4\det J} \right). \quad (2.13)$$

2.1. PONTOS FIXOS

Caso $\Lambda_1 > 0$ e $\Lambda_2 > 0$ a distância entre o ponto fixo e a trajetória de um ponto próximo a ele vai aumentar exponencialmente com o decorrer do tempo. Neste caso o ponto fixo é repulsor. De forma análoga, se ambos os autovalores forem negativos, as trajetórias se aproximam do ponto fixo que é classificado como um atrator. Também existe a possibilidade de os autovalores terem sinais opostos. Nesse caso o ponto fixo é classificado como ponto sela, atraindo trajetórias em uma direção e repelindo-as em outra.

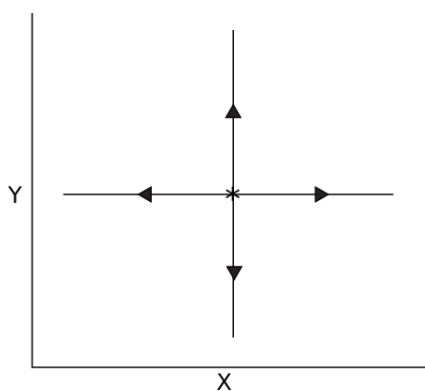


Figura 2.1: Ponto fixo instável.

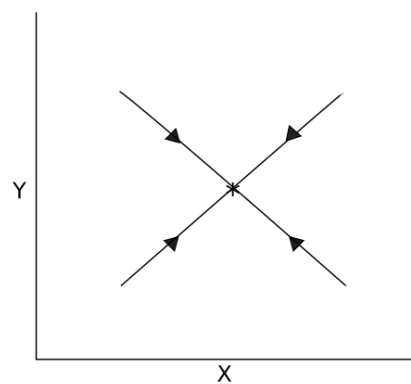


Figura 2.2: Ponto fixo estável.

Na figura 2.1 as trajetórias se afastam do ponto fixo, aqui representado pelo símbolo $*$. Neste caso o ponto fixo é instável. A figura 2.2 ilustra algumas trajetórias ao redor de um ponto fixo estável. A figura 2.3 ilustra dois

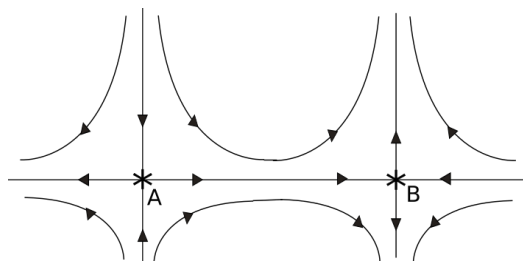


Figura 2.3: A figura ilustra dois pontos de sela e algumas trajetórias próximas.

pontos de sela A e B e algumas trajetórias. As trajetórias que se aproximam assintoticamente dos pontos fixos são chamadas de variedades estáveis, em quanto as que se distanciam são chamadas variedades instáveis. Os pontos de sela também são chamados de pontos hiperbólicos.

Diferentemente de sistemas unidimensionais, no caso bidimensional há uma quarta possibilidade para a estabilidade dos pontos fixos que ocorre quando o argumento raiz da equação (2.13) é negativo. Quando $\text{Im}(\Lambda) \neq 0$, pontos de trajetórias próximas circulam o ponto fixo que, nesse caso, é chamado de ponto fixo espiral. A estabilidade deste é dada pela parte real dos autovalores. Caso $\text{Re}(\Lambda) < 0$ as órbitas se aproximam do ponto fixo que, por tal motivo, é classificado como assintoticamente estável. Já quando $\text{Re}(\Lambda) > 0$, o ponto fixo é instável e as trajetórias de pontos iniciais próximos a ele espiralam à medida que se afastam do ponto fixo em questão. As figuras 2.4 e 2.5 ilustram, respectivamente, uma trajetória sendo atraída por um ponto fixo espiral estável e uma trajetória que afasta de um ponto fixo espiral instável.

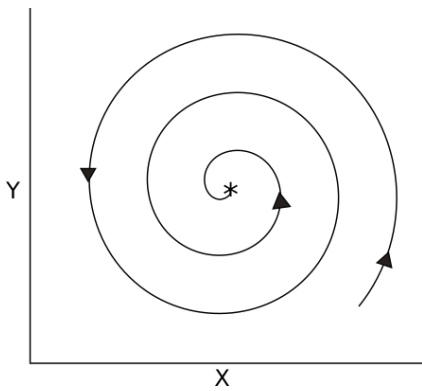


Figura 2.4: A figura ilustra um ponto espiral estável.

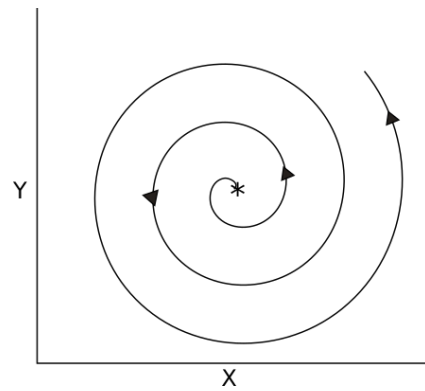


Figura 2.5: A figura ilustra um ponto espiral instável.

Para o caso em que $\text{Re}(\Lambda) = 0$, o ponto fixo é classificado como ponto fixo elíptico (ou centro estável). Nas situações em que isso ocorre, as trajetórias próximas ao ponto fixo, na média, não afastam nem se aproximam do ponto fixo. A figura 2.6 ilustra o comportamento de algumas trajetórias nas vizinhanças de um ponto fixo elíptico.

Dadas as classificações dos pontos fixos, é importante ressaltar que ao variar os parâmetros do sistema é possível que a estabilidade desses pontos mude. Os métodos apresentados nessa seção são aplicáveis para sistemas com dimensões maiores. No entanto, essa análise da estabilidade dos pontos fixos fica cada vez mais complicada conforme estudamos sistemas com mais graus de liberdade. Além disso, espaços de fases com dimensões maiores podem apresentar trajetórias com comportamentos que não são possíveis em sistemas com menos graus de liberdade.

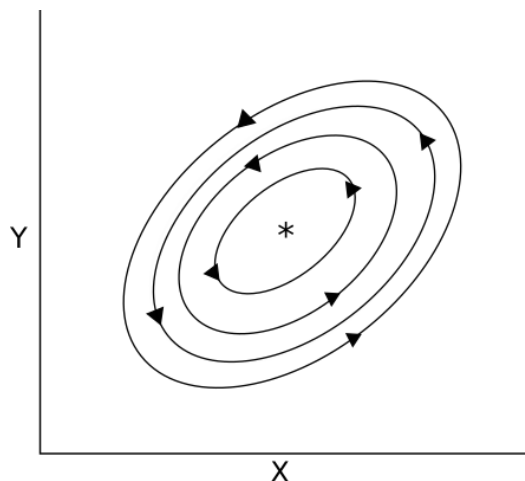


Figura 2.6: A figura ilustra um ponto fixo elíptico e o comportamento de trajetórias próximas.

2.2 Caos e expoentes de Lyapunov

Caos é o termo utilizado para descrever comportamentos complexos que são observados em sistemas muitas vezes simples [1]. Órbitas caóticas podem aparentar ser erráticas e aleatórias, como se surgissem de um sistema muito complexo ou com ruído. No entanto, observamos esse tipo de comportamento em sistemas determinísticos simples e sem ruído.

Não existe uma definição única para caos. Segundo Hilborn [1], uma dinâmica é caótica caso três condições sejam satisfeitas. Primeiramente, o sistema deve obedecer o teorema da não-intersecção, ou seja, trajetórias não podem se interceptar, o que é esperado para sistemas determinísticos. A segunda restrição indica que as órbitas devem estar em uma região limitada do espaço de fases. Por último, temos que órbitas próximas devem divergir exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo.

A divergência de trajetórias próximas, terceira condição, é descrita pelo expoente de Lyapunov. Consideremos duas trajetórias cujas condições iniciais estão separadas por uma distância Δx_0 . Se essas órbitas forem caóticas, elas irão divergir no tempo segundo a equação

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda_x t}, \quad (2.14)$$

em que λ_x é o expoente de Lyapunov associado à direção do eixo x . O número desses expoentes é igual ao número de dimensões do espaço de fases

e o mesmo raciocínio pode ser aplicado às demais componentes do vetor que define a órbita.

Classificamos como caóticas as órbitas quando pelo menos um dos valores de λ é positivo. Em sistemas hamiltonianos a soma dos expoentes de Lyapunov é zero devido à preservação do volume no espaço de fase. Para sistemas com dissipação ou arraste, pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é negativo, indicando a convergência das trajetórias para um atrator. No presente trabalho utilizaremos os expoentes de Lyapunov para verificar se determinadas órbitas são de fato caóticas e estudar como esses expoentes variam conforme mudamos os parâmetros de controle e condições iniciais.

2.3 Sistemas tridimensionais

Chamamos um sistema dinâmico de tridimensional quando este possui três variáveis independentes as quais são suficientes para descrever totalmente a dinâmica do sistema. Consideremos um sistema dinâmico que seja descrito pela evolução temporal das seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x, y, z) \\ \dot{y} &= f_y(x, y, z) \\ \dot{z} &= f_z(x, y, z).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Como já foi discutido, os pontos fixos dos sistema são encontrados igualando as expressões da equação (2.15) a zero. Para determinar a estabilidade dos pontos fixos é necessário obter os três valores característicos através da matriz jacobiana avaliada nas coordenadas dos pontos fixos. Neste caso, a matriz jacobiana é dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix}.\tag{2.16}$$

De forma análoga aos sistemas bidimensionais, os autovalores são obtidos a partir da equação (2.11).

Os valores característicos determinam a estabilidade dos pontos fixos. Caso todos os autovalores sejam reais e negativos este ponto fixo é um atrator. No entanto, se dois desses valores característicos também tiverem partes imaginárias não nulas, pontos de trajetórias próximas irão se aproximar do ponto fixo em uma espiral, o que caracteriza um ponto fixo nó espiral. Quando

2.4. SEÇÕES DE POINCARÉ E MAPAS

os autovalores são reais e positivos temos um ponto fixo repulsor. Caso dois desses valores característicos possuam partes imaginárias não nulas, pontos de trajetórias próximas irão espiralar para longe do ponto repulsor.

Existe também a possibilidade de que o ponto fixo seja um ponto de sela. Esses pontos são classificados com índices que representam o número de valores característicos cujas partes reais são positivas. Um ponto de sela de índice 1 possui três autovalores reais, um positivo e dois negativos. Esse tipo de ponto fixo atrai pontos de trajetórias em uma superfície (a variedade estável) e repele pontos de trajetórias ao longo de uma curva (variedade instável). Se este ponto de sela possuir dois valores característicos complexos temos pontos de sela espiral e os pontos de trajetórias próximas espiralam em torno do ponto fixo conforme eles se aproximam da variedade estável.

Já o ponto de sela de índice 2 possui dois autovalores positivos e um negativo. Nesse caso pontos de trajetórias se aproximam do ponto fixo em uma curva e divergem do ponto fixo em uma superfície. Caso dois autovalores com partes reais negativas formem um par complexo conjugado, pontos próximos à variedade instável irão espiralar conforme se afastam do ponto fixo, o que caracteriza um ponto fixo de sela espiral. Os sistemas tridimensionais são importantes não só por vivermos em um mundo tridimensional mas também porque tais sistemas podem se comportar de formas que não são possíveis em sistemas com menos dimensões [1].

Dentre esses novos comportamentos está a possibilidade de surgimento de trajetórias caóticas. O comportamento caótico é caracterizado pela divergência de trajetórias no espaço de fase, ou seja, a separação entre as trajetórias inicialmente próximas aumenta exponencialmente com o passar do tempo na média. Para sistemas de dimensões menores, trajetórias limitadas não podem divergir exponencialmente sem que se interceptem eventualmente, violando assim a unicidade da solução. Dessa forma, são necessárias três ou mais dimensões no espaço de estados para existência de comportamento caótico.

2.4 Seções de Poincaré e Mapas

A seção de Poincaré é um método no qual diminuimos a dimensionalidade do espaço de fase de um sistema, deixando sua análise mais simples [1]. Isso é feito obtendo os pontos de interseção entre as trajetórias e uma superfície de $N - 1$ dimensões, em que N é a dimensão do espaço de fase. A figura 2.7 ilustra uma seção de Poincaré definida pelo plano $X_1 \times X_2$. Partindo de um

ponto inicial em $t = 0$ a trajetória evolui e intercepta a seção de Poincaré em (u_1, v_1) . Posteriormente a trajetória passa pelo plano novamente, agora em (u_2, v_2) . Dada a unicidade da solução do sistema de equações diferenciais que descrevem as trajetórias, temos então um função mapa que correlaciona os pontos (u_n, v_n) e (u_{n+1}, v_{n+1}) [1]. A escolha da superfície usada na seção de Poincaré é arbitrária e se baseia no que é mais conveniente ao sistema sob estudo.

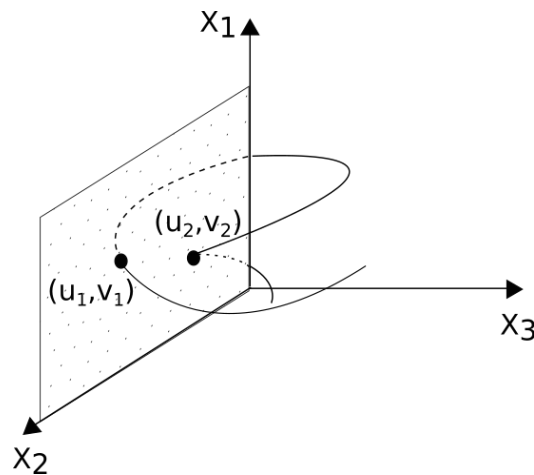


Figura 2.7: A figura ilustra a trajetória de um sistema tridimensional e suas interseções na superfície de Poincaré, neste caso o plano $X_1 \times X_2$.

Para um sistema tridimensional, a seção de Poincaré é bidimensional. Dessa forma, supondo que a trajetória intercepta o plano pelo ponto (u_n, v_n) e o próximo ponto de interseção com a superfície de Poincaré seja (u_{n+1}, v_{n+1}) , teremos, dessa forma, duas equações que descrevem a dinâmica do sistema nessa superfície. O conjunto de equações que descrevem a dinâmica de um sistema via processo iterativo é chamado de mapa que, no caso, é dado pelas equações

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f_u(u_n, v_n), \\ v_{n+1} &= f_v(u_n, v_n). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sendo assim, conhecendo as funções f_u e f_v temos todas as informações necessárias para descrever o comportamento do sistema em tempos futuros.

O estudo de mapeamentos é interessante pois eles permitem descrever as interseções de trajetórias em espaços de fase com seções de Poincaré. Além disso, mapas podem ser usados para modelar sistemas físicos mesmo que não saibamos as equações diferenciais que o regem.

2.4.1 Órbitas periódicas e estabilidade

Para um mapa bidimensional, tem-se que uma órbita é periódica com período p quando

$$\begin{aligned} u_{n+p} &= u_n, \\ v_{n+p} &= v_n, \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo p o menor inteiro que satisfaz as equações acima. Para o caso em que $p = 1$, temos que a órbita periódica é um ponto fixo. Assim como foi feito para equações diferenciais, a estabilidade do ponto fixo é determinada através da análise do comportamento das trajetórias próximas a ele. Fazendo a expansão em série de Taylor das equações (2.17) da trajetória de uma condição inicial (u_0, v_0) em torno do ponto fixo (u^*, v^*) temos, até a primeira ordem

$$\begin{aligned} f_u(u_0, v_0) &\approx f_u(u^*, v^*) + (u_0 - u^*) \left. \frac{\partial f_u}{\partial u} \right|_{u^*, v^*} + (v_0 - v^*) \left. \frac{\partial f_u}{\partial v} \right|_{u^*, v^*}, \\ f_v(u_0, v_0) &\approx f_v(u^*, v^*) + (u_0 - u^*) \left. \frac{\partial f_v}{\partial u} \right|_{u^*, v^*} + (v_0 - v^*) \left. \frac{\partial f_v}{\partial v} \right|_{u^*, v^*}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Definindo

$$\tilde{\zeta} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

e escrevendo a distância do ponto fixo à trajetória como

$$\Delta \tilde{\zeta}_0 = \begin{pmatrix} u_0 - u^* \\ v_0 - v^* \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

a equação (2.19) pode ser escrita como

$$\Delta \tilde{\zeta}_1 = J \Delta \tilde{\zeta}_0, \quad (2.22)$$

em que J é a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_u}{\partial u} & \frac{\partial f_u}{\partial v} \\ \frac{\partial f_v}{\partial u} & \frac{\partial f_v}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

sendo que as derivadas acima são todas avaliadas na coordenada do ponto fixo. Para a segunda iteração temos $\Delta \tilde{\zeta}_2 = J \Delta \tilde{\zeta}_1$, em que $\Delta \tilde{\zeta}_1$ é dado pela equação (2.22), dessa forma $\Delta \tilde{\zeta}_2 = J^2 \Delta \tilde{\zeta}_0$. Após n iterações temos

$$\Delta \tilde{\zeta}_n = J^n \Delta \tilde{\zeta}_0. \quad (2.24)$$

Semelhante ao que foi discutido para equações diferenciais, os valores característicos são obtidos resolvendo a equação acima, o que resulta em dois autovalores Λ_1 e Λ_2 . Dessa forma temos, na proximidade dos pontos fixos,

$$\Delta\tilde{\zeta}_n = D_1\Lambda_1^n + D_2\Lambda_2^n. \quad (2.25)$$

Em que D_1 e D_2 são constantes definidas a partir das condições iniciais. Note pela equação acima que se $|\Lambda_i| < 1$ temos que a distância entre as trajetórias está diminuindo e caso $|\Lambda_i| > 1$ a distância está aumentando. Dessa forma, quando $|\Lambda_1| > 1$ e $|\Lambda_2| > 1$ ambas as variedades são instáveis e o ponto fixo é repulsor. Caso $|\Lambda_1| < 1$ e $|\Lambda_2| < 1$ o ponto fixo é classificado como estável, comumente chamado de nó. Na situação em que $|\Lambda_1| < 1$ e $|\Lambda_2| > 1$, ou vice-versa, temos que as trajetórias serão atraídas em uma direção e repelidas na outra, logo o ponto fixo é um ponto de sela.

Existe ainda a situação em que os autovalores são complexos. Neste caso os autovalores formam um par conjugado e os pontos da órbita que interceptam a superfície de Poincaré giram em torno do ponto fixo. Para $|\Lambda_1| < 1$ e $|\Lambda_2| < 1$ o ponto fixo é estável e as órbitas espiralam se aproximando dele. Quando $|\Lambda_1| > 1$ e $|\Lambda_2| > 1$ as trajetórias giram enquanto se afastam do ponto fixo, que neste caso é instável. Para sistemas dissipativos, ou seja, que contraem o volume no espaço de fase, tem-se que $\Lambda_1\Lambda_2 < 1$, e para os que conservam o volume, o que é o caso para sistemas não dissipativos, $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$.

2.5 Teoria de escala

Neste trabalho estudamos a transição do regime integrável para o não integrável através de uma análise de escala. Neste capítulo introduzimos os conceitos de teoria de escala utilizando como exemplo a magnetização $m(k, h, t)$ de um sistema ferromagnético. A variável $k = (T_c - T)/T_c$ é o desvio relativo da temperatura crítica T_c e h é o campo magnético externo. Consideramos aqui que o sistema evolui no tempo t com uma dinâmica estocástica. O sistema está fora do equilíbrio quando $t = 0$ e está no equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$. Este sistema é descrito por leis de potência nas vizinhanças do ponto crítico ($k = 0, h = 0, t \rightarrow \infty$). Assim temos que a magnetização espontânea se comporta como

$$m(k, 0, \infty) \propto k^\beta, \quad (2.26)$$

em que β é um expoente crítico determinado através do ajuste via método dos mínimos quadrados no gráfico log-log de m versus k . Na temperatura

2.5. TEORIA DE ESCALA

crítica, o comportamento da magnetização é dado por

$$\tilde{m}(0, h, \infty) \propto h^\gamma, \quad (2.27)$$

onde γ é outro expoente crítico.

Quando o campo externo é nulo ($h = 0$) o sistema é descrito por $m(k, 0, t)$. No caso em que o tempo é muito menor que o tempo de relaxação do sistema, τ , o sistema está fora do equilíbrio. No entanto, se τ é muito menor que t , o sistema se encontra em equilíbrio. O tempo de relaxação depende da temperatura, e, portanto, depende de k . Conforme a temperatura se aproxima de $T = T_c$, o tempo de relaxação do sistema cresce como

$$\tau \propto k^{-z}, \quad (2.28)$$

onde z é um expoente dinâmico. O *crossover*, ou seja, a transição do regime de não equilíbrio para o regime de equilíbrio é dado pela variável τ .

Em princípio, podemos explicar estes comportamentos em lei de potência através da análise de escala. A hipótese de escala consiste em supor que a magnetização seja uma função homogênea generalizada das variáveis k , t e h , da forma

$$m(k, h, t) = lm(l^a k, l^b h, l^c t), \quad (2.29)$$

onde l é o fator de escala e a , b e c são expoentes de escala. Com o intuito de determinar como expoente β está relacionado com os expoentes de escala escolhemos $l = k^{-1/a}$. Assim a equação acima se torna

$$m(k, h, t) = k^{-1/a} m(1, k^{-b/a} h, k^{-c/a} t). \quad (2.30)$$

Considerando a magnetização a campo nulo ($h = 0$, $t \rightarrow \infty$) temos

$$m(k, h, t) = k^{-1/a} m(1, 0, \infty). \quad (2.31)$$

Se considerarmos que $m(1, 0, \infty)$ é uma constante finita obtemos, comparando a equação acima com a equação (2.26), que $a = -1/\beta$. O comportamento da magnetização de equilíbrio ($t \rightarrow \infty$) em $k = 0$, dada pela equação (2.27), é obtido escolhendo o fator de escala $l = h^{-1/b}$ e substituindo na equação (2.29):

$$m(0, h, \infty) = h^{-1/b} m(0, 1, \infty). \quad (2.32)$$

Ainda considerando que m é uma constante finita, podemos comparar a equação acima com a equação (2.27). Dessa forma, temos que a relação entre o expoente γ e o expoente de escala é $b = -1/\gamma$.

Para encontrar a relação entre o expoente z e os expoentes de escala escolhemos $l = k^{-1/a}$ e $h = 0$. Dessa forma, considerando que t é finito, escrevemos a equação (2.30) como

$$m(k, 0, t) = k^{-1/a} f\left(\frac{t}{k^{-c/a}}\right), \quad (2.33)$$

em que $f(x) = m(1, 0, x)$ sendo $x = t/k^{-c/a}$. A função $f(x)$ pode ter comportamentos diferentes dependendo do valor de x . Caso $t \rightarrow \infty$, ou seja, quando $x \gg 1$, a magnetização espontânea só depende de k , o que implica que $f(\infty)$ é constante. Por outro lado, se $t = 0$ a magnetização deve ter o valor inicial independente do valor de k . A dependência em k da magnetização pode desaparecer somente se

$$f(x) \approx x^y \approx \frac{t^y}{k^{-yc/a}}, \quad (2.34)$$

quando $x \ll 1$ e y assumir um valor particular ($y = -1/c$). A função $m(1, 0, x)$ admite um *crossover* controlado por $k^{c/a}$, dessa forma, da equação (2.33) o tempo de relaxação τ deve ser proporcional a $k^{c/a}$. Considerando $x \approx 1$ para $t \approx \tau$ obtemos da equação (2.28) que $z = -c/a$.

Os expoentes β , z e γ são obtidos numericamente ou de forma experimental. Sendo assim, obtemos os expoentes de escala com as relações $a = -1/\beta$, $b = -1/\gamma$ e $c = z/\beta$. Com esses expoentes e as transformações corretas é possível obter o colapso das curvas de magnetização em uma única curva chamada curva universal, mostrando que a magnetização obedece leis de escala nessa transição.

Utilizaremos teoria de escala nesse trabalho para estudar a transição de regime integrável para o não integrável do modelo *bouncer* em campo não homogêneo. O sistema será apresentado no capítulo que segue.

CAPÍTULO 3

O MODELO *BOUNCER* EM CAMPO NÃO HOMOGÊNIO

3.1 O sistema

O modelo estudado neste trabalho é um bilhar exótico, sendo uma variação do modelo *bouncer* em que o mecanismo pelo qual a partícula retorna à parede móvel se dá por uma força que depende da posição da partícula. Para ilustrar este sistema, imaginemos uma esfera de raio R com distribuição uniforme de carga $-Q < 0$ em seu volume com uma cavidade que vai de um hemisfério a outro, passando pelo seu centro, e uma partícula de carga $q > 0$ que é acelerada pelo campo gerado no interior desta esfera. Consideremos que a cavidade é estreita o suficiente para que a partícula de mova apenas em uma direção. Dentro da cavidade há uma parede que oscila no tempo de acordo com a expressão $y_w(t') = l_0 + \epsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$, em que t' é o tempo, ϵ é a amplitude de oscilação, ϕ_0 é a fase inicial, ω é a frequência de oscilação e l_0 é a posição ao redor da qual a parede oscila. A figura 3.1 ilustra o modelo *bouncer* em campo não homogêneo.

Devido ao campo elétrico da esfera, a partícula em seu interior sofrerá o efeito de uma força dada por

$$\vec{F} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{y}, \quad (3.1)$$

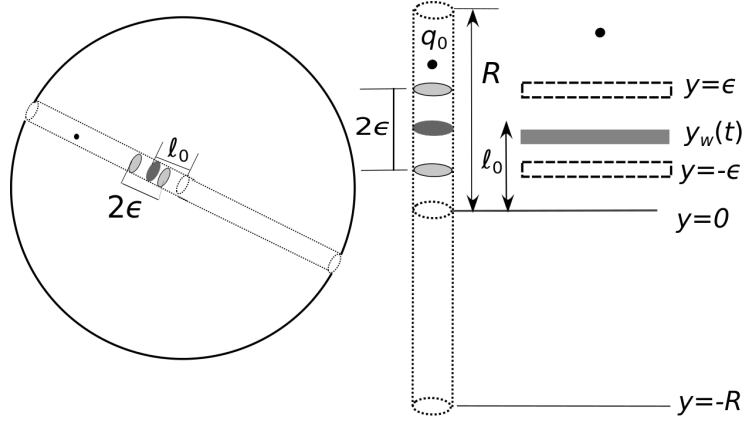


Figura 3.1: A figura ilustra o modelo bouncer em campo não homogêneo.

em que \vec{y} é o vetor posição da partícula. Pela segunda lei de Newton temos

$$-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{y} = m \ddot{\vec{y}}, \quad (3.2)$$

onde m é a massa da partícula. A força dada pela equação acima é restauradora e a partícula terá um movimento harmônico.

Por simplificação, como todos os vetores estão na mesma direção, a notação vetorial foi evitada. Reorganizando os termos podemos escrever a equação acima como

$$\ddot{y} + \omega_f^2 y = 0, \quad (3.3)$$

em que ω_f é frequência da partícula dada por $\omega_f^2 = \frac{qQ}{4\pi m \epsilon_0 R^3}$. A equação acima é semelhante a equação do movimento de um oscilador harmônico, o que indica que a partícula tem um movimento oscilatório dentro da cavidade. A solução da equação (3.3) é dada por

$$y(t') = D_n \cos(\omega_f t') + E_n \sin(\omega_f t'), \quad (3.4)$$

em que D_n e E_n são constantes determinadas a partir do conhecimento da posição y_n e velocidade v_n da partícula em um tempo t'_n . Dessa forma temos

$$D_n = \frac{\dot{y}_2(t'_n)y_n(t'_n) - y_2(t'_n)v_n(t'_n)}{\omega_f}, \quad (3.5)$$

$$E_n = \frac{y_1(t'_n)v_n(t'_n) - y_n(t'_n)\dot{y}_1(t'_n)}{\omega_f}, \quad (3.6)$$

3.2. O MAPA

em que $y_1(t'_n) = \cos(\omega_f t')$ e $y_2(t'_n) = \text{sen}(\omega_f t')$.

Contudo é apropriado descrevermos o sistema em termos de variáveis adimensionais. Definimos, portanto, $Y_w = y_w/l_0$ e $\varepsilon = \epsilon/l_0$ como a posição e a amplitude da parede móvel, respectivamente. Definimos, também, $t = t'\omega$ como a nova variável tempo, $\Omega = \omega_f/\omega$ como constante que relaciona a intensidade da força elétrica e a frequência da parede. Definimos ainda a nova variável $\phi(t) = t + \phi_0$. Utilizar a fase ϕ como variável independente ao invés do tempo pode ser vantajoso, já que podemos limitá-la entre 0 e 2π .

Sendo assim, descrevemos a posição da parede oscilante como $Y_w = 1 + \varepsilon \cos(\phi)$ e da partícula como $Y(t) = d_n \cos(\Omega t) + e_n \text{sen}(\Omega t)$, em que $d_n = D_n/l_0$ e $e_n = E_n/l_0$.

3.2 O mapa

Considere que t_n seja o instante da n -ésima colisão da partícula com a parede móvel. Neste instante a posição da parede é $Y_w(t_n)$. A partícula então parte desta posição com velocidade V_n . Sem perda de generalidade, consideremos que $V_n > 0$ indicando que, imediatamente após a colisão n , o movimento da partícula é para cima. A partícula então sobe e, devido à ação da força elétrica, retorna à posição da parede oscilante Y_w em um intervalo de tempo.

No instante da próxima colisão a fase da parede é dada por $\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t_{n+1}$, em que Δt_{n+1} é o intervalo entre as colisões n e $n+1$. Assim, a colisão $n+1$ ocorre no instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$ que satisfaz a relação $Y(t_{n+1}) = Y_w(t_{n+1})$, ou seja,

$$d_n \cos(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) + e_n \text{sen}(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) - 1 - \varepsilon \cos(t_n + \Delta t_{n+1} + \phi_0) = 0. \quad (3.7)$$

Como a equação acima não possui solução analítica, encontramos o valor de Δt_{n+1} numericamente após cada colisão.

A análise do efeito da colisão na velocidade necessita da descrição do movimento da partícula nos referenciais da parede fixa e da parede móvel. A figura 3.2 ilustra os vetores posição envolvidos no cálculo de mudança entre referenciais em um espaço bidimensional. No referencial S a partícula se move com velocidade $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ e a origem do referencial S' com velocidade $\vec{V}_w = \dot{\vec{R}}_w$. Sendo $\vec{V}' = \dot{\vec{R}}'$ a velocidade da partícula no referencial da parede, temos que a relação entre as velocidades é dada por

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_w, \quad (3.8)$$

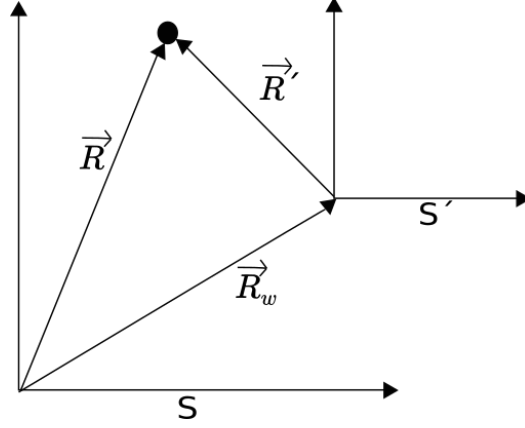


Figura 3.2: Os referenciais S e S' e os vetores posição da partícula \vec{R} e \vec{R}' e o da parede \vec{R}_w

onde $\vec{V}_w = -\varepsilon \text{sen}(\phi) \hat{j}$. Imediatamente antes da colisão, temos que, no referencial da parede, $\vec{V}'_i = \vec{V} - \vec{V}_w$ e, como a colisão é elástica, a velocidade da partícula nesse referencial após a colisão é $\vec{V}'_f = -\vec{V}'_i$, ou seja

$$\vec{V}'_f = [d_n \Omega \text{sen}(\Omega t_{n+1}) - e_n \Omega \cos(\Omega t_{n+1}) - \varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1})] \hat{j}. \quad (3.9)$$

Imediatamente após a colisão temos que a velocidade da partícula é dada pela equação (3.8). Utilizando o V' obtido na equação (3.9) e, considerando que a colisão não altera a velocidade da parede móvel, temos que a velocidade da partícula após a colisão é dada por $\vec{V}_{n+1} = \vec{V}'_f - \varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \hat{j}$, ou seja,

$$V_{n+1} = d_n \Omega \text{sen}(\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0)) - e_n \Omega \cos(\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0)) - 2\varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1}). \quad (3.10)$$

Definimos ρ_n e δ_n tais que $d_n = \rho_n \cos(\delta_n)$ e $e_n = \rho_n \text{sen}(\delta_n)$. Dessa forma, escrevemos o mapa bidimensional do modelo *bouncer* em campo não homogêneo como

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta t_{n+1}, \\ V_{n+1} &= \rho_n \Omega \text{sen}(\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0) - \delta_n) - 2\varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que Δt_{n+1} é obtido pela equação (3.7) e que ρ_n e δ_n são dados, respectivamente, por

$$\rho_n = \sqrt{d_n^2 + e_n^2}, \quad (3.12)$$

$$\delta_n = \arctan(e_n/d_n). \quad (3.13)$$

3.2. O MAPA

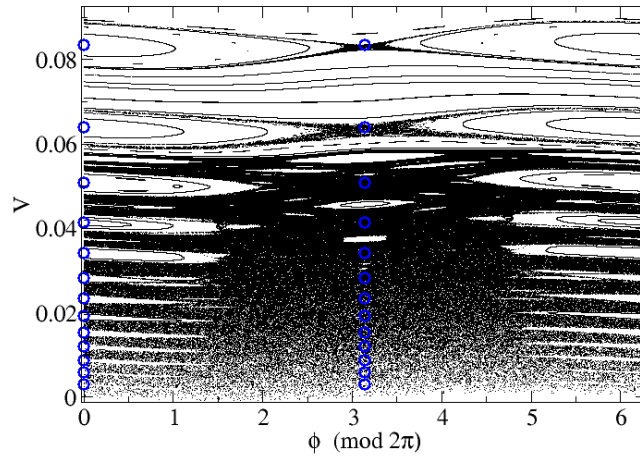


Figura 3.3: O espaço de fase do *bouncer* com campo não homogêneo para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$.

A figura 3.3 ilustra o espaço de fase do modelo com $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$. O espaço de fase foi construído a partir da iteração do mapa (3.11) utilizando diversas condições iniciais no espaço $\phi \times V$ com $\phi \in (0, \pi]$ e $V_0 \in (0,01; 0,09]$.

Duas regiões podem ser destacadas no espaço de fase. Para velocidades pequenas nota-se uma região de movimento caótico chamada mar de caos, dentro da qual existem diversas ilhas periódicas também chamadas de ilhas *Kolmogorov-Arnold-Moser* (KAM). Essa região de caos é delimitada por uma curva invariante de mais baixa energia. Essa curva separa o mar de caos da região de energias maiores, impedindo que a partícula apresente aceleração de Fermi [22]. O interior das ilhas KAM é uma região proibida para uma órbita pertencente ao mar de caos, ou seja, uma órbita que está vinculada ao interior de alguma dessas ilhas jamais sairá dela. De forma análoga, nenhuma órbita do mar de caos pode adentrar uma dessas ilhas. Acima da primeira curva invariante existem outras regiões de movimento regular e caótico. Para valores de V suficientemente grandes, notamos apenas regiões de movimento regular no espaço de fases. Isso faz sentido fisicamente, uma vez que a troca de momento entre a parede e a partícula não altera significativamente o módulo da velocidade da partícula, o que resulta nas curvas invariantes **spanning**. A presença e o tamanho das regiões caóticas dependem dos valores

dos parâmetros.

As figuras 3.4 e 3.5 mostram os espaços de fases para diferentes valores de Ω e com $\varepsilon = 10^{-3}$. Na figura 3.4, Ω é muito maior que ε . Para tais valores observamos que conforme Ω diminui, as regiões caóticas começam a aparecer. Dessa forma, as curvas invariantes começam a desaparecer e regiões de caos que eram localizadas eventualmente se juntam formando o mar de caos. Existe um valor limite de Ω abaixo do qual o espaço de fases fica praticamente inalterado, como podemos observar na figura 3.5. O mesmo resultado foi observado com diferentes valores de ε .

Caso Ω seja muito pequeno, temos que a frequência da parede é muito maior que ω_f . Sendo assim, o intervalo entre duas colisões será longo e a parede oscilará diversas vezes até que a partícula retorne até ela. Dessa forma perdemos a correlação entre o movimento da parede e o da partícula, o que resulta em trajetórias caóticas.

3.3 O modelo simplificado

Na última seção mostramos que o tempo entre as colisões é obtido resolvendo numericamente uma equação transcendental. No entanto, existe uma simplificação do modelo na qual desprezamos o deslocamento da parede, ou seja, consideramos que a posição da parede móvel é $Y_w = 1$. Dessa forma reescrevemos a equação (3.7)

$$d_n \cos(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) + e_n \sin(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) - 1 = 0. \quad (3.14)$$

Fazendo a transformação $d_n = \rho \cos(\delta)$ e $e_n = \rho \sin(\delta)$, a equação acima fica equivalente a

$$\rho_n \cos(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1}) - \delta_n) - 1 = 0. \quad (3.15)$$

Dessa forma, obtemos o intervalo entre as colisões no modelo simplificado isolando Δt_{n+1} na equação acima:

$$\Delta t_{n+1} = \frac{1}{\Omega} \left[\delta_n - \Omega t_n + \arccos \left(\frac{1}{\rho_n} \right) \right]. \quad (3.16)$$

Nesta simplificação, considera-se que a transferência de momento entre a parede e a partícula ocorre conforme descrito no modelo completo. A figura 3.6 mostra o espaço de fases do modelo simplificado para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$.

3.3. O MODELO SIMPLIFICADO

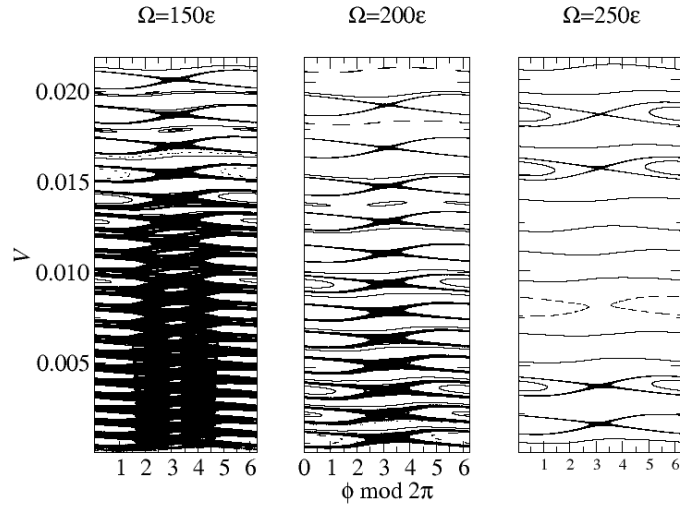


Figura 3.4: A figura mostra três espaços de fases para valores diferentes de Ω e com $\epsilon = 10^{-3}$. Elevar o valor Ω resulta no aumento da correlação entre a posição da parede na colisão n e a colisão $n + 1$, o que leva ao surgimento de regiões de movimento regular no espaço de fases.

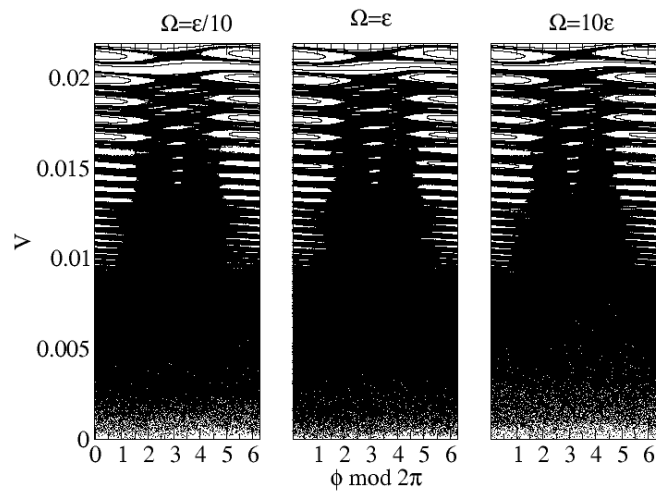


Figura 3.5: A figura ilustra que existe um valor de Ω abaixo do qual o espaço de fase fica praticamente inalterado.

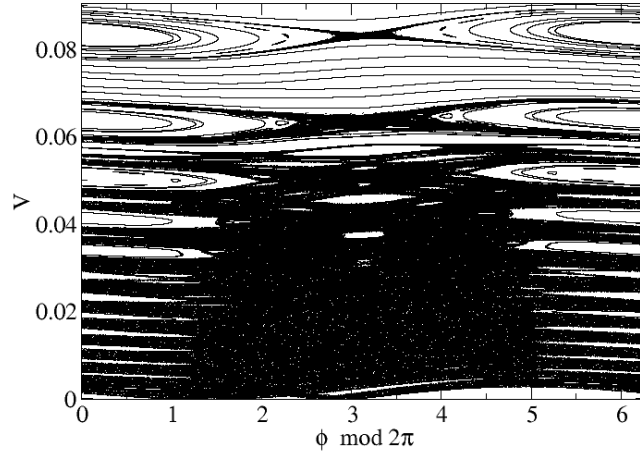


Figura 3.6: Espaço de fases do modelo simplificado para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$.

A versão simplificada é útil pois além de diminuir o gasto computacional, ela permite a obtenção de resultados analíticos importantes, aplicáveis também à versão completa. Devemos ressaltar, no entanto, que o modelo simplificado para este sistema apresenta limitações nas regiões de baixa energia e, por isso, seu uso foi limitado. Observamos que trajetórias inicialmente caóticas pertencentes ao mar de caos entravam em ilhas periódicas, o que deveria ser impossível.

3.4 Estabilidade dos pontos fixos

Como foi visto, os pontos fixos ocorrem quando as seguintes relações são satisfeitas

$$V_{n+1} = V_n = V^*, \quad (3.17)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n = \phi^* + 2\pi m. \quad (3.18)$$

Sendo (ϕ^*, V^*) as coordenadas do ponto fixo. Para obter a posição dos pontos fixos neste sistema é conveniente utilizar o modelo simplificado. Considerando que $\Delta t_{n+1} + t_n = t_{n+1}$ reescrevemos a equação (3.15) como

$$\rho_n \cos(\Omega t_{n+1} - \delta_n) - 1 = 0 \quad (3.19)$$

3.4. ESTABILIDADE DOS PONTOS FIXOS

Nas coordenadas do ponto fixo temos que $\delta_n = \delta^* = \arctan(V^*/\Omega)$, $\rho_n = \rho^* = \sqrt{\Omega^2 + V^{*2}}/\Omega$. Além disso, reescrevemos t_{n+1} como $\phi_{n+1} - \phi_0$ que nas coordenadas do ponto fixo é equivalente à $2\pi m$, sendo m um inteiro. Reescrevemos então a equação acima como

$$\rho^* \cos(2\pi m\Omega - \delta^*) - 1 = 0, \quad (3.20)$$

lembrando que ρ^* e δ^* são funções de V^* . Sendo assim, encontramos as coordenadas V^* dos pontos fixos resolvendo numericamente a equação (3.20). De maneira análoga, as coordenadas ϕ^* dos pontos fixos foram encontradas substituindo os valores de V^* na equação de V_{n+1} do mapa.

É possível encontrar as coordenadas ϕ^* dos pontos fixos analiticamente. Para isso, isolamos ρ^* na equação (3.20) obtendo

$$\cos(2\pi m\Omega - \delta^*) = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + V^{*2}}}. \quad (3.21)$$

Fazendo uso da identidade trigonométrica $\cos^2(2\pi m\Omega - \delta^*) + \sin^2(2\pi m\Omega - \delta^*) = 1$ temos que

$$\sin(2\pi m\Omega - \delta^*) = \frac{V^*}{\sqrt{\Omega^2 + V^{*2}}}. \quad (3.22)$$

Substituindo a equação acima na equação de V_{n+1} da equação (3.11) avaliada nas coordenadas do ponto fixo (ϕ^*, V^*) , obtemos

$$V^* = V^* - 2\varepsilon \sin(\phi^*). \quad (3.23)$$

Para cada valor de V^* temos dois pontos fixos associados aos dois valores possíveis de ϕ^* , um em $\phi = 0$ e outro em $\phi = \pi$. Diretamente desta equação vemos que $\sin(\phi^*) = 0$. Como o mapa está definido com ϕ no intervalo $[0, 2\pi)$ temos que $\phi^* = 0$ ou $\phi^* = \pi$.

Para determinar a estabilidade dos pontos fixos devemos obter os autovalores da matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

No caso do modelo simplificado os elementos da matriz J são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{(V_n \operatorname{sen}[\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0) - \delta_n] + \Omega \cos[\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0) - \delta_n])}{\sqrt{\Omega^2 + V_n^2}} \\ &\quad - 2\varepsilon \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \cos(\phi_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\varepsilon \cos(\phi_{n+1}), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{2}{\Omega^2 + V_n^2}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1. \quad (3.28)$$

Como foi discutido na introdução, os autovalores são obtidos resolvendo a equação

$$\det(J - \Lambda I) = 0, \quad (3.29)$$

em que I é a matriz identidade 2×2 . Os autovalores obtidos são

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[1 + l - k \pm \sqrt{k^2 + l^2 - 2kl - 2l - 2k + 1} \right], \quad (3.30)$$

onde $k = \frac{4\varepsilon}{\Omega} \cos(\phi^*)$ e $l = \cos(2\pi m\Omega - \delta^*)$. Dessa forma, substituindo as coordenadas dos pontos fixos (ϕ^*, V^*) na equação (3.30) obtemos os autovalores para um determinado ponto fixo. Todos aqueles com $\phi^* = \pi$ observados são pontos de sela. Para certas combinações de valores de parâmetros é possível que o argumento da equação (3.30) seja negativo para $\phi^* = 0$, o que resulta em autovalores complexos. Dessa forma, os pontos fixos com $\phi^* = 0$ podem ser pontos elípticos ou pontos de sela dependendo dos parâmetros e dos valores de m .

A figura 3.7 mostra o comportamento dos autovalores em função de m para o sistema com $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\Omega = 10^{-2}$. O símbolo Λ_π representa os autovalores associados aos pontos fixos em $\phi^* = \pi$ enquanto o símbolo Λ_0 representa aqueles associados aos pontos fixos em $\phi^* = 0$. A notação $\operatorname{Im}(\Lambda_0)$ indica a parte imaginária dos autovalores associados aos pontos fixos em $\phi^* = 0$ enquanto $\operatorname{Re}(\Lambda_0)$ indica a parte real deste. Para cada ponto fixo em $\phi^* = \pi$ existem dois autovalores associados, um deles com valor absoluto maior que 1 e outro menor que um, o que caracteriza um ponto de sela. Existem também pontos fixos cujos autovalores são complexos, como foi visto na introdução,

3.4. ESTABILIDADE DOS PONTOS FIXOS

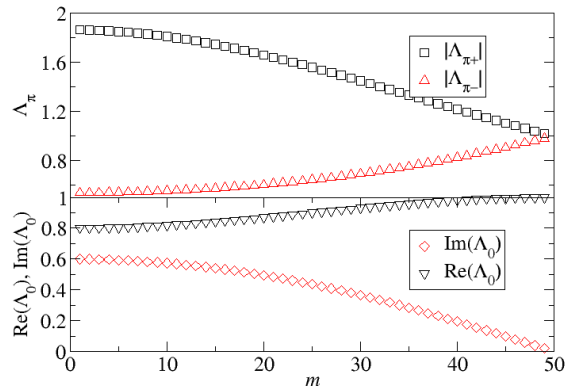


Figura 3.7: A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\Omega = 10^{-2}$. Λ_{π} e Λ_0 são, respectivamente, os autovalores dos pontos fixos em $\phi^* = \pi$ e $\phi^* = 0$ e m um número inteiro que corresponde ao número de oscilações que a parede móvel completou entre colisões.

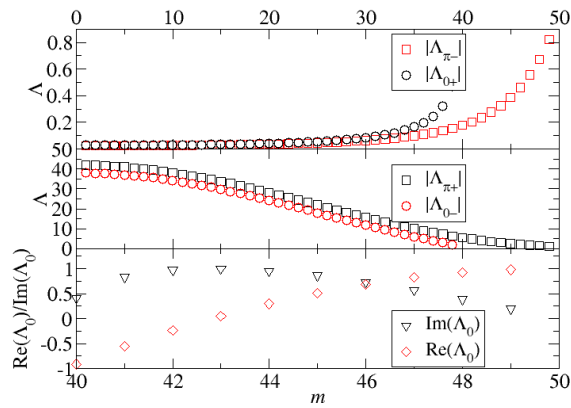


Figura 3.8: A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 10^{-2}$.

esses pontos fixos são caracterizados como elípticos. O gráfico mostra o comportamento dos autovalores conforme m varia.

O valor máximo de m foi determinado usando a equação de V_{n+1} do mapa. Isolando-se ϕ_{n+1} obtemos, nas coordenadas do ponto fixo,

$$\phi^* = \arcsen \left(\frac{\rho^* \Omega \sen(2\pi m \Omega - \delta^*) - V^*}{2\varepsilon} \right). \quad (3.31)$$

Portanto, para certos valores de m o argumento do arcosseno fica maior que 1 e ϕ^* não pode ser determinado, o que indica que não existe ponto fixo para esses valores de m .

Para valores diferentes dos parâmetros é possível que os pontos fixos com $\phi^* = 0$ também sejam pontos de sela para regiões com energia mais baixa. A figura 3.8 ilustra um desses casos.

O primeiro gráfico da figura 3.8 mostra o comportamento de $|\Lambda_{\pi-}|$ e $|\Lambda_{0+}|$. Como os valores absolutos dos autovalores são menores que um temos que estes estão associados às variedades estáveis dos pontos fixos. O segundo gráfico mostra os autovalores Λ_{0-} , $\Lambda_{\pi+}$. Como os autovalores são maiores que um eles estão associados às variedades instáveis dos pontos fixos. Dessa forma, para essa combinação de valores de parâmetros todos os pontos fixos são pontos de sela para $m < 40$. Conforme m aumenta, a parte imaginária dos autovalores dos pontos fixos em $\phi^* = 0$ deixa de ser zero, indicando que esses são agora pontos fixos elípticos. O terceiro gráfico mostra os valores das partes reais e imaginárias dos autovalores Λ_0 para $m \geq 40$.

3.5 Expoentes de Lyapunov

As órbitas no modelo *bouncer* que aqui estudamos podem ser classificadas como periódicas, quasi-periódicas ou caóticas. O comportamento periódico ocorre nos pontos fixos, a quase-periodicidade ocorre nas ilhas KAM e nas curvas *spanning*. As órbitas caóticas ocorrem no mar de caos e, para valores altos de V , entre as curvas invariantes. Nesta seção estudamos esse comportamento caótico quantitativamente.

Uma das assinaturas do caos é a divergência de trajetórias próximas [1], dada pelo expoente de Lyapunov. Essencialmente, esses expoentes são obtidos verificando se duas órbitas próximas divergem exponencialmente entre si com o decorrer do tempo. O número de expoentes de Lyapunov é dado pelo número de dimensões do mapa. Um mapa bidimensional, por exemplo, terá dois expoentes de Lyapunov. Caso pelo menos um desses expoentes seja

3.5. EXPOENTES DE LYAPUNOV

positivo, então a órbita é classificada como caótica e sensível às condições iniciais, enquanto as órbitas que divergem linearmente ou permanecem próximas entre si não são sensíveis às condições iniciais. Dessa forma, os expoentes de Lyapunov são um dos indicadores de caos mais utilizados na caracterização de sistemas dinâmicos [23, 24].

Para calcular os expoentes de Lyapunov para mapas iterados consideramos um mapeamento unidimensional $F(x)$ e uma condição inicial x_0 . A distância entre essa trajetória e outra próxima, com condição inicial $x_0 + \xi$, em que ξ é uma constante arbitrariamente pequena, é dada por

$$d_n = |F^{(n)}(x_0 + \xi) - F^{(n)}(x_0)|, \quad (3.32)$$

em que $F^{(n)}(x_0) = F(F(F(\dots F(x_0))))$. Se o comportamento é caótico, a distância crescerá exponencialmente com n , então escrevemos

$$\frac{d_n}{\xi} = \frac{|F^{(n)}(x_0 + \xi) - F^{(n)}(x_0)|}{\xi} = e^{\lambda n}. \quad (3.33)$$

Isolando λ obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|F^{(n)}(x_0 + \xi) - F^{(n)}(x_0)|}{\xi} \right). \quad (3.34)$$

Considerando o caso em que $\xi \rightarrow 0$ temos que o argumento do algoritmo no lado direito da equação é justamente a definição de derivada de F^n em relação a x , ou seja

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{(F^{(n)}(x_0 + \xi) - F^{(n)}(x_0))}{\xi} \right| = |F'^{(n)}(x_0)|, \quad (3.35)$$

em que, pela regra da cadeia, $F'^{(n)}(x_0)$ é dado por

$$F'^{(n)}(x_0) = F'(x_0)F'(x_1)F'(x_2) \dots F'(x_n). \quad (3.36)$$

Dessa forma, reescrevemos a equação (3.34) como

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(x_0)|. \quad (3.37)$$

Para o caso em que $n \rightarrow \infty$ temos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(x_i)| \quad (3.38)$$

CAPÍTULO 3. O MODELO BOUNCER EM CAMPO NÃO HOMOGENEO

Como o nosso modelo é descrito por um mapeamento bidimensional, pode-se generalizar os expoentes de Lyapunov a partir da expressão

$$\lambda_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\Lambda_j^i|, \quad j = 1, 2 \quad (3.39)$$

em que Λ_j^i são os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i)$ [25]. Sendo J_i a matriz jacobiana do mapeamento avaliada no ponto (V_i, ϕ_i) da órbita. Para o modelo completo deste sistema, os elementos da matriz jacobiana, são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \rho_n \Omega \cos(\Omega t_{n+1} - \delta_n) \left(\Omega \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} - \frac{Y_n}{\Omega \rho_n^2} \right) \\ &\quad + \frac{V_n}{\Omega \rho_n} \sin(\Omega t_{n+1} - \delta_n) - 2 \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \varepsilon \cos(\phi_{n+1}), \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \rho_n \Omega \cos(\Omega t_{n+1} - \delta_n) \left(\Omega \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - \Omega - \frac{\varepsilon V_n}{\Omega \rho_n^2} \sin(\phi_n) \right) \\ &\quad - \frac{\varepsilon Y_n}{\rho_n} \sin(\phi_n) \Omega \sin(\Omega t_{n+1} - \delta_n) - 2 \varepsilon \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \cos(\phi_{n+1}), \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\sin(\Omega \Delta t)}{\Omega (\Omega Y_n \sin(\Omega \Delta t_{n+1}) - V_n \cos(\Omega \Delta t_{n+1}) - \varepsilon \sin(\phi_{n+1}))}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \frac{V_n \cos(\Omega \Delta t_{n+1}) - \Omega Y_n \sin(\Omega \Delta t_{n+1}) + \varepsilon \sin(\phi_n) \cos(\Omega \Delta t_{n+1})}{V_n \cos(\Omega \Delta t_{n+1}) - \Omega Y_n \sin(\Omega \Delta t_{n+1}) + \varepsilon \sin(\phi_{n+1})}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Um método para a obtenção desses autovalores foi proposto por Eckmann et al. [23, 26] e consiste em escrever a matriz jacobiana J como um produto de uma matriz ortogonal Θ por uma matriz triangular T , ou seja, $J = \Theta T$. Dessa maneira, escrevemos a matriz M como $M = J_n J_{n-1} \dots J_2 \Theta_1 T_1$. Definindo $\tilde{J}_n = J_n \Theta_{n-1}$ é possível escrever a matriz M em função somente das matrizes triangulares T_i cujos autovalores são T_{11}^i e T_{22}^i . Desse modo, reescrevemos a equação (3.39) como

$$\lambda_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^i|, \quad j = 1, 2. \quad (3.41)$$

A matriz triangular é dada por

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

3.5. EXPOENTES DE LYAPUNOV

Considerando que $T = \Theta_1^{-1} J_1$ podemos calcular os elementos da diagonal T_{12} e T_{22} . Escolhendo a matriz ortogonal como

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

os elementos da diagonal da matriz T são

$$T_{11} = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}, \quad (3.44)$$

$$T_{22} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}. \quad (3.45)$$

Com esses resultados escrevemos os elementos de Θ em termos dos coeficientes de J :

$$\text{sen}(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}. \quad (3.46)$$

Com esses valores calculamos numericamente os expoentes de Lyapunov as órbitas pertencentes ao mar de caos do modelo *bouncer* não homogêneo. O algoritmo funciona da seguinte maneira. Para uma colisão n obtemos (ϕ_n, V_n) e calculamos a jacobiana. Fazemos então o cálculo de $\tilde{J}_n = J_n \Theta_{n-1}$ sendo que os elementos da matriz ortogonal são dados pela equação (3.46). Com os elementos da matriz \tilde{J} calculamos T_{11} e T_{22} que serão usados para determinar os expoentes de Lyapunov através da equação (3.41). Dependendo dos valores dos elementos da diagonal de T é possível que mudemos a matriz ortogonal. Repetimos esses procedimentos a cada colisão.

A figura 3.9 mostra o comportamento da média dos expoentes de Lyapunov para diversos valores de ε e $\Omega = 0,01$. As curvas foram obtidas fazendo a média de 10 trajetórias com condições iniciais distintas na região abaixo da primeira curva invariante. Utilizamos o modelo completo e cada trajetória foi iterada 10^5 vezes e esse procedimento foi repetido para 21 valores de parâmetro ε dentro do intervalo $[10^{-4}, 8 \times 10^{-3}]$. Os círculos representam os expoentes de Lyapunov positivos λ_+ , enquanto os losangos representam os expoentes negativos λ_- . A linha entre as curvas mostra a soma dos dois expoentes de Lyapunov. Nota-se que ambos os expoentes são iguais em módulo porém possuem sinais diferentes, o que é característico de sistemas hamiltonianos. Como um dos expoentes é positivo temos que as órbitas na região abaixo da primeira curva invariante são caóticas.

CAPÍTULO 3. O MODELO BOUNCER EM CAMPO NÃO HOMOGÊNEO

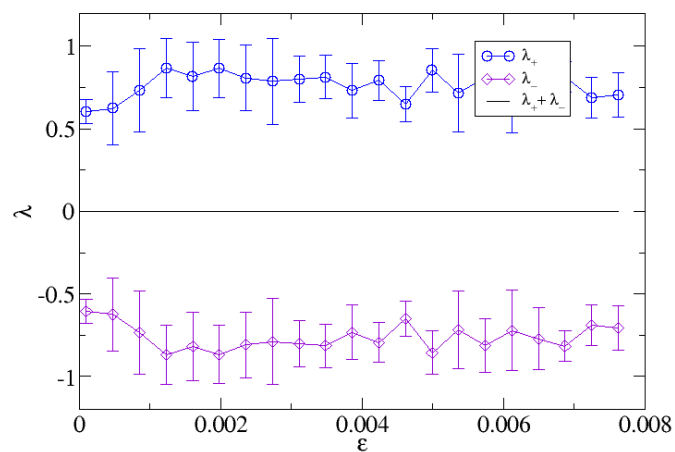


Figura 3.9: A figura mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov em função de ϵ .

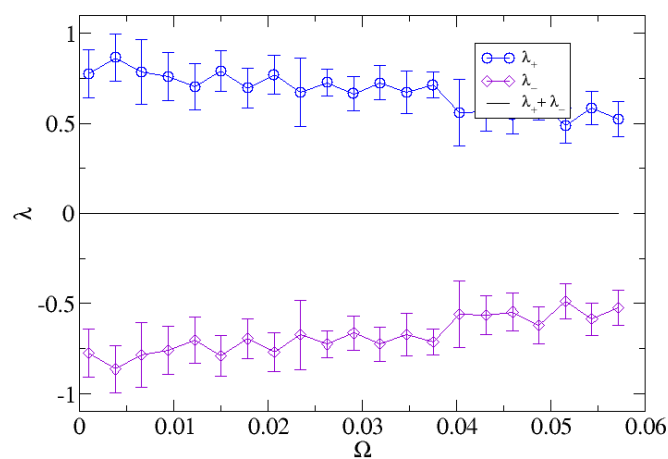


Figura 3.10: A figura mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov em função de Ω .

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

A figura 3.10 mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov para valores diferentes de Ω no intervalo $[10^{-3}, 6 \times 10^{-2}]$ com $\varepsilon = 0,008$. Como um dos expoentes é positivo, podemos inferir que as trajetórias abaixo da primeira curva invariante são de fato caóticas. Em sistemas com dissipação o somatório dos expoentes de Lyapunov será sempre negativo, o que indica que o mapa não preserva área.

Ao variarmos o parâmetro ε vemos que não há um impacto muito significativo nos expoentes de Lyapunov no intervalo estudado. Isso pode ser explicado pelas figuras 3.4, como os valores de ε utilizados estão aproximadamente no intervalo entre $\Omega/10$ e Ω o espaço de fase não se altera drasticamente conforme variamos os parâmetros, o que resulta no resultado encontrado. Na figura 3.10 os expoentes de Lyapunov decrescem em módulo conforme aumentamos o valor de Ω . Isso faz sentido, pois conforme mostramos nas seções anteriores, ao aumentarmos o valor de Ω regiões caóticas diminuem e regiões de movimento regular começam surgir (como mostra a figura 3.4) o que resultaria em expoentes de Lyapunov nulos. A seguir apresentamos os resultados obtidos no estudo das propriedades de escala da região caótica abaixo da primeira curva invariante.

3.6 Análise de escala

De forma similar ao modelo *bouncer* original e ao Fermi-Ulam, o modelo estudado nesse trabalho pode apresentar órbitas caóticas se $\varepsilon \neq 0$. Caso contrário, o movimento da partícula será trivial e só haverão órbitas regulares no espaço de fase. As propriedades de escala aqui estudadas estão associadas a transição do regime integrável para o não integrável que se dá no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$.

As propriedades de escala do modelo *bouncer* foram estudadas utilizando quantidades médias calculadas como funções do número de iterações. Devemos mencionar que só encontramos a descrição de escala para o modelo completo e das regiões de caos abaixo da primeira curva invariante. Como pode ser observado na figura 3.4, a variação do Ω não tem impacto no espaço de fases caso o valor desse parâmetro seja pequeno o suficiente. Tomando esse cuidado, eliminamos Ω como variável de escala. Além disso, nesse limite, não há curvas *spanning* na região de mais baixa energia do espaço de fases o que nos permite determinar como as grandezas de interesse desenvolvem a partir de uma configuração inicial de baixa energia.

Feitas essas considerações, investigamos a evolução da velocidade média

em M amostras. Cada uma delas é caracterizada pelo mesmo valor de velocidade inicial V_0 e valores diferentes de ϕ_0 . Para valores de velocidade inicial suficientemente pequenos não existem regiões primárias de movimento estável. Neste caso, a fase inicial é escolhida aleatoriamente no intervalo $[0, \pi)$. As grandezas estudadas nessa análise de escala são todas derivadas a partir da velocidade da partícula. A energia é dada pelo quadrado da velocidade enquanto a rugosidade [27] é sua variância. Para obtê-las, portanto, devemos explicitar primeiro a velocidade média, que é dada por

$$V(n, \varepsilon) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M V_{n,j}, \quad (3.47)$$

onde j se refere a uma amostra do ensemble. A energia média E é calculada de forma análoga a velocidade média:

$$E(n, \varepsilon) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M V_{n,j}^2. \quad (3.48)$$

Para o cálculo das quantidades médias utilizamos $M = 100$ amostras pertencentes ao mar de caos.

Para definir a rugosidade [27], devemos escrever a velocidade média de uma trajetória gerada de uma condição inicial, dada por

$$\bar{V}(n, \varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n V_i. \quad (3.49)$$

Finalmente, a rugosidade é definida, considerando um ensemble de M amostras, como

$$\sigma(n, \varepsilon) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{V}_j^2(n, \varepsilon, V_0) - \bar{V}_j^2(n, \varepsilon, V_0)}. \quad (3.50)$$

A figura 3.11 mostra, para cinco valores de ε , as curvas para rugosidade média σ para um conjunto de 100 amostras. O número de amostras escolhido foi suficiente para deixar o erro padrão menor que os símbolos utilizados nas figuras. Cada curva foi obtida iterando o mapa do modelo completo 10^7 vezes e a velocidade inicial utilizada foi $V_0 = \varepsilon/10$.

Como podemos observar, a rugosidade é caracterizada inicialmente por um regime de crescimento e, para valores altos de n , as curvas atingem um regime

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

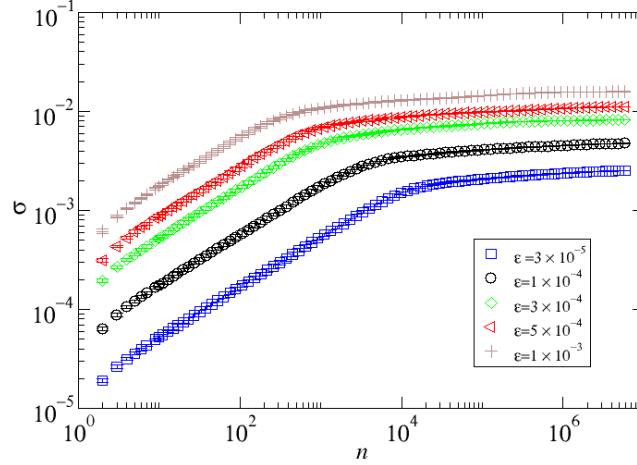


Figura 3.11: Curvas de rugosidade em função do número de colisões para o modelo completo.

saturação. Os valores de n que caracterizam a mudança de comportamento das quantidades médias são chamados de *crossover* e são representadas pelo símbolo n_x .

Quando $n \ll n_x$ a rugosidade está em um regime de crescimento. Observando as curvas da figura 3.11 inferimos que ela depende tanto do número de iterações quanto do valor do parâmetro ε . Desse modo, é razoável supor que

$$\sigma(n, \varepsilon) \propto n^{\alpha_1} \varepsilon^{\beta_1}, \quad (3.51)$$

em que α_1 e β_1 são expoentes críticos.

O valor do expoente de crescimento α_1 é obtido numericamente fazendo a regressão das curvas para valores de $n \ll n_x$. Este procedimento foi realizado para dez valores diferentes de ε no intervalo de 8×10^{-5} até 8×10^{-3} e obtemos, assim, o valor médio $\alpha_1 = 0,51 \pm 0,01$. Primeiramente, para obter o valor de β_1 , determinamos o valor médio de σ/n^{α_1} para cada valor de ε considerando todos os pontos pertencentes ao regime de crescimento de σ . O expoente crítico β_1 é então obtido através da regressão da curva $\sigma/n^{\alpha_1} \times \varepsilon$. O melhor ajuste dos dados fornece $\beta_1 = 0,987 \pm 0,009$ como mostra a figura 3.12.

Para valores de $n \gg n_x$ observamos que as curvas de rugosidade e energia atingem um regime de saturação. Nessa região os valores de σ e E não

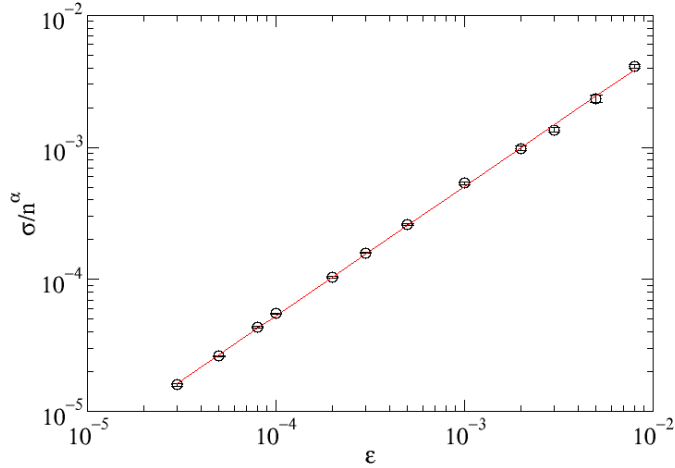


Figura 3.12: A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $\sigma/n_1^\alpha \times \varepsilon$.

dependem de número de colisões mas somente do parâmetro ε . Dessa forma, é válido supor que

$$\sigma_\infty \propto \varepsilon^{\gamma_1}, \quad (3.52)$$

em que γ_1 é o expoente de saturação. Além disso, como o número de colisões não influencia as curvas nesta região, temos que $\alpha_1 = 0$ para $n \gg n_x$.

O valor de γ_1 é obtido através de uma regressão dos valores da rugosidade saturada σ_{sat} em função de ε . No entanto, não conseguimos obter a saturação completa das curvas mesmo após 10^7 iterações. A curva escolhida para ajustar os pontos pertencentes ao regime de saturação é dada por

$$\sigma = z_1 + z_2/n^{z_3}, \quad (3.53)$$

em que z_1 dá o valor da rugosidade saturada. Sendo assim, utilizamos um ajuste não-linear para encontrar os valores de σ_{sat} para os dez valores de parâmetro ε . A figura 3.13 mostra o melhor ajuste da curva $\sigma_{sat} \times \varepsilon$ e o valor encontrado neste procedimento foi $\gamma_1 = 0,49 \pm 0,01$.

Feitas essas considerações, supomos que, próximo da transição do regime integrável para o não-integrável tanto a energia quanto a rugosidade obedecem a uma equação homogênea generalizada da forma

$$\sigma(n, \varepsilon, V_0) = l\sigma(l^{a_1}n, l^{b_1}\varepsilon, l^{c_1}V_0), \quad (3.54)$$

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

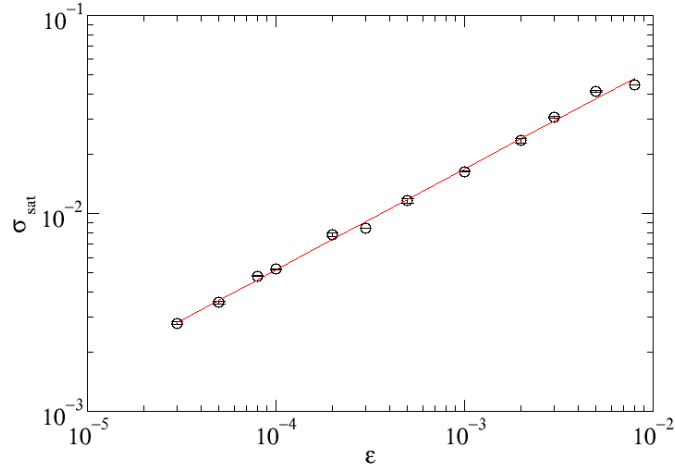


Figura 3.13: A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $\sigma_{\text{sat}} \times \epsilon$.

em que l é um fator de escala e a_1 , b_1 e c_1 são os expoentes que descrevem as propriedades de escala. Escolhendo o fator de escala $l = \epsilon^{-1/b_1}$ a equação acima é reescrita acima como

$$\sigma(n, \epsilon, V_0) = \epsilon^{-1/b_1} f(\epsilon^{-a_1/b_1} n, \epsilon^{-c_1/b_1} V_0), \quad (3.55)$$

em que $f = \sigma(\epsilon^{-a_1/b_1} n, 1, \epsilon^{-c_1/b_1} V_0)$. No limite em que $V_0 \approx 0$ temos que então

$$\sigma(n, \epsilon, V_0) = \epsilon^{-1/b_1} f(\epsilon^{-a_1/b_1} n,) \quad (3.56)$$

Para valores de $n \ll n_x$ a equação (3.56) depende de n e ϵ . Sendo assim, a forma mais geral dessa equação é dada por

$$\sigma(n, \epsilon, V_0) \propto \epsilon^{-1/b_1} (\epsilon^{-a_1/b_1} n)^x, \quad (3.57)$$

obtemos, comparando a equação acima com a equação (3.51), que $x = \alpha_1$, ou seja,

$$\epsilon^{-1/b_1} \sigma(\epsilon^{-a_1/b_1} n, 1, \epsilon^{-c_1/b_1} V_0) \propto \epsilon^{-1/b_1} (\epsilon^{-a_1/b_1} n)^{\alpha_1}. \quad (3.58)$$

Além disso, concluímos também que

$$\frac{1 + a_1 \alpha_1}{b_1} = -\beta_1. \quad (3.59)$$

Então conhecendo-se α_1 e β_2 podemos obter os expoentes de escala a_1 e b_1 .

Olhando agora para o regime de saturação, temos que a rugosidade não depende do número de colisões. Dessa maneira, a função $f = \sigma(\varepsilon^{-a_1/b_1}n, 1)$ é uma constante, ou seja,

$$\sigma_\infty \propto \varepsilon^{-1/b_1}. \quad (3.60)$$

Comparando as equações (3.52) e (3.60) obtemos a relação

$$\gamma_1 = -\frac{1}{b_1}. \quad (3.61)$$

Com o valor de γ_1 encontramos o valor do expoente de escala b_1 através da equação (3.61), o valor obtido foi $b_1 = -1,993 \pm 0,008$. Com esse expoente encontramos o valor de a_1 através da equação (3.59) e obtivemos $a_1 = 1,941 \pm 0,001$.

Também é possível encontrar o valor de um desses expoentes através do *crossover*. No regime de crescimento a rugosidade é descrita pela relação $\sigma = un^h$, em que u é uma constante e h é o coeficiente de crescimento, enquanto no regime de saturação ela é descrita por $\sigma = \sigma_{sat}$. O *crossover* ocorre na transição do regime de crescimento para o de saturação, ou seja, quando

$$un_x^h = \sigma_{sat}. \quad (3.62)$$

Dessa forma, temos que o *crossover* é dado por

$$n_x = \left(\frac{\sigma_{sat}}{u}\right)^{1/h}. \quad (3.63)$$

A figura 3.14 mostra os valores de n_x em função do parâmetro ε . Para a rugosidade reescalada temos que o *crossover* ocorre quando

$$n\varepsilon^{-a_1/b_1} \approx n_x\varepsilon^{-a_1/b_1} \approx 1. \quad (3.64)$$

Fazendo a regressão da curva vemos que n_x está relacionado com ε da forma

$$n_x \propto \varepsilon^\delta, \quad (3.65)$$

em que $\delta = -0,99 \pm 0,02$, o melhor ajuste encontrado está ilustrado na figura 3.14. Comparando as equações (3.64) e (3.65) encontramos que $a_1/b_1 \approx -0,99 \pm 0,02$, o que é coerente com os dados já obtidos.

A figura 3.15 mostra a rugosidade reescalada σ/l como função de nl^{a_1} . Com esse processo conseguimos o colapso das curvas de rugosidade em uma

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

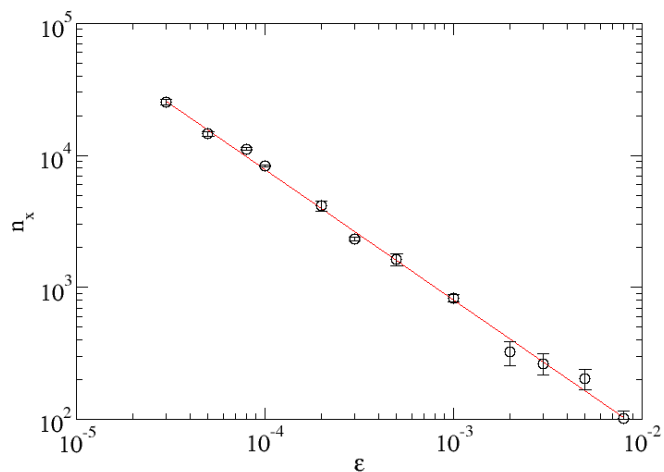


Figura 3.14: O gráfico de n_x em função de ϵ . A linha em vermelho representa o ajuste feito para determinar δ .

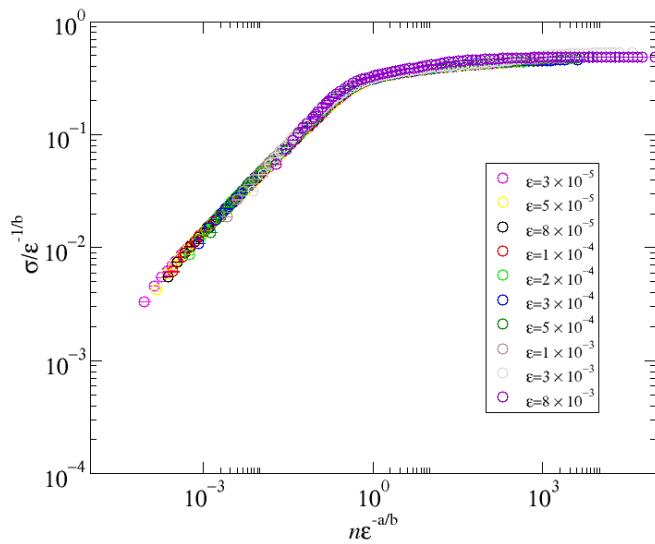


Figura 3.15: A figura mostra o colapso de dez curvas de rugosidade em uma curva universal.

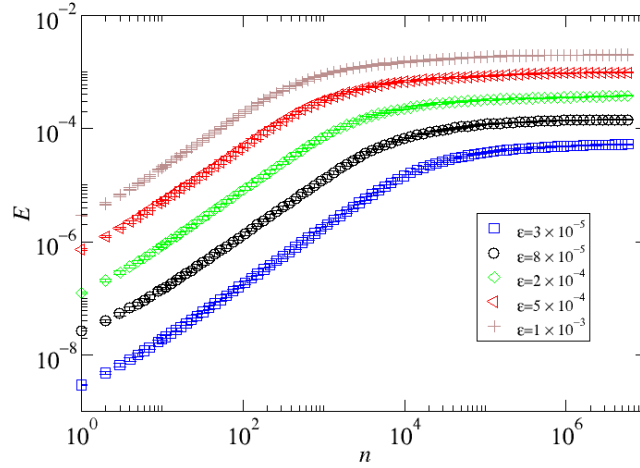


Figura 3.16: Curvas de energia em função do número de colisões para o modelo completo.

única curva universal, confirmando a suposição inicial de que a rugosidade pode ser descrita por relações de escala.

Ao fazer uma mudança de varável de n para $n\varepsilon^2$ os expoentes de escala a_1 e b_1 encontrados para o modelo *bouncer* em campo não homogêneo são aproximadamente os mesmos encontrados para o modelo Fermi-Ulam utilizando $n\varepsilon^2$ como a variável independente [28]. Isso é interessante pois sistemas diferentes que apresentam os mesmos expoentes de escala podem ser colocados na mesma classe de universalidade [29, 30].

A figura 3.16 mostra as curvas de energia para cinco valores diferentes do parâmetro ε . A energia se comporta de maneira muito similar a rugosidade. Para valores de n pequenos a energia média está em um regime de crescimento e, para valores muito grandes de n , ela atinge um estado de saturação.

Supomos que a energia obedece uma equação da forma

$$E(n, \varepsilon, V_0) = lE(l^{a_2}n, l^{b_2}\varepsilon, l^{c_2}). \quad (3.66)$$

Escolhendo $l = \varepsilon^{-1/b_2}$ a equação acima é reescrita como $E(n, \varepsilon, V_0) = \varepsilon^{1/b_2}E(\varepsilon^{-a_2/b_2}n, 1, \varepsilon^{-c_2/b_2})$. No limite em que $V_0 \approx 0$ temos

$$E(n, \varepsilon, V_0) = \varepsilon^{1/b_2}E(\varepsilon^{-a_2/b_2}n, 1) \quad (3.67)$$

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

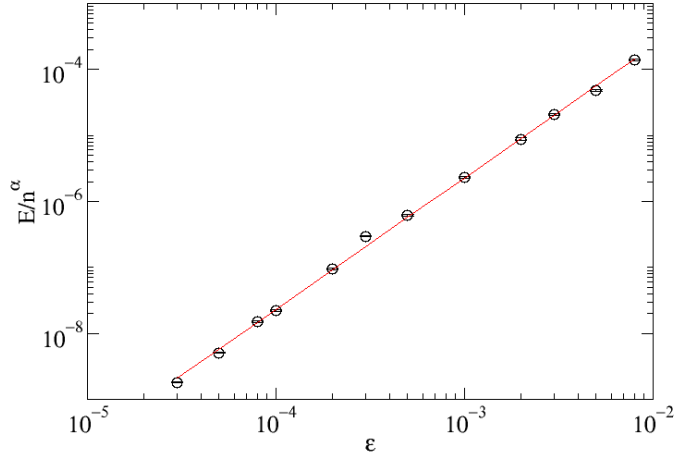


Figura 3.17: A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $E/n_1^\alpha \times \epsilon$.

Desse modo, a energia média do lado esquerdo desta equação é uma função que possui somente $\epsilon^{-a_2/b_2}n$ como variável de escala. Portanto, podemos reescrever a equação acima como

$$E(n, \epsilon, V_0) = \epsilon^{-1/b_2} f(\epsilon^{-a_2/b_2}n) \quad (3.68)$$

De maneira análoga à rugosidade, caracterizamos o *crossover*, ou seja, a mudança do regime de crescimento para o regime de saturação, com um valor $n = n_x$. Considerando $n \ll n_x$ temos

$$E \propto n^{\alpha_2} \epsilon^{\beta_2}, \quad (3.69)$$

em que α_2 é o expoente de crescimento e β_2 é o expoente que define a dependência da energia em ϵ . Comparando as equações (3.68) e (3.69) encontramos que os expoentes de escala a_2 e b_2 se relacionam com os expoentes críticos como $1 + a_2\alpha_2 = -b_2\beta_2$. O expoente de crescimento α_2 foi obtido da mesma maneira que α_1 para a rugosidade, e o valor encontrado foi $\alpha_2 = 0,97 \pm 0,02$. O expoente β_2 foi obtido com o mesmo procedimento utilizado na rugosidade. O melhor ajuste dos dados forneceu $\beta_2 = 1,99 \pm 0,02$, como mostra a figura 3.17.

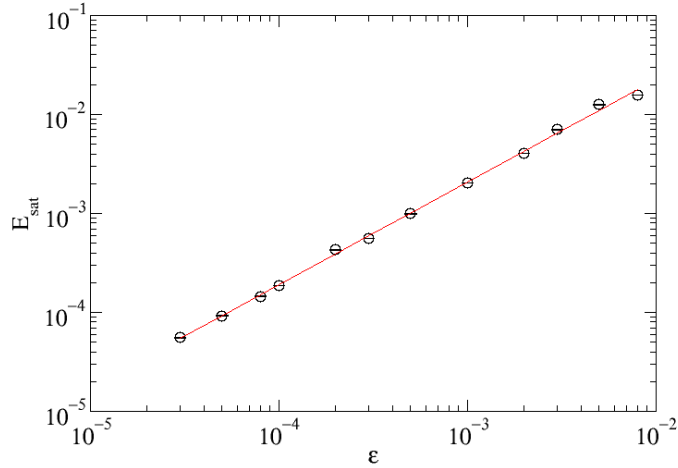


Figura 3.18: A figura ilustra o ajuste dos dados numéricos para a curva $E_{sat} \times \epsilon$.

No regime de saturação $n \gg n_x$, a energia média E depende apenas de ϵ , dessa forma a função $f(\epsilon^{-a_2/b_2 n})$ da equação (3.68) é uma constante. Sendo assim, neste limite escrevemos E como

$$E \propto \epsilon^{-1/b_2} \propto \epsilon^{\gamma_2}, \quad (3.70)$$

em que γ_2 é o expoente de saturação. O seu valor foi obtido através de uma regressão da curva dos valores da energia média saturada em função do parâmetro ϵ . O melhor ajuste encontrado está na figura 3.18, e o valor obtido foi $\gamma_2 = 1,03 \pm 0,01$. Pela equação (3.70) temos que $-1/b_2 = \gamma_2$, o que fornece $b_2 = -0,96 \pm 0,01$.

Com os valores de b_2 , α_2 e β_2 encontramos o valor do expoente de escala $a_2 = 0,97 \pm 0,04$. O *scaling* é demonstrado na figura 3.19, na qual dez curvas de energia com valores diferentes de ϵ colapsam em uma curva universal, confirmando a suposição inicial que na transição do regime integrável para o não integrável a energia pode ser descrita por relações de escala.

Vamos agora obter a descrição de escala da velocidade média. A figura 3.20 mostra os gráficos da velocidade V em função do número de colisões n para diferentes valores de parâmetro ϵ e de velocidades iniciais V_0 . Assim como a rugosidade, as curvas apresentam um regime de crescimento para valores

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

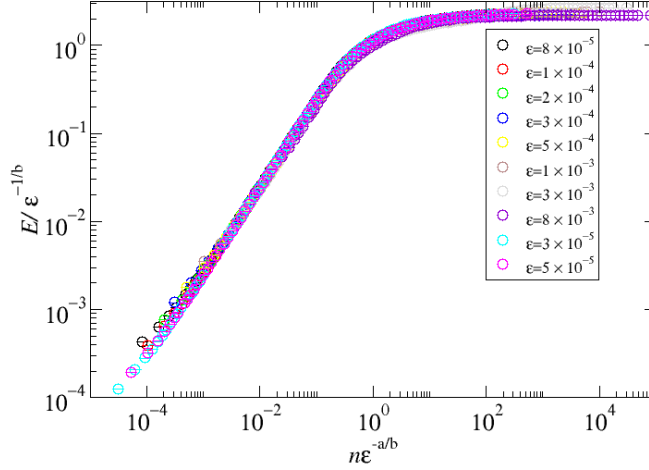


Figura 3.19: A figura mostra o colapso de dez curvas de energia em uma curva universal.

de $n \ll n_x$ e um regime de saturação para $n \gg n_x$. Como a velocidade é proporcional à rugosidade, temos os expoentes de escala relacionados a ε (b_1) e a n (a_1) são os mesmos para ambas as curvas. No entanto, aqui notamos que diferentes valores de velocidades iniciais ($V_0 \gg 0$) resultam em diferentes comportamentos para n pequeno. Dessa forma inferimos que a velocidade média V é uma função de n , ε e V_0 .

Para valores de parâmetro ε próximos de zero, observamos que a posição da primeira curva invariante varia quando mudamos o valor desse parâmetro. Conforme aumentamos ε a região do mar de caos aumenta assim como a primeira invariante que o limita. Dessa maneira, é válido supor que

$$V_{inv} \propto \varepsilon^\eta, \quad (3.71)$$

em que η é uma constante. Para determinar o valor dessa constante calculamos a média dos pontos pertencentes a primeira curva invariante V_{inv} para diferentes valores de ε . Devemos ressaltar que aproximamos a média das velocidades da primeira invariante utilizando pontos no mar de caos. Dividimos essa região caótica em 10^4 partes menores e somamos os pontos de mais alta energia de cada uma dessas divisões. Dessa forma, obtemos a velocidade média ao dividir resultado por 10^4 . Com esse procedimento obtivemos $\langle V_{inv} \rangle$ para 12 valores diferentes de ε . O expoente η é obtido através

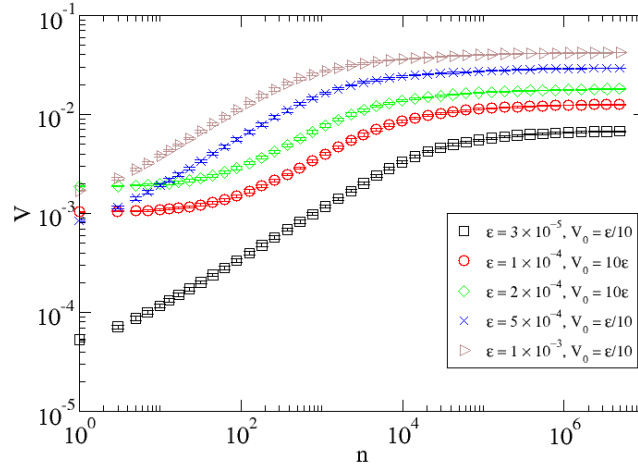


Figura 3.20: A figura mostra as curvas de velocidade em função do número de colisões para diferentes valores de parâmetro.

de uma regressão dos pontos da curva do gráfico $V_{inv} \times \varepsilon$. A figura 3.21 mostra o melhor ajuste obtido, o valor encontrado foi $\eta = 0,524 \pm 0,008$. Com este expoente podemos realizar a análise de escala da velocidade. Supomos que, na transição do regime integrável para o não-integrável ($\varepsilon \approx 0$), a velocidade seja descrita pela equação homogênea

$$V(n, \varepsilon, V_0) = lV(l^a n, l^b \varepsilon, l^c V_0), \quad (3.72)$$

em que l é um fator de escala e a e b , como a velocidade é proporcional à rugosidade, são os mesmos expoentes de escala encontrados para a rugosidade a_1 e b_1 . Para encontrar o expoente de escala c fazemos as substituições $\varepsilon' = l^b \varepsilon$ e $V_0' = l^c V_0$. Da equação (3.71) temos que

$$\frac{V'}{\varepsilon'^{\eta}} = \frac{V}{\varepsilon^{\eta}} = \text{constante}. \quad (3.73)$$

Desse modo, temos

$$\frac{l^c}{l^{b\eta}} = 1, \quad (3.74)$$

o que resulta em $c = b\eta = -1,04 \pm 0,01$.

Com esse expoente fizemos as curvas de velocidade para diferentes valores de ε e V_0 , como mostra a figura 3.22. Os valores de ε e V_0 usados como

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

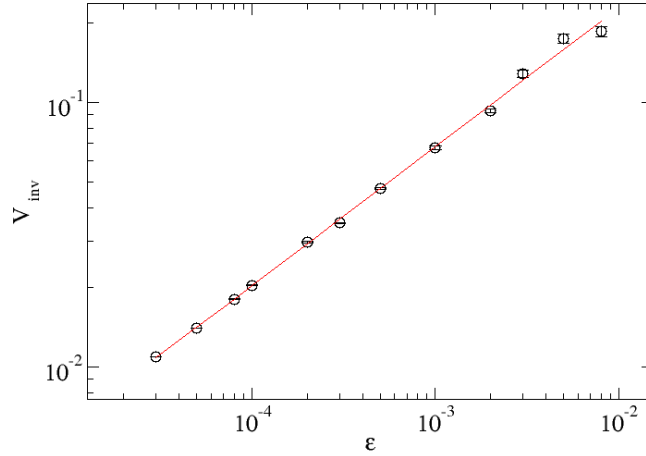


Figura 3.21: A figura mostra o gráfico de $V_{inv} \times \epsilon$ e o melhor ajuste obtido.

referência foram 10^3 e 10^2 , respectivamente. Esses valores foram escolhidos de forma que $V_0 \gg \epsilon$ e que a trajetória ainda pertença ao mar de caos.

Realizamos então a análise de escala da velocidade média de forma similar a rugosidade e energia. Supomos que a velocidade obedece uma equação da forma

$$V(\epsilon, n, V_0) = lV(\epsilon l^a, n l^b, V_0 l^c), \quad (3.75)$$

em que a , b e c são expoentes de escala. Escolhendo o fator de escala $l = \epsilon^{-1/b}$ temos que

$$V(\epsilon, n, V_0) = lV(\epsilon^{-a/b} n, 1, \epsilon^{-c/b} V_0). \quad (3.76)$$

Sendo que $\epsilon^{-c/b} V_0 = V_0 / \epsilon^\eta = \text{constante}$. Devido as transformações feitas podemos então considerar $V(\epsilon^{-a/b} n, 1, \epsilon^{-c/b} V_0)$ uma função apenas de n e ϵ .

Utilizando a equação (3.76) reescalamos a velocidade em função de $n l^a$, como mostra a figura 3.23. Com esses procedimentos obtivemos o colapso das curvas de velocidade com velocidade inicial $V_0 > 0$ em uma única curva universal, confirmando assim a suposição inicial que a velocidade pode ser descrita por relações de escala.

Dessa forma, obtivemos a descrição de escala que aparece na transição do regime não integrável para o regime integrável (de $\epsilon = 0$ para $\epsilon \neq 0$) do modelo completo do modelo *bouncer* em campo não homogêneo. A descrição de escala desta transição fornece o conjunto de expoentes para a rugosidade

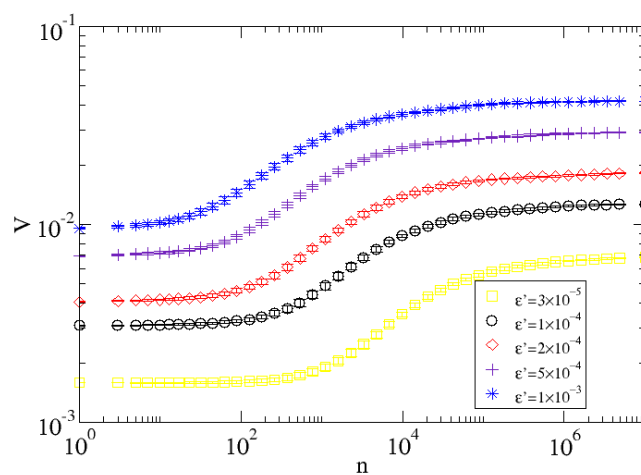


Figura 3.22: A figura mostra curvas de velocidade em função do número de iterações para valores diferentes de ϵ' .

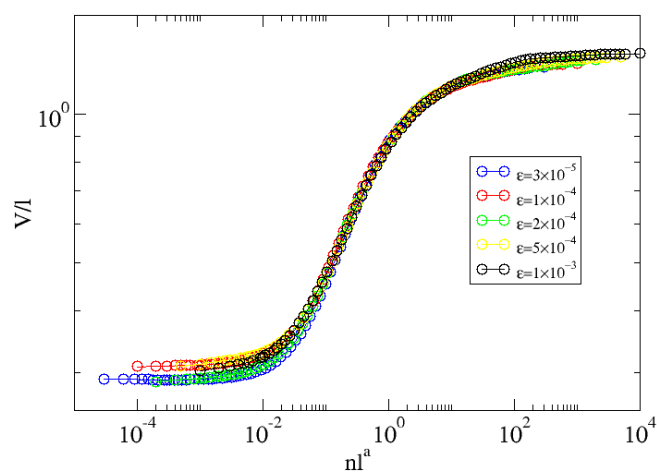


Figura 3.23: A figura mostra o colapso das curvas de velocidade para uma única curva universal.

3.6. ANÁLISE DE ESCALA

$a_1 = 1,941 \pm 0,001$ e $b_1 = -1,993 \pm 0,008$, para a energia $a_2 = 0,97 \pm 0,04$ e $b_2 = -0,96 \pm 0,01$. Como a rugosidade é proporcional à velocidade ambos são descritos pelos mesmo expoente a_1 e b_1 . O expoente c associado à velocidade inicial encontrado foi $c = -1,04 \pm 0,01$. Sendo assim, obtivemos o colapso das curvas de energia, velocidade e rugosidade em uma única curva universal para cada grandeza, confirmando assim a suposição inicial que elas podem ser descritas por relações de escala. Além disso, verificamos que o modelo aqui estudado pertence à classe de universalidade do modelo de Fermi-Ulam [28].

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de estudar as propriedades do modelo *bouncer* em campo não homogêneo. O sistema é composto basicamente de uma partícula carregada forçada a colidir com uma parede oscilante na presença de um campo elétrico.

Obtivemos a equação de movimento da partícula através de uma mudança de referencial e mostramos que o movimento da partícula é oscilatório. Fizemos o espaço de fase do sistema e observamos que para certas combinações de valores de parâmetro e condições iniciais o modelo pode apresentar órbitas caóticas. Além disso, o espaço de fase pode apresentar órbitas periódicas, que ocorre nos pontos fixos, e órbitas quase-periódicas, que ocorrem nas ilhas KAM e nas curvas *spanning*. Observamos também que, ao contrário do modelo *bouncer*, o modelo aqui estudado não apresenta aceleração de Fermi.

Fizemos duas versões para o modelo, o modelo completo e o simplificado. O primeiro é feito considerando o deslocamento da parede móvel enquanto no modelo simplificado esse deslocamento é desprezado. Deve-se ressaltar que em ambos os casos consideramos o movimento da parede no cálculo da troca de momento entre ela e a partícula. O modelo simplificado, apesar de ser útil por simplificar algumas equações e tornar cálculos de certas grandezas possíveis, teve seu uso limitado por apresentar erros nas regiões de baixa energia no espaço de fases. Observamos que alguns pontos pertencentes ao mar de caos entram em ilhas periódicas, o que devia ser impossível.

Estudamos a existência e estabilidade dos pontos fixos no mapa utilizando as equações provenientes do modelo simplificado. Encontramos as equações

que dão as coordenadas dos pontos fixos (V^*, ϕ^*) . A equação que nos dá V^* foi resolvida numericamente. Cada valor de V^* encontrado está associado a dois valores de ϕ^* , um em $\phi^* = 0$ e outro em $\phi^* = \pi$. Obtivemos também a estabilidade desses pontos fixos, observamos que aqueles em $\phi^* = \pi$ eram pontos de sela enquanto os pontos fixos em $\phi^* = 0$ podiam ser pontos de sela ou pontos fixos elípticos, dependendo dos valores de parâmetro utilizados.

Investigamos também o mar de caos através dos expoentes de Lyapunov. Mostramos que uma órbita nessa região apresenta um par de expoentes de Lyapunov, um deles positivo e outro negativo mas iguais em módulo, o que é característico de sistemas hamiltonianos. Verificamos que pelo menos um dos expoentes é maior que zero, mostrando que aquela órbita é de fato caótica.

Por fim obtivemos a descrição de escala na transição do regime integrável para o não integrável do modelo *bouncer* em campo não homogêneo. Mostramos que, para a região caótica de energia mais baixa, as curvas da velocidade, energia da partícula e rugosidade em função do número de colisões podem ser descritas por relações de escala. Além disso, verificamos que o modelo aqui proposto e o modelo de Fermi-Ulam pertencem a mesma classe de universalidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R.C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, 1994.
- [2] M.A. Lieberman A.J. Lichtenberg and R.H. Cohen. Fermi acceleration revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1(3):291 – 305, 1980.
- [3] E.D. Leonel and P.V.E. McClintock. A hybrid fermi–ulam-bouncer model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38:823, 01 2005.
- [4] A.J. Lichtenberg. *Regular and Chaotic Dynamics*, volume 38. Springer, 2nd edition, 1992.
- [5] Fermi. On the origin of the cosmic radiation. *Physical Review*, 75(8):1169–1174, 1949.
- [6] S.M. Ulam. *On Some Statistical Properties of Dynamical Systems*. University of California Press, Berkeley, Calif., 1961.
- [7] D.G. Ladeira and E.D. Leonel. Dynamics of a charged particle in a dissipative fermi-ulam model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20, 12 2013.
- [8] E.D. Leonel. Breaking down the fermi acceleration with inelastic collisions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(50):F1077–F1083, nov 2007.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [9] E.D. Leonel D.F. Tavares and R.N. Costa Filho. Non-uniform drag force on the fermi accelerator model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(22):5366 – 5374, 2012.
- [10] E.D. Leonel and P.V.E. McClintock. Effect of a frictional force on the fermi–ulam model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39:11399, 08 2006.
- [11] K. Gunther. The simplified fermi accelerator in classical and quantum mechanics. *Journal of Statistical Physics*, 77(3-4):867–879, 1994.
- [12] J.V. José and R. Cordery. Study of a quantum fermi-acceleration model. *Physical Review Letters*, 56(4):290–293, 1986.
- [13] D. Mahboub H. Rothard S. Aiello A. Anzalone S. Cavallaro A. Elanique E. Geraci M. Geraci F. Giustolisi A. Pagano G. Lanzaò, E. De Filippo and G. Politi. Fast electron production at intermediate energies: Evidence for fermi shuttle acceleration and for deviations from simple relativistic kinematics. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4518–4521, Nov 1999.
- [14] A. Veltri and C. Vincenzo. Radiative intermittent events during fermi’s stochastic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 92:143901, Abril 2004.
- [15] L.D. Pustyl’nikov. Transactions of the moscow mathematical society. *Providence*, 2:1, 1978.
- [16] B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263 – 379, 1979.
- [17] T. Kroetz C.P Dettmann I.L. Caldas A.L. Livorati, L.P. André and E.D. Leonel. Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for fermi acceleration. *Phys. Rev. E*, 86:036203, 08 2012.
- [18] S. Mário S. Francys, S. Lucas and E.D. Leonel. Can drag force suppress fermi acceleration in a bouncer model? *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, 09 2009.
- [19] E.D. Leonel and L. André. Describing fermi acceleration with a scaling approach: The bouncer model revisited. *Physica A*, 387:1155–1160, 02 2008.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [20] D.G. Ladeira and E.D. Leonel. Dynamical properties of a dissipative hybrid fermi–ulam-bouncer model. *Chaos*, 17, 2007.
- [21] R.A. Bizão D.F.M Oliveira and E.D. Leonel. Scaling properties of a hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009:Article ID 213857, 13 p.–Article ID 213857, 13 p., 2009.
- [22] R. Douady. Applications du théorème des tores invariants. *Thèse de 3ème Cycle*, 1892.
- [23] D. Ruelle J.P. Eckmann, S.O. Kamphorst and S. Ciliberto. Liapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A*, 34:4971–4979, Dec 1986.
- [24] C. Dellago and H.A. Posch. Lyapunov exponents of systems with elastic hard collisions. *Phys. Rev. E*, 52:2401–2406, Sep 1995.
- [25] J.K.L. da Silva E.D. Leonel and S.O. Kamphorst. On the dynamical properties of a fermi accelerator model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 331(3):435 – 447, 2004.
- [26] J.P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57:617–656, Jul 1985.
- [27] H. Eugene B. Albert, Stanley. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [28] J.K.L. da Silva E.D. Leonel, P.V.E. McClintock. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, 93(1), 2004.
- [29] H. Eugene. Stanley. *Introduction to phase transition and critical phenomena*. Oxford UP, 1987.
- [30] M. Shang-Keng. *Modern theory of critical phenomena*. W.A. Benjamin, 1977.