

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS

Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale

O efeito dos termos de superfície no decaimento raro do pión no
modelo de Nambu-Jona-Lasínio

São João del Rei - MG

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale

O efeito dos termos de superfície no decaimento raro do pión no modelo de Nambu-Jona-Lasínio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del Rei, em associação ampla com a Universidade Federal de Alfe-
nas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física de Partículas e Campos.

Orientador: Dr. André Luiz Mota

Coorientador: Dr. Edson Wander Dias

São João del Rei - MG

2020

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

d631e do Vale, Públio Rwany Batista Ribeiro.
O efeito dos termos de superfície no decaimento raro do pión no modelo de Nambu-Jona-Lasínio / Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale ; orientador André Luiz Mota; coorientador Edson Wander Dias. -- São João del-Rei, 2020.
156 p.

Dissertação (Mestrado - Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei, 2020.


1. Modelo de Nambu-Jona-Lasínio. 2. Bosonização. 3. Termos de Superfície. 4. Fator de Forma Eletromagnético. 5. Decaimento raro do pión. I. Mota, André Luiz, orient. II. Dias, Edson Wander, co-orient. III. Título.

São João del-Rei, 02 de março de 2020

A Dissertação “**O efeito dos termos de superfície no decaimento raro do pión no modelo de Nambu-Jona-Lasinio**” elaborada por **Públio Rwany Batista Ribeiro do Vale** e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

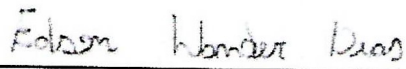
MESTRE EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. André Luiz Mota (UFSJ)

Orientador




Prof. Dr. Edson Wander Dias (UFSJ)

Coorientador



Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito (UFLA)



Prof. Dr. Erico Goulart de Oliveira Costa (UFSJ)

Aos meus pais Baltazar e Hilda meus primeiros professores e a minha cara metade Ana Carolina por todo o apoio e amor..

Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem a colaboração de inúmeras pessoas que contribuíram e ainda contribuíram na minha formação tanto acadêmica como humana. Infelizmente não há espaço para listar e agradecer a todos as pessoas neste trabalho, mas mesmo assim desde já deixo meu agradecimento. Deixo aqui meus sinceros agradecimentos.

- Ao Prof. Dr. André Luiz Mota por me orientar e ensinar, mesmo que às vezes, tenha sido tão difícil a conciliação com seu cargo de pró-reitor de pesquisa.
- Ao Prof. Dr. Edson Wander Dias, pelos ensinamentos e incentivos e também pelas memoráveis aulas e discussões em diversos assuntos e principalmente sobre Teoria Quântica de Campos, que contribuíram fortemente para minha formação como Físico.
- Aos Professores Dr. Erico Goulart de Oliveira Costa e Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito, por terem aceitado o convite para banca examinadora e disporem do seu tempo para analisar este trabalho.
- Aos professores do programa de Pós-Graduação em Física da UFSJ, especialmente ao Prof. Dr. Fernando Marroquim, pelos excelentes cursos oferecidos com muita dedicação.
- Aos professores da Graduação de Física que contribuíram para minha formação, e principalmente ao Prof. Dr. Wagner de Souza Machado por me incentivar a ser um pesquisador por meio da minha primeira iniciação científica.
- Aos professores Douglas Carvalho e Paulo Tarso por despertar à minha paixão pela Física.
- Aos colegas e grandes amigos, que conheci durante a graduação e mestrado: Wagno César, pelos estudos e pelas inúmeras discussões sobre vários tópicos de Física, Vítor Barra e Felipe Augusto, pelas boas risadas durante a graduação.
- Aos alunos de iniciação científica do grupo de Teoria Quântica de Campos (LATEC-DCNAT), pela boa convivência e pela participação no grupo de estudos formado por mim e o Wagno.
- Agradeço também aos meus familiares, em especial, o meu irmão Pablo do Vale, pelos ensinamentos, pelo entusiasmo, pelo incentivo e pelos intermináveis diálogos epistemológicos sobre Física, Epistemologia e Psicologia. A minha irmã que contribuiu para minha formação humana. Meus Pais Baltazar do Vale e Hilda do Vale, meus primeiros professores e fonte de inspiração.

- Não poderia deixar de agradecer a minha família de São João del Rei: Lucas e Vitor Davin, Guilherme Yoshi, Airton Junior, Glênia, Celina (minha irmã adotiva) e a Família Lombello (Sebastião, Maria do Carmo, Juliana, Larissa e Ana Carolina), por aceitar a conviver com essa pessoa estranha.
- Agradeço sobre tudo, a minha linda namorada, Ana Carolina Lombello, pelo carinho e amor. Obrigado por segurar as pontas em todos os momentos, me afagar nas aflições e compartilhar das conquistas e realizações. Sem você a minha jornada não seria possível.
- A minha Família do sul de Minas Gerais: meus avós José e Leonor Riberio do Vale, meu Padrinho Belchior, minha madrinha Andreia, meus tios(as) e primos(as), e meu amigo Jonas Cunha (primo de consideração).
- Não posso deixar de agradecer também à Universidade Federal de São João del Rei (que tem sido meu segundo lar por sete anos), o Programa de Pós-Graduação em Física (PPGF) e a CAPES pelo financiamento e amparo na edificação deste longo trabalho.
- Finalmente agradeço à Deus por ter criado esse universo maravilhoso em que habitamos, que tanto me fascina e me enche de indagações e estímulos para desvendar.

“Não devemos nos questionar porque algumas coisas nos acontecem e sim o que podemos fazer com o tempo que nos é dado”.

-Mithrandir, O Senhor dos Anéis.

Resumo

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria fundamental que modela as interações fortes. No regime de altas energias (pequenas distâncias), ela pode ser tratada por técnicas perturbativas, uma vez que a constante de acoplamento entre os quarks e os glúons é baixa, fenômeno este conhecido como liberdade assintótica. Porém, no regime de baixas energias (grandes distâncias), o acoplamento da QCD cresce e um tratamento perturbativo não deve ser empregado. Desta forma, é conveniente trabalhar com modelos efetivos que incorporem algumas características da QCD, como a simetria quiral, sendo um dos mais famosos o modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL). Apesar de reproduzir elementos importantes da QCD, o modelo NJL possui algumas limitações, como por exemplo o fato de não implementar o confinamento de quarks e também ser um modelo não renormalizável, sendo necessário utilizar algum esquema de regularização para trabalhar com as integrais divergentes. Usualmente, emprega-se um cut-off nas amplitudes de Feynman, mas alguns cuidados devem ser tomados em integrais divergentes onde o integrando apresenta índices de Lorentz, em razão do aparecimento dos chamados termos de superfície (TS). O principal objetivo deste trabalho é obter e utilizar o efeito dos TS no modelo NJL SU(2), buscando encontrar resultados mais precisos para os Fatores de Forma de uma versão rara do decaimento eletrofraco do pión, onde, juntamente com um lépton e seu neutrino, há a produção de um fóton. Os resultados são então comparados com dados empíricos.

Palavras-chaves: Modelo de Nambu-Jona-Lasínio, Bosonização, Termos de Superfície, Decaimento raro do pión.

Abstract

A quantum chromodynamics (QCD) is a fundamental theory that models as strong interactions. In the regime of high energies (short distances), it can be treated by disturbing techniques, since the coupling constant between quarks and gluons is low, the phenomenon is known as asymptotic freedom. However, no low-energy (long-distance) regimen, or QCD coupling increases and disturbing treatment should not be employed. In this way, it is convenient to work with effective models that incorporate some characteristics of the QCD, such as a chiral symmetrical, being one of the most famous or models of the Nambu-Jona-Lasínio (NJL) model. Despite presenting important elements of the QCD, the NJL model has some configurations, such as an example or the fact of not implementing or restricting quarks and also being a non-standard model, using some regularization program to work with divergent integrals. Currently, a cutoff point is used in the Feynman amplitudes, but some precautions must be taken in divergent integrals where either integrating the Lorentz indices, due to the exposure of the surface terms (TS). The main objective of this work is to obtain and use the effect of the TS in the NJL SU(2) model, seeking more precise results for the Form Factors of a rare version of the decay of the electron microweak decay, where, with a lepton and its neutrino, there is a photon production. The results are then compared with empirical data.

Key-words: Nambu-Jona-Lasínio model, Bosonization, Surface terms, Rare decay of the pyon.

SUMÁRIO

1	Introdução	15
2	O modelo de Nambu-Jona-Lasínio	21
2.1	Introdução	21
2.2	A Cromodinâmica Quântica	22
2.2.1	Liberdade Assintótica	23
2.2.2	Confinamento de quarks e Bósons de Goldstone	25
2.3	Teorias Efetivas da QCD	25
2.4	O modelo de Nambu-Jona-Lasínio	26
2.4.1	A lagrangiana do modelo de NJL e a simetria quiral	27
2.5	Equação de Gap	29
2.6	Modos mesônicos na versão do modelo	33
2.6.1	Bósons de Goldstone no limite quiral	36
2.6.2	Constante de decaimento e a relação de Goldberg-Treiman	37
3	A Versão bosonizada e a origem dos termos de superfície	40
3.1	Lagrangiana do modelo de NJL SU(2)	41
3.2	Bosonização do modelo de NJL	42
3.2.1	Integração sobre os campos fermiônicos	44
3.3	Expansão da Ação Efetiva	47
3.4	Obtenção da Equação de Gap	48
3.4.1	O condensado de quarks	50

3.5	Auto-energia do méson pi	54
3.6	Constante de decaimento fraco	68
4	O Fator de Forma Eletromagnético	74
4.1	Introdução ao conceito de Fator de Forma	74
4.2	Cálculo do Fator de Forma Eletromagnético	75
4.2.1	Termos de Superfície no Fator de Forma	83
4.2.2	Cálculo no limite quiral e pequenos momentos do fóton	84
5	O Decaimento raro do Píon	86
5.1	Os decaimentos fracos e eletro-fracos do píon	87
5.2	A lagrangiana do decaimento raro do píon	88
5.3	Sobre o diagrama e a Estrutura dos Vértices	89
5.4	Cálculo dos Traços presentes no decaimento raro do Píon	91
5.5	Fatores de Forma Axial e Vetorial	95
6	Expansão derivativa e roteamentos arbitrários	97
6.1	Auto-energia com roteamento arbitrário	98
6.2	Fator de Forma Eletromagnético com roteamento arbitrário	101
6.2.1	Cálculo do Termo de Superfície	107
7	Resultados Numéricos	109
7.1	Ajuste de parâmetros	109
7.2	Fatores de Forma Axial e Vetorial	110
7.3	Fator de Forma Eletromagnético	112
8	Conclusão	114
A	Convenções, Notações e demais utensílios	117
A.1	Métrica, Matrizes de Dirac, de Pauli e de Gell-Mann	117
A.2	Coordenadas hipersféricas	120
A.3	Grau Superficial de Divergências	121
A.4	Sobre os Termos de Superfície	121
A.5	Expansão Derivativa	123
B	Quebra e a Invariância de simetria	125
B.1	Quebra de simetria	125
B.2	Invariância Quiral	126

C	Interação eletro-frac	130
C.1	Interações fundamentais e modelo-padrão	130
C.2	Interação frac	132
C.3	Interação Eletro-Frac	136
C.4	Determinação da estrutura de Dirac	139
D	Cálculos pormenores do Fator de Forma eletromagnético	142
D.1	Obtenção da amplitude de probabilidade no espaço de momentos	142
D.2	Operação do traço	145
D.3	Operação do traço com roteamento arbitrário	146
E	Cálculos pormenores do Fator de Forma Axial e Vetorial	148
E.1	Operação dos Traços no espaço de Dirac	148

LISTA DE FIGURAS

2.1	Polarização do vácuo na QCD responsável pela blindagem.	24
2.2	Polarização do vácuo na QCD responsável pela anti-blindagem.	24
2.3	Representação de duas partículas com helicidades diferentes.	28
2.4	Espalhamento de quarks $(ud) \rightarrow (d'u')$	34
2.5	Progressão geométrica da interação efetiva.	35
3.1	Diagrama da Equação de Gap.	50
3.2	Integração do plano complexo com os pólos no eixo real.	53
3.3	Diagrama de autoenergia do méson pseudoescalar.	58
3.4	Diagrama do decaimento fraco do pión.	69
4.1	Diagrama do Fator de forma Eletromagnético.	76
5.1	Diagrama do decaimento radiativo.	89
5.2	Diagrama de permuta do decaimento radiativo.	89
5.3	Diagrama aproximado para o decaimento radiativo.	91
5.4	Diagrama de permuta aproximado para o decaimento radiativo.	91
6.1	Diagrama de auto-energia com roteamento arbitrário.	98
6.2	Diagrama do Fator de forma Eletromagnético com roteamento arbitrário.	101
7.1	Comparação dos dados experimentais com os resultados teóricos por meio da regularização via sharp cut-off com ou sem termos de superfície.	113
7.2	Comparação dos dados experimentais com os resultados teóricos por meio da regularização via sharp cut-off e da TD.	113

C.1	Acoplamento direto de quatro-partículas.	133
C.2	Perspectiva moderna da Teoria de Fermi.	134
C.3	Decaimento do pión carregado.	140

LISTA DE TABELAS

7.1	Valores dos parâmetros sem os termos de superfície.	111
7.2	Valores dos parâmetros com os termos de superfície.	111
7.3	Comparação entre resultados teóricos e experimental.	111
7.4	Comparação entre resultados teóricos e experimental do raio.	112
C.1	Valores dos coeficientes do vértice neutro no modelo GWS.	135

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

*“Cuidado com gente que não tem dúvida.
Gente que não tem dúvida não é capaz de
inovar, de reinventar, não é capaz de fazer
de outro modo. Gente que não tem dúvida
só é capaz de repetir”.*

-Mario Sergio Cortella.

A Cromodinâmica Quântica (QCD¹) é aceita pela comunidade acadêmica atualmente como a Teoria Padrão das interações fortes. Em processos de espalhamento envolvendo altos valores de momento, a QCD se mostrou muito bem precisa, uma vez que neste limite a constante de acoplamento quark-glúon torna-se pequena, permitindo o uso de técnicas perturbativas desenvolvidas para Eletrodinâmica Quântica (QED).

A QCD é uma teoria de campos quânticos renormalizável, onde as partículas de interação são os quarks (férmions de spin 1/2) e os glúons, os bósons são responsáveis pelas mediações das interações e possuem spin 1. Simplificadamente, os hádrons subdividem-se em dois grupos: os bárions e mésons. O primeiro grupo são constituídos por estados ligados de três quarks, enquanto o segundo grupo, são estados ligados de um par quark-antiquark. A interação ocorre por meio dos glúons, que podem interagir entre si². Os

¹Do inglês Quantum Chromodynamics.

²Na eletrodinâmica quântica, as partículas mediadoras das interações, os fótons, não interagem entre eles.

quarks são férmions, caracterizados por possuírem dois graus de liberdade, ou números quânticos: a cor e o sabor. O sabor³ distingue os vários tipos de quarks, que conhecemos atualmente, que são as seguintes opções:

1. up
2. down
3. stranged
4. charmed
5. bottom
6. top

De forma genial os físicos teóricos colocaram o último quark para que a teoria fundamental fosse completada, em outras palavras, para que a QCD fosse uma teoria de interação forte deveria existir este último quark. Posteriormente, houve experimentos que evidenciaram a existência de tal quark. Mas cabe uma observação, sempre é necessária uma resposta por partes dos físicos experimentais acerca da real descoberta.

O número quântico conhecido com “cor” foi introduzido na teoria de uma forma “*ad-hoc*”. Devido as dificuldades presentes na interpretação dos bárions, uma vez que estes, sendo férmions, violariam o *Princípio de Exclusão Pauli*. Por exemplo, o estado $J = 3/2$ da ressonância Δ^{++} teria que ser formado por três quarks com spin $1/2$. Os três quarks estariam ocupando o mesmo estado quântico, o que viola o *Princípio da Exclusão*, uma vez que a função de onda seria simétrica. A introdução do número quântico “cor” faz com que a função de onda possa ser simétrica nos espaços de isospin e de spin, desde que a função de onda no espaço de cor seja antissimétrica, ou seja, a função de onda globalmente tem que ser antissimétrica.

Ainda há propriedades sugeridas por observações experimentais e teóricas a respeito da QCD, como

1. Assume-se que a força forte atue somente sobre o número quântico de “cor”, pois não há evidencia por meio de experimento sobre qualquer dependência da força forte com o sabor.
2. A simetria de cor é assumida sendo exata. Contudo, a simetria de sabor é quebrada.

Se atribuir que esta é uma simetria de calibre, teríamos duas implicações:

³Em inglês *flavor*.

1. Liberdade Assintótica: as forças tornam-se menores em distâncias pequenas (regime de alta energia), de forma que os quarks podem se comportar como partículas quase livres no interior de prótons, nêutrons e mésons. Resultando, que a interação entre quarks por troca de glúons é consistente com a teoria.
2. Confinamento de Quarks: os quarks são praticamente livres dentro dos hádrons, e não poderiam abandonar estas estruturas. Está é uma propriedade desejável da QCD, pois quarks livre ainda não foram observados livre, sendo que há indícios de que tal fenômeno, de fato, não seria possível.

Anteriormente mencionamos que o cálculo perturbativo pode ser implementado no regime de altas energias, quando a constante de acoplamento entre os quarks torna-se muito pequeno, reproduzindo o fenômeno de liberdade assintótica. Para processos que envolvem longas distâncias, o que vale dizer pequenos momentos, temos uma elevação da constante de acoplamento forte, e o uso do método perturbativo fica prejudicado. Com intuito de superar estas dificuldades, utilizamos modelos fenomenológicos que são constituídos pelo maior número possível de simetrias da QCD. Portanto, há uma busca por densidades de lagrangianas que sejam mais simples que a QCD, mas que incorporem algumas de suas simetrias, e uma característica importante, é que matematicamente ela seja tratável para a extração de informações de interesse como propriedades dos hádrons ou o comportamento destes a altas densidades. Esta busca está fortemente fundamentada pela suposição de que as simetrias do modelo são o “cerne”/, para a determinação das propriedades das partículas físicas e dos processos físicos. Um destes modelos, é o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) que será apresentado e discutido em detalhes em capítulos posteriores.

O modelo de NJL [28][39][40], a princípio proposto como uma teoria de interação entre núcleons, mais tarde, re-interpretado como um modelo para interação entre quarks. A interpretação da pequena massa do pión, no quadro do modelo de NJL, advém do resultado da quebra de simetria quirial. Por meio do Teorema de Goldstone [21], temos conhecimento que a quebra de uma simetria contínua da lagrangiana é acompanhada pela existência de uma partícula sem massa: bóson de Goldstone. O pión tomaria o papel como uma implementação aproximada de um bóson de Goldstone, já que o pión possui a menor massa entre os hádrons, sendo considerado, aproximadamente uma partícula com massa nula.

Para que o modelo possa ser uma teoria efetiva aceitável, deve-se reproduzir as simetrias da QCD que são observáveis na natureza. Por exemplo: A QCD possui simetria de cor, que é uma simetria de calibre *local*. O modelo NJL também apresenta simetria de cor, mas com uma ressalva, ela é uma simetria *global* [25]. A QCD diferente do modelo

de NJL possui fenômenos de liberdade assintótica e confinamento de quarks. Todavia uma simetria importantíssima comum à QCD se encontra no modelo de NJL conhecida como *simetria quirai*, que será muito bem comentado posteriormente. Simetrias como as de isospin, bariônicas e axial se encontram presentes no modelo.

Contudo, nem sempre há manifestações de simetrias de um modelo na natureza. Logo, de mesmo grau de importância quanto a própria simetria é a *quebra espontânea desta simetria*. Provocada pelo não anulamento do valor médio do campo no estado de vácuo. As consequências das quebras espontânea e dinâmica da simetria quirai são as seguintes:

1. A criação dinâmica de massa nos férmions.
2. A interpretação dos píons como bósons de Goldstone, o que nos conduz à relação de Goldberger-Treiman[20].
3. A interação entre os quarks que é atrativa que nos leva à formação de condensados de pares quark-antiquark, a partir de um valor crítico da constante de acoplamento. Encontra-se uma analogia com a teoria microscópica da supercondutividade, conhecidos como pares de Cooper (teoria BCS).

Em contrapartida, o modelo NJL apresenta limitações. A primeira é o modelo não ser renormalizável, que necessita da especificação de um esquema de regularização para calcular as integrais impróprias (divergentes) que surgem no modelo. A introdução de um “cut-off” na escala dos momentos torna o modelo uma teoria efetiva, especificando um intervalo de validade do modelo. Suprimindo normalmente interações entre quarks para grandes valores de momentos.

A limitação posterior presente no modelo de NJL é que a interação local não confina quarks. Porém para muitas questões em aberto da Física hadrônica de baixas energias, o confinamento pode não ser importante, pelo menos não possui tanta importância quando comparada as simetrias contidas no modelo.

Ainda assim, o modelo de NJL é um dispositivo poderoso voltado para o estudo de fenômenos relacionados à simetria e à transição de fase quirais.

Qualquer Teoria Quântica de Campos com integrais divergentes exige um esquema de regularização, tal esquema pode ser interpretado como sendo um fator que especifica à validade da teoria. Outra consequência devido a teoria não ser renormalizável, são os resultados diferentes para alguns observáveis físicos devido aos esquemas de regularização empregado [7][28]. Assim, o modelo não é definido somente por sua densidade de lagrangiana mas também pelo esquema de regularização utilizado.

O modelo de NJL vem sendo estudado como um bom candidato para a quebra dinâmica de simetria no modelo padrão [30][32][33][34][35]. E em especial há presença de

ambiguidades no modelo ocasionado pelas escolhas de diferentes roteamentos dos momentos externos pelas linhas internas de partículas em diagramas de Feynman que apresentam “loops”[56], relacionadas ao esquema de regularização aplicado[37].

Em teorias renormalizáveis, estes problemas são muito bem controlados por meio do procedimento de regularização, que permite que as ambiguidades sejam fixadas. Aliás, em teorias renormalizáveis em que não há a matriz de Dirac γ_5 , a regularização dimensional (RD) sempre poderá ser aplicada. A RD é um esquema de regularização invariante de calibre⁴ e sempre removerá as ambiguidades citadas em [56], uma vez que sempre que efetuamos uma translação (shift) no momento interno dos “loops” com o uso da RD, nunca irá ocorrer o aparecimento de termos de superfícies(TS) que são a razão do surgimento das ambiguidades [37].

Em modelos não-finitos, quando realizamos uma translação no momento interno dos “loops” em integrais divergentes, há o aparecimento de termos de superfícies. Tais termos e sua influência na determinação dos observáveis físicos no modelo de NJL são temas fundamentais desta dissertação. A influência de termos de superfície em teoria e modelos efetivos da QCD é tema recorrente no estudo da física hadrônica, e já foi demonstrado em trabalhos anteriores que a presença de tais termos podem melhorar a acurácia de observáveis físico [26][24].

Os termos de superfícies dependem das escolhas dos roteamentos internos, ou seja, devemos ter cuidado não só com as escolhas dos momentos, mas também com as simplificações que podemos realizar nos cálculos dos observáveis. Para esquivar de tal problema, usa-se um roteamento completamente arbitrário que resultará em um termo não físico adicionado aos momentos. Entretanto pode-se absorver tais termos fazendo uso da transformação proposta por Chan [10].

Por meio do modelo de NJL em SU(2) e dos TS podemos encontrar os seguintes observáveis físicos para o pión, sendo eles a Equação de Gap, Auto-energia do méson, constante de decaimento fraco, Fator de Forma Eletromagnético e principalmente, a questão central deste trabalho, os Fatores de Forma Axial e Vetorial relacionado ao decaimento eletro-fraco ($\pi^\pm \rightarrow \gamma e^\pm \bar{\nu}_e$), onde ele decai em um elétron, antineutrino eletrônico e um fóton, um canal raro de decaimento.

O pión é o méson mais leve dos hádrons, e conseqüentemente ele só pode possuir decaimentos fracos e eletromagnéticos. O decaimento raro que iremos analisar é um decaimento eletromagnético e fraco, constituindo em um triângulo de quarks no qual há presença de uma interação forte. A motivação é utilizar este decaimento, que ocorrem em à energia baixas ($E < 2GeV$), para testar o Modelo Padrão ao invés de usar altas

⁴Pode ser empregado em teorias que são invariantes a transformação de simetria $U(1)$ vetorial, sem violar as relações de simetria.

energias.

A estrutura desta dissertação esta ordenada na seguinte forma.

No Capítulo 2, estudamos a versão fermiônica do modelo de Nambu-Jona-Lasinio, em que os conhecimentos empregados neste capítulo serão de grande valia para compreensão dos capítulos posteriores.

No Capítulo 3, apresentamos a versão bosonizada do modelo de NJL, após a introdução de campos auxiliares na lagrangiana na simetria $SU(2)$ de sabores do modelo. Com o uso desta nova lagrangiana, obtemos a expansão da ação efetiva e alguns observáveis físicos como a Equação de Gap, Auto-energia e a Constante de decaimento fraco. É neste capítulo, que iremos obter os Termos de Superfície, e introduzir alguns comentários a respeito.

No Capítulo 4, discutiremos a respeito do Fator Forma Eletromagnético, e por meio deste observável físico, vamos investigar a dependência dos Termos de Superfície com as escolhas de roteamentos nos diagramas de Feynman.

No Capítulo 5, o cerne deste trabalho, determinaremos os Fatores de Forma do decaimento eletro-fraco do pión, iremos analisar a contribuição indireta dos Termos de Superfície, com a pretensão de encontrar valores teóricos mais acurados.

No Capítulo 6, utilizamos a expansão derivativa desenvolvida por Chan [10], para calcular os observáveis físicos (Auto-energia e Fator de Forma Eletromagnético) com o pretexto de eliminar as contribuições sem significados físicos, que se originam de um roteamento arbitrário nos diagramas de Feynman.

No Capítulo 7, apresentaremos os ajustes dos parâmetros contidos nos trabalhos [26][24][27] para o modelo e realizaremos os cálculos numéricos para os Fatores de Formas do decaimento eletro-fraco.

No Capítulo 8, finalmente apresentaremos as conclusões e possíveis perspectivas do trabalho.

Os apêndices presentes neste trabalho possuem dois objetivos:

- O primeiro objetivo está presente nos apêndices A, B e C, e têm como premissa oferecer conteúdos no âmbito da Física e Matemática para uma melhor compreensão deste trabalho. As convenções, Notações e demais utensílios físicos e matemáticos, são apresentados no primeiro apêndice. O segundo apêndice demonstra em detalhe os cálculos da quebra e da invariância quiral. E no terceiro apêndice encontra-se um resumo sobre a teoria fraca e eletro-fraca, e os cálculos para obtenção dos vértices eletro-fracos.
- O segundo objetivo, têm como sentido de não sobrecarregar o texto principal. Assim os cálculos explícitos foram remetidos para os apêndices D e E.

CAPÍTULO

2

O MODELO DE NAMBU-JONA-LASÍNIO

“A minha intenção não é substituir um conjunto de regras gerais por outro conjunto semelhante. A minha intenção é, pelo contrário, convencer o leitor de que todas as metodologias, mesmo as mais óbvias, têm os seus limites”.

-Paul Feyerabend.

2.1 Introdução

O modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL) [39][40] é um modelo fenomenológico descrito por uma lagrangiana de férmions interagentes que alega invariância com relação a algumas transformações de simetria satisfeitas pela Cromodinâmica quântica (QCD), teoria que constitui as interações fortes. A importância de modelos tipo NJL, que apresentam com interações quárticas entre férmions, é que eles nos permitem o estudo de algumas propriedades da QCD no regime de pequenos momentos, e tem sido estudado tanto na linguagem pura de férmions assim como também através de métodos de bosonização. Neste capítulo iremos abordar algumas propriedades do modelo de NJL. A motivação de sua inclusão se deve a dois objetivos. Um deles está associado ao fato de pretendermos estabelecer uma pequena revisão didática do modelo e o outro a obtenção de relações importantes que

iremos utilizar em outras partes desta dissertação.

Procuramos realizar uma revisão de alguns aspectos e relações adquiridas a partir deste modelo em sua forma fermiônica. Primeiramente, apresentaremos algumas características básicas da QCD. Propriedades gerais que uma teoria efetiva deve satisfazer para QCD, antes de adentrar no modelo de NJL. Mostraremos propriedades gerais do modelo e sua densidade de lagrangiana, verificando mais tarde que tal densidade preserva a simetria quiral. Demonstraremos que a quebra simetria quiral está associada com o aparecimento da massa dinâmica dos quarks. Iremos apresentar para o modelo de dois sabores, simetria SU(2), a obtenção da constante de acoplamento, constante de decaimento fraco e relação de Goldberger-Treiman, todo calculo será realizado independente do esquema de regularização empregado.

2.2 A Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica é uma teoria de calibre não-abeliana onde pertence ao grupo de simetria SU(3), seus campos elementares são os de quarks (campos de matéria) e os glúons que são os campos de calibre da teoria [38]. A lagrangiana da cromodinâmica quântica é dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi} (i\not{D} - \hat{m}) \Psi - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

no qual $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$, o campo de quarks são $\Psi = (u, d, s, \dots)$ com N_c cores e N_s sabores e \hat{m} é matriz formada pela massa corrente dos quarks. A derivada de calibre covariante é dado por

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - ig \lambda^a A_\mu^a), \quad (2.2)$$

que contém em si os campos de calibre A_μ^a , com $a = 1, 2, \dots, 8$, que acopla os setores fermiônicos e bosônicos. A constante de acoplamento forte é representado por g , e λ_a são as matrizes de Gell-Mann¹. O tensor de campo dos glúons é definido como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.3)$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo SU(3), o último termo da equação acima é encarregado pela auto-interação entre os campos de glúons. Tal termo é necessário para averiguar que a lagrangiana 2.1 seja invariante sobre as transformações de calibre não-abeliana.

¹CF: Apêndice A

As características principais da QCD resultam do fato de ser uma teoria renormalizável, com liberdade assintótica e confinamento de quarks. Também há o chamado limite quiral (onde a simetria pode ser observada) tem-se $m_u = m_d = m_s$. Para grandes valores de momentos², a QCD é uma teoria perturbativa de quarks e glúons. Nesta condição, as constantes de acoplamentos são pequenas e os quarks e glúons possuem liberdade assintótica, portanto, propagam-se quase livremente.

Se a QCD nos leva ao confinamento dos quarks, então os parâmetros de massa³ \hat{m} não são quantidades observáveis. Entretanto, estas massas podem ser estimadas em termos das massas dos hádrons através da Álgebra de Correntes. As massas de correntes, que diferem das chamadas massas constituintes, são massas efetivas geradas pela quebra explícita da simetria quiral nos modelos fenomenológicos de quarks [29].

2.2.1 Liberdade Assintótica

Por meio do processo de renormalização, percebe-se que o valor efetivo da constante de acoplamento assume um termo de correção finito que depende da escala de energia, portanto, o acoplamento passa a ser uma função dependente do momento transferido, q^2 . Na Eletrodinâmica Quântica (QED), o acoplamento aumenta com o observador se aproximando da carga (valor de $|q^2|$ grande), um fato que nós interpretamos fisicamente como uma consequência da polarização do vácuo, tal fenômeno ocorre devido a flutuações do fóton em pares de elétron-pósitron virtuais. O vácuo funciona como uma espécie de meio dielétrico, blindando parcialmente a carga, de modo que quanto mais nos aproximamos, menos completo é a blindagem e maior é a carga efetiva.

Analogamente o mesmo processo ocorre com a QCD, mas com algumas peculiaridades. Existem duas formas de polarização⁴, uma idêntica a da QED, no qual possuem pares de quarks-antiquarks virtuais, onde pode ser observado na figura 2.1, conduzindo para uma blindagem de cor, acarretando com o aumento do acoplamento em pequenas distâncias, em outras palavras, altas energias. A segunda forma de polarização do vácuo consiste no aparecimento de pares de glúons virtuais, representado pela figura 2.2, que funciona em outra direção produzindo uma “anti-blindagem” ou “camuflagem” que diminui a constante de acoplamento em pequenas distâncias. Conclui-se que a variação do acoplamento forte depende do resultado da combinação dos efeitos de blindagem e anti-blindagem.

²Comprimentos de onda da ordem de 10^{-1}fm

³Se constitui de uma matriz diagonal que contém as massas dos quarks, então, $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, \dots)$.

⁴Consequência do carácter não-abeliano da teoria.

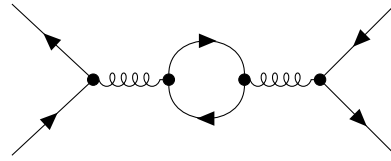


Figura 2.1: Polarização do vácuo na QCD responsável pela blindagem.

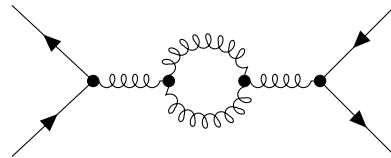


Figura 2.2: Polarização do vácuo na QCD responsável pela anti-blindagem.

A constante de acoplamento efetiva na ordem de um loop é dado por[25]

$$\alpha(|q^2|) = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_s) \ln\left(\frac{|q^2|}{\Lambda^2}\right)}, \quad |q^2| \gg \Lambda^2, \quad (2.4)$$

no qual utilizamos a constante de estrutura fina

$$g = \sqrt{4\pi\alpha}, \quad (2.5)$$

em que q é o momento transferido e $\Lambda \approx 340$ Mev é um parâmetro de escala introduzido para garantir que às seja suficientemente pequena, permitindo o uso da expansão perturbativa.

Na QCD em que $N_c = 3$ e $N_s = 6$ o efeito de anti-blindagem dominará, e a constante de acoplamento diminuirá com o aumento de $|q^2|$ a curta distâncias, em altas energias, a força forte se torna relativamente fraca, permitindo que os quarks dentro dos hádrons se comportem como fossem livres. Essa é a fonte da liberdade assintótica em que muito do que podemos dizer quantitativamente sobre os hádrons é predicado. A liberdade assintótica é o que possibilita o uso do cálculo de Feynman na QCD para calcular potências entre quarks. Ao que tudo indica é uns dos fatores responsáveis pela Regra de OZI⁵, também é o ingrediente fundamental para teoria do Quarkonium⁶. Nas palavras do Professor David Griffiths “A cromodinâmica teria falido se não fosse pela descoberta oportuna da liberdade assintótica⁷” [25].

⁵Origina-se de uma consequência da QCD, que explica por que razões certos modos de decaimento aparecem com menos frequência do que o esperado.

⁶Quarkonium é um méson sem sabor que se constitui em um quark pesado e seu próprio antiquark, tornando-se uma partícula neutra e a antipartícula de si mesma.

⁷Tradução nossa

2.2.2 Confinamento de quarks e Bósons de Goldstone

No regime de baixas energias a constante de acoplamento entre os quarks torna-se elevada, confinando os quarks dentro dos hádrons, portanto o tratamento perturbativo usual não pode ser mais aplicado. O estudo de estados hadrônicos contidos nesta faixa de energia tem que ser por meio de tratamentos não-perturbativos, tendo como exemplo a QCD na rede ou modelos efetivos.

O regime de baixa energia é de suma importância para o entendimento das propriedades hadrônicas tais como a QCD de baixas energias e Física Nuclear. A estrutura não perturbativa do vácuo é caracterizada pela existência de condensados de quarks, em outras palavras, os valores esperados não-nulos da densidade escalar $\bar{\Psi}_q \Psi_q$ ocorre devido ao aparecimento de partículas pseudo-escalares leves, conhecido como bósons de Goldstone⁸ (Sinceramente, tais partículas deveriam ser tratadas como “*quasi-bósons*” de Goldstone, pois apresentam massa não-nulas). A existência de condensados de pares quark-antiquarks no vácuo da QCD sugere uma analogia com estado fundamental dos supercondutores, Teoria BCS⁹, onde encontra-se condensação de pares de elétrons: $\langle 0 | \bar{\Psi}_u \Psi_u | 0 \rangle$. Nestas conjunturas, a constante de acoplamento assumi um valor elevado e acredita-se¹⁰ que esta seja a razão do confinamento de quarks, melhor dizendo, o fato de não observar quarks livres presente na natureza.

2.3 Teorias Efetivas da QCD

A dificuldade de trabalhar com uma teoria é proporcional ao número de graus de liberdade, interações do objeto com o sistema e etc. A ideia fundamental de uma Teoria Efetiva é selecionar apenas alguns graus de liberdade para que possamos trabalhar a dinâmica deles, melhor dizendo, construímos uma teoria (lagrangiana) apenas para os graus de liberdades que julgamos importantes. Lamentavelmente há uma dificuldade de construir uma teoria efetiva precisa e a QCD se encontra nesta situação devido a sua ampla quantidade de graus de liberdade. Desta forma, procuramos construir uma lagrangiana efetiva, com base nas seguintes características de simetria da lagrangiana da QCD.

Uma Teoria Efetiva para QCD em baixas energias deve possuir os seguintes predicados:

1. A teoria é escrita em termos de quarks tendo possibilidade de explicar os glúons.

⁸O teorema de Goldstone alega que o surgimento de partículas sem massa e spin, surgem devido à quebra espontânea de simetria [21][22].

⁹Teoria de Barden, Cooper e Schrieffer.

¹⁰O confinamento de quarks é uma suposição teórica consistente com resultados experimentais, porém a sua confirmação ainda não foi obtida.

2. A teoria deve preservar a simetria quiral e também deve conter um mecanismo de quebra dinâmica desta simetria.
3. O vácuo da teoria efetiva deve ser assimétrico, da mesma forma que o vácuo da QCD.
4. As correntes axiais geram transi es do estado fundamental para o estado de um píon ou um káon.
5. O espectro deve conter $N_s^2 - 1$ bósons de Goldstone.

2.4 O modelo de Nambu-Jona-Lasínio

A princípio foi um modelo concedido para descrever intera es entre nucle es, posteriormente foi reinterpretado como uma teoria com graus de liberdade de quarks. Sendo uma teoria de férmions que contém propriedades fundamentais da QCD, que nos direciona para rela es simétricas, decorrentes da  lgebra de correntes, como a rela o de Goldberger-Treimann [20] e a de Gell-Man-Oakes-Renner contidas na lagrangiana da QCD, que se observam na natureza. Tais rela es não se origina da lagrangiana em questão, mas de propriedades de simetria do sistema físico. O modelo de NJL especialmente descreve com sucesso a invariância quiral, que   quebrada espontaneamente no estado fundamental da teoria, acarretando no surgimento de bósons de Goldstone. A implementa o da simetria quiral adv m da condens o de pares de quarks $\bar{\Psi}_q \Psi_q$, e permite o aparecimento de excita es coletivas com as características de partículas físicas. Entretanto, como   um modelo, terá limita es, os quais passamos a mencionar:

1. A teoria não   renormalizável devido   intera o quark-antiquark pontual. De fato, o produto de distribu es definidas em um mesmo ponto não   bem definido. Assim,   preciso de um esquema de regulariza o para resolver às divergências ultravioletas do modelo¹¹. Portanto, não   apenas a densidade lagrangiana que irá caracterizar o modelo NJL, mas também o esquema de regulariza o empregado nos c culos das amplitudes.
2. O confinamento dos quarks retratado pela QCD não implementada pelo modelo de NJL, um problema vinculado   unitariedade da matriz S. Tal problema possibilita a ocorrência de processos não físicos, por exemplo o decaimento de mésons pesados em pares quark-antiquark provocando surgimento de quarks livres. Felizmente para

¹¹Tal limita o fez com que muitos teóricos abundassem o modelo, antes de possuir o conhecimento necessário (esquema de regulariza es) para “contornar” as divergências contidas.

o contexto de baixas energias, o confinamento não parece ter grande importância em relação às simetrias que este modelo tão bem descreve.

3. Por ser uma teoria efetiva não há existência dos graus de liberdade relativos aos glúons. Isto pode ocasionar em problemas se desejarmos utilizar no contexto de altas energias.

Ainda assim, o modelo é uma ferramenta poderosa no estudo de fenômenos relacionados à simetria e à transição de fase quirais. No modelo de NJL, o mecanismo provido para quebra de simetria é pequena massa (a massa corrente) de quarks introduzida na parte cinética da lagrangiana. Além do mais, há no modelo todas as simetrias globais da QCD, e proporciona um mecanismo simples para estudar a quebra espontânea da simetria quiral, que ocasiona na geração dinâmica da massa dos férmions, e o aparecimento do condensado de quarks e a interpretação do pión como um bóson de Goldstone[21].

2.4.1 A lagrangiana do modelo de NJL e a simetria quiral

A densidade lagrangiana com ausência do acoplamento eletromagnético em SU(2) é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\not{\partial} - \hat{m}) \Psi(x) + G \left[(\bar{\Psi}(x)\Psi(x))^2 + (\bar{\Psi}(x)i\gamma_5\vec{\tau}\Psi(x))^2 \right], \quad (2.6)$$

em que $\Psi(x)$ são campos de quarks e não de núcleons, com

$$\Psi = \Psi_{Dirac} \otimes \Psi_{Sabor} \otimes \Psi_{Cor}, \quad \text{onde } \Psi_{Sabor} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \Psi_{Cor} = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

e $\vec{\tau}$ são as matrizes¹² de Pauli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A primeira parte da lagrangiana corresponde à lagrangiana livre de Dirac. A constante de acoplamento G tem as dimensões do inverso ao quadrado da massa, e é assumida como positiva, de forma que as interações entre os quarks e antiquarks sejam sempre

¹²Em SU(3) a lagrangiana de NJL sofre apenas uma pequena modificação na parte de interação e as matrizes de Pauli são trocadas pelas de Gell-Mann:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\not{\partial} - \hat{m}) \Psi(x) + G \left[(\bar{\Psi}(x)\lambda^a\Psi(x))^2 + (\bar{\Psi}(x)i\gamma_5\lambda^a\Psi(x))^2 \right].$$

atrativas. Isto é o que possibilita a formação de estados ligados no modelo. A constante de acoplamento G , que representa o acoplamento forte, ou seja, os glúons, é fixada pelas equações de gap, que geram a massa constituinte dos quarks, como veremos no capítulo posterior, e é essencialmente fixada pelo valor da massa do pión, $m_\pi = 139,15 \text{ MeV}$.

Em $SU(2)$ a matriz de massa \hat{m} é substituída por um termo escalar constante m , uma vez que os valores adquiridos pela álgebra de correntes para as massas dos quarks up e down são aproximadamente os mesmos, na literatura m possui um valor contido entre 2 e 10 MeV. No limite quiral consideramos $m = 0$, esta lagrangiana apresenta as mesmas simetrias que a da QCD em especial a simetria quiral. O modo de Goldstone decorrente da quebra da simetria quiral são interpretados como mésons pseudo-escalares.

A simetria quiral $U(1)_L \otimes U(1)_R$ é bem caracterizada pelo fato de partículas sem massa, de spin $1/2$, por possuir uma helicidade (ou quiralidade) muito bem estabelecida no qual interpretamos como um número quântico, ou seja, está alinhado ou anti-alinhado com seu momento. Por exemplo, em modelos mais elementares em que existiam quarks num potencial confinante, a helicidade não pode ser à priori um bom número quântico, pois quando os quarks são refletidos nas paredes do potencial a sua helicidade se altera. Por essa razão, em potencias análogos, a helicidade não é conservada.

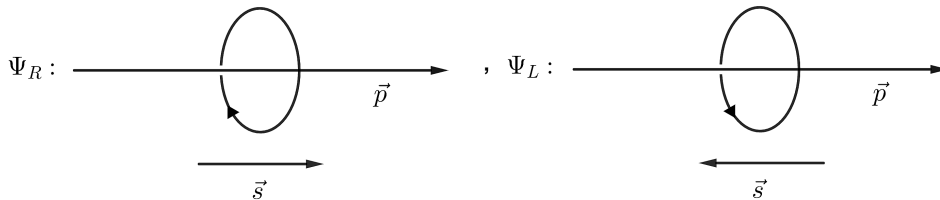


Figura 2.3: Representação de duas partículas com helicidades diferentes.

A figura acima nos sugere a introdução de campo com helicidade positiva¹³ Ψ_R e campo com helicidade negativa¹⁴ Ψ_L . Para se obter tais campos é necessário partir da aplicação de operadores de helicidades nos estados Ψ . Assim

$$\Psi_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \Psi \quad \text{e} \quad \Psi_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \Psi, \quad (2.9)$$

sendo o operador projeção de helicidade positiva e negativa são dados como

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \quad \text{e} \quad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2}, \quad (2.10)$$

Por meio das equações 2.9 e 2.10 e utilizando as relações de anti-comutação das ma-

¹³Em que “R” significa right-hand.

¹⁴Em que “L” significa left-hand.

trizes de Dirac, conferir o apêndice A, encontra-se

$$\bar{\Psi}_R = \Psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\Psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad \text{e} \quad \bar{\Psi}_L = \Psi_L^\dagger \gamma_0 = \bar{\Psi} \frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (2.11)$$

A simetria quiral se refere à invariância da lagrangiana sob transformação, conforme o grupo SU(2), apresentada como

$$\Psi \rightarrow \exp(-i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \Psi, \quad (2.12)$$

sendo que $\vec{\theta}$ aponta ao longo do eixo de rotação e sua magnitude é o ângulo de rotação, no sentido direito, sobre esse eixo. Provindo da transformação 2.12 podemos encontrar a seguinte relação de transformação para os campos $\bar{\Psi}(x)$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \exp(i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \bar{\Psi}. \quad (2.13)$$

Utilizando as equações 2.12 e 2.13 na parte livre da lagrangiana de NJL constatamos que ela é invariante. De forma sucinta iremos demonstrar a invariância quiral da parte de interação, isto é, $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ e $(\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2$. No apêndice B, efetuamos com mais detalhes a conservação da simetria quiral quando temos os termos de massa m sendo nulo. Após as substituições, adquirimos:

$$\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \cos(2\theta) + i\bar{\Psi}(x) (\hat{n} \cdot \vec{\tau}) \gamma_5 \Psi(x) \sin(2\theta) \quad (2.14)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x)i\gamma_5\vec{\tau}\Psi(x) \rightarrow & i\bar{\Psi}(x)\gamma_5\vec{\tau}\Psi(x) - n_i \sin(2\theta) [\bar{\Psi}(x)\Psi(x)] - \\ & - 2in_i [\bar{\Psi}(x)\gamma_5\hat{n} \cdot \vec{\tau}\Psi(x)] \sin^2(\theta), \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que $\hat{n} = \vec{\theta}/\theta$. Introduzindo os resultados 2.14 e 2.15 na lagrangiana verifica-se que o modelo preserva a simetria quiral existente na QCD.

2.5 Equação de Gap

A equação de gap para modelo de NJL é semelhante à equação de gap da teoria BCS, em que o condensado de quarks desempenha um papel análogo ao condensado de elétrons da teoria BCS da supercondutividade. Apresentaremos a solução da equação de gap sucintamente e apontaremos o valor crítico do acoplamento a partir do qual a simetria

quiral é quebrada. Genericamente, a lagrangiana de interação pode ser expressa como:

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{ijk} G_{ijk} \left[\bar{\Psi}(x) \Gamma_{ijk} \Psi(x) \right]^2. \quad (2.16)$$

Trata-se de uma interação quártica entre férmions¹⁵ em que G_{ijk} são constantes de acoplamentos e $\Gamma_{ijk} \equiv S_i I_j \Lambda_k$ representa operadores nos espaços de Dirac S_i , isospin I_j e cor Λ_k . Uma combinação apropriada de cada um destes operadores, nos possibilita descrever matematicamente o tipo de interação existente entre as partículas:

$$\begin{aligned} S_i &= \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \text{ etc } , \\ I_j &= \mathbb{1}, \tau_1, \tau_2, \tau_3 , \\ \Lambda_k &= \mathbb{1}, \lambda_1 \dots \lambda_8 . \end{aligned} \quad (2.17)$$

A escolha dos G_{ijk} tem de ser condicionada pelas leis de conservação impostas pela QCD. Nos cálculos adiante iremos considerar apenas os termos relacionados com aproximação de Hartree, os termos de permuta associados com os termos de Fock serão desprezados por não ter relevância nos estudos a seguir [15]

A equação de campo médio da lagrangiana de interação referente a NJL é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = G \left[\left(\bar{\Psi}(x) \Psi(x) \right)^2 + \left(\bar{\Psi}(x) i \gamma_5 \vec{\tau} \Psi(x) \right)^2 \right]. \quad (2.18)$$

Na aproximação de campo médio ou de Hartree, $\langle \bar{\Psi}(x) \Gamma_{ijk} \Psi(x) \rangle$ simboliza o valor esperado no vácuo, em outras palavras, o estado fundamental de $\bar{\Psi}(x) \Gamma_{ijk} \Psi(x)$, no qual

$$\langle \bar{\Psi}(x) \Gamma_{ijk} \Psi(x) \rangle = -i \text{Tr} S_F(x-y) \Gamma_{ijk}, \quad (2.19)$$

em que $S_F(x-y)$ é o propagador de Dirac dos férmions no espaço de momentos e é definido por

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k - M}. \quad (2.20)$$

Por meio da equação 2.18 temos que o valor esperado do condensado de quarks com o vértice pseudo-escalar é nulo $\langle \bar{\Psi}(x) i \gamma_5 \vec{\tau} \Psi(x) \rangle$, onde será demonstrado no capítulo posterior. Apenas há o termo escalar sobrevivendo que será

$$\langle \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \rangle = -i \text{Tr} S_F(0). \quad (2.21)$$

¹⁵Interação instantânea entre quatro férmions.

A função $S_F(0)$ diagramaticamente significa um loop fechado, uma vez que a linha de férmion se origina e termina no mesmo ponto do espaço-tempo. Sua representação matemática pode ser demonstrada por meio da equação 2.20 onde se tira que

$$S_F(0) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M}. \quad (2.22)$$

A equação de Dirac relacionada com o termo de interação 2.18 na aproximação de campo médio, é escrito na seguinte forma

$$(i\not{\partial} - M) \Psi(x) = 0, \quad (2.23)$$

e podemos definir a massa dinâmica para os férmions, onde sua origem vem da auto-interação, expressada por

$$M = -G \langle \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \rangle. \quad (2.24)$$

Introduzindo a massa corrente na lagrangiana de NJL, a simetria será quebrada explicitamente, e as equações 2.23 e 2.24 respectivamente passará por uma sucinta mudança

$$(i\not{\partial} - m + G \langle \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \rangle) \Psi(x) = 0 \quad (2.25)$$

e

$$M - m = -G \langle \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \rangle. \quad (2.26)$$

A equação acima é conhecida como a *equação de gap generalizada* do modelo de NJL. Aplicando as equações 2.21 e 2.22 na equação anterior, encontra-se

$$M - m = iG \text{Tr} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M} \right]. \quad (2.27)$$

A integral acima possui divergências quadráticas, por causa desta característica é necessário aplicar um esquema regularização, utilizaremos a regularização *sharp cut-off*. A solução da integral acima será apresentada logo abaixo, pois não vejo necessidade de realizar os procedimentos de tal cálculo nesta subseção, pois no capítulo posterior voltaremos a investigar a Equação de Gap. Ressaltando que este capítulo é uma revisão do que já está muito bem explorado na literatura. Portanto o resultado da integral será

$$M - m = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2} = \frac{GN_c N_s M}{4\pi^2} \left[\Lambda^2 - M^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right], \quad (2.28)$$

em que $N_c = 3$ e é o resultado do traço no espaço de cores, e $N_s = 2$ que corresponde ao espaço de sabores. No caso particular que $m = 0$, a equação acima possui duas soluções, uma sendo trivial, quando $M = 0$, que convém com a preservação da simetria quiral. E a segunda solução, quando $M \neq 0$, onde há a quebra de simetria quiral ocasionando no aparecimento dos bósons de Goldstone, interpretados como pions

$$1 = \frac{f_c GM^2}{4\pi^2} \left[\frac{\Lambda^2}{M^2} - \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right], \quad (2.29)$$

sendo $f_c = N_c N_s$. Definindo as quantidades

$$g = \frac{GM^2}{2} \quad \text{e} \quad \lambda^2 = \frac{\Lambda^2}{M^2}, \quad (2.30)$$

com isso reescrevemos

$$1 = \frac{gf_c}{2\pi^2} \left[\lambda^2 - \ln(1 + \lambda^2) \right], \quad (2.31)$$

logo

$$\ln(1 + \lambda^2) = \lambda^2 - \frac{2\pi^2}{gf_c}, \quad (2.32)$$

que é uma quantidade positiva, se o termo λ pertence aos conjuntos dos números reais (como é o caso). Logo, tem-se:

$$\lambda^2 - \frac{2\pi^2}{gf_c} > 0 \Rightarrow \lambda^2 > \frac{2\pi^2}{gf_c}, \quad (2.33)$$

assim concluímos

$$g > \frac{2\pi^2}{\lambda^2 f_c}, \quad (2.34)$$

e após substituímos os termos definidos acima, encontramos que

$$G > \frac{4\pi^2}{\lambda^2 M^2 f_c}, \quad (2.35)$$

Para constante de acoplamento G maior que a constante de acoplamento crítico G_{crt} ,

o vácuo do modelo apresenta valor esperado não nulo

$$\langle \bar{\Psi} | \Psi \rangle \neq 0.$$

O condensado de quarks pode ser tomado como parâmetro de ordem associado à massa dinâmica dos quarks, peculiarizando uma transição de uma fase quiral para outra onde não há simetria quiral. Adotando um valor de cut-off para os momentos, fica estipulado o acoplamento crítico a partir do qual a simetria quiral é quebrada espontaneamente, com quarks ganhando massa e acarretando no aparecimento dos bósons de Goldstone, interpretados como tripleto de píons: π^0, π^+, π^- . Como já havia dito, quando $m = 0$ a equação de gap apresenta solução trivial. Esta solução implementa a simetria quiral dentro do quadro do modelo NJL. Para $m \neq 0$, uma solução não trivial é obtida se a constante de acoplamento g adquirir um certo valor crítico. A partir deste valor crítico, os quarks passam adquirir massa e, portanto, a simetria quiral é quebrada, com o conseqüente aparecimento dos bósons de Goldstone. Na simetria $SU(2)$ tomamos o tripleto de píons como bósons de Goldstone, por serem as partículas mais leves na escala de massa dos hádrons.

Um exemplo clássico da quebra de simetria contido na natureza, é por meio do material ferromagnético, que em baixa temperatura é caracterizada por uma magnetização diferente não nula (que é semelhante ao condensado de quarks). O ferromagneto é descrito por um hamiltoniano de spin que é simétrico por rotações espaciais. Contudo, no estado fundamental (de menor energia), a magnetização possui uma orientação bem definida no espaço, ou seja, há uma direção privilegiada, e ocasionalmente a simetria foi quebrada. Muitos spins alinhados em uma direção arbitrária formam um material macroscopicamente magnetizado. Pequenas perturbações na direção da magnetização produzem o movimento coletivo dos spins com baixas frequências, originando os mágnons (ondas de spins), que são interpretados como bósons de Goldstone associados à quebra de simetria por rotação.

2.6 Modos mesônicos na versão do modelo

Uma lagrangiana de interação que descreve o acoplamento entre o campo de píons π e o campo de núcleons Ψ_N é representada por

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = iG_{\pi NN} \bar{\Psi}_N(x) \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \Psi_N(x), \quad (2.36)$$

em que $G_{\pi NN}$ é a constante de acoplamento entre píons e núcleons. Este modelo pode ser levado para figura de quarks considerando os campos fermiônicos como campos de

quarks, sendo

$$\mathcal{L}_{\pi\bar{q}q} = ig_{\pi\bar{q}q} \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi} \Psi(x), \quad (2.37)$$

no qual $g_{\pi\bar{q}q}$ é a constante de acoplamento entre um pión e dois quarks. Podemos decompor

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \tau^{(+)} \pi^{(+)} + \tau^{(-)} \pi^{(-)} + \tau^{(3)} \pi^{(3)}, \quad (2.38)$$

onde estes operadores são

$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2), \quad (2.39)$$

que destrói um π^+ ou π^- . Correspondendo, com os operadores $\tau^{(+)}$ e $\tau^{(-)}$ sendo definidos como

$$\tau^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 \pm i\tau_2). \quad (2.40)$$

No modelo descrito pela lagrangiana 2.37, temos um espalhamento entre dois quarks mediado por um pión, que é representado pelo seguinte diagrama

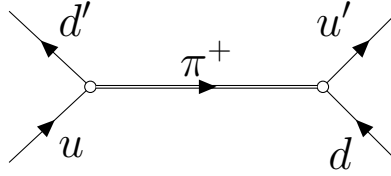


Figura 2.4: Espalhamento de quarks $(ud) \rightarrow (d'u')$.

O espalhamento apresentado pela figura 2.4 detém a seguinte representação

$$[\bar{d}' i\gamma_5 \tau^{(-)} u] [(ig_{\pi\bar{q}q})^2] \frac{i}{p^2 - m_\pi^2} [\bar{u}' i\gamma_5 \tau^{(+)} d], \quad (2.41)$$

a amplitude para o espalhamento é dada por

$$\circ \longrightarrow \circ = (i\gamma_5) \tau^{(-)} \frac{-ig_{\pi\bar{q}q}^2}{p^2 - m_\pi^2} (i\gamma_5) \tau^{(+)}, \quad (2.42)$$

esta fórmula também é válida para todos os píons, com as matrizes τ apropriadas.

O espalhamento da figura 2.4 é descrito no modelo de NJL na versão escalar/pseudo-escalar através de uma soma infinita de termos, que é reorganizado por uma progressão geométrica

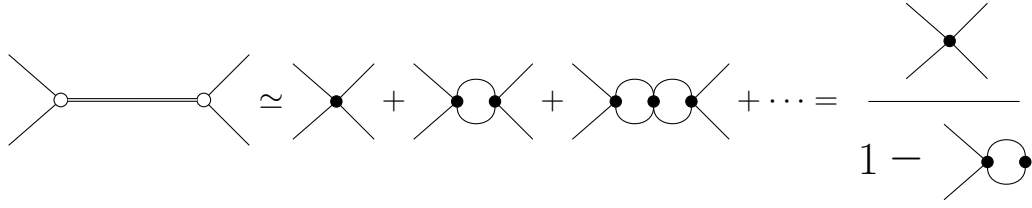


Figura 2.5: Progressão geométrica da interação efetiva.

As regras de Feynman para cada diagrama presente na figura 2.5 são as seguintes:

1. Para as pernas externas, escreva um fator $i\gamma_5\tau_i$, que descreve o estado de isospin das partículas externas
2. Para cada vértice, escreva um fator iG , correspondendo ao acoplamento para aquele vértice.
3. Para cada linha interna, associe um propagador do tipo

$$\frac{i}{\not{k} - M},$$

no qual k representa o momento interno.

4. Para cada loop, escrevemos uma amplitude pseudo-escalar, da forma

$$\frac{1}{i}\Pi_{PS}(p^2) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5\tau_i \frac{i}{\not{k} - M} i\gamma_5\tau_j \frac{i}{(\not{k} - \not{p}) - M} \right], \quad (2.43)$$

em que as matrizes τ_i e τ_j são selecionadas de acordo com o processo, $\tau_i = \tau_j = \tau_3$ para o π^0 ou $\tau_i = \tau^{(\pm)}$, $\tau_j = \tau^{(\mp)}$ para criar um π^+ ou π^- . Aplicando as regras de Feynman para cada um destes diagramas, chegamos a seguinte amplitude

$$\begin{aligned} iU_{ij}(p^2) &= (i\gamma_5\tau_i)iG(i\gamma_5\tau_j) + (i\gamma_5\tau_i)iG\Pi_{PS}(p^2)(i\gamma_5\tau_j) + \\ &\quad + (i\gamma_5\tau_i)iG\frac{\Pi_{PS}(p^2)}{i}iG\frac{\Pi_{PS}(p^2)}{i}(i\gamma_5\tau_j) + \dots \\ &= (i\gamma_5\tau_i) \left[\frac{iG}{1 - G\Pi_{PS}(p^2)} \right] (i\gamma_5\tau_j). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Comparando as equações 2.42 e 2.44, notamos que a massa do pión, dada pela expressão 2.42, e pode ser obtida no modelo de NJL pelo polo da equação 2.42, ou seja, o

valor de p^2 que satisfaz a

$$1 - G\Pi_{PS}(p^2) = 0. \quad (2.45)$$

Desta última equação podemos ainda adquirir uma equação para a constante de acoplamento entre os píons e os quarks. Para encontrá-la, é necessário expandir a expressão 2.44 em uma série de Taylor, em torno do ponto $p^2 = m_\pi^2$, e com isso, encontramos:

$$\begin{aligned} 1 - G\Pi_{PS}(p^2) &= [1 - G\Pi_{PS}(p^2)] + \frac{\partial [1 - G\Pi_{PS}(p^2)]}{\partial p^2} (p^2 - m_\pi^2) + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 [1 - G\Pi_{PS}(p^2)]}{\partial^2 p^2} (p^2 - m_\pi^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

Por meio da equação 2.45 concluímos que o primeiro termo da expansão se anula. Truncamos a expansão no termo de primeira ordem, e em seguida o substituímos em 2.44. Desta forma, obtemos

$$iU_{ij}(p^2) \simeq i\gamma_5\tau_i \frac{-i \left[\frac{\partial \Pi_{PS}(p^2)}{\partial p^2} \right]^{-1} \Big|_{p^2=m_\pi^2}}{p^2 - m_\pi^2} i\gamma_5\tau_j. \quad (2.47)$$

Igualando a equação anterior com a 2.42, obtemos uma expressão para a constante de acoplamento entre o méson pseudo-escalar e os quarks, dada por:

$$g_{\pi\bar{q}q}^2 = \left[\frac{\partial \Pi_{PS}(p^2)}{\partial p^2} \right]^{-1} \Big|_{p^2=m_\pi^2}. \quad (2.48)$$

2.6.1 Bósons de Goldstone no limite quiral

Pode-se demonstrar explicitamente a partir da equação 2.43 que a massa do pión correlaciona com a massa corrente dos quarks, demonstrando que no limite quiral o pión terá massa nula e pode ser identificado como bóson de Goldstone do modelo. Após o cálculo do traço no espaço de cor, de sabor e de Dirac, teremos

$$\frac{1}{i} \Pi_{PS}(p^2) = 4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - M^2}{(k^2 - M^2) [(k-p)^2 - M^2]}. \quad (2.49)$$

O denominador do integrando pode ser escrito em termos de frações parciais

$$\frac{1}{(k^2 - M^2) [(k-p)^2 - M^2]} = \frac{1}{2 \left(k^2 - k \cdot p - M^2 + \frac{p^2}{2} \right)} \left[\frac{1}{k^2 - M^2} + \frac{1}{(k-p)^2 - M^2} \right],$$

adicionando $+\frac{p^2}{2}$ e $-\frac{p^2}{2}$ no numerador, chegamos à

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\Pi_{PS}(p^2) &= 2N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - M^2} + \frac{1}{(k-p)^2 - M^2} \right] - \\ &\quad - 2N_c N_s p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Vamos denominar o último termo da equação como

$$I(p^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]}. \quad (2.51)$$

Assumindo que um *shift* pode ser realizado na segunda integral da equação 2.50, de forma independente do esquema de regularização, realizando a translação de $k-p \rightarrow k$, têm-se

$$\frac{1}{i}\Pi_{PS}(p^2) = 4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2} - 2N_c N_s p^2 I(p^2). \quad (2.52)$$

A integral acima possui semelhança com a equação de gap 2.28. Eliminando a primeira integral da função acima por meio da equação de gap, encontramos

$$1 - G\Pi_{PS}(p^2) = \frac{m}{M} + 2iN_c N_s G p^2 I(p^2), \quad (2.53)$$

que se anula para $p^2 = m_\pi^2$, concluindo que

$$m_\pi^2 = \frac{im}{2N_c N_s M G I(m_\pi^2)}, \quad (2.54)$$

podemos perceber que no limite quiral quando $m = 0$, o pión terá massa nula e consequentemente é identificado como o bóson de Goldstone no contexto do modelo NJL.

2.6.2 Constante de decaimento e a relação de Goldberg-Treiman

A constante de decaimento é calculada a partir do elemento da corrente axial da transição do estado de um pión. Este elemento de matriz é indicado abaixo

$$\langle 0 | J_{5\mu}^a | \pi^b(p) \rangle = \left\langle 0 \left| \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \Psi(x) \right| \pi^b(p) \right\rangle = \text{diagrama} = i f_\pi p_\mu \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.55)$$

onde q representa o quadri-momento do pión e f_π é a constante de decaimento fraco do pión. Aplicando as regras de Feynman no diagrama acima e encontrando os traços no

espaço de sabores e cores, obtemos

$$ip_\mu f_\pi = -2g_{\pi\bar{q}q}N_cN_sMp_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]}. \quad (2.56)$$

Utilizando a definição presente em 2.51, podemos reescrever a equação acima como

$$ip_\mu f_\pi = -2g_{\pi\bar{q}q}N_cN_sMp_\mu I(p^2), \quad (2.57)$$

a equação da constante de acoplamento é encontrada aplicando a derivada em relação a p^2 (ver a equação 2.48) em 2.53, e a seguir exercendo que valor de p^2 seja zero. Desta forma, tira-se que

$$g_{\pi\bar{q}q}^{-2} = -2iN_cN_sI(0). \quad (2.58)$$

Multiplicando os dois lados da equação 2.57 por p^μ , posteriormente dividindo por p^2 , elevando o restante ao quadrado e atribuindo que p^2 seja nulo. Podemos reescrever tal equação com ajuda da expressão 2.58, assim adquirimos que

$$f_\pi^2 = -2iN_cN_sM^2I(0). \quad (2.59)$$

Combinando as duas últimas equações obtemos a relação de Goldberg-Treiman

$$f_\pi^2 g_{\pi\bar{q}q}^2 = M^2. \quad (2.60)$$

A importância da relação acima é que sua obtenção não depende de um modelo específico, pois ela é obtida por meio da álgebra de correntes. A álgebra de correntes é uma teoria fundamentada pelas aplicações dos princípios simétricos. Tal teoria é um utensílio que permite extrair características das interações fortes independente da lagrangiana. Porém a relação está intimamente relacionada com a simetria quiral, e como esta simetria é uma das características do modelo NJL, o modelo permite por meio de aproximação encontrar esta relação. No final, isto nos mostra a qualidade da lagrangiana de NJL.

Antes de finalizar este capítulo, vamos voltar a nossa atenção para o elemento de matriz da corrente axial contida em 2.55. Mas desta vez, iremos desejar o divergente da corrente axial, então

$$\langle 0 | \partial^\mu J_{5\mu}^a | \pi^b(p) \rangle = m_\pi^2 f_\pi \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.61)$$

o elemento de matriz deve ser nulo se a corrente axial for conservada. Para que isso

aconteça, devemos impor que

$$m_\pi^2 f_\pi = 0. \quad (2.62)$$

Isso implica que deve ter duas condições, sendo elas

$$m_\pi = 0 \quad \text{e} \quad f_\pi = 0. \quad (2.63)$$

Contudo estas duas condições estão em desacordo com os resultados experimentais. Por meio do Teorema de Goldstone, temos conhecimento que os píons tem massa quase nula e isso nos leva a interpretá-los como sendo bósons de Goldstone resultantes da quebra da simetria quirial. Assim podemos admitir que a simetria quirial é quase exata na natureza, de forma que a corrente axial será parcialmente conservada. Isto é o alicerce da hipótese PCAC (partial conservation of axial current), que nos diz que o baixo valor da massa dos píons quebra ligeiramente a simetria quirial exata, fazendo com que a corrente axial seja aproximadamente conservada. Assim, a quebra da simetria quirial passa a ser plausível com a hipótese de que m_π seja igual a zero.

CAPÍTULO

3

A VERSÃO BOSONIZADA E A ORIGEM DOS TERMOS DE SUPERFÍCIE

“Não me guio muito pelo raciocínio. O raciocínio é importante para as coisas, mas é a intuição que mostra a solução dos problemas”.

-Mário Schenberg.

A Teoria de Campo Médio, que é uma técnica presente na Mecânica Estatística, nos possibilita estudar o comportamento de grandes e complexos modelos estocásticos a partir de um modelo mais simples. Esses modelos consideram um grande número de pequenos componentes individuais que interagem entre eles. O efeito de todos os outros indivíduos em qualquer outro indivíduo é aproximado a um único efeito esperado, transformando um problema de muitos corpos em um problema de um só corpo. Podemos apropriar dessa explicação, para entender fisicamente o que é a técnica de bosonização. Quando aplicamos a técnica de bosonização em um sistema de muitos corpos, que no nosso caso serão os quarks, teremos os seguintes efeitos, a interação entre pares de quarks dará origem aos mésons. Assim, teremos um novo sistema, e da mesma forma que ocorre na Teoria de Campo Médio, transformamos um problema de muitos mésons em um problema de apenas um méson.

Neste capítulo iremos apresentar a sua versão bosonizada do modelo de NJL em SU(2) e a obtenção da ação e lagrangiana efetiva. Por meio da expansão da lagrangiana efetiva encontraremos os observáveis físicos como a Equação de Gap, Auto-energia dos mésons e a Constante de decaimento fraco, e a origem de seus respectivos Termos de Superfície.

3.1 Lagrangiana do modelo de NJL SU(2)

No capítulo anterior foi apresentado a lagrangiana do modelo NJL SU(2) em sua forma fermiônica, apresentado abaixo:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\not{\partial} - m)\Psi(x) + G \left[\left(\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \right)^2 + \left(\bar{\Psi}(x)i\gamma_5\vec{\tau}\Psi(x) \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

com

$$\Psi = \Psi_{Dirac} \otimes \Psi_{Sabor} \otimes \Psi_{Cor}, \quad \text{onde } \Psi_{Sabor} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \Psi_{Cor} = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

O m é o termo de massa corrente, que em SU(2), como já foi demonstrado no capítulo anterior, passa a ser substituído por um valor escalar constante. E $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Atualmente existem vários métodos de quantização de campos clássicos, os mais conhecidos são os método canônico, o método das integrais de trajetórias e o método de quantização estocástica [23]. Todos esses possuem suas vantagens. Entretanto, o método de integrais de trajetórias¹ nos permite definir uma teoria quântica de campos por meio de um funcional gerador das funções de Green [23] [46].

Utilizamos o funcional Gerador para obter a ação efetiva e por meio dela poderemos encontrar as correções quânticas. Neste ponto, vamos introduzir o funcional gerador para os campos fermiônicos:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(\bar{\Psi} \cdot \Psi) + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \right) \right]. \quad (3.4)$$

Por questão de comodidade passaremos a escrever $\bar{\Psi}(x) \cdot \Psi(x) \rightarrow \bar{\Psi} \cdot \Psi$ na equação 3.4. $\bar{\Psi}$ e Ψ são campos fermiônicos e anti-fermiônicos, $\bar{\eta}$ e η são as fontes fermiônicas e anti-fermiônicas dos campos. N é um fator de normalização que fornece $Z[0] = 1$,

¹O formalismo de integrais de trajetória foi introduzido por Feynman como um método alternativo aos formalismo de Heisenberg e Schroedinger, quando se deparou com um comentário misterioso no livro de Dirac. CF: Sakurai J. J. *Mecânica Quântica Moderna* [48].

substituindo 3.1 em 3.4, obtemos a seguinte expressão:

$$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\Psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\Psi + \frac{G}{2} \left[(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2 \right] + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \right] \right\}. \quad (3.5)$$

Observa-se que a Lagrangiana acima possui termos de interações quárticas entre os férmions. Para que possamos estudar os fenômenos envolvendo mésons, é necessário linearizar as interações envolvidas na lagrangiana, o que facilitará a determinação da Ação Efetiva. Para isso, vamos nos socorrer com o processo de *bosonização*, que consiste em substituir os graus de liberdade fermiônicos por graus de liberdade bosônicos. Desta forma passaremos a interpretar os graus bosônicos como os mésons [28].

3.2 Bosonização do modelo de NJL

O termo de bosonização de uma teoria fermiônica refere-se a transformação de uma lagrangiana que descreve as interações entre férmions numa lagrangiana equivalente, que irá depender apenas de campos bosônicos. O processo de bosonização consiste na inclusão de campos bosônicos auxiliares na lagrangiana. Todavia tais campos não podem alterar a dinâmica deste modelo, ou seja, a introdução desses campos auxiliares não pode alterar as equações de movimento de Euler-Lagrange. Desta forma dizemos que são campos sem dinâmica.

Em nossa lagrangiana, os campos bosônicos serão associados aos mésons leves conhecidos. A técnica de bosonização será introduzida via formalismo de integrais de caminho de Feynman². Como o objetivo deste trabalho é estudar o decaimento raro do pión, iremos desenvolver tal processo para a versão SU(2)³. Os campos auxiliares sem dinâmicas, a serem introduzidos serão:

$$\int \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ \int d^4x \left[\frac{-i}{2G} (\sigma - G\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] \right\}, \quad (3.6)$$

$$\int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int d^4x \left[\frac{-i}{2G} (\pi - G\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2 \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Devido a forma quadrática dos expoentes, as integrais acima são constantes⁴, não dependendo, portanto, dos campos Ψ . A introdução desses campos no funcional gerador, mudará meramente a constante de normalização, \mathbf{S}_a (ou σ) e \mathbf{P}_a (ou π) referem-se

²CF: Ashok Das. *Field Theory: A Path Integral Approach* [12].

³A simetria SU(3) é uma mera extensão de SU(2) [28].

⁴São integrais gaussianas nos campos escalares.

respectivamente aos campos escalar e pseudo-escalar, em que $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ é um índice em que descreve o tripleto dos píons: π^+, π^- e π^0 [24][26]. Sendo assim, adicionaremos os campos mesônicos na lagrangiana original da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2G} [\sigma - G\bar{\Psi}\Psi]^2 - \frac{1}{2G} [\pi - G\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi]^2. \quad (3.8)$$

Por meio da equação de Euler-Lagrange para os campos auxiliares

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\sigma)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\pi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\pi)} = 0, \quad (3.9)$$

obtemos as relações de vínculos para σ e π que são

$$\sigma = G\bar{\Psi}\Psi, \quad (3.10)$$

$$\pi = iG\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi. \quad (3.11)$$

A lagrangiana bosonizada do modelo de NJL SU(2)⁵ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + \frac{G}{2} [(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2] - \\ & - \frac{1}{2G} [\sigma - G\bar{\Psi}\Psi]^2 - \frac{1}{2G} [\pi - G\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi]^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Expandindo os termos quadráticos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + \frac{G}{2} [(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2] - \\ & - \frac{1}{2G} [\sigma^2 - 2\sigma G\bar{\Psi}\Psi + G^2(\bar{\Psi}\Psi)^2] - \\ & - \frac{1}{2G} [\pi^2 - 2\pi G\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi + G^2(\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim percebemos que os termos $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ e $(\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi)^2$ da lagrangiana original podem ser anulados com os termos dos campos auxiliares, portanto teremos:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi + \sigma\bar{\Psi}\Psi + \pi\bar{\Psi}i\gamma_5\vec{\tau}\Psi - \frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2). \quad (3.14)$$

O que constata que a inclusão dos campos auxiliares resulta na substituição das interações quárticas entre férmions da lagrangiana 3.1 por interações triplas entre férmions

⁵Note que a lagrangiana original da equação 3.12 em relação a 3.1 possui a constante de acoplamento diferentes. Contudo isto não altera os resultados posteriores.

e bósons, além dos termos quadráticos nestes campos. A lagrangiana bosonizada é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left(i\not{\partial} - m + \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau} \right) \Psi - \frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2). \quad (3.15)$$

Sabemos, portanto, que o valor esperado de σ no vácuo não é nulo, $\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = s$, sendo o fator responsável pela quebra espontânea de simetria que pode ser constatado pelo não anulamento da quantidade $\langle \bar{\Psi} | \Psi \rangle$. Desta forma, vamos definir um novo campo σ' que se encontra em σ na seguinte forma $\sigma = \sigma' + s$, que tenha valor esperado nulo no vácuo [28]. Logo teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi} \left(i\not{\partial} - m + (\sigma' + s) + i\pi\gamma_5\vec{\tau} \right) \Psi - \frac{1}{2G} \left((\sigma' + s)^2 + \pi^2 \right) \\ &= \bar{\Psi} \left(i\not{\partial} - m + \sigma' + s + i\pi\gamma_5\vec{\tau} \right) \Psi - \frac{1}{2G} (\sigma'^2 + 2\sigma's + s^2 + \pi^2) \\ &= \bar{\Psi} \left(i\not{\partial} - M + \sigma' + i\pi\gamma_5\vec{\tau} \right) \Psi - \frac{1}{2G} (\sigma'^2 + s^2 + \pi^2) - \frac{1}{G} \sigma's. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da equação 3.16 podemos redefinir o termo de massa do campo fermiônico onde

$$M = m - s. \quad (3.17)$$

Essa nova redefinição de massa é denominada de massa constituinte dos quarks e, como já foi discutido anteriormente, é uma consequência da quebra espontânea de simetria quiral. Assim, ao calcularmos o valor esperado no vácuo para os campos σ , encontraremos à *Equação de Gap* para os quarks.

Com o objetivo de simplificar as notações, iremos exercer que σ' seja σ .

3.2.1 Integração sobre os campos fermiônicos

Após realizar a bosonização da lagrangiana, podemos reescrever o funcional gerador 3.5. Assim, o nosso novo funcional gerador será:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\sigma \int \mathcal{D}\Psi \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\Psi} \left(i\not{\partial} - M + \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau} \right) \Psi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2G} (\sigma^2 + s^2 + \pi^2) - \frac{1}{G} \sigma s + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nota-se que o funcional acima pode ser descontraído em dois funcionais distintos, sendo um funcional dependente apenas dos campos fermiônicos e o outro de campos bosônicos.

Separando-os teremos os seguintes funcionais:

$$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2G} (\sigma^2 + s^2 + \pi^2) - \frac{1}{G} \sigma s \right] \right\} Z_F, \quad (3.19)$$

no qual $Z_F[\eta, \bar{\eta}]$ é o funcional fermiônico:

$$Z_F[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\Psi \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\Psi} (i\rlap{\not{\partial}} - M + \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau}) \Psi + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \right] \right\}. \quad (3.20)$$

Utilizando de uma analogia para obtenção do propagador de Klein-Gordon, podemos facilmente, deslocar o Ψ para completar o quadrado e obter a seguinte expressão para o campo de Dirac ⁶ [44].

$$Z_F = Z_0 \exp \left\{ -i \int d^4x \int d^4y [\bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(x)] \right\}, \quad (3.21)$$

O propagador é obtido por meio da função de dois pontos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) Z[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}, \eta=0}, \\ iS_F(x-y) &= \frac{i\delta^4(x-y)}{i\rlap{\not{\partial}} - M + \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau}}, \\ S_F(x-y) &= \frac{\delta^4(x-y)}{i\rlap{\not{\partial}} - M + \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Portanto o funcional gerador associado aos campos fermiônicos pode ser escrito da seguinte forma:

$$Z_F = \int \mathcal{D}\Psi \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\bar{\Psi} S_F^{-1} \Psi + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \right] \right\}. \quad (3.23)$$

Como estamos lidando com campos fermiônicos é importante saber que os espinores ψ e $\bar{\psi}$ obedecem a relação de anticomutação [41][46], ou seja, para resolver a integral do funcional gerador acima, é necessário utilizar a *Álgebra de Grassman*. Fazendo uso da seguinte propriedade abaixo[12]:

$$I = \int \prod_{i,j} d\theta_i^* d\theta_j \exp[-(\theta_i^* M_{ij} \theta_j + \theta_i^* C_i + C_i^* \theta_i)] = N' \det M_{ij} \exp(C_i^* M_{ij}^{-1} C_j). \quad (3.24)$$

⁶Há outras formas de se obter o funcional gerador para o campo de Dirac, o próprio Prof. Dr. Barcelos em seu livro demonstra duas formas distintas para encontrar tal funcional. Sendo o primeiro por meio da expansão de ψ e $\bar{\psi}$ mediante de um conjunto completo de funções ortonormais, e o segundo através da integração de um dos campos em que resulta em um funcional delta. CF: Barcelos Neto J. *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica* [41]

Entretanto há ausência de alguns conteúdos da propriedade 3.24 quando comparada com o funcional gerador 3.23. Portanto, eu convido o leitor a reproduzir os cálculos a respeito da Álgebra de Grassman na referência [12]. Se assim o fizer, irá perceber que adição de $-i \int d^4x$ na dedução da propriedade 3.24 não acarretara em mudanças significativas. Desta forma, teremos uma propriedade de *Grassmann* que poderá ser comparada igualmente com 3.23, sendo ela:

$$\begin{aligned} I &= \int \prod_{i,j} d\theta_i^* d\theta_j \exp \left[i \int d^4x (\theta_i^* M_{ij} \theta_j + \theta_i^* C_i + C_i^* \theta_i) \right], \\ &= N' \det M_{ij} \exp \left[-i \int d^4x (C_i^* M_{ij}^{-1} C_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assumindo as seguintes associações:

$$\theta_i^* = \bar{\Psi}, \quad C_j = \eta, \quad C_i^* = \bar{\eta}, \quad \theta_i = \Psi, \quad \text{e} \quad M_{ij} = S_F^{-1}(x - y). \quad (3.26)$$

Temos que

$$Z_F = N' \det [S_F^{-1}] \exp \left\{ -i \int d^4x [\bar{\eta}(x) S_F \eta(x)] \right\}, \quad (3.27)$$

com o objetivo de alocar $\det [S_F^{-1}]$ na exponencial, vamos utilizar a seguinte relação:

$$\ln[\det(A)] = \text{Tr}[\ln(A)] \Rightarrow \det(A) = \exp\{\text{Tr}[\ln(A)]\}.$$

Conclui-se que

$$\det(S_F^{-1}) = \exp \left\{ \text{Tr} [\ln(S_F^{-1})] \right\},$$

e portanto, o funcional gerador associado aos campos fermiônicos será dado por:

$$Z_F = N' \exp \left\{ \text{Tr} [\ln(S_F^{-1})] - i \int d^4x [\bar{\eta}(x) S_F \eta(x)] \right\}. \quad (3.28)$$

Por fim, obtemos o funcional gerador bosonizado escrito em termos da Ação Efetiva S_{ef} , que será comentada e definida logo adiante:

$$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ i S_{ef} - i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \frac{1}{i\not{\partial} - M + \sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}} \eta(x)] \right\}, \quad (3.29)$$

onde a ação efetiva para o modelo de NJL SU(2) será

$$S_{ef} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \frac{1}{G}\sigma s \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(i\rlap{\not{D}} - M + \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau} \right) \right]. \quad (3.30)$$

O termo $i\rlap{\not{D}} - M$ dentro do logaritmo na equação 3.30 pode ser posto em evidência, e utilizando a propriedade de multiplicação dos logaritmos ⁷, iremos adquirir dois cálculos de traços, sendo que um deles será $i \text{Tr} \left[\ln \left(i\rlap{\not{D}} - M \right) \right]$. Este traço não depende dos campos bosônicos, portanto, ele pode ser incorporado na constante de normalização do Funcional gerador junto com a constante N' adquirida na *Algebra de Grassman*, sendo assim encontramos:

$$S_{ef} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{1}{G}\sigma s \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \Sigma \frac{1}{i\rlap{\not{D}} - M} \right) \right], \quad (3.31)$$

onde

$$\Sigma = \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau}. \quad (3.32)$$

3.3 Expansão da Ação Efetiva

A nossa meta nesta seção é a obtenção da ação efetiva. Por meio da literatura, pode-se adquirir o conhecimento que a Ação Efetiva atua como um funcional gerador das funções de Green irreduzíveis de uma partícula (1PI)[44]. Após expandir a ação efetiva, cada termo dela será tomada como amplitudes de probabilidades de transição, que serão coeficientes das potências de uma nova lagrangiana. Utilizando essas potências poderemos encontrar os observáveis físicos da nossa teoria.

Expandimos formalmente a teoria por meio de uma série de Taylor de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

em que definimos

$$x = \Sigma \frac{1}{i\rlap{\not{D}} - M} = (\sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau}) \frac{1}{i\rlap{\not{D}} - M}.$$

.

Então, podemos escrever a nossa ação efetiva como uma soma:

⁷ $\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$

$$S_{ef} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \cdots . \quad (3.33)$$

Cada termo da Ação Efetiva será representado por diagramas de Feynman. Vamos escrever os quatro primeiros termos separados:

- Termo Linear:

$$S_1 = - \left\{ \int d^4x \left[\frac{1}{G} \sigma s \right] + i \text{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) \right] \right\}. \quad (3.34)$$

- Termo Quadrático:

$$S_2 = - \int d^4x \left[\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) \right] + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right)^2 \right]. \quad (3.35)$$

- Termo Cúbico:

$$S_3 = - \frac{i}{3} \text{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right)^3 \right]. \quad (3.36)$$

- Termo Quártico:

$$S_4 = + \frac{i}{4} \text{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right)^4 \right]. \quad (3.37)$$

Os termos de ordem superior são análogos a este último. Apenas estes quatro termos possuem alguma parcela divergente [28].

3.4 Obtenção da Equação de Gap

A *Equação de Gap* nos fornece a massa constituinte dos quarks que se tem origem nas interações entre os quarks. Vale destacar-se que a massa constituinte dos quarks é um elemento dinâmico⁸. Se minimizarmos equação da Ação efetiva 3.31 com relação a cada um dos campos, adquirimos a equação de gap, denotados por $\langle \sigma \rangle$ e $\langle \pi \rangle$.

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial \alpha} = 0, \quad (3.38)$$

⁸Para entender tal fenômeno, podemos realizar um experimento imaginário num contexto “clássico”. Imagine que tenhamos dois ímãs e que aproximamos ambos simultaneamente com polos idênticos. A sensação é que ambos os ímãs passam a ficar mais pesados, ou seja, estariam ganhando massa quando ambos se aproximam.

no qual $\alpha = \sigma, \pi$.

Entretanto é preciso derivar a equação 3.31 com a sua parte logarítmica expandida em uma serie de Taylor e tomar como zero os outros campos.

Começando com a minimização no campo π teremos:

$$i \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) = 0. \quad (3.39)$$

Percebe-se que a equação é satisfeita para $\langle \pi \rangle = 0$. Uma vez, que utilizando as propriedades das matrizes γ de Dirac (ver apêndice A) sabemos que o $\text{Tr}\gamma_5 = 0$.

Para o campo σ :

$$- \int d^4x \frac{1}{G} s - i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) = 0. \quad (3.40)$$

Para que a equação 3.40 resulte em zero, devemos garantir que os dois termos da esquerda sejam nulos. Porém, a integral da equação acima varre todo o espaço de Minkowski, então temos que assegurar que o integrando também seja nulo. A solução desta equação será:

$$s = -iG \text{Tr} \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right), \quad (3.41)$$

combinando 3.17 em 3.41, obtemos

$$M - m = iG \text{Tr} \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right). \quad (3.42)$$

Conclui-se que s é a massa gerada dinamicamente, dada pela diferença entre a Massa constituinte M e a massa corrente m do quark. E “Tr” é o traço total, calculado sobre a cor, isospin e o spin.

Agora definimos a quantidade $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ como sendo o condensado de quarks a uma unidade de sabor.

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right). \quad (3.43)$$

O fator causador pela quebra da simetria quiral é o não anulamento do valor médio do campo escalar, resultando na origem da massa dos quarks e conseqüentemente aos bósons de Goldstone. A equação 3.43 é conhecida como Equação de Gap onde seu diagrama é representado pela figura 3.1 que representa as interações entre os quarks [12][13][28].

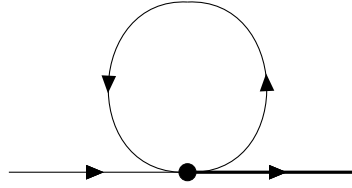


Figura 3.1: Diagrama da Equação de Gap.

Combinado 3.43 com 3.42 a equação de Gap ficará sendo escrita como:

$$M - m = -G \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle. \quad (3.44)$$

3.4.1 O condensado de quarks

Para encontrarmos a expressão do condensado de quarks, antes de tudo, iremos definir o traço de um funcional em uma representação (ou base). Sendo \hat{A} um operador qualquer, o traço da matriz que o representa em uma base de autoestados $|x\rangle$, é dado por:

$$\text{Tr } \hat{A} = \text{Tr} \int d^4x \langle x | \hat{A} | x \rangle. \quad (3.45)$$

Utilizando o traço funcional acima para o condensado de quarks, adquirimos:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) = -i \text{Tr} \int d^4x \left\langle x \left| \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| x \right\rangle, \quad (3.46)$$

Inserindo a relação de completeza com auto-estados do operador $\cancel{\partial}$:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle \langle k| = \mathbf{1}, \quad (3.47)$$

e também temos que

$$\langle x | k \rangle = e^{ikx}, \quad (3.48)$$

portanto:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle &= -i \text{Tr} \int d^4x \left\langle x \left| \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle \langle k| \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} |k'\rangle \langle k'| \right| x \right\rangle \\ &= -i \text{Tr} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ikx} \left\langle k \left| \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k' \right\rangle e^{-ik'x} \\ &= -i \text{Tr} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ix(k-k')} \left\langle k \left| \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k' \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \operatorname{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{ix(k-k')} \left\langle k \left| \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right| k' \right\rangle \\
&= -i \operatorname{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k') \left\langle k \left| \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right| k' \right\rangle.
\end{aligned}$$

Nota-se que o propagador pertence ao espaço das posições, e consequentemente ele não pode atuar em $\langle k|$ e $|k'\rangle$, pois eles se encontram no espaço dos momentos. Por isso é pertinente trocar o propagador.

$$= -i \operatorname{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\langle k \left| \frac{1}{\not{k} - M} \right| k \right\rangle = -i \operatorname{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \langle k|k \rangle \frac{1}{\not{k} - M}.$$

Finalmente, temos

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -i \operatorname{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M}. \quad (3.49)$$

Para obter o resultado da integral acima, primeiro começamos a resolver o cálculo do traço. O traço funcional deve ser calculado nos espaços de cor, de sabor e de Dirac. O traço no espaço de cores resulta em $N_c = 3$, no espaço de sabores teremos $N_s = 2$ que é válido para simetria SU(2) [28]. Para calcular o traço no espaço de Dirac, devemos calcular os traços das matrizes gama [25].

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -i N_c N_s \operatorname{Tr}_D \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M}. \quad (3.50)$$

Racionalizando a expressão acima:

$$\frac{1}{\not{k} - M} = \frac{1}{\not{k} - M} \cdot \frac{\not{k} + M}{\not{k} + M} = \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2}, \quad (3.51)$$

no qual

$$\not{k} + M = \gamma^\mu k_\mu + \mathbf{1}M. \quad (3.52)$$

Utilizando o conjunto do teorema de traço⁹ teremos

$$\operatorname{Tr}(\not{k} + M) = \operatorname{Tr}(\gamma^\mu k_\mu + \mathbf{1}M) = \underbrace{\operatorname{Tr} \gamma^\mu k_\mu}_0 + \operatorname{Tr} \mathbf{1}M = 4M. \quad (3.53)$$

⁹CF: David Griffiths: *Introduction to elementary Particles* [25].

Logo ficamos como:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -4iN_c N_s M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2}. \quad (3.54)$$

Um bom método que serve para indicar o grau de divergência é a contagem de potências da variável de integração, em que contamos o número de potências no numerador (incluindo a potência no elemento de integração) e o número de potências que há no denominador. A diferença irá nos fornecer o *grau superficial de divergência*¹⁰.

A integral anterior, por meio da contagem de potências, possui grau de divergência quadrática, implicando na necessidade de utilização de um método de regularização. Existem inúmeros métodos de regularização, sendo elas do tipo Pauli-Villars, Dimensional, Implícita etc. Entretanto, iremos utilizar neste trabalho a regularização do tipo *sharp cut-off* por ser simples e não acarretar em efeitos colaterais significativos, como a capacidade de quebrar a simetria do modelo se não tomar precauções.

Por meio da equação 3.54 podemos perceber que o modelo de NJL não é uma teoria renormalizável, nota-se que na parte cinética da lagrangiana de NJL, equação 3.1, que o momento é linear, portanto, era esperado uma divergência linear do momento na equação de gap ou condensado de quarks. Entretanto, a equação anterior nos mostra uma divergência quadrática.

Para resolvermos a integral 3.54 devemos levar-la do espaço de Minkowsky para o espaço Euclidiano. Para fazermos isso, utilizamos a rotação de Wick, processo no qual realiza uma rotação no eixo temporal para o plano complexo. Tal procedimento resulta na mudança do contorno de integração no plano complexo contornando os polos que aparecem ao longo do eixo real como se pode notar na Figura 3.2 [13][44].

$$\begin{aligned} k_0 &= ik_4 \rightarrow k_0^2 = -k_4^2, \\ k^2 &= k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \\ &= -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \\ &= -k_E^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

O elemento diferencial no espaço quadridimensional é reescrito como:

$$d^4k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 = idk_4 dk_1 dk_2 dk_3 = id^4k_E \quad (3.56)$$

¹⁰CF: Apêndice A

e alterando para coordenadas hipersféricas¹¹

$$d^4k_E = k^3 dk \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 d\phi, \quad (3.57)$$

no qual θ_1 e θ_2 variam de 0 a π e ϕ varia de 0 e 2π .

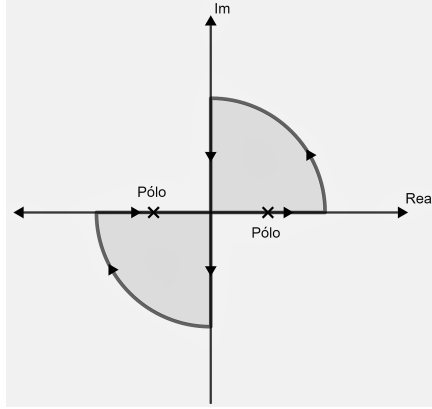


Figura 3.2: Integração do plano complexo com os pólos no eixo real.

Aplicando a rotação de Wick em 3.54 mudando para coordenadas hipersféricas, obteremos:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = 4i^2 N_c N_s M \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\infty dk d\theta_1 d\theta_2 d\phi \frac{k^3 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2}{k^2 + M^2}. \quad (3.58)$$

Ao realizarmos as integrações nas variáveis angulares, adquirimos:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{k^2 + M^2}. \quad (3.59)$$

Porém, a integral da equação 3.59 diverge quadraticamente quando k tende para o infinito. Assim utilizamos a regularização via *cutoff* como já havíamos mencionado, tal processo possibilita uma mudança no limite de integração, ou seja, iremos integrar até um valor “ Λ ” que será um parâmetro do modelo. Portanto, o condensado de quarks será:

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{k^2 + M^2}. \quad (3.60)$$

Para resolvermos a integral da equação 3.60, adicionamos e subtraímos kM^2 em seu

¹¹No nosso caso trabalhamos com coordenadas hipersféricas em quatro dimensões. Mas se o leitor possui curiosidade a respeito da forma geral das coordenadas hipersféricas, lhe convido a visitar o Apêndice A deste trabalho.

numerador.

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle &= -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3 + kM^2 - kM^2}{k^2 + M^2} \\
&= \frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k(k^2 + M^2) - kM^2}{k^2 + M^2} \\
&= \frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \left[\int_0^\Lambda dk k - M^2 \int_0^\Lambda dk \frac{k}{k^2 + M^2} \right].
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -\frac{N_c N_s M}{4\pi^2} \left[\Lambda^2 - M^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right]. \quad (3.61)$$

Percebe-se que o valor esperado do condensado de quarks é diferente de zero, que advém da quebra de simetria quiral. E por meio da 3.61 com 3.44 pode-se encontrar a massa constituinte dos quarks.

$$M = m + \frac{GN_c N_s M}{4\pi^2} \left[\Lambda^2 - M^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right]. \quad (3.62)$$

3.5 Auto-energia do méson pi

Podemos obter a correção da massa do pión por meio do cálculo da Auto-energia. Portanto, o raciocínio inicia-se por meio da densidade de lagrangiana. Uma vez que a ação efetiva é representada por:

$$S_{ef} = \int \mathcal{L}_{ef} d^4x, \quad (3.63)$$

no qual \mathcal{L} é a lagrangiana efetiva ou a densidade de lagrangiana, comparando a equação acima com a 3.31 adquirimos:

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \frac{1}{G} \sigma s - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\not{\partial} - M} \right) \right] \quad (3.64)$$

Realizando a expansão do logaritmo por meio de uma serie de Taylor

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \frac{1}{G}\sigma s -$$

$$-i \text{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right) - \frac{1}{2} \left(\Sigma \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\Sigma \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right)^3 + \dots \right], \quad (3.65)$$

onde

$$\Sigma = \sigma + i\pi\gamma_5\vec{\tau}, \quad (3.66)$$

a partir deste ponto, vamos reagrupar a lagrangiana de forma distinta em relação ao tópico anterior.

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma s + \frac{1}{2G} \left[-1 + iG \text{Tr} \left(\frac{1}{i\not{\partial} - M} \right)^2 \right] \sigma^2 +$$

$$+ \frac{1}{2G} \left[-1 + iG \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right)^2 \right] \pi^2 + \dots . \quad (3.67)$$

Repare que alguns termos foram retirados do cálculo do traço, pois eles são grandezas escalares como o σ e pseudo-escalar como o π . Porém, o vetor de Pauli é uma soma de matrizes de Pauli com seus respectivos versores, que quando elevados ao quadrado, resulta em uma matriz identidade. Tal matriz está oculta dentro do segundo traço da lagrangiana acima. Por mais informações conferir o Apêndice A.

Os traços presentes na equação 3.67 quando se encontra no espaço dos momentos, nos permite encontrar a amplitude de probabilidade dos diagramas de auto energia para o méson escalar e pseudo-escalar. Conseqüentemente vamos passá-los como:

$$\Sigma_S(p^2) = i \text{Tr} \left[\frac{1}{i\not{\partial} - M} \right]^2 \quad \text{e} \quad \Pi_{PS}(p^2) = i \text{Tr} \left[\frac{i\gamma_5}{i\not{\partial} - M} \right]^2. \quad (3.68)$$

Com objetivo de encontrar os campos físicos presentes na lagrangiana, a meta presente, é adquirir uma lagrangeana para o campo π que possua a seguinte aparência

$$\mathcal{L}_{ef} = (p^2 - m^2)\tilde{\pi}^2 + \dots . \quad (3.69)$$

Desta forma é necessário definir uma função

$$f(p^2) = \frac{1}{G} \left(-1 + G\Pi_{PS}(p^2) \right) \quad (3.70)$$

e expandir-la em torno de $p^2 = m^2$. Assim passamos a reescrever a lagrangiana como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef} &= -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma s + \frac{1}{2G}[-1 + G\Sigma_S(p^2)]\sigma^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2G}[-1 + G\Pi_{PS}(p^2)]\pi^2 + \dots \\ &= -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma s + \frac{1}{2G}[-1 + G\Sigma_S(p^2)]\sigma^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[f(m^2) + (p^2 - m^2)f'(m^2) + \dots\right]\pi^2 + \dots,\end{aligned}$$

colocando $f'(m^2)$ em evidência

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef} &= -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma s + \frac{1}{2G}[-1 + G\Sigma_S(p^2)]\sigma^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{f(m^2)}{f'(m^2)} + (p^2 - m^2) + \dots\right]f'(m^2)\pi^2 + \dots.\end{aligned}\quad (3.71)$$

Redefinindo o campo pseudo-escalar, $\tilde{\pi} = \pi\sqrt{f'(m^2)}$, e determinando

$$g_{PS\tilde{q}\tilde{q}}^{-1} \equiv \sqrt{f'(m^2)}.\quad (3.72)$$

Ficamos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef} &= -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma s + \frac{1}{2G}[-1 + G\Sigma_S(p^2)]\sigma^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{f(m^2)}{f'(m^2)} + (p^2 - m^2) + \dots\right]\tilde{\pi}^2 + \dots.\end{aligned}\quad (3.73)$$

Por meio da lagrangiana acima, após analisar o termo $\tilde{\pi}$ é possível redefinir um termo de massa m_{PS}^2 , que será o termo físico da massa

$$m_{PS}^2 = m^2 - \frac{f(m^2)}{f'(m^2)}.\quad (3.74)$$

Como a expansão em 3.70 foi realizada em torno de m^2 , podemos assumir que m pode possuir qualquer valor, neste caso será atribuído um valor físico da massa do méson pseudo-escalar, em outras palavras, $m^2 = m_{PS}^2$. Então

$$m_{PS}^2 = m_{PS}^2 - \frac{f(m_{PS}^2)}{f'(m_{PS}^2)} \Rightarrow f(m_{PS}^2) = 0.\quad (3.75)$$

Comparando a equação acima com a 3.70 encontramos tal relação

$$\left(-1 + G\Pi_{PS}(m_{PS}^2)\right) = 0, \quad (3.76)$$

que nos permite encontrar a massa do méson pseudo-escalar.

Para calcular o valor da amplitude Π_{PS} devemos transferir a expressão do espaço de posições para o espaço dos momentos, de maneira semelhante no qual foi realizada na obtenção da *Equação de Gap*.

Tomando a expressão 3.68, podemos reescrevê-la como

$$\Pi_{PS}(x^2) = i \text{Tr} \left[\left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \right], \quad (3.77)$$

vamos supor que os propagadores presentes no traço sejam operadores distintos

$$\Pi_{PS}(x^2) = i \text{Tr} \left[\underbrace{\left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right)}_{\hat{A}} \underbrace{\left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right)}_{\hat{B}} \right]. \quad (3.78)$$

Utilizando a mesma definição de traço de 3.45. Porém para dois operadores

$$\text{Tr} \hat{A}\hat{B} = \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \langle x | \hat{A} | y \rangle \langle y | \hat{B} | x \rangle. \quad (3.79)$$

Desta forma, Π_{PS} se modificará:

$$\Pi_{PS}(x^2) = i \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \left\langle x \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right| y \right\rangle \left\langle y \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right| x \right\rangle. \quad (3.80)$$

Por enquanto, realizaremos os mesmos passos da seção anterior. Utilizando novamente a relação de completiza

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle \langle k| = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} |k'\rangle \langle k'| = \mathbf{1}, \quad (3.81)$$

Identificando a relação de completiza na equação 3.80, temos:

$$\Pi_{PS}(x^2) = i \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left\langle x \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right| k \right\rangle \left\langle k \left| y \right\rangle \left\langle y \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right| k' \right\rangle \left\langle k' \left| x \right\rangle,\right.$$

sendo que

$$\langle x | k \rangle = e^{ikx}.$$

Então

$$\Pi_{PS}(x^2) = i \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left\langle x \left| i\gamma_5 e^{-iky} \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k \right\rangle \left\langle y \left| i\gamma_5 e^{-ik'x} \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k' \right\rangle,$$

alterando o propagador, ficamos com

$$\Pi_{PS}(x^2) = i \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} e^{-ik'(x-y)} i\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k}' - M}.$$

Para migrarmos do espaço de posição para o dos momentos, realizemos a Transformada de Fourier:

$$\Gamma(p) = \int d^4z e^{-ip \cdot z} \Gamma(z) \quad \text{no qual } z = x - y \quad (3.82)$$

no qual p representa o momento real das partículas que são as linhas externas presentes no diagrama, e os momentos virtuais responsáveis pelas linhas internas do diagrama, são representados por k e k' , que no nosso caso são os quarks. Tal diagrama pode ser visualizado na figura 3.3.

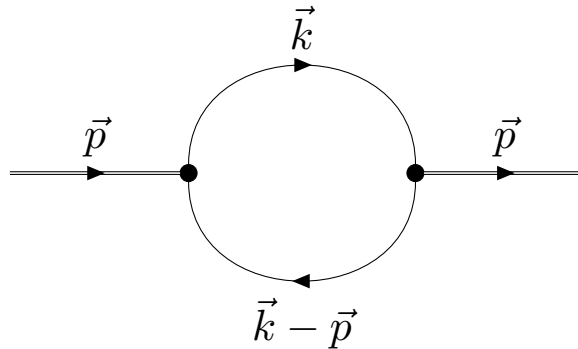


Figura 3.3: Diagrama de autoenergia do méson pseudoescalar.

Assim,

$$\Pi_{PS}(p^2) = i \text{Tr} \int d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ipz} e^{ik(x-y)} e^{-ik'(x-y)} i\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k}' - M}.$$

Como já havíamos utilizado anteriormente, na seção anterior, a função delta de Dirac possui a seguinte representação na sua forma integral

$$\int d^4z e^{iz(p-k+k')} = (2\pi)^4 \delta^4[(k-p) - k'], \quad (3.83)$$

substituindo a função delta de Dirac em $\Pi_{PS}(p^2)$, temos

$$\Pi_{PS}(p^2) = i \text{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k}' - M} (2\pi)^4 \delta^4[(k - p) - k']. \quad (3.84)$$

Realizando a integração em k'

$$\Pi_{PS}(p^2) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right]. \quad (3.85)$$

Calculando o traço no espaço de cores e sabores encontraremos $N_c = 3$ e $N_s = 2$. Portanto, sobra apenas calcular o traço no espaço de Dirac.

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) &= iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right], \\ &= -iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\gamma_5(\not{k} + M) \gamma_5[(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k^2 - M^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right\}, \end{aligned}$$

trocamos a posição da segunda matriz γ_5 e conseqüentemente adquirimos um sinal negativo multiplicando o parênteses em que se encontra \not{k} e \not{p} , e em seguida utilizamos a propriedade cíclica do traço para colocarmos a mesma para o início da expressão. Assim o produto de duas matrizes γ_5 resulta numa matriz identidade

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) &= -iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\gamma_5 \gamma_5 (\not{k} + M) [-(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k^2 - M^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\ &= -iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\mathbb{1}(\not{k}\not{p} - \not{k}^2 - \not{k}M + M\not{p} + \not{k}M + M^2)}{(k^2 - M^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right\}, \end{aligned}$$

Agora aplicamos o teorema dos traços[25]. E desta forma sabemos que o traço do produto de números ímpar de matrizes gamma é zero. Ou seja:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu k_\mu M) = \text{Tr}(M \gamma^\mu p_\mu) = \text{Tr}(\gamma^\mu k_\mu M) = 0,$$

e o resultado dos traços dos termos restantes presentes na integral será

$$\begin{aligned} \text{Tr}(-\not{k}^2 + \not{k}\not{p} + IM^2) &= -\text{Tr}(\not{k}\not{k}) + \text{Tr}(\not{k}\not{p}) + \text{Tr}(IM^2) \\ &= -4k^2 + 4k \cdot p + 4M^2 \\ &= 4[-k(k - p) + M^2] \\ &= -4[k(k - p) - M^2]. \end{aligned}$$

Portanto, teremos a seguinte integral:

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - M^2}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]}. \quad (3.86)$$

O próximo passo é resolver a integral, um objetivo bem simples, mas um procedimento trabalhoso. A integral acima possui divergências quadráticas, linear e logarítmicas. E também possui um produto de termos distintos presentes no denominador. Para prosseguir no cálculo, passamos a utilizar a técnica conhecida como parametrização de Feynman.

Por meio da parametrização de Feynman, podemos reescrever uma fração onde há um produto de termos presentes no denominador. Esta identidade é apresentada como:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x + b]^2}. \quad (3.87)$$

Retirando uma fração na integral 3.86 e nomeando-a de I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]}, \quad (3.88)$$

neste momento definimos

$$a = (k-p)^2 - M^2 \quad \text{e} \quad b = k^2 - M^2,$$

e utilizando a parametrização de Feynman, obteremos

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{\{[(k-p)^2 - M^2 - k^2 + M^2]x + k^2 - M^2\}^2}. \quad (3.89)$$

Para simplificar o denominador é preciso adicionar e subtrairmos a quantidade p^2x^2 . Assim

$$k^2 - 2pkx = k^2 - 2pkx + p^2x^2 - p^2x^2 = (k - px)^2 - p^2x^2.$$

Desta forma, chegamos em

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k - px)^2 - p^2x^2 + p^2x - M^2]^2}. \quad (3.90)$$

Agora definiremos uma nova função ξ^2 para simplificar a integral I_1

$$\xi^2 = p^2x^2 - p^2x + M^2, \quad (3.91)$$

e posteriormente adquirimos a integral I_1 muito bem simplificada

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k - px)^2 - \xi^2]^2}. \quad (3.92)$$

Por meio da obtenção de I_1 podemos voltar aplica-lo em 3.86, assim teremos:

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - M^2}{[(k-px)^2 - \xi^2]^2}. \quad (3.93)$$

Neste ponto podemos realizar uma mudança de variável $k \rightarrow k + px$, e com consequência a mudança dos limites de integração em k nos leva ao aparecimento dos *termos de superfície*. Fenômeno responsável pelo título do capítulo e uns dos principais objetivo deste trabalho.

Entretanto é de suma importância a noção de que dependendo do esquema de regularização, os termos de superfície podem ser eliminados como por exemplo a regularização dimensional. Porém já possuímos conhecimento por meio de trabalhos anteriores que os termos de superfície são fundamentais para obtenção de dados numéricos mais acurados do modelo[24][26]. Por essa razão iremos permanecer com os termos de superfície e adotaremos a regularização via *sharp cut-off*.

Voltando para relação de substituição $k \rightarrow k + px$, que é na realidade um processo de translação, que pode ser representada por meio de uma operação de translação do tipo $\exp\left[l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right]$, este operador pode ser escrito através de uma expansão em série [37]:

$$\begin{aligned} S(k+l) &= \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) S(k) \\ &= S(k) + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} S(k) + \frac{l_\mu l_\nu}{2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} S(k) + \dots \end{aligned} \quad (3.94)$$

Os termos com derivadas são conhecidos como termos de superfície [37]. E como já havia sido comentado, vamos utilizar o procedimento via sharp cut-off, e por meio desta regularização poderemos como devemos calcular esses termos para visualizar os seus efeitos nos observáveis físicos. Assim exigimos que $l = -px$ e $l_\mu = -p_\mu x$, e portanto, teremos as

seguintes translações de $k + l \rightarrow k$ e $k \rightarrow k - l$. Então:

$$\begin{aligned}
\Pi_{PS}(p^2) &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - M^2}{[(k-px)^2 - \xi^2]^2} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - M^2}{[(k+l)^2 - \xi^2]^2} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) \left\{ \frac{(k-l)(k-l-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right\} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k-l)(k-l-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} + \right. \\
&\quad \left. + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k-l)(k-l-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k-l)(k-l-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right\},
\end{aligned}$$

substituindo os valores de l e l_μ teremos

$$\begin{aligned}
\Pi_{PS}(p^2) &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k+px)(k+px-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} + \right. \\
&\quad \left. - p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k+px)(k+px-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k+px)(k+px-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right\}. \quad (3.95)
\end{aligned}$$

Para facilitar a resolução das integrais presentes em 3.95, dividiremos a equação anterior em parcelas. A primeira parcela será $\Pi_1(p^2)$

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k+px)(k+px-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right\} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{k^2 + k(2px-p) + p^2x(x-1) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right\}. \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Percebe-se que o denominador da integral é par e os termos lineares presente no numerador resultarão em funções ímpares, que em domínios de integrações simétricas resultarão sempre em soluções nulas. Ou seja

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(2px-p)}{[k^2 - \xi^2]^2} = 0. \quad (3.97)$$

Após o procedimento anterior, adquirimos a seguinte integral da equação 3.96

$$\Pi_1 = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + p^2 x(x-1) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2}. \quad (3.98)$$

Utilizando a rotação de Wick para permutar do espaço de Minkowsky para o espaço Euclideano, transferindo para as coordenadas hiperesférica e logo em seguida integrando a variável k até o valor limite de corte Λ , obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{k^3 [k^2 + p^2 x(x-1) - M^2]}{[k^2 + \xi^2]^2} \\ &= -\frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{[k^2 + \xi^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + [p^2 x(x-1) - M^2] \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + \xi^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Nota-se que há duas integrais que dependem da variável k para serem resolvidas. A técnica para solucionar-las é análogo ao procedimento realizado na subseção anterior, adicionando e subtraindo termos em seus numeradores com a meta de completar quadrados. Desta forma, suas soluções serão:

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{[k^2 + \xi^2]^2} &= \left\{ \frac{k^2}{2} - \frac{\xi^4}{2[k^2 + \xi^2]} - \xi^2 \ln [k^2 + \xi^2] \right\} \Big|_0^\Lambda \\ &= \frac{2\xi^2 \Lambda^2 + \Lambda^4}{2[\xi^2 + \Lambda^2]} - \xi^2 \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right], \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + \xi^2]^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi^2}{k^2 + \xi^2} + \ln(k^2 + \xi^2) \right\} \Big|_0^\Lambda \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] - \frac{\Lambda^2}{\xi^2 + \Lambda^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituindo os resultados das integrais na equação 3.99 passamos a obter:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{N_c N_s}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] [M^2 + 2\xi^2 - p^2 x(x-1)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Lambda [M^2 + 2\xi^2 - p^2 x(x-1) + \Lambda^2]}{\xi^2 + \Lambda^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Neste ponto, iremos iniciar o cálculo dos termos de superfície para compreender os

seus efeitos na auto-energia do méson. Como já havia comentado, os termos de superfície são retirados da equação 3.95 e eles são:

$$\begin{aligned}
\Pi_{TS} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k+px)(k+px-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k+px)(k+px-p) - M^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right\} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + kp(2x-1) + p^2 x(x-1) - M^2}{(k^2 - \xi^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + kp(2x-1) + p^2 x(x-1) - M^2}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots \right\}. \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Temos conhecimento por meio de trabalhos anteriores, que os termos que possuem divergências logarítmicas e os termos que são convergentes não possuem termos de superfície[5][45]. Portanto, precisamos apenas calcular.

$$\begin{aligned}
\Pi_{TS} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + kp(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + kp(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots \right\}. \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Primeiramente, vamos trabalhar com os termos quadraticamente divergentes. Adicionando e subtraindo ξ^2 com a finalidade de simplificar a equação acima

$$\begin{aligned}
\Pi_{TS}^{(2)} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + \xi^2 - \xi^2}{(k^2 - \xi^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + \xi^2 - \xi^2}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots \right\} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]} - \frac{\xi^2}{(k^2 - \xi^2)^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]} - \frac{\xi^2}{(k^2 - \xi^2)^2} \right] + \dots \right\}. \tag{3.105}
\end{aligned}$$

Como já foi apresentado anteriormente por outras referências, termos que possuem divergências logarítmicas dos termos de superfície se anulam. Assim simplificamos os termos

adquiridos no passo anterior. Desta forma

$$\begin{aligned} \Pi_{TS}^{(2)} = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Passamos a realizar as derivadas, mas com o objetivo de facilitar os cálculos, vamos realizar as aplicações separadamente. Entretanto para aplicarmos as derivadas é necessário trocar os índices de Lorentz

$$-p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]} = -p_\mu x \frac{-2k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} = 2p_\mu x \frac{k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2}, \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]} &= \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{-2k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} = -p_\nu p_\mu x^2 \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} \\ &= -p_\nu p_\mu x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + k^\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] \\ &= -p_\nu p_\mu x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + k^\mu \frac{-2(2k^\nu)}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] \\ &= p_\nu p_\mu x^2 \left[\frac{-g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + 4 \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Substituindo os resultados na integral 3.106 passamos a obter

$$\begin{aligned} \Pi_{TS}^{(2)} = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ 2p_\mu x \frac{k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} + \right. \\ \left. + p_\nu p_\mu x^2 \left[\frac{-g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + 4 \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Nota-se que o limite de integração na variável k é simétrico, e o mais importante é que o primeiro termo da integral é ímpar, ou seja, a sua solução é nula. Portanto o termo de superfície ficará com a seguinte aparência

$$\Pi_{TS}^{(2)} = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} p_\nu p_\mu x^2 \left\{ \frac{-g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + 4 \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} \right\}. \quad (3.110)$$

Eis a questão, como podemos realizar a integral do termo da expressão acima? Vamos

capturar apenas o segundo termo da integral e defini-lo como $I^{\mu\nu}$:

$$I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3}. \quad (3.111)$$

Por questão de simetria, vamos dizer que a integral seja proporcional à métrica do sistema.

$$I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} = \alpha g^{\mu\nu}, \quad (3.112)$$

multiplicando ambos os lados pela métrica por $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = \int d^4k \frac{g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} = \alpha g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4\alpha. \quad (3.113)$$

Concluimos que o valor de α será

$$\alpha = \frac{1}{4} \int d^4k \frac{k^2}{[k^2 - \xi^2]^3}, \quad (3.114)$$

e conseqüentemente o valor de $I_{\mu\nu}$

$$I^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int d^4k \frac{k^2}{[k^2 - \xi^2]^3}. \quad (3.115)$$

Com objetivo de simplificar a integral, adicionamos e subtraímos ξ^2 no numerador

$$I^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int d^4k \left\{ \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{\xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \right\}. \quad (3.116)$$

Substituindo este resultado na equação 3.110

$$\begin{aligned} \Pi_{TS}^{(2)} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} p_\nu p_\mu x^2 \left\{ \frac{-g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{g^{\mu\nu} \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \right\} \\ \Pi_{TS}^{(2)} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} p_\nu p_\mu x^2 \frac{g^{\mu\nu} \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Realizando a rotação de Wick, transferindo para as coordenadas hiperesféricas, e integrando até a variável de corte Λ .

$$\Pi_{TS}^{(2)} = \frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk k^3 (px)^2 \frac{\xi^2}{[k^2 + \xi^2]^3}. \quad (3.118)$$

Solucionando a integral na variável em k , encontramos

$$\Pi_{TS}^{(2)} = \frac{N_c N_s}{8\pi^2} \int_0^1 dx p^2 x^2 \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \xi^2)^2}. \quad (3.119)$$

Agora vamos encontrar a colaboração do termo linear para os termos de superfície. Então

$$\begin{aligned} \Pi_{TS}^{(1)} = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ -p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{kp(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{kp(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Seguindo os mesmos passos, vamos realizar as derivadas separadamente

$$-p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{kp(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} = x^2(2x-1)p_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu p_\nu}{(k^2 - \xi^2)^2}, \quad (3.121)$$

$$\frac{1}{2} p_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} p_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{kp(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} = x^2(2x-1)p^2 \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{(k^2 - \xi^2)^2} - 4 \frac{k^2}{(k^2 - \xi^2)^3} \right]. \quad (3.122)$$

A segunda derivada será descartada, pois as funções possuem divergências logarítmicas, não contribuindo para os termos de superfícies. Nota-se que a integral 3.121 é semelhante a equação 3.108 e seu resultado encontra-se na 3.119. Desta forma, adquirimos

$$\Pi_{TS}^{(1)} = \frac{N_c N_s}{8\pi^2} \int_0^1 dx p^2 x(2x-1) \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \xi^2)^2}. \quad (3.123)$$

Por meio dos resultados de $\Pi_{TS}^{(1)}$, $\Pi_{TS}^{(2)}$ e Π_1 podemos determinar Π_{PS} , portanto:

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) = \frac{N_c N_s}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] \left[M^2 + 2\xi^2 - p^2 x(x-1) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\Lambda^2 [M^2 + 2\xi^2 - p^2 x(x-1) + \Lambda^2]}{\xi^2 + \Lambda^2} + \frac{p^2 x^2}{2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \xi^2)^2} + \right. \\ \left. + (2x^2 - x) \frac{p^2}{2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + \xi^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

O resultado acima é de suma importância já que é necessário para obter os resultados numéricos para obtenção da auto-energia, e assim, como determinar o valor da constante de acoplamento por meio da equação 3.72.

3.6 Constante de decaimento fraco

A constante de decaimento fraco do pión é um dos elementos indispensáveis do modelo de NJL, pois seu valor experimental é bem conhecido e conseqüentemente se tornando um parâmetro de ajuste dos observáveis do modelo. De acordo com o modelo de quark, o decaimento do pión é apresentado por meio da seguinte equação

$$\pi^\pm \rightarrow l^\pm + \bar{\nu}_l. \quad (3.125)$$

Em que l pode ser um múon ou um elétron, que é o cerne deste subcapítulo. Sabemos por meio da literatura que a energia da constante de decaimento fraco do pión é de 93 MeV[25].

Após esta minúscula introdução, é utilizando o elemento de matriz da corrente axial, entre o estado de um pión e o estado de vácuo que encontra-se a constante de decaimento fraco do pión[28][54].

$$\langle 0 | J_{5\mu}^a | \pi \rangle = i p_\mu f_\pi. \quad (3.126)$$

A lagrangiana original do modelo de NJL em SU(2) não possui dados suficientes para o cálculo de um decaimento leptônico. Para isso é necessário a introdução de um termo de corrente axial na lagrangiana. A lagrangiana fermiônica 3.1 se tornará:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) \left(i \not{\partial} - m + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_a^{5\mu} \right) \Psi(x) + G \left[(\bar{\Psi}(x) \Psi(x))^2 + (\bar{\Psi}(x) i \gamma_5 \tau^a \Psi(x))^2 \right]. \quad (3.127)$$

Realizando os mesmos passos das seções anteriores (Bosonização do modelo de NJL e Expansão da Ação Efetiva), encontramos a seguinte ação efetiva

$$S_{ef} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{1}{G} \sigma s \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \Sigma \frac{1}{i \not{\partial} - M} \right) \right], \quad (3.128)$$

com

$$\Sigma = \sigma + i \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_a^{5\mu}.$$

Antes de prosseguir para obtenção da Lagrangiana efetiva, iremos realizar a seguinte modificação na ação efetiva. Nota-se que os campos σ e π pode ser acompanhado por uma constante de acoplamento g_0 . Assim temos que $\sigma, \pi \rightarrow g_0(\sigma, \pi)$ e $G = \frac{g_0^2}{\mu_0^2} \Rightarrow \mu_0^2 = \frac{g_0^2}{G}$.

Então

$$S_{ef} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \mu_0^2 \sigma s \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \right], \quad (3.129)$$

e passamos a ter um novo valor para Σ

$$\Sigma = g_0 \sigma + i g_0 \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_a^{5\mu}. \quad (3.130)$$

Seguiremos os procedimentos apresentados na seção da Auto-energia do méson pi. Desta forma, por meio da ação efetiva encontramos a Lagrangiana efetiva com a corrente axial

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2 \sigma s - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \right]. \quad (3.131)$$

Realizamos a expansão do traço análoga a equação 3.65

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & -\frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2 \sigma s - i \text{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \right] + \\ & + i \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \left(\Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right)^2 \right] - i \text{Tr} \left[\frac{1}{3} \left(\Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right)^3 \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.132)$$

Até neste ponto, eu posso até especular que o leitor já esteja condicionado a repetir o mesmo procedimento da seção anterior. Se caso este foi o seu palpite, de certa forma não está completamente equivocado, do mesmo modo que foi realizado na seção antecedente é necessário reagrupar de uma maneira especial. Para realizar o reagrupamento exato é necessário visualizar o digrama responsável pela constante de decaimento fraco.

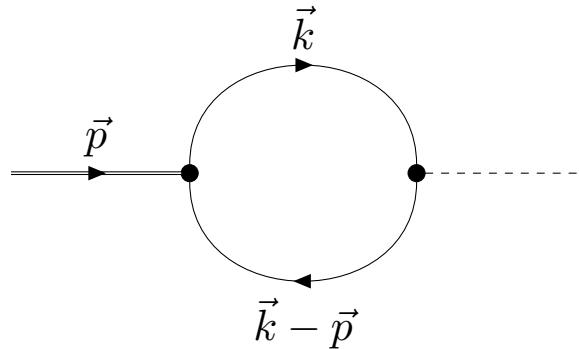


Figura 3.4: Diagrama do decaimento fraco do píon.

Analisando o diagrama presente na figura 3.4, concluímos que necessitamos apenas dos termos proporcionais a $\pi J_{5\mu}^a$ e $J_{5\mu}^a \pi$, pois há apenas um vértice pseudo-escalar e um vértice relacionado a corrente axial, em outras palavras, o segundo vértice demonstra a

interação fraca. Assim podemos reagrupar a equação 3.132 na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & \left[-\frac{\mu_0^2}{2} + ig_0 \text{Tr} \left(\frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right)^2 \right] \sigma^2 + \left[-\frac{\mu_0^2}{2} + ig_0 \text{Tr} \left(\frac{i\gamma_5}{i\cancel{\partial} - M} \right)^2 \right] \pi^2 + \\ & + \frac{i}{4} g_0 \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) \pi J_{5\mu}^a + \frac{i}{4} g_0 \text{Tr} \left(\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) J_{5\mu}^a \pi + \dots \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade cíclica dos Traços, percebemos que os termos proporcionais a $\pi J_{5\mu}^a$ e $J_{5\mu}^a \pi$ são idênticos, somando ambos os termos, obtemos o conteúdo relacionado a constante de decaimento fraco, que é representado por:

$$\frac{ig_0}{2} \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right) \pi J_a^{5\mu}, \quad (3.133)$$

realizando uma mudança na constante de acoplamento $g_0 \rightarrow g_{\pi\bar{q}q}$ e igualando com $ip_\mu f_\pi$. Adquirimos a equação da constante de decaimento.

$$ip_\mu f_\pi = i \frac{g_{\pi\bar{q}q}}{2} \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right). \quad (3.134)$$

Daqui em diante, as táticas a serem utilizadas são análogas aos procedimentos efetuados desde da equação 3.77 até a equação 3.84. Lembre-se que durante estas etapas, reescrevemos o traço por meio da propriedade 3.45, mas para dois operadores, utilizamos a relação de completeza, aplicamos a transformada de Fourier, e empregamos a função delta de Dirac. Esses passos são necessários para que possamos encontrar uma equação semelhante ao resultado 3.85. Se os passos forem respeitados adquirimos:

$$ip_\mu f_\pi = -\frac{g_{\pi\bar{q}q}}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k} - M} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{\cancel{k} - \cancel{p} - M} \right]. \quad (3.135)$$

Calculando o traço no espaço de cores e sabores, encontraremos $N_c = 3$ e $N_s = 2$. Portanto, sobra apenas calcular o traço no espaço de Dirac.

$$\begin{aligned} ip_\mu f_\pi = & -g_{\pi\bar{q}q} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[\frac{\gamma_5}{\cancel{k} - M} \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{\cancel{k} - \cancel{p} - M} \right] \\ = & -g_{\pi\bar{q}q} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\gamma_5 (\cancel{k} + M)}{k^2 - M^2} \frac{\gamma_\mu \gamma_5 [(\cancel{k} - \cancel{p}) + M]}{(k - p)^2 - M^2} \right\} \\ = & -g_{\pi\bar{q}q} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\gamma_5 \gamma_5 (\cancel{k} + M) \gamma_\mu [-(\cancel{k} - \cancel{p}) + M]}{(k^2 - M^2) [(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\ = & -g_{\pi\bar{q}q} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\mathbb{1} (-\cancel{k} \gamma_\mu \cancel{k} + \cancel{k} \gamma_\mu \cancel{p} + \cancel{k} \gamma_\mu M - M \gamma_\mu \cancel{k} + M \gamma_\mu \cancel{p} + M \gamma_\mu M)}{(k^2 - M^2) [(k - p)^2 - M^2]} \right\}, \end{aligned}$$

utilizando as propriedades dos traços presentes em [25], teremos alguns termos que serão nulos pois os traços de produtos ímpares de matrizes gamas são nulos.

$$\text{Tr}(\not{k}\gamma_\mu\not{k}) = \text{Tr}(\not{k}\gamma_\mu\not{p}) = \text{Tr}(M\gamma_\mu M) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{k}\gamma_\mu M - M\gamma_\mu\not{k} + M\gamma_\mu\not{p}) &= \text{Tr}(\not{k}\gamma_\mu M) - \text{Tr}(M\gamma_\mu\not{k}) + \text{Tr}(M\gamma_\mu\not{p}) \\ &= 4k_\mu M - 4Mk_\mu + 4Mp_\mu \\ &= 4Mp_\mu. \end{aligned}$$

Após a resolver os traços no espaço de cor, de sabores e de Dirac, encontramos

$$ip_\mu f_\pi = -4g_{\pi\bar{q}q}N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mp_\mu}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]}. \quad (3.136)$$

Conforme já foi apontado, é necessário fazer uso da parametrização de Feynman quando há presente no denominador, produtos de termos distintos. Contudo, é importante notar que o denominador da equação acima é idêntico ao denominador da equação anterior 3.86. Por questão de comodidade e também de tempo, não é necessário realizar por etapas a parametrização na equação acima, pois o resultado encontrado será o mesmo que o da equação 3.92. Desta forma iremos apenas utilizar o resultado anterior que é apresentado como:

$$\frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k-px)^2 - \xi^2]^2}.$$

sendo que

$$\xi^2 = p^2x^2 - p^2x + M^2.$$

Após realizar a parametrização obtemos

$$ip_\mu f_\pi = -4g_{\pi\bar{q}q}N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mp_\mu}{[(k-px)^2 - \xi^2]^2}. \quad (3.137)$$

Neste ponto realizamos um processo de translação na variável k do tipo $k \rightarrow k + px$. Todavia, tal processo é equivalente a aplicação de um operador de translação com a seguinte característica $\exp\left[l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right]$. E da mesma forma que foi efetuado em 3.95 utilizando a expansão 3.94, iremos realizar com a equação 3.137. Então exigimos que $l = -px$,

$l_\mu = p_\mu x$ e conseqüente a translação será $k + l \rightarrow k$ e $k \rightarrow k - l$.

$$\begin{aligned}
ip_\mu f_\pi &= -4g_{\pi\bar{q}q}N_c \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mp_\mu}{[(k - px)^2 - \xi^2]^2} \\
&= -4g_{\pi\bar{q}q}N_c \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Mp_\mu}{[(k + l)^2 - \xi^2]^2} \\
&= -4g_{\pi\bar{q}q}N_c \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) \left\{ \frac{Mp_\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} \right\} \\
&= -4g_{\pi\bar{q}q}N_c Mp_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right\}. \tag{3.138}
\end{aligned}$$

Para facilitar a resolução das integrais presente na equação acima, iremos dividir em duas equações distintas, em que a primeira integral a ser resolvida, não é os termos de superfície.

$$I_f = -4g_{\pi\bar{q}q}N_c Mp_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2}. \tag{3.139}$$

Realizando a rotação de Wick, alterando para as coordenadas hiperesféricas e integrando até a variável de corte “ Λ ”, obteremos:

$$I_f = \frac{i}{2\pi^2} g_{\pi\bar{q}q} N_c Mp_\mu \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + \xi^2]^2}, \tag{3.140}$$

adicionando e subtraindo $k\xi^2$ no numerador

$$\begin{aligned}
I_f &= \frac{i}{2\pi^2} g_{\pi\bar{q}q} N_c Mp_\mu \int_0^1 dx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi^2}{k^2 + \xi^2} + \ln [k^2 + \xi^2] \right\} \Big|_0^\Lambda \\
&= \frac{i}{4\pi^2} g_{\pi\bar{q}q} N_c Mp_\mu \int_0^1 dx \left\{ \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \xi^2} \right\}. \tag{3.141}
\end{aligned}$$

O resultado acima está relacionado com a constante de decaimento fraco do pión com ausência dos termos de superfície. Neste momento, iremos calcular os termos de superfície.

$$\begin{aligned}
I_{fTS} &= -4g_{\pi\bar{q}q}N_c Mp_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right\}. \tag{3.142}
\end{aligned}$$

Repare que as parcelas presentes no termos de superfícies possuem divergências logarítmicas e tais parcelas resultam em zero antes das aplicações das derivadas [5][45]. Assim não há termos de superfícies para o cálculo da constante de decaimento fraco do pión. Diferente do káon contido na simetria SU(3), que possui termos de superfície e eles resultam numa acurácia na obtenção da constante de decaimento fraco, como pode ser averiguado na literatura[24].

A constante de decaimento do pión utilizando o propagador para obtenção dos termos de superfície

$$ip_\mu f_\pi = \frac{i}{4\pi^2} g_{\pi\bar{q}q} N_c M p_\mu \int_0^1 dx \left\{ \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \xi^2} \right\}. \quad (3.143)$$

Quando consideramos os termos de superfície na obtenção dos observáveis físicos, podemos adquirir uma melhora na acurácia. Porém a introdução dos termos de superfície pode implicar na perda da invariância por roteamento, ou melhor, ordem a ordem nos roteamentos distintos na expansão perturbativa podem acarretar em resultados diferentes. Por sorte a constante de decaimento não será afetada, mas não podemos dizer o mesmo a respeito da auto energia do méson.

CAPÍTULO

4

O FATOR DE FORMA ELETROMAGNÉTICO

“O oposto de uma afirmação correta é uma afirmação falsa. Mas o oposto de uma verdade profunda pode ser outra verdade profunda”.

-Niels Bohr.

4.1 Introdução ao conceito de Fator de Forma

No final do século XIX havia uma gama de perguntas que atormentavam os cientistas e por consequência se deu origem a Física Moderna, começando da Antiga Teoria Quântica até Física a atual. Exemplos de genialidades presentes na antiga teoria quântica são as origens, causas e explicações dos modelos atômicos. São tais modelos que possuem os objetivos de compreender do que a matéria é feita e os fenômenos relacionados. Todavia, é diante do surgimento do modelo atômico de Rutherford que passamos a adquirir conhecimento para uma compreensão mais nítida do raio atômico e ferramentas para mensurar o núcleo de um átomo [14].

Com a ascensão dos conhecimentos presentes na mecânica quântica, e, por consequência, o desenvolvimento de novos modelos atômicos e suas extensões na Física Nuclear¹, pas-

¹O modelo da Gota Líquida.

samos a compreender com mais clareza o cosmos da mecânica quântica, e, desta forma, as partículas sub-atômicas deixam de ser classicamente compreensíveis conforme era nos modelos atômicos presentes na Antiga Teoria Quântica². Elas agora passam a ter uma identidade abstrata. Em outras palavras, átomos e demais partículas sub-atômicas deixam de ser esferas massivas sólidas com arquiteturas muito bem compreensíveis e localizadas. E, em decorrência dessas características, o raio atômico passa a ser calculado por meio do valor esperado da coordenada média do elétron de valência mais afastado do núcleo.

Atualmente, a técnica utilizada para determinação do raio de um núcleo, é realizada por meio de um processo de espalhamento de elétrons, pois apresenta vantagens em relação a técnica de Rutherford [57]. De forma objetiva, é por meio da técnica de espalhamento de elétrons, que podemos encontrar com precisão tanto o raio atômico como a distribuição de cargas presente no núcleo. Estes estudos relacionados às propriedades nucleares é o que representa aproximadamente a ideia do *fator de forma*.

4.2 Cálculo do Fator de Forma Eletromagnético

A lagrangiana do modelo de NJL não possui todas informações necessárias para obtenção do fator de forma eletromagnético. Da mesma forma que foi realizado no capítulo anterior na seção da Constante de decaimento fraco, iremos introduzir um novo termo na lagrangiana, mas de interação vetorial, pois almejamos interações entre dois férmions e um fóton.

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\rlap{-}/\partial - m + ieJ_\mu\gamma^\mu) \Psi(x) + G \left[(\bar{\Psi}(x)\Psi(x))^2 + (\bar{\Psi}(x)i\gamma_5\tau^a\Psi(x))^2 \right]. \quad (4.1)$$

Após a realização da bosonização do modelo, adquirimos a seguinte ação efetiva:

$$S_{ef} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2}\mu_0^2(\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2\sigma s \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \Sigma \frac{1}{i\rlap{-}/\partial - M} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Utilizando a ação efetiva encontramos a Lagrangiana efetiva com a interação vetorial

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2}\mu_0^2(\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2\sigma s - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \Sigma \frac{1}{i\rlap{-}/\partial - M} \right) \right]. \quad (4.3)$$

onde

$$\Sigma = g_0\sigma + ig_0\pi\gamma_5\tau^a + ieJ_\mu\gamma^\mu. \quad (4.4)$$

Realizando a expansão em série de Taylor no logaritmo contido no traço adquirimos

²Tais modelos atômicos são os de Thompson, Rutherford, Bohr e Sommerfeld.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & -\frac{1}{2}\mu_0^2(\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2\sigma s - i \operatorname{Tr} \left[\left(\Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) - \right. \\ & \left. -\frac{1}{2} \left(\Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\Sigma \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na seção anterior, percebemos que o fator de forma para o decaimento fraco do pión estava contida na lagrangiana expandida, na qual utilizamos apenas o diagrama relacionado a tal fenômeno para reagrupar os termos presentes da lagrangiana efetiva. O mesmo processo será utilizado neste momento, o diagrama responsável pelo fator de forma eletromagnético está representado na figura 4.1, e nota-se que o diagrama possui dois vértices pseudo-escalares e um vértice vetorial, sendo $q = p' - p$.

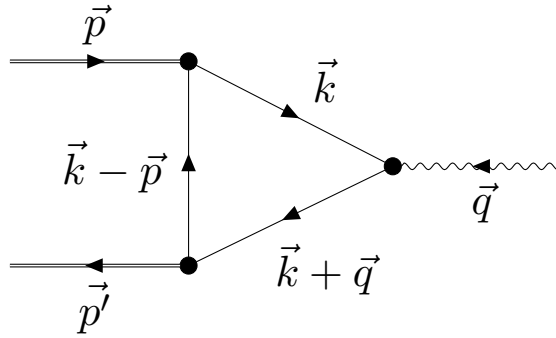


Figura 4.1: Diagrama do Fator de forma Eletromagnético.

Manipulando os termos presentes na equação 4.5 com o objetivo de isolar apenas os termos proporcionais a $\pi^2 J_\mu$, $\pi J_\mu \pi$ e $J_\mu \pi^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & \dots - \frac{i}{3} g_0^2 \operatorname{Tr} \left[\left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i e \gamma^\mu \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \pi J_\mu \pi - \right. \\ & \left. - \left(i e \gamma^\mu \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) J_\mu \pi^2 - \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i e \gamma^\mu \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right) \pi^2 J_\mu \right]. \end{aligned}$$

Realizando a seguinte alteração, $g_0 \rightarrow g_{\pi\bar{q}q}$, obtemos o termo relacionado ao diagrama da figura 4.1, que é dado por

$$-i g_{\pi\bar{q}q}^2 \operatorname{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i e \gamma^\mu \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\rlap{/}\partial - M} \right). \quad (4.6)$$

O leitor pode perceber que em nenhum momento foi dito que o termo acima é o fator de forma eletromagnético. Para alcançarmos este objetivo, é necessário realizar ainda um

passo. O fator de forma eletromagnético para o pión ($\pi^- = \bar{u}d$) é definido como:

$$\langle \pi^-(p') | J_\mu | \pi^-(p) \rangle = e\Gamma_\mu^{em} = (p'_\mu + p_\mu)eF_\pi^{em}(q^2). \quad (4.7)$$

Combinando a definição 4.7 com o termo 4.6, passamos a encontrar a equação ideal para obtenção do fator de forma eletromagnético

$$\Gamma_\mu^{em} = -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\not{\partial} - M} i\gamma^\mu \frac{1}{i\not{\partial} - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right). \quad (4.8)$$

Daqui em diante as táticas a serem utilizadas são análogas aos procedimentos realizados desde a equação 3.77 até a equação 3.84. Durante estas etapas reescrevemos o traço por meio da propriedade 3.45, mas para três operadores, utilizamos a relação de completude, aplicamos a transformada de Fourier e empregamos a função delta de Dirac. Este processo foi realizado e se encontra no Apêndice D.1.³:

$$\Gamma_\mu^{em}(p, p') = -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - M} i\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right]. \quad (4.9)$$

Calculando o traço no espaço de cores ($N_c = 3$) e sabores ($N_s = 2$), restará apenas o cálculo no espaço de Dirac

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{em}(p, p') &= -iN_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - M} i\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right] \\ &= -iN_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left[\frac{i\gamma_5(\not{k} + M)}{k^2 - M^2} \frac{i\gamma^\mu[(\not{k} + \not{q}) + M]}{(k + q)^2 - M^2} \frac{i\gamma_5[(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k - p)^2 - M^2} \right] \\ &= -i^4 N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\gamma_5^2(\not{k} + M)}{k^2 - M^2} \frac{\gamma^\mu[(\not{k} + \not{q}) + M]}{(k + q)^2 - M^2} \frac{[-(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k - p)^2 - M^2} \right\} \\ &= -N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{\mathbb{1}(\not{k} + M)}{k^2 - M^2} \frac{\gamma^\mu[(\not{k} + \not{q}) + M]}{(k + q)^2 - M^2} \frac{[-(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k - p)^2 - M^2} \right\} \\ &= -N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_\mu}{[k^2 - M^2] [(k + q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]}, \end{aligned}$$

podemos escrever a amplitude na seguinte forma

$$\Gamma_\mu^{em}(p, p') = 4N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 I_\mu(q, p). \quad (4.10)$$

Sendo que $N_\mu = 4[-k_\mu k^2 - k^2(p_\mu + q_\mu) + k(q_\mu p - p_\mu q) + k_\mu(q \cdot p + 2k \cdot p + M^2) + M^2(q_\mu + p_\mu)]$ e a sua obtenção pode ser vista no Apêndice D.2. Com objetivo de facilitar os cálculos das

³Pode-se encontrar a equação 4.9 por meio da aplicação das regras de Feynman no diagrama representado pela figura 4.5.

integrais presentes na equação 4.10, iremos realizar as seguintes substituições em $I_\mu(q, p)$:

$$k \cdot p = \frac{1}{2} [k^2 + p^2 - (k - p)^2] , \quad (4.11)$$

$$k \cdot q = \frac{1}{2} [-k^2 - q^2 + (k + q)^2] , \quad (4.12)$$

Desta forma encontramos a seguinte função

$$\begin{aligned} I_\mu(q, p) = & -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left\{ -k_\mu k^2 - k^2(p_\mu + q_\mu) + q_\mu \left[-\frac{(k-p)^2}{2} + \frac{k^2}{2} + \frac{p^2}{2} \right] + \right. \\ & + p_\mu \left[\frac{-(k+q)^2}{2} + \frac{k^2}{2} + \frac{q^2}{2} \right] + 2k_\mu \left[-\frac{(k-p)^2}{2} + \frac{k^2}{2} + \frac{p^2}{2} \right] + \\ & \left. + k_\mu [q \cdot p] + M^2(k_\mu + q_\mu + p_\mu) \right\} / [\dots] , \end{aligned} \quad (4.13)$$

no qual

$$[\dots] = (k^2 - M^2) [(k + q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2] . \quad (4.14)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} I_\mu(q, p) = & -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left\{ \frac{-k_\mu}{(k^2 - M^2) [(k + q)^2 - M^2]} + (q \cdot p + p^2) \frac{k_\mu}{[\dots]} - \right. \\ & - \frac{(q_\mu + p_\mu)}{2} \frac{1}{[(k + q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]} - \frac{q_\mu}{2} \frac{1}{(k^2 - M^2) [(k + q)^2 - M^2]} - \\ & \left. - \frac{p_\mu}{2} \frac{1}{(k^2 - M^2) [(k - p)^2 - M^2]} + \frac{(q_\mu p^2 + p_\mu q^2)}{2} \frac{1}{[\dots]} \right\} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Com objetivo de simplificar os denominadores da equação 4.15, iremos utilizar a parametrização de Feynman. Para integrais com denominadores que possuem dependência de “ $-p$ ”, iremos utilizar o resultado do capítulo anterior, equação 3.92, para denominadores com dependência “ q^2 ” o resultado é análogo ao processo anterior. Nas integrais com denominadores $[\dots]$ é preciso utilizar a seguinte parametrização⁴,

⁴Forma geral da parametrização de Feynman para três termos é:

$$\frac{1}{ABC} = 2! \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}{[\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C]^3} ,$$

realizando as seguintes mudanças de variáveis $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$ e $\alpha_3 = 1 - x - y$ obtêm-se a equação 4.16.

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(A-C)x + (B-C)y + C]^3}. \quad (4.16)$$

Escolhendo que $A = (k+q)^2 - M^2$, $B = (k-p)^2 - M^2$ e $C = k^2 - M^2$. Substituímos tais valores na parametrização e logo em seguida completamos os quadrados no denominador

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(k+qx-py)^2 - \Xi^2]^3}, \quad (4.17)$$

em que $\Xi^2 = M^2 + (qx-py)^2 - q^2x - p^2y$.

Logo adquirimos⁵:

$$\begin{aligned} I_\mu(q, p) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int d^4k \frac{k_\mu}{[(k+qx)^2 - \mu^2]^2} - 2 [q \cdot p + p^2] \times \right. \\ & \times \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{k_\mu}{[(k+qx-py)^2 - \Xi^2]^3} + \frac{(q_\mu + p_\mu)}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[(k - (q+p)x]^2 - \beta^2]^2} + \\ & + \frac{q_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[(k+qx)^2 - \mu^2]^2} + \frac{p_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[(k-px)^2 - \xi^2]^2} - \\ & \left. - (p_\mu q^2 + q_\mu p^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{1}{[(k+qx-py)^2 - \Xi^2]^3} \right\} \quad (4.18) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mu^2 &= -q^2x + q^2x^2 + M^2, \\ \xi^2 &= -p^2x + p^2x^2 + M^2, \\ \beta^2 &= -(q+p)^2x + (q+p)^2x^2 + M^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Iremos realizar uma translação nos momentos internos das integrais

$$\begin{aligned} k &\rightarrow k - qx, \\ k &\rightarrow k - qx + py, \\ k &\rightarrow k + (q+p)x, \\ k &\rightarrow k + px. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A única integral que possuirá Termos de Superfície é a primeira, por ser linearmente

⁵Na equação 4.15 há uma integral com denominador $[(k+q)^2 - M^2][(k-p)^2 - M^2]$, antes de aplicar as parametrização de Feynman foi realizado um *shift* em k ($k \rightarrow k - q$), a parametrização utilizada é mesma contida no capítulo anterior.

divergente. Contudo, por enquanto iremos realizar os cálculos com ausência de tais termos.

$$\begin{aligned}
I_\mu(q, p) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int d^4k \frac{k_\mu - q_\mu x}{[k^2 - \mu^2]^2} - 2[q \cdot p + p^2] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{k_\mu - q_\mu x + p_\mu y}{[k^2 - \Xi^2]^3} + \right. \\
& + \frac{(q_\mu + p_\mu)}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \beta^2]^2} + \frac{q_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \mu^2]^2} + \frac{p_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} - \\
& \left. - (p_\mu q^2 + q_\mu p^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \Xi^2]^3} \right\}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, podemos cancelar algumas integrais na equação anterior, seus cancelamentos ocorrem, pois, são funções ímpares em limites de integrações simétricas

$$\begin{aligned}
I_\mu(q, p) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int d^4k \frac{-q_\mu x}{[k^2 - \mu^2]^2} - 2[q \cdot p + p^2] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{-q_\mu x + p_\mu y}{[k^2 - \Xi^2]^3} + \right. \\
& + \frac{(q_\mu + p_\mu)}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \beta^2]^2} + \frac{q_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \mu^2]^2} + \frac{p_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} - \\
& \left. - (p_\mu q^2 + q_\mu p^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \Xi^2]^3} \right\}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Nota-se que algumas integrais são semelhantes a integral presente na equação 3.140, consequentemente iremos aproveitar o resultado contido na equação 3.141

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 - \Delta^2)^2} = -i2\pi^2 \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Delta^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Delta^2 + \Lambda^2} \right], \tag{4.23}$$

no qual Δ pode ser ξ , μ e β . A solução da integral restante se encontra logo abaixo

$$\begin{aligned}
\int d^4k \frac{1}{[k^2 - \Xi^2]^3} &= -i2\pi^2 \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{(k^2 + \Xi^2)^3} = -i2\pi^2 \left\{ -\frac{2k^2 + \Xi^2}{4(k^2 + \Xi^2)^2} \right\} \Big|_0^\Lambda \\
&= -i2\pi^2 \left\{ \frac{\Lambda^4}{4\Xi^2(\Lambda^2 + \Xi^2)^2} \right\}. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Antes de substituir os resultados das integrais na equação 4.22, iremos realizar algumas manipulações. Primeiramente vamos transmutar a notação $(q_\mu + p_\mu)$ para $(q + p)_\mu$. Utilizando a seguinte equação $q = p' - p \Rightarrow q + p = p' - p + p \Rightarrow q + p = (p' + p) - p$. Podemos agora alterar a equação 4.22.

$$\begin{aligned}
I_\mu(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int d^4k \frac{-q_\mu x}{[k^2 - \mu^2]^2} - 2[q \cdot p - p^2] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{-q_\mu x + p_\mu y}{[k^2 - \Xi^2]^3} + \right. \\
&\quad + \frac{((p' + p) - p)_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \beta^2]^2} + \frac{q_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \mu^2]^2} + \\
&\quad \left. + \frac{p_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} - (p_\mu q^2 + q_\mu p^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \Xi^2]^3} \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int d^4k \frac{-q_\mu x}{[k^2 - \mu^2]^2} - 2[q \cdot p + p^2] \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{-q_\mu x + p_\mu y}{[k^2 - \Xi^2]^3} - \right. \\
&\quad - \frac{p_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \beta^2]^2} + \frac{q_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \mu^2]^2} + \frac{p_\mu}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} - \\
&\quad \left. - (p_\mu q^2 + q_\mu p^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{1}{[k^2 - \Xi^2]^3} \right\} + \frac{(p' + p)_\mu}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \beta^2]^2} \\
I_\mu(q, p) &= J(q, p)_\mu + \frac{(p' + p)_\mu}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \beta^2]^2}. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Voltando para equação 4.7 temos

$$\Gamma_\mu^{em} = (p' + p)_\mu F_\pi^{em}(q^2), \tag{4.26}$$

combinando com a equação 4.10 adquirimos

$$4N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 I_\mu(q, p) = (p' + p)_\mu F_\pi^{em}(q^2). \tag{4.27}$$

Contraindo a equação acima pelo lado esquerdo por $(p' + p)^\mu$ obtemos

$$4N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} I_\mu(q, p) = F_\pi^{em}(q^2). \tag{4.28}$$

Contraindo a equação 4.25 por $\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2}$ encontramos

$$\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} I_\mu(q, p) = \frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} J(q, p)_\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \beta^2)^2}. \tag{4.29}$$

Comparando a equação acima com 4.28 encontraremos o Fator de Forma Eletro-

magnético na versão *on-shell* fazendo $p' = p = m_\pi^2$:

$$F_\pi^{em}(q^2) = 4N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \left[\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} J(q, p)_\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \beta^2)^2} \right], \quad (4.30)$$

por simplificação

$$\bar{J}(q^2) \equiv \frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} J(q, p)_\mu. \quad (4.31)$$

Com intuito de facilitar os cálculos posteriores, reescrevemos os seguintes termos

$$\begin{aligned} q^2 &= (p' - p)^2 = 2m_\pi^2 - 2p' \cdot p \Rightarrow 2p' \cdot p = 2m_\pi^2 - q^2, \\ (p' + p)_\mu &= (2p + q)_\mu, \\ q \cdot p &= p \cdot q = -\frac{q^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

A partir deste ponto, realizaremos os cálculos algébricos relacionados a $\bar{J}(q^2)$:

$$\begin{aligned} (2p + q)^2 &= 4m_\pi^2 - q^2, \\ q_\mu(2p + q)^\mu &= 0, \\ p_\mu(2p + q)^\mu &= 2m_\pi^2 - \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2}(4m_\pi^2 - q^2), \\ (q - p)^2 - q^2 - 3p^2 &= -(2m_\pi^2 + q^2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando 4.33 em 4.31, encontramos

$$\begin{aligned} \bar{J}(q^2) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-y} dy \int d^4 k \left[\left(\frac{q^2}{2} - m_\pi^2 \right) \frac{y}{(k^2 - \Xi^2)^3} - \frac{q^2}{2} \frac{1}{(k^2 - \Xi^2)^3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - \xi^2)^2} - \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - \beta^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

substituindo em 4.30

$$\begin{aligned} F_\pi^{em}(q^2) &= 4N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-y} dy \int d^4 k \left[\left(\frac{q^2}{2} - m_\pi^2 \right) \frac{y}{(k^2 - \Xi^2)^3} - \frac{q^2}{2} \frac{1}{(k^2 - \Xi^2)^3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - \xi^2)^2} + \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - \beta^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A equação acima é o Fator de Forma Eletromagnético com ausência dos termos de superfície, apesar de inúmeros procedimentos realizados para encontrá-la nesta forma, o esforço foi válido, pois a equação 4.35 nos possibilita realizar algumas observações. Nota-se que as duas últimas integrais são idênticas no regime quiral e pequenos momentos, e

consequentemente passam a ter uma mera semelhança com a constante de decaimento fraco. Também é por meio desse procedimento que podemos demonstrar que o fator de forma eletromagnético será a carga total do pión, quando q for nulo. Em subseções posteriores iremos analisar o Fator de Forma no regime quiral e pequenos momentos. Para finalizar iremos utilizar as soluções em 4.23 e 4.24 na equação do Fator de Forma Eletromagnético

$$F_{\pi}^{em}(q^2) = -\frac{iN_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2}{8\pi^2} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\left(\frac{q^2}{2} - m_{\pi}^2 \right) y - \frac{q^2}{2} \right] \frac{\Lambda^4}{\Xi^2(\Lambda^2 + \Xi^2)^2} + \left[\int_0^1 dx \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\xi^2 + \Lambda^2} \right] + \int_0^1 dx \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\beta^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\beta^2 + \Lambda^2} \right] \right\}. \quad (4.36)$$

4.2.1 Termos de Superfície no Fator de Forma

Para encontrar os termos de superfície, voltamos para equação 4.21, na qual ocorre o processo de deslocamento dos momentos internos que está representado em 4.20. Exceto pela primeira integral da equação 4.21, que é linearmente divergente, as integrais restantes não terão termos de superfície, por terem divergências logarítmicas ou por serem integrais finitas. Aplicando a derivada⁶

$$I_{\mu}^{TS}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4k \left[q^{\nu} x \frac{\partial}{\partial k^{\nu}} \frac{k_{\mu}}{(k^2 - \mu^2)^2} \right], \quad (4.37)$$

pode-se encontrar o resultado da derivada acima na solução contida na equação 3.108 até 3.116.

$$\begin{aligned} I_{\mu}^{TS}(p, q) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4k \left[q^{\nu} x \frac{g_{\mu\nu} \mu^2}{(k^2 - \mu^2)^3} \right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4k \left[q_{\mu} x \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A equação acima é o termo de superfície da integral com divergência linear contida na equação 4.21. Para encontrar o Fator de Forma é necessário contrair o resultado por

$$\frac{(p' + p)^{\mu}}{(p' + p)^2},$$

utilizando as soluções contidas em 4.33, encontra-se que o termo de superfície será cancelado, pois $q_{\mu}(2p + q)^{\mu} = 0$. Vejamos que temos um problema, pois apesar de ter uma

⁶Para resolver a derivada de forma mais geral, é necessário trocar o índice de Lorentz e realizar a seguinte mudança $l_{\mu} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \rightarrow l^{\nu} \frac{\partial}{\partial k^{\nu}}$. Os índices são invertidos de inferior para superior, pois os índices dos termos de superfície, tem que acompanhar a posição dos índices de γ^{μ} presente na equação 4.8.

integral com divergência, os termos de superfície não são evidenciados, felizmente sabemos que esse problema está relacionado com a escolha de roteamento nos diagramas de Feynman, e já temos conhecimento de como solucioná-lo que será demonstrado em um capítulo posterior.

4.2.2 Cálculo no limite quiral e pequenos momentos do fóton

Nesta subseção, vamos encontrar o Fator de Forma no limite quiral ($m_\pi^2 = 0$), e com pequenos valores para o momento do fóton ($q^2 \ll M$). Consequentemente Ξ^2 e as equações contidas em 4.22 sofrerão algumas alterações.

$$\mu^2 = \xi^2 = \beta^2 = \Xi^2 = M^2. \quad (4.39)$$

A equação 4.35 se tornará

$$F_\pi^{em}(q^2) = 2N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \left\{ I(0) + \frac{q^2}{(2\pi)^4} \left[\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k \frac{y-1}{(k^2 - M^2)^3} \right] \right\}. \quad (4.40)$$

sendo

$$I(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2}. \quad (4.41)$$

Inserindo $g_{\pi\bar{q}q}^{-2} = -2iN_c N_s I(0)$ em 4.40, encontra-se:

$$F_\pi^{em}(q^2) = i + \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{I(0)} \left[\int_0^1 dx \int_0^{1-y} dy \int d^4k \frac{y-1}{(k^2 - M^2)^3} \right], \quad (4.42)$$

independente do esquema de regularização, a constante de decaimento fraco do pión é dado por

$$f_\pi^2 = -2iN_c N_s M^2 I(0), \quad (4.43)$$

com $N_c = 3$ e $N_s = 2$, substituindo em 4.42, obtemos

$$F_\pi^{em}(q^2) = i - \frac{q^2}{(2\pi^2)^2 f_\pi^2} \left[\int d^4k \frac{M^2}{(k^2 - M^2)^3} \right]. \quad (4.44)$$

Resolvendo a integral da equação 4.44 e utilizando 4.24, encontra-se

$$F_\pi^{em}(q^2) = i + \frac{i q^2}{8\pi^2 f_\pi^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + M^2)^2}, \quad (4.45)$$

o módulo do Fator de Forma eletromagnético será dado por

$$|F_{\pi}^{em}(q^2)| = 1 + \frac{q^2}{8\pi^2 f_{\pi}^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + M^2)^2}. \quad (4.46)$$

Nota-se que quando q^2 vai para zero, teremos o módulo do Fator de Forma sendo “1”, que é o esperado, se a transferência do momento do fóton ao quadrado for nulo, nenhuma subestrutura da partícula será detectada, e portanto o fator de forma constituirá a carga do pión. Percebe-se que só conseguimos demonstrar essas características, devido ao formato que a equação 4.46 apresenta, consequência das simplificações que realizamos nas seções anteriores.

Devemos calcular numericamente o valor da integral acima, em que variamos o valor do momento do fóton q para obter um gráfico do Fator de Forma em função da energia do fóton emitido, que estará presente no capítulo 7.

A relação padrão do raio⁷ com uma partícula carregada é dado por

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= -6 \left. \frac{d|F(Q^2)|}{dQ^2} \right|_{q^2=0} \\ &= \frac{3}{4\pi^2 f_{\pi}^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + M^2)^2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

A equação de raio acima também pode ser utilizada no Fator de Forma da equação 4.36.

⁷ $q^2 = -Q^2$ no âmbito dos valores pertencentes no “spacelike”.

CAPÍTULO

5

O DECAIMENTO RARO DO PÍON

“Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis”.

-René Descartes.

O objetivo deste capítulo é estudar o decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e^- \bar{\nu}_e$, e sua justificativa se encontra na Introdução desta Dissertação. O diagrama deste decaimento é conhecido por triângulo de quarks, por meio da lagrangiana do modelo de NJL com a parte cinética modificada ou pela aplicação das regras de Feynman no diagrama, obtemos a amplitude do diagrama. A invariância de gauge da amplitude introduz a correção de Bremsstrahlung¹, em que evidência que a amplitude é estruturalmente dependente dos Fatores de Forma vetorial e axial-vetor [15]. Conclui-se que a amplitude $T^{\mu\nu}$ é proporcional ao elemento de matrizes da corrente eletromagnética J_μ^{em} e da corrente axial A_ν , entre o estado do pión e vácuo.

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle 0 | T(J_\mu^{em} A_\nu) | \pi^-(k) \rangle, \quad (5.1)$$

no qual T é o operador temporal.

Após obter os Fatores de Forma, calcula-se a sua razão e compara-se com o valor experimental.

¹O diagrama de Bremsstrahlung é consistente com os diagramas de Feynman de menor ordem.

5.1 Os decaimentos fracos e eletro-fracos do pión

Podemos dizer que há duas formas do pión decair sendo elas $\pi^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e$ e $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \bar{\nu}_\mu$. Entretanto, não há possibilidade do pión decair para um processo de $\pi^\pm \rightarrow \tau^\pm \bar{\nu}_\tau$, pois violaria o princípio da conservação de energia, uma vez que sua massa ($m_\pi = 139,15\text{MeV}$) é menor que a massa da partícula tau ($m_\tau = 1784\text{MeV}$).

A princípio é esperado que o principal canal de decaimento fraco do pión fosse o canal eletrônico, pois a massa do elétron é menor do que a massa do múon. Contudo, os resultados experimentais divergem com afirmação acima, mostrando que o decaimento $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \bar{\nu}_\mu$ é mais natural de ocorrer ao invés do decaimento $\pi^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e$. A explicação desse fenômeno é devido a consideração da conservação do momento angular e da helicidade [15][53].

O pión possui spin nulo, e pelo princípio da conservação do momento angular, é esperado que haja um valor nulo do spin para os pares $e^\pm \bar{\nu}_e$ ou $\mu^\pm \bar{\nu}_\mu$ após o decaimento. A configuração previsto é que ambos os léptons (e^\pm ou μ^\pm) e os pares ($\bar{\nu}_e$ ou $\bar{\nu}_\mu$) possuem helicidades positivas.

Por outro lado, partículas sem massa possuem helicidades negativas e de anti-partículas sem massa é positiva, se o elétron e o múon tivessem um valor de massa nula, o momento angular do pión seria diferente de zero, e automaticamente seria um decaimento improvável de acontecer.

Como os nossos léptons (l) tem massa, o decaimento passa ocorrer de acordo com a primeira previsão. Já que o múon tem massa cerca de 200 vezes maior que a do elétron, a sua tendência é de não respeitar a helicidade e a conservação de momento angular seja mantida. O elétron porém, possui um valor pequeno de massa em relação ao múon, tendo uma dificuldade maior de não respeitar a helicidade, tornando o seu decaimento mais raro de acontecer.[15][53]

Por meio das mesmas afirmações, de conservação de energia, os processos $\pi^\pm \rightarrow \gamma e^\pm \bar{\nu}_e$ e $\pi^\pm \rightarrow \gamma \mu^\pm \bar{\nu}_\mu$ podem ocorrer. O fóton é o que diferencia este processo para os processos anteriores, a sua emissão pode acontecer por meio de partículas externas ou internas. Portanto, podemos escrever que a amplitude total do processo é dado por:

$$\mathcal{M}(\pi^\pm \rightarrow \gamma l^\pm \bar{\nu}_l) = \mathcal{M}_{IB} + \mathcal{M}_{SD}.$$

O processo \mathcal{M}_{IB} corresponde à contribuição de Bremsstrahlung, em que o fóton é emitido por duas partículas externas carregadas, já o termo \mathcal{M}_{SD} é a amplitude dependente da estrutura interna, onde a emissão do fóton acontece por meio dos estados intermediários gerado pela interação forte proveniente dos quarks que constituem o pión.

Devido à tendência de não respeitar a helicidade o processo $\pi^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e$ se torna

raro de ocorrer, o decaimento $\pi^\pm \rightarrow \gamma e^\pm \bar{\nu}_e$ segue a mesma lógica. Neste caso, temos a contribuição de Bremsstrahlung sendo suprimido ($\mathcal{M}_{IB} \simeq 0$) fazendo que a contribuição de \mathcal{M}_{SD} seja mais relevante, tornando possível um estudo melhor da estrutura interna do pión [6][31]. Para o caso $\pi^\pm \rightarrow \gamma \mu^\pm \bar{\nu}_\mu$ é dominado pelo processo de Bremsstrahlung fazendo que $\mathcal{M}_{SD} \simeq 0$, o que torna esse processo inapropriado para o estudo da estrutura interna do pión.

5.2 A lagrangiana do decaimento raro do pión

A lagrangiana do modelo de NJL em SU(2) acoplado minimamente com interação eletromagnética e eletro-fraco correspondente ao decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e \bar{\nu}_e$ é dado por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left[i\not{\partial} - m + \frac{\gamma^\nu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \tau^{(-)} A_\nu + \frac{ie}{2} \left(\frac{\mathbb{1}}{3} + \tau^3 \right) \gamma^\mu J_\mu^{em} \right] \Psi + \frac{G}{2} \left[(\bar{\Psi} \Psi)^2 + (\bar{\Psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \Psi)^2 \right].$$

Realizando a bosonização na lagrangiana acima

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{\mu_0^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2 \sigma s - i \text{Tr} \left\{ \cdots + \frac{1}{3} g_{\pi\bar{q}q} \left[\Sigma \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right]^3 + \cdots \right\}, \quad (5.2)$$

no qual

$$\Sigma = \sigma + i\pi\gamma_5\tau^{(+)} + \frac{\gamma^\nu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \tau^{(-)} A_\nu + \frac{ie}{2} \left(\frac{\mathbb{1}}{3} + \tau^3 \right) \gamma^\mu J_\mu^{em}, \quad (5.3)$$

a próxima etapa é expandir os termos que estão sendo elevados ao cubo e reorganizar com a premissa de encontrar os termos proporcionais a $\pi A_\nu J_\mu^{em}$, $\pi J_\mu^{em} A_\nu$, $J_\mu^{em} \pi A_\nu$, $J_\mu^{em} A_\nu \pi$, $A_\nu \pi J_\mu^{em}$ e $A_\nu J_\mu^{em} \pi$. Utilizando as propriedades cíclicas do traço poderemos reduzir os seis termos em apenas dois, sendo eles $\pi A_\nu J_\mu^{em}$ e $\pi J_\mu^{em} A_\nu$, que nos indica a existência de dois diagramas, claro que sendo um deles um diagrama de permuta. Abaixo se encontram as amplitudes retiradas da lagrangiana acima.

$$T_+^{\mu\nu} = -ig_{\pi\bar{q}q} \text{Tr} \left[i\gamma_5\tau^{(+)} \frac{1}{i\not{\partial} - M} \frac{ie}{2} \left(\frac{\mathbb{1}}{3} + \tau^3 \right) \gamma^\mu \frac{1}{i\not{\partial} - M} \frac{\gamma^\nu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \tau^{(-)} \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right] \quad (5.4)$$

$$T_-^{\mu\nu} = -ig_{\pi\bar{q}q} \text{Tr} \left[i\gamma_5\tau^{(+)} \frac{1}{i\not{\partial} - M} \frac{\gamma^\nu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \tau^{(-)} \frac{1}{i\not{\partial} - M} \frac{ie}{2} \left(\frac{\mathbb{1}}{3} + \tau^3 \right) \gamma^\mu \frac{1}{i\not{\partial} - M} \right] \quad (5.5)$$

Realizando um processo análogo ao que se encontra no apêndice D.1, encontra-se

$$T_+^{\mu\nu} = -i3g_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5\tau^{(+)} \frac{1}{\not{k} - M} \frac{ie}{2} \left(\frac{\mathbb{1}}{3} + \tau^3 \right) \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{q} - M} \frac{\gamma^\nu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \tau^{(-)} \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right]$$

$$T_-^{\mu\nu} = -i3g_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \tau^{(+)} \frac{1}{\not{k} + \not{p} - M} \frac{\gamma^\nu}{2} (1 - \gamma_5) \tau^{(-)} \frac{1}{\not{k} + \not{q} - M} \gamma^\mu \frac{ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau^3 \right) \frac{1}{\not{k} - M} \right]$$

sendo o fator “3” o resultado do traço no espaço de cor.

A lagrangiana acima nos fornece o digrama na sua versão resumida. Antes de começar a realizar os cálculos em $T_+^{\mu\nu}$ e $T_-^{\mu\nu}$ iremos fazer uma pequeno estudo a respeito do digrama e da estrutura dos vértices.

5.3 Sobre o diagrama e a Estrutura dos Vértices

A emissão do fóton nos processos de decaimento do pión pode ocorrer por meio de dois processos distintos. O primeiro caso é através de um processo de Bremsstrahlung, porém não é possível estudar a estrutura interna do pión, por ter a quiralidade suprimida. Desta forma o segundo caso é mais interessante, no qual a emissão do fóton ocorre pela aniquilação de um par quark-antiquark. Os dois diagramas de Feynman que descrevem o processo de decaimento são

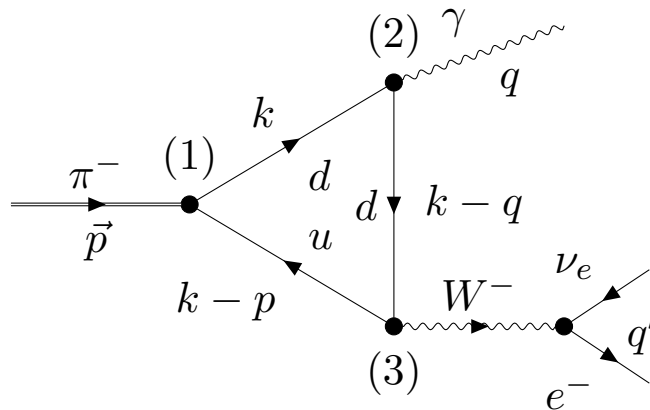


Figura 5.1: Diagrama do decaimento radiativo.

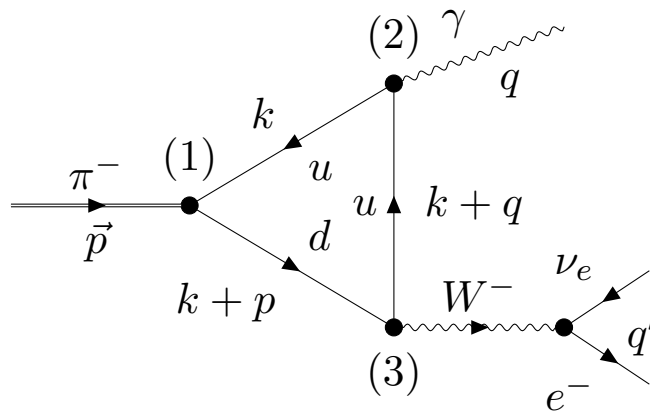


Figura 5.2: Diagrama de permuta do decaimento radiativo.

É oportuno, neste instante, realizarmos alguns comentários a respeito dos diagramas acima. Primeiramente, nota-se que o pión é um estado ligado dos quarks $\bar{u}d$ e que o fóton não altera a carga dos quarks, e essa é razão dele acoplar apenas $\bar{u}u$ ou $\bar{d}d$ em SU(2). O bóson vetorial W^- altera o sabor dos quarks que em SU(2) tem apenas as possibilidades de ud e $\bar{u}\bar{d}$.

Com o objetivo de garantir a conservação dos quadrimomentos é imposto a seguinte relação no triângulo de quarks

$$p = q + q', \quad (5.6)$$

sendo p o quadrimomento do pión, q o quadrimomento do fóton e q' o quadrimomento permanente ao par $e^-\bar{\nu}_e$.

Há três modelos de interações distintas nos diagramas. No vértice (1) há uma interação forte (vértice pseudo-escalar)

$$(1) \equiv i\gamma_5 \otimes \tau^{(+)}. \quad (5.7)$$

Já no vértice (2) têm-se uma interação eletromagnética, porém este acoplamento é diferente do acoplamento que se encontra no capítulo anterior

$$(2) \equiv \frac{ie}{2} \left(\frac{1}{3} + \tau^3 \right) \gamma^\mu, \quad (5.8)$$

tais mudanças são adição do termo $\left(\frac{1}{3} + \tau^3 \right)$ no vértice eletromagnético que representa a estrutura de isospin dos quarks e a matriz de Pauli τ^3 está relacionado aos quarks up e down.

O Terceiro vértice possui uma interação fraca

$$(3) \equiv \frac{\gamma^\nu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \otimes \tau^{(-)}, \quad (5.9)$$

tal termo é de grande importância e a sua obtenção está presente no apêndice C.

O propagador do bóson W^- é dado por

$$S = \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q'^\mu q'^\nu}{M_{W^-}^2}}{q'^2 - M_{W^-}^2}, \quad (5.10)$$

que no regime de baixas energias pode-se realizar simplificações nos diagramas presentes nas figuras 5.2 e 5.1, pois a massa do bóson é muito grande $M_{W^-}^2 = 80,4 \pm 0,03 \text{ GeV}/c^2$.

Desta forma, realizamos a seguinte aproximação

$$S \simeq \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q'^\mu q'^\nu}{M_{W^-}^2}}{-M_{W^-}^2}, \quad (5.11)$$

ocasionando na absorção da constante $M_{W^-}^2$ e passando a ter um acoplamento direto dos quarks com o par $e^- \bar{\nu}_e$. Então os diagramas poderão ser representados conforme as figuras 5.3 e 5.4:

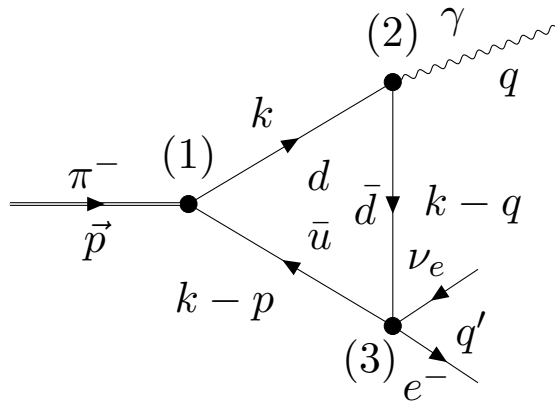


Figura 5.3: Diagrama aproximado para o decaimento radiativo.

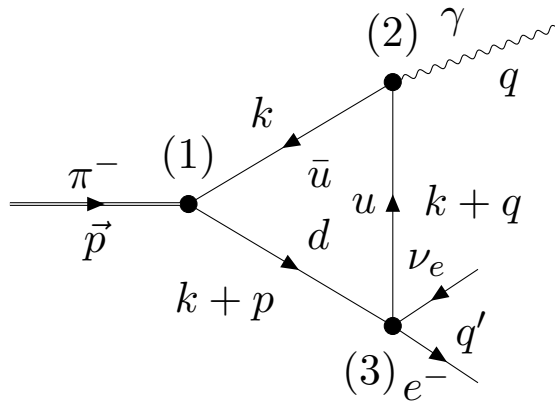


Figura 5.4: Diagrama de permuta aproximado para o decaimento radiativo.

Esses diagramas correspondem às equações $T_+^{\mu\nu}$ e $T_-^{\mu\nu}$ obtidas por meio da técnica de bosonização do modelo de NJL.

5.4 Cálculo dos Traços presentes no decaimento raro do Píon

Os espaços de Dirac, de sabor e de cor são independentes, e isso nos possibilita efetuar as operações de traços separadamente. O traço no espaço de cor já foi calculado

anteriormente e seu resultado é “3” agora iremos calcular os traços no espaço de sabores

$$\text{Tr} \left[\tau^{(+)} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{1}}{3} + \tau^3 \right) \frac{\tau^{(-)}}{2} \right] = -\frac{1}{3}, \quad (5.12)$$

$$\text{Tr} \left[\tau^{(+)} \frac{\tau^{(-)}}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{1}}{3} + \tau^3 \right) \right] = \frac{2}{3}. \quad (5.13)$$

De início, teríamos que considerar os traços acima nas amplitudes 5.6 e 5.6 para obter os Fatores de Forma. Entretanto, empiricamente só obtemos os Fatores de Forma com o traço no espaço de Dirac [53]. Desta forma, manipulando as equações 5.6 e 5.6 com ausência dos traços sobre os espaços de cor e sabor, e realizando a mudança de variáveis do tipo $k \rightarrow -k$ na última equação.

$$T_+^{\mu\nu} = -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_5 (\not{k} + M) \gamma^\mu [(\not{k} - \not{q}) + M] \gamma^\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) [(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]} \right\},$$

$$T_-^{\mu\nu} = -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \text{Tr} \left\{ -\frac{\gamma_5 [(\not{k} - \not{p}) - M] \gamma^\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) [(\not{k} - \not{q}) - M] \gamma^\mu (\not{k} - M)}{(k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]} \right\},$$

Prosseguindo, resolvendo os traços de Dirac nas equações anteriores, que se encontram no Apêndice E, e por fim combinando ambas as equações, encontramos

$$T_{\pm}^{\mu\nu} = T_+^{\mu\nu} + T_-^{\mu\nu},$$

$$T_{\pm}^{\mu\nu} = -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \left\{ 4iM \left(\epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta + \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} k_\alpha k_\beta \right) \pm 4M \left(g^{\mu\nu} k^2 - 2k^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot q - M^2 g^{\mu\nu} \right) \right\} / [\dots], \quad (5.14)$$

no qual

$$[\dots] = (k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]. \quad (5.15)$$

A equação acima representa a amplitude de probabilidades de ambos diagramas de triângulos. Porém, para prosseguir com os cálculos é necessárias algumas quantidades, sendo elas as seguintes integrais:

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\dots]}, \quad (5.16)$$

$$I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-q)^2 - M^2][(k-p)^2 - M^2]}, \quad (5.17)$$

$$I^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[\dots]} \quad (5.18)$$

e

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{[\dots]}. \quad (5.19)$$

Desta forma a equação 5.14 fica com a seguinte aparência:

$$T_{\pm}^{\mu\nu} = e \left[4ig_{\pi\bar{q}q} M \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta I_1 \pm 4g_{\pi\bar{q}q} M (p^\mu q^\nu I_1 + p^\nu q^\mu I_1 - 2I^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p \cdot q I_1 + g^{\mu\nu} I_2) \pm \right. \\ \left. \pm 4ig_{\pi\bar{q}q} M \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} I_{\alpha\beta} \right]. \quad (5.20)$$

Iremos realizar uma translação em I_2 do tipo $k \rightarrow k + q$, tal mudança será justificada naturalmente adiante

$$I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2) \{ [k - (p - q)]^2 - M^2 \}} = I_2((p - q)^2). \quad (5.21)$$

Em seções anteriores mencionamos que a regularização via *sharp cut-off* é mais simples, contudo ela pode acarretar na quebra de simetrias do modelo. Assim é conveniente que asseguremos a preservação dessas simetrias. Para esse fim, iremos utilizar como abordagem a seguinte orientação [2].

Iremos lançar mão do truque de *Passarino* visando em reduzir a integral 5.18, todavia é importante ressaltar que o método de redução tratam as integrais como se não houvesse um *cut-off* [43][53]:

$$I^\mu \equiv -Ap^\mu - Bq^\mu \quad (5.22)$$

com

$$A = \frac{-Wq^2 + Tp \cdot q}{(p \cdot q)^2 - p^2 q^2}, \quad B = \frac{Wp \cdot q - Tp^2}{(p \cdot q)^2 - p^2 q^2}. \quad (5.23)$$

Sendo W e T definidos como

$$W = \frac{1}{2} \left[I_2(q^2) - I_2((p-q)^2) - p^2 I_1(p^2, q^2, 2p \cdot q) \right], \quad (5.24)$$

$$T = \frac{1}{2} \left[I_2(p^2) - I_2((p-q)^2) - q^2 I_1(p^2, q^2, 2p \cdot q) \right]. \quad (5.25)$$

No referencial de repouso do píon, teremos as seguintes relações cinemáticas

$$\begin{aligned} p^2 &= m_\pi^2, \\ q^2 &= 0, \\ q'^2 &= (p-q)^2 = m_\pi^2 - 2p \cdot q, \end{aligned} \quad (5.26)$$

substituindo essas relações em W e T , e posteriormente em A e B , obtemos

$$A = \frac{I_2(m_\pi^2) - I_2(m_\pi^2 - 2p \cdot q)}{2p \cdot q},$$

$$B = \frac{1}{2p \cdot q} \left\{ \left[I_2(0) - I_2(m_\pi^2 - 2p \cdot q) - m_\pi^2 I_1(m_\pi^2, 2p \cdot q) \right] - m_\pi^2 \frac{[I_2(m_\pi^2) - I_2(m_\pi^2 - 2p \cdot q)]}{p \cdot q} \right\}.$$

Substituindo A e B em I^μ , e multiplicando por p^ν encontra-se

$$\begin{aligned} -2I_\mu p^\nu &= 2(Ap^\mu + Bq^\mu)p^\nu = \frac{1}{p \cdot q} \left[I_2(m_\pi^2) - I_2(m_\pi^2 - 2p \cdot q) \right] p^\mu p^\nu + \\ &+ \frac{1}{p \cdot q} \left\{ \left[I_2(0) - I_2(m_\pi^2 - 2p \cdot q) - m_\pi^2 I_1(m_\pi^2, 2p \cdot q) \right] - m_\pi^2 \frac{[I_2(m_\pi^2) - I_2(m_\pi^2 - 2p \cdot q)]}{p \cdot q} \right\} q^\mu p^\nu. \end{aligned}$$

No limite quiral podemos fazer: $(p-q)^2 = p^2 - 2p \cdot q + q^2 = -2p \cdot q = -2(p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q})$. Entretanto, $\vec{p} = 0$, então temos que $(p-q)^2 = -2p_0 q_0 = -2m_\pi E_\gamma = 0$, no qual E_γ representa a energia do fóton. Portanto

$$I_2(0) = I_2(-2p \cdot q).$$

Desta forma, podemos dizer que no limite quiral $-2I^\mu p^\nu = 0$. Substituindo esses resultados em $T_\pm^{\mu\nu}$ e aplicando a relação de Goldberger-Treiman, 2.60:

$$\begin{aligned} T_\pm^{\mu\nu} &= 4ie g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_\alpha q_\beta I_1 \pm 4e g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi I_1 (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot q) + 4e g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi g^{\mu\nu} I_2 \pm \\ &\pm 4i g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} I_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

O campo eletromagnético é dado pela seguinte equação

$$A_\nu = \epsilon_\nu(q) e^{-iq \cdot x}, \quad (5.28)$$

no qual $\epsilon_\nu(q)$ representa o vetor de polarização do fóton. A função de onda do campo eletromagnético satisfaz a equação

$$\square^2 A_\nu = 0 \quad (5.29)$$

$$\partial^\nu A_\nu = 0, \quad (5.30)$$

empregando a condição de Lorentz, $\partial^\nu A_\nu = 0$ e aplicando na equação acima, encontramos

$$q^\nu \epsilon_\nu(q) = 0. \quad (5.31)$$

Contraindo ϵ_ν com a equação 5.27, e posteriormente utilizando o resultado da equação 5.31 adquirimos

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu T_\pm^{\mu\nu} = & 4ie g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi \epsilon_\nu \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_\alpha q_\beta \epsilon_\nu I_1 \pm 4e g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi I_1 \epsilon_\nu (p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot q) + 4e g_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi \epsilon_\nu g^{\mu\nu} I_2 \pm \\ & \pm 4ig_{\pi\bar{q}q}^2 f_\pi \epsilon_\nu \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} I_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.5 Fatores de Forma Axial e Vetorial

Podemos encontrar os Fatores de Forma testando a invariância de Gauge em $T_\pm^{\mu\nu}$, por meio da Identidade de Ward

$$q_\mu T_\pm^{\mu\nu} = 0,$$

o primeiro termo da equação 5.32 é invariante por si próprio e está relacionado com o Fator de Forma Axial. O segundo termo da equação não é invariante por si só. Desta forma, é necessário adicionar o diagrama de Bremsstrahlung, no qual um elétron emite um fóton quando sofre uma alteração em sua velocidade[15].

Diferente do que já está sendo comentado no parágrafo anterior, não iremos encontrar os Fatores de Formas por meio do teste de invariância, mas por meio das seguintes relações[31]

$$\langle \gamma | \bar{u} \gamma_\mu d | \pi^- \rangle = -\frac{e}{m_\pi} \epsilon_\nu F_V(q^2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta, \quad (5.33)$$

$$\langle \gamma | \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 d | \pi^- \rangle = \frac{ie}{m_\pi} \epsilon_\nu F_A(q^2) [(p \cdot q) g^{\mu\nu} - q_\mu p_\nu] + i \epsilon_\mu \sqrt{2} F. \quad (5.34)$$

Os termos F_V e F_A são os Fatores de Forma Vetorial e Axial. O segundo termo da equação 5.34 corresponde a contribuição da amplitude de Bremsstrahlung, e o F representa a constante de decaimento fraco.

Comparando 5.34 e 5.33 com 5.32, retiramos os Fatores de Forma, começando com o Fator de Forma Vetorial, encontramos

$$F_V = -4ig_{\pi qq}^2 f_\pi m_\pi I_1 \quad (5.35)$$

e o Axial é dado por

$$F_A = -4ig_{\pi qq}^2 f_\pi m_\pi I_1 \quad (5.36)$$

A partir destas equações, concluímos que a razão entre os Fatores de Forma é dada por

$$\gamma = \frac{|F_A|}{|F_V|} = 1 \quad (5.37)$$

A discussão sobre os valores dos Fatores de Forma (solução da integral I_1) e sua razão, e a comparação com os valores experimentais se encontra em capítulos posteriores.

CAPÍTULO

6

EXPANSÃO DERIVATIVA E ROTEAMENTOS ARBITRÁRIOS

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível”.

-São Francisco de Assis.

Até neste ponto, apresentamos os cálculos das amplitudes dos observáveis físicos onde empregamos os termos de superfície. Discutimos que tais termos surgem devido a translação dos momentos internos após a parametrização de Feynman, tínhamos conhecimento que os TS dependem das escolhas do roteamento interno nos diagramas de Feynman, e durante a introdução desta dissertação e principalmente no capítulo 4, notamos que também devemos tomar cuidado com certas simplificações que realizamos durante os cálculos, pois tais simplificações podem afetar as translações realizadas.

As adversidades discutidas acima não são as únicas que existem quando desejamos encontrar os TS, há também a violação da invariância de roteamento quando se emprega os TS. A solução desta última questão, vem da aplicação de um roteamento arbitrário seguido da expansão derivativa apresentada por Chan [10]. No tratamento de Chan, a transformação é realizada usando um momento externo por meio de uma transformação unitária.

Neste capítulo iremos realizar os cálculos para Auto-energia e para o Fator de Forma

Eletromagnético, vamos considerar um roteamento arbitrário no qual irá adicionar um momento não físico no cálculo das amplitudes dos observáveis, posteriormente utilizaremos a expansão derivativa de Chan com objetivo de eliminar este momento.

6.1 Auto-energia com roteamento arbitrário

O diagrama da auto energia com roteamento arbitrário se encontra logo abaixo

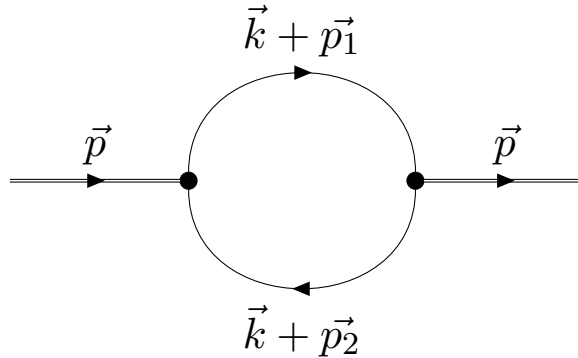


Figura 6.1: Diagrama de auto-energia com roteamento arbitrário.

Os vínculos dos momentos internos são

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = p \\ Ap_1 + Bp_2 = \alpha p + l = \Delta \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $A \neq -B$.

As variáveis A, B, α e l são constantes arbitrárias. Enquanto p é uma variável física, Δ não possui significado físico. Podemos realizar as seguintes alterações no sistema 6.1

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = p \\ p_1 + \frac{B}{A}p_2 = \frac{\Delta}{A} \end{cases} \quad (6.2)$$

Subtraindo a segunda equação da primeira no sistema 6.2, teremos

$$p_2 = \left(\frac{\alpha - A}{B + A} \right) p + \frac{l}{B + A}. \quad (6.3)$$

Com o objetivo de simplificarmos a equação acima, empregaremos a seguinte notação

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha - A}{B + A}, \quad \hat{\beta} = \frac{l}{B + A},$$

portanto

$$p_2 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}. \quad (6.4)$$

Fazendo uso do sistema 6.2 encontramos o valor de p_1 , e utilizando a equação acima, tira-se que

$$p_1 = (1 + \hat{\alpha}) + \hat{\beta}. \quad (6.5)$$

No final, ficamos com o seguinte sistema, em que também faremos algumas alterações em suas variáveis

$$\begin{cases} p_1 = (1 + \hat{\alpha})p + \hat{\beta} \\ p_2 = \hat{\alpha}p + \hat{\beta} \Rightarrow p_2 = \hat{\Delta} \Rightarrow p_1 = p + \hat{\Delta} \end{cases} \quad (6.6)$$

Vamos voltar a nossa atenção para figura 6.1 e construir a integral de Feynman para a amplitude de probabilidade do diagrama.

$$\Pi_{PS}(p^2) = -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ i\gamma_5 \frac{1}{[k + \not{p}_1 - M]} i\gamma_5 \frac{1}{[k + \not{p}_2 - M]} \right\}, \quad (6.7)$$

realizando os mesmos passos contido na seção 3.5, tira-se

$$\Pi_{PS}(p^2) = -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D \left\{ \frac{[(k + \not{p}_1) + M]}{[(k + p_1)^2 - M^2]} \frac{[-(k + \not{p}_2) + M]}{[(k + p_2)^2 - M^2]} \right\}, \quad (6.8)$$

chamando $P_{1\mu} = (k + p_1)_\mu$ e $P_{2\nu} = (k + p_2)_\nu$, isto nos possibilita calcular os traços da amplitude de probabilidade com mais facilidade, assim

$$\begin{aligned} N &= \text{Tr} [(\gamma^\mu P_{1\mu} + M)(-\gamma^\nu P_{2\nu} + M)] \\ &= \text{Tr} [-\gamma^\mu \gamma^\nu P_{1\mu} P_{2\nu} + \gamma^\mu P_{1\mu} M - \gamma^\nu P_{2\nu} M + M^2] \\ &= -4g^{\mu\nu} P_{1\mu} P_{2\nu} + 4M^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$N = -4(P_1 P_2 - M^2), \quad (6.9)$$

substituindo os valores de P_1 e P_2 na equação anterior, encontramos

$$N = -4[(k + p + \hat{\Delta})(k + \hat{\Delta}) - M^2] \quad (6.10)$$

O próximo passo é utilizar a parametrização de Feynman, na qual substituiremos a multiplicação no denominador por uma integral quadrática

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x+b]^2},$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= (k+p+\hat{\Delta})^2 - M^2, \\ b &= (k+\hat{\Delta})^2 - M^2. \end{aligned}$$

Desta forma encontramos

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{(k+\hat{\Delta})(k+p+\hat{\Delta}) - M^2}{(k+\hat{\Delta}+px)^2 - \xi^2}, \quad (6.11)$$

no qual $\xi^2 = M^2 - p^2x(1-x)$.

Nota-se que a equação acima depende da variável $\hat{\Delta}$ que acompanha a variável k que representa o momento interno do diagrama. Se aplicarmos 3.94 na equação acima com objetivo de obter os termos de superfície, teremos um problema, pois a variável $\hat{\Delta}$ não possui significado físico e apareceria nos termos de superfície.

Para eliminar a variável não física fazemos uso da transformação de Chan, no qual pode-se fazer uma mudança na variável k por um valor arbitrário l da forma $k \rightarrow k+l$ de tal maneira que preservamos a simetria do modelo. Realizamos a transformação antes da expansão da ação efetiva e é realizada adicionando uma matriz identidade do tipo

$$\mathbb{1} = UU^{-1} = e^{-il \cdot x} e^{il \cdot x}, \quad (6.12)$$

dentro do traço do logaritmo. Posteriormente, emprega-se a propriedade cíclica do traço e expandimos o logaritmo em uma série de Taylor, e ao aplicarmos as matrizes no operador expandido, termo a termo, assim chega-se a uma transformação do tipo translação. Agrupando novamente a série em um logaritmo percebe-se que teremos somado em k uma variável l .

$$\begin{aligned} S &= \text{Tr} \left[\ln(\hat{\mathcal{O}}(k)) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{-il \cdot x} e^{il \cdot x} \ln(\hat{\mathcal{O}}(k)) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{il \cdot x} \ln(\hat{\mathcal{O}}(k)) e^{-il \cdot x} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\ln(\hat{\mathcal{O}}(k+l)) \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Com essa expansão derivativa passamos a não carregar o termo não físico para os termos de superfície. Assim podemos fazer que $l = -\hat{\Delta}$ para eliminar a dependência dessa variável.

Desta forma obtemos

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k(k+p) - M^2}{(k+px)^2 - \xi^2}. \quad (6.14)$$

Repare que a diferença desta equação para a equação 3.86 é o sinal da variável “ p ”. A solução da equação 3.86 é a 3.124, onde a variável “ p ” está sendo elevada ao quadrado. Ou seja, independente do sinal de “ p ”, ambas soluções das equações 3.86 e 6.14, serão as mesmas, a equação 3.124.

6.2 Fator de Forma Eletromagnético com roteamento arbitrário

O diagrama do Fator de Forma Eletromagnético com roteamento arbitrário se encontra logo abaixo

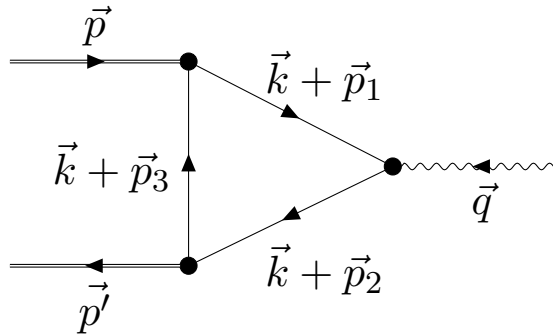


Figura 6.2: Diagrama do Fator de forma Eletromagnético com roteamento arbitrário.

no qual $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$.

Utilizando o roteamento arbitrário, adquirimos a seguinte integral de Feynman relacionado ao diagrama acima

$$\Gamma_{\mu}^{em} = -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1 - M} ie\gamma^{\mu} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{p}_3 - M} \right]. \quad (6.15)$$

Vamos fazer uso de procedimentos análogos encontrados na seção anterior. Começaremos

com o seguinte sistema

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = p \\ p_1 - p_2 = -q \\ Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = \alpha p + \beta q + l = \Omega \end{cases} \quad (6.16)$$

As variáveis $A, B, C, \alpha, \beta, l$ e Ω são constantes arbitrárias

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = p \\ p_1 - p_2 = -q \\ \frac{A}{B}p_1 + p_2 + \frac{C}{B}p_3 = \frac{\Omega}{B} \end{cases} \quad (6.17)$$

somando as duas últimas equações do sistema anterior, encontra-se

$$p_1 + \frac{C}{A+B}p_3 = \frac{\Omega - qB}{A+B} \quad (6.18)$$

subtraindo a equação anterior com a primeira equação do sistema 6.17, obtêm-se

$$p_3 = \frac{\Omega - qB - (A+B)p}{A+B+C} = \Delta. \quad (6.19)$$

Desta forma, adquirimos um novo sistema

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = p & \Rightarrow p_1 = p + \Delta \\ p_1 - p_2 = -q & \Rightarrow p_2 = p_1 + q = p + p_3 + q \Rightarrow p_2 = p + \Delta + q \Omega \end{cases}$$

Finalmente adquirimos o seguinte sistema

$$\begin{cases} p_1 = p + \Delta \\ p_2 = p + \Delta + q = p' + \Delta \\ p_3 = \Delta \end{cases} \quad (6.20)$$

A nossa integral 6.15 de Feynman será reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{em}(p, p') &= \\ &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ i\gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{p} + \not{\Delta}) - M]} i e\gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{p} + \not{q} + \not{\Delta}) - M]} i\gamma_5 \frac{1}{[(\not{k} + \not{\Delta}) - M]} \right\}. \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos, vamos impor que $k' = k + \Delta$, assim a integral acima fica

com a seguinte aparência

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{em}(p, p') &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ i\gamma_5 \frac{1}{[(k' + p) - M]} ie\gamma^\mu \frac{1}{[(k' + p + q) - M]} i\gamma_5 \frac{1}{[k' - M]} \right\} \\
&= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ i\gamma_5 \frac{[(k' + p) + M]}{[(k' + p)^2 - M^2]} ie\gamma^\mu \frac{[(k' + p + q) + M]}{[(k' + p + q)^2 - M^2]} i\gamma_5 \frac{[k' + M]}{[k'^2 - M^2]} \right\} \\
&= -N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_\mu}{[(k' + p)^2 - M^2] [(k' + p + q)^2 - M^2] [k'^2 - M^2]} \\
&= 4N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 I_\mu(q, p). \tag{6.21}
\end{aligned}$$

Sendo que $N_\mu = 4[-k'_\mu(k'^2 - M^2) - (k'^2 - M^2)(2p + q)_\mu + k'_\mu(p^2 + p \cdot q) - k' \cdot p(2p + q)_\mu - p_\mu k' \cdot q]$ e a sua obtenção pode ser vista no Apêndice D.3. Logo adquirimos

$$\begin{aligned}
I_\mu(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left\{ \frac{k'_\mu}{[(k' + p)^2 - M^2] [(k' + p + q)^2 - M^2]} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2p + q)_\mu}{[(k' + p)^2 - M^2] [(k' + p + q)^2 - M^2]} - \frac{k'_\mu(p^2 + p \cdot q)}{[\dots]} + \frac{k' \cdot p(2p + q)_\mu}{[\dots]} + \frac{p_\mu k' \cdot q}{[\dots]} \right\},
\end{aligned}$$

no qual

$$[\dots] = [(k' + p)^2 - M^2] [(k' + p + q)^2 - M^2] [k'^2 - M^2]. \tag{6.22}$$

Com objetivo de simplificar os denominadores acima, utilizamos a técnica da parametrização de Feynman. Iremos começar com os denominadores com dependência de $[\dots]$.

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(A - C)x + (B - C)y + C]^3},$$

sendo

$$\begin{aligned}
A &= (k' + p)^2 - M^2, \\
B &= (k' + p + q)^2 - M^2, \\
C &= k'^2 - M^2.
\end{aligned}$$

então

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\{[k' + px + (p + q)y]^2 - \Xi^2\}^3}. \tag{6.23}$$

em que $\Xi^2 = M^2 + [px + (p + q)y]^2 - p^2x - (p + q)^2y$.

Realizando a parametrização de Feynman para os denominadores restantes

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a - b)x + b]^2}, \quad (6.24)$$

escolhendo

$$\begin{aligned} a &= (k' + p + q)^2 - M^2, \\ b &= (k' + p)^2 - M^2, \end{aligned}$$

desta forma

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k' + p + qx)^2 - \mu^2]^2}, \quad (6.25)$$

no qual $\mu^2 = M^2 - q^2x + (qx)^2$. Escolhendo

$$\begin{aligned} a &= (k' + p + q)^2 - M^2, \\ b &= k'^2 - M^2, \end{aligned}$$

encontramos

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k' + (p + q)x)^2 - \xi^2]^2}, \quad (6.26)$$

no qual $\xi^2 = M^2 - (p + q)^2x + ((p + q)x)^2$.

Antes de realizar as parametrizações de Feynman, iremos voltar a nossa atenção para equação $I_\mu(q, p)$. Desta forma, vamos aplicar uma propriedade semelhante a da equação 4.11, no termo $k' \cdot p$, que se encontra logo abaixo

$$k \cdot p = \frac{1}{2} [(k + p)^2 - k^2 - p^2]. \quad (6.27)$$

Realizando as devidas simplificações, encontraremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{k' \cdot p}{[\dots]} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{[(k' + p + q)^2 - M^2] (k'^2 - M^2)} - \frac{1}{[(k' + p + q)^2 - M^2] [(k' + p)^2 - M^2]} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^2}{[\dots]} \right\}, \quad (6.28) \end{aligned}$$

se realizarmos as parametrizações de Feynman e posteriormente as translações nos mo-

mentos internos, iremos obter

$$\frac{k' \cdot p}{[\dots]} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \xi^2)^2} - \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} - 2p^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(k^2 - \Xi^2)^3} \right\},$$

percebe-se que o termo acima será nulo, pois enquanto as duas primeiras integrais se cancelam, visto que no limite quirar e para pequenos momentos teremos ($\mu^2 = \xi^2 = \Xi^2 = M^2$), o último será cancelado devido ao fato de $p^2 = m_\pi^2 = 0$ no mesmo regime.

Nesse ponto podemos utilizar a transformação de Chan para eliminarmos o termo não físico Δ somado a k , ou seja, k' volta a ser k . Mas já iremos considerar que o termo $k \cdot p$ seja nulo, utilizando a justificativa acima, pois posteriormente iremos trabalhar com as mesmas condições. Desta maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} I_\mu(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^4} & \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \frac{k_\mu}{[(k+p+qx)^2 - \mu^2]^2} + \int d^4k \int_0^1 dx \frac{(2p+q)_\mu}{[(k+p+qx)^2 - \mu^2]^2} - \right. \\ & - 2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{k_\mu(p^2 + p \cdot q)}{[(k+px+(p+q)y)^2 - \Xi^2]^3} + \\ & \left. + 2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{p_\mu k q}{[(k+px+(p+q)y)^2 - \Xi^2]^3} \right\}. \end{aligned}$$

Agora vamos realizar os seguintes “shifts” nas integrais acima

$$k \rightarrow k - p - qx,$$

$$k \rightarrow k - px - (p+q)y.$$

A única integral que possuirá termos de superfície é a primeira por apresentar divergência linear, porém, por enquanto iremos realizar os cálculos com a ausência de tais termos.

$$\begin{aligned} I_\mu(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^4} & \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \frac{(k-p-qx)_\mu}{[k^2 - \mu^2]^2} + \int d^4k \int_0^1 dx \frac{(2p+q)_\mu}{[k^2 - \mu^2]^2} - \right. \\ & - 2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{[k-px-(p+q)y]_\mu (p^2 + p \cdot q)}{[k^2 - \Xi^2]^3} + \\ & \left. + 2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{p_\mu [k-px-(p+q)y] q}{[k^2 - \Xi^2]^3} \right\}. \end{aligned}$$

As integrais ímpares com limite de integração simétrica são nulas, então

$$\begin{aligned}
I_\mu(p, q) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \int d^4k \int_0^1 dx \frac{(-p - qx)_\mu}{[k^2 - \mu^2]^2} + \int d^4k \int_0^1 dx \frac{(2p + q)_\mu}{[k^2 - \mu^2]^2} - \right. \\
& - 2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{[-px - (p + q)y]_\mu (p^2 + p \cdot q)}{[k^2 - \Xi^2]^3} + \\
& \left. + 2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{p_\mu [-px - (p + q)y] q}{[k^2 - \Xi^2]^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Por meio da equação 4.28 percebe-se que temos que contrair algumas integrais acima por $\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2}$, para facilitar as resoluções das integrais, vamos calcular os seus numeradores separadamente:

$$\begin{aligned}
-(2p + q)^\mu (p + qx)_\mu &= -\frac{1}{2} (4m_\pi^2 - q^2), \\
-(2p + q)^\mu [px + (p + q)y]_\mu \left(m_\pi^2 - \frac{q^2}{2} \right) &= -\frac{1}{2} (4m_\pi^2 - q^2) (x + y) \left(m_\pi^2 - \frac{q^2}{2} \right), \\
(2p + q)^\mu (-p \cdot qx - p \cdot qy - q^2 y) p_\mu &= \frac{1}{4} \frac{q^2}{2} (x - y) (4m_\pi^2 - q^2), \tag{6.29}
\end{aligned}$$

o último termo será cancelado, visto que as integrais realizadas em $(x - y)$ nos limites de integração apresentado pela parametrização de Feynman é zero, isto será verdade se considerarmos que essa integral se encontra no regime quiral e pequenos momentos. Assim, encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} I_\mu(p, q) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + \int_0^1 dx \int d^4k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + \right. \\
& \left. + 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^4k (x + y) \left[m_\pi^2 - \frac{q^2}{2} \right] \frac{1}{(k^2 - \Xi^2)^3} \right\}, \tag{6.30}
\end{aligned}$$

lembrando que $(p' + p)_\mu = (2p + q)_\mu$.

No limite quiral ($m_\pi^2 = 0$) e para pequenos momentos $q^2 \ll M$. Desta forma, teremos os seguintes valores nos denominadores

$$\mu^2 = \Xi^2 = M^2.$$

Assim adquirimos o seguinte Fator de Forma

$$F_\pi^{em}(q^2) = 2N_c N_s g_{\pi qq}^2 \left\{ I(0) - \frac{1}{3} \frac{q^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - M^2)^3} \right\}, \tag{6.31}$$

sendo

$$I(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - M^2)^2},$$

repare que o nosso Fator de Forma sem os TS condiz com a equação 4.40.

6.2.1 Cálculo do Termo de Superfície

A integral que possuirá Termo de Superfície é a seguinte

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{k_\mu}{[(k + p + qx)^2 - \mu^2]^2}, \quad (6.32)$$

que após realizarmos uma translação no denominador $k \rightarrow k - p - qx$, teremos o seguinte Termo de Superfície

$$I_\mu^{TS}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4k \left[(p + qx)^\nu \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^2} \right], \quad (6.33)$$

que é análogo a equação 4.37 com a ressalva que do lugar de $q^\nu x$ temos $(p + qx)^\nu$. Contraindo o TS por $\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2}$, encontramos

$$\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} I_\mu^{TS}(p, q) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4k \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^3}, \quad (6.34)$$

a solução da integral é análogo a equação que encontra-se em 4.24

$$\frac{(p' + p)^\mu}{(p' + p)^2} I_\mu^{TS}(p, q) = \frac{-i2\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{\Lambda^4}{4(\Lambda^2 + \mu^2)^2}. \quad (6.35)$$

Então o termo de superfície do Fator de Forma Eletromagnético será

$$F_\pi^{TS}(q^2) = 2N_c N_s g_{\pi\bar{q}q}^2 \left\{ \frac{-i2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^4}{4(\Lambda^2 + \mu^2)^2} \right\}. \quad (6.36)$$

Vamos considerar que o TS esteja no regime para pequenos momentos ($q \ll M$), e no limite quiral ($p^2 = m_\pi^2 = 0$). E posteriormente, inserimos $g_{\pi\bar{q}q}^2 = -2iN_c N_s I(0)$ na equação acima:

$$F_\pi^{TS}(q^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{I(0)} \frac{\Lambda^4}{4(\Lambda^2 + M^2)^2}, \quad (6.37)$$

sabemos que $f_\pi^2 = -2iN_c N_s M^2 I(0)$ e com $N_c = 3$ e $N_s = 2$, substituindo na equação

acima encontramos

$$F_{\pi}^{TS}(q^2) = -\frac{i3M^2}{8\pi^2 f_{\pi}^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + M^2)^2}. \quad (6.38)$$

Resolvendo a equação 6.31 e adicionando a 6.38, encontra-se

$$\left|F_{\pi}^{em}(q^2)\right| = 1 + \frac{q^2}{8\pi^2 f_{\pi}^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + M^2)^2} + \frac{3M^2}{8\pi^2 f_{\pi}^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + M^2)^2}. \quad (6.39)$$

Ao contrário do cálculo do Fator de Forma Eletromagnético anterior, com o uso do roteamento arbitrário e aplicação da expansão derivativa os TS são evidenciados, como constata a equação acima. O gráfico com os resultados numéricos do Fator de Forma se encontra no próximo capítulo.

CAPÍTULO

7

RESULTADOS NUMÉRICOS

“A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro”.

-Albert Einstein.

No decorrer dos Capítulos anteriores, encontramos expressões para os observáveis físicos dos mésons píons. Nesse capítulo listaremos e discutiremos as soluções numéricas, utilizando os ajustes apresentados em [24][26], mostraremos os resultados com ou sem os termos de superfície para o decaimento raro do pión e eletromagnético.

7.1 Ajuste de parâmetros

Para encontrar os cálculos referentes aos Fatores de Forma do decaimento raro do pión e eletromagnético, utilizamos o ajuste de parâmetros efetuado por [24][26]. Nestes trabalhos os ajustes são realizados tomando por base os valores experimentais das massas dos píons ($m_\pi = 139,15\text{MeV}$) e o valor da constante de decaimento fraco do pión $f_\pi = 92,21\text{MeV}$, esses extraídos de [42]¹ que possuem os mesmo valores em [52]. Os valores das massas constituinte dos quarks foram retiradas do trabalho de Borka e Jovanovich [27]. Os

¹O valor do Particle Data Group (PDG) para a constante de decaimento fraco parece diferente, mas trata-se apenas de uma diferença na tomada relação de Goldberg-Treiman, no qual o valor experimental da constante de decaimento fraco do pión deve ser dividido por $\sqrt{2}$.

valores do parâmetro de corte (Λ) são ajustados para reproduzir os dados experimentais mencionados acima, possibilitando encontrar os valores dos acoplamentos entre os quarks e os píons ($g_{\pi\bar{q}q}$), considerando os cálculos com ou sem os termos de superfície.

7.2 Fatores de Forma Axial e Vetorial

Podemos obter duas soluções distintas de I_1 pertencente a equação 5.35, primeiro iremos resolver a integral I_1 com ajuda das equações 4.16 e 4.24 que posteriormente é aplicada na equação 5.35, logo adquirimos

$$|F_V| = \frac{m_\pi}{8\pi^2} \frac{\Lambda^4}{f_\pi (\Lambda^2 + M^2)^2} \quad (7.1)$$

O segundo método de solução será por meio da Técnica de integração em d-dimensões (TD), que pode ser estudado nas seguintes referências [46][47], no qual iremos utilizar a seguinte propriedade

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^n} = \frac{(-1)^n i\Gamma(n-2)}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{M^{2(n-2)}} \text{ para } n \geq 3 \quad (7.2)$$

onde utilizamos a seguinte propriedade das Funções Gamma², $\Gamma(n+1) = n!$, para resolução da equação acima. Desta forma obtemos

$$|F_V| = \frac{m_\pi}{8\pi^2 f_\pi} \quad (7.3)$$

Nota-se que durante todo procedimento para o cálculo do Fator de Forma Axial e Vetorial contido no Capítulo 5, não havia presença de integrais com divergências lineares e quadráticas, melhor dizendo, não possuem termos de superfície de forma explícita. Felizmente, a regularização via *sharp cut-off* nos possibilita estudar o efeito dos termos de superfície, mas de uma forma indireta. Já foi mencionado que para validar o modelo de NJL, devemos calcular as integrais até um parâmetro de corte (Λ), que geralmente é calibrado por meio do valor da constante de decaimento fraco, pois é um resultado experimental muito bem conhecido na literatura.

Contudo, podemos utilizar outros observáveis físicos para realizar essa calibragem, no nosso caso, passamos a fazer uso da constante de acoplamento, pois podemos encontrar o seu resultado numérico por meio da equação da auto-energia do méson. Diferente da

²CF: livro *Elementos de Física Matemática vol.1* [4]

equação da constante de decaimento fraco em $SU(2)$, a auto-energia possui termos de superfície, e é por meio dela que iremos calibrar o nosso (Λ) . Portanto, podemos dizer, que os termos de superfície podem contribuir para os resultados do Fator de Forma, por meio de outros parâmetros, que no nosso caso seria o parâmetro de corte Λ .

Apenas uma das duas soluções acima possuem influência dos termos de superfície, mas de forma implícita, que é a solução 7.1, que será influenciada pelo fator de corte (Λ) , enquanto a solução 7.3 não terá dependência implícita, pois eliminamos a constante de acoplamento $g_{\pi\bar{q}q}$ por meio da relação de Goldberg-Treiman. A comparação com o método TD vem pelo fato dele já ser utilizado em um trabalho anterior demonstrado em [53] e também por possuir uma boa aproximação com resultado experimental.

Abaixo se encontra a tabela 7.1 e a 7.2 que foram retiradas das referências [24][26]. Porém as nossas tabelas serão apenas constituídas com os parâmetros que iremos utilizar em nosso cálculo numérico, também haverá apenas os valores dos parâmetros relacionados com a massa constituinte de quarks com o valor de $(292, 35MeV)$, por apresentar a melhor aproximação com o valor experimental contido nas referências [3][6].

Tabela 7.1: Valores dos parâmetros sem os termos de superfície.

M (MeV) [27]	Λ (MeV) [24]	$g_{\pi\bar{q}q}$ [26]
292,35	827,40	3,097

Tabela 7.2: Valores dos parâmetros com os termos de superfície.

M (MeV) [27]	Λ (MeV) [24]	$g_{\pi\bar{q}q}$ [26]
292,35	952,92	2,641

O valor experimental de F_V , de acordo com [3][6][31], é de $F_V = (0,017 \pm 0,008)$ e da razão é $\gamma = (0,45 \pm 0,06)$. O valor de F_A é determinado pela razão de F_A por F_V . O trabalho [31] também nos fornece o valor esperado de F_A que é $F_A = (0,0121)$. A nossa razão possui o valor de $\gamma = 1$ e é independente do esquema de regularização como é demonstrado na equação 5.37. Substituindo os valores da constante de decaimento fraco e a massa no pión, mencionados anteriormente, nas equações 7.1 e 7.3 encontramos F_V , que está alocado na tabela abaixo junto com resultado experimental.

Tabela 7.3: Comparação entre resultados teóricos e experimental.

	NJL (Λ) sem TS	NJL (Λ) com TS	NJL (TD)	Experimento [3]
F_V	0,0151	0,0160	0,0191	$0,017 \pm 0,008$
F_A	0,0151	0,0160	0,0191	-
γ	1	1	1	$0,45 \pm 0,06$

Por meio dos valores retratados na tabela 7.3 podemos afirmar que todos os resultados do F_V são bem próximos do resultado experimental, pois eles se encontram dentro da margem de erro. Percebe-se que a regularização via sharp cut-off sem os termos de superfície possui o pior valor dentre os três, por apresentar maior discrepância com resultado experimental, mas quando consideramos atuação de forma indireta dos TS ele passa a apresentar um resultado mais acurado, possuindo uma discrepância de apenas 0,001, superando o resultado determinado pela TD.

O mesmo não pode ser dito a respeito da razão entre os Fatores de Forma Axial e Vetorial. O Fator de Forma Axial não pode ser encontrado experimentalmente, mas por meio da relação 5.37. Neste trabalho o valor de F_A não foi o esperado, por apresentar um valor idêntico ao F_V , conseqüentemente ele prejudicou a determinação de γ . Tal diferença pode ser consequência da limitação do próprio modelo, já que ele é uma teoria efetiva para as interações fortes da QCD e não uma teoria fundamental.

7.3 Fator de Forma Eletromagnético

Percebe-se que no decorrer desta dissertação obtemos com sucesso em demonstrar que o Fator de Forma Eletromagnético é “1” quando temos “ q ” tendendo a zero. Chegamos a esse resultado por meio das simplificações que realizamos no decorrer dos cálculos da amplitude. O mais impressionante deste procedimento, é que quando utilizamos a Técnica de integração em d-dimensões (equação 7.2) em 4.46 ou fazemos $\Lambda \gg M$, encontramos o resultado contido em [28], que julgamos como uma ótima aproximação. Desta forma, escolhemos realizar as comparações dos resultados dos Fatores de Forma Eletromagnético com emprego da regularização via *sharp cut-off* com ou sem TS, com emprego da TD, e com os dados empíricos retirados do seguinte trabalho[1].

Na tabela abaixo mostramos os resultados numéricos do raio eletromagnético determinados pelas abordagens citada acima. O termo de superfície contribui com valor constante para o Fator de Forma Eletromagnético, assim ele não altera o valor do raio, como podemos verificar quando se aplica a equação 6.2.1 em 4.47. O melhor resultado teórico do raio eletromagnético é com o emprego da TD, podemos perceber que ambos os resultados ficaram bem abaixo do valor experimental, o que já era esperado, pois em nosso cálculo não incluímos os modos mesônicos vetoriais, uma vez que eles fornecem um aprimoramento considerável para o raio [7].

Tabela 7.4: Comparação entre resultados teóricos e experimental do raio.

	NJL (Λ)	NJL (TD)	Experimento [1]
$\langle r_\pi^2 \rangle$ (fm ²)	0,28	0,35	0,43

Para o Fator de Forma Eletromagnético, verificamos que os resultados obtidos se ajustam muito bem com as estimativas, principalmente, na região de pequenos momentos. Entretanto, a adição dos TS não melhoram a acurácia dos resultados como consta o gráfico 7.1, o Fator de Forma Eletromagnético com adição dos TS foi normalizado para que quando “ q ” tender para zero, o Fator de Forma Eletromagnético tende a “1”. O melhor resultado do Fator de Forma Eletromagnético comparado com o resultado experimental [1], é por meio do emprego da TD, como podemos observar no gráfico 7.2.

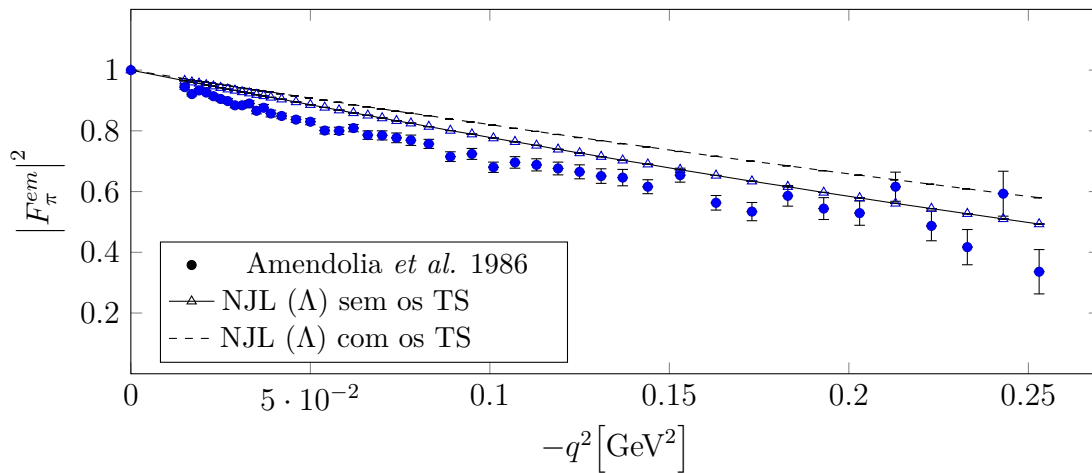


Figura 7.1: Comparação dos dados experimentais com os resultados teóricos por meio da regularização via sharp cut-off com ou sem termos de superfície.

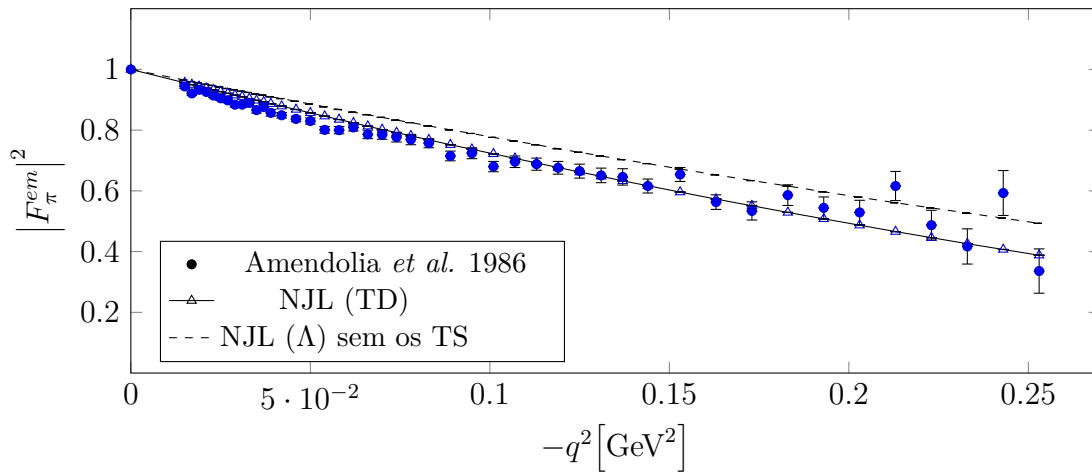


Figura 7.2: Comparação dos dados experimentais com os resultados teóricos por meio da regularização via sharp cut-off e da TD.

CAPÍTULO

8

CONCLUSÃO

“A natureza é um enorme jogo de xadrez disputado por deuses, e que temos o privilégio de observar. As regras do jogo são o que chamamos de física fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta”.

-Richard Feynman.

A partícula central para o modelo de NJL em sua forma original é o méson pión. Portanto podemos alegar que cada procedimento analisado neste quadro que envolva a participação do pión constitui, de certo modo, em uma avaliação do modelo. Na introdução desta dissertação, enunciamos que o objetivo central deste trabalho é a determinação dos Fatores de Forma Axial e Vetorial do decaimento raro do pión. Para encontrarmos os valores numéricos dos Fatores de Forma, tivemos que primeiro determinar e os valores da massa constituinte, constante de decaimento fraco, constante de acoplamento e principalmente o *cut-off* (Λ), que é conhecido como parâmetro de corte, e possui uma grande função, pois é ele que demonstra até onde podemos validar o modelo.

O resultado encontrado para o Fator de Forma Vetorial se aproximou dos resultados experimentais, mas tivemos uma maior precisão quando consideramos os termos de superfície de forma implícita em nosso cálculo, possuindo apenas uma discrepância de apenas 0,001 com valor experimental, superando até mesmo a determinação do Fator de Forma quando se emprega a Técnica de integração em d-dimensões. Contudo, o mesmo

não podemos dizer à respeito da razão γ , visto que houve uma divergência significativa entre o resultado esperado e o resultado encontrado.

Apesar de a procura de soluções numéricas por meio de procedimentos teóricos com os dados experimentais ser um objetivo desejável e fundamental para Física. Não podemos ignorar que estamos trabalhando com um modelo, melhor dizendo, estamos trabalhando com limites e desta forma procuramos soluções aproximadas, mas com processos que respeitam princípios básicos da teoria, neste caso, podemos colocar como exemplo as simetrias que envolvam a QCD.

Um dos palpites para encontrar uma solução com resultados mais aproximados com o valor empírico, é adição do méson ρ . Visto que antes de um dos vértices gerar o fóton, pode haver a produção de um par quark-antiquark, criando um méson ρ que acopla ao fóton. Poderíamos também estender os cálculos considerando-se a amplitude de Bremsstrahlung, que embora seja considerada desprezível para o caso do espalhamento estudado, pode ser que acabe contribuindo para gerar uma melhoria significativa nos resultados. Além disso, também seria interessante expandir os cálculos para o Modelo NJL SU(3), verificando-se se há uma melhora nos resultados, uma vez que todo o desenvolvimento do trabalho foi feito no quadro do modelo em SU(2).

Em relação ao Fator de Forma Eletromagnético, conseguimos por meio de um roteamento arbitrário em seu digrama, evidenciar da integral com divergência linear o seu respectivo termo de superfície, e posteriormente observar o seu efeito. Percebemos que o emprego dos termos de superfície não possibilita uma melhora em seu resultado numérico, logo, o método que mais se aproximou dos dados empíricos, foi a técnica de integração em d-dimensões, que reproduz os mesmos resultados que o Modelo Espectral de Quarks do Fator de Forma Eletromagnético em SU(2) como pode ser visualizado em [50].

Vamos concluir este capítulo com um breve resumo das discussões e resultados nela apresentados. Inicialmente realizamos uma revisão sobre o modelo de NJL em SU(2) e reproduzimos os cálculos dos observáveis físicos independente do esquema de regularização. Por meio da técnica de bosonização, escrevemos uma lagrangiana para o modelo, onde os campos principais são os campos mesônicos, que interagem por meio de quarks. Desta nova lagrangiana, obtivemos uma ação efetiva em termos dos campos bosônicos, semelhante à ação efetiva clássica, exceto pela natureza dos campos. Através dessa nova lagrangiana pode-se determinar os observáveis físicos correspondentes à equação de gap, auto-energia do méson, constante de decaimento fraco, Fator de Forma Eletromagnético e os Fatores de Formas Axial e Vetorial, os três últimos observáveis foram necessários modificar a parte cinética da lagrangiana do modelo de NJL.

Utilizamos nos cálculos dos observáveis a regularização via *sharp cut-off* que nos possibilitou a determinação dos termos de superfície, que aparecem devido por meio das

integrais que apresentam divergência lineares e quadráticas. Podemos constatar em trabalhos anteriores que a inclusão dos termos de superfície nos cálculos, contribuem com uma melhora na acurácia dos resultados.

Durante a determinação do Fator de Forma Eletromagnético, notamos que o surgimento dos termos de superfície depende da escolha dos momentos contidos no roteamento interno do diagrama, posteriormente repetimos o mesmo cálculo mas com um roteamento arbitrário que acarretou no aparecimento de termos não físicos acompanhando os momentos internos, esses termos foram eliminados com a aplicação da expansão derivativa demonstrada por Chan. Desta forma, conseguimos obter o Fator de Forma Eletromagnético com os termos de superfície e ainda garantimos a invariância no roteamento. O mesmo procedimento foi realizado com a determinação da Auto-energia do méson.

Infelizmente não há integrais com divergências lineares e quadráticas no cálculo dos Fatores de Forma Axial e Vetorial do decaimento raro do pión. A ausência das divergências nos revela que não há termos de superfície nos cálculos, pelo menos de forma explícita. Encontramos no final dos cálculos a equação correspondente aos Fatores de Forma, e percebemos a sua dependência com o parâmetro de corte (Λ), que em trabalhos passados foram calibrados com e sem os Termos de Superfície. Melhor dizendo, os Fatores de Formas possuem TS mas de uma forma implícita, pois as contribuições do TS estarão escondidas no Λ da equação. Essa contribuição sucinta dos TS nos possibilitou encontrar resultados teóricos mais próximo dos dados empíricos.

APÊNDICE

A

CONVENÇÕES, NOTAÇÕES E DEMAIS UTENSÍLIOS

Neste apêndice apresentaremos as definições, convenções e ferramentas que foram empregadas em nossos cálculos ao longo dessa dissertação. Ele também é um complemento para alguns assuntos discutidos durante este trabalho, sendo eles, as coordenadas hiperesféricas, análise de graus de divergências, e um pouco a respeito dos termos de superfície.

A.1 Métrica, Matrizes de Dirac, de Pauli e de Gell-Mann

A primeira definição se diz a respeito ao sistema de unidades naturais,

$$\hbar = c = 1,$$

no qual \hbar é a constante de Planck dividido por 2π e “ c ” é a velocidade da luz no vácuo. Por meio destas constantes é possível demonstrar que massa e momento possuem dimensão de energia e a carga elementar se torna adimensional.

As coordenadas do espaço-tempo são denotadas por um quadrivetor contravariante

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}), \quad (\text{A.1})$$

e o quadrivetor covariante é apresentado como

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x}), \quad (\text{A.2})$$

podemos permutar os quadrivetores (covariantes e contravariantes) utilizando a seguinte equação¹

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \text{ ou } x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad (\text{A.3})$$

sendo $g_{\mu\nu}$ é conhecido como Métrica que é o tensor de espaço-tempo no espaço de Minkowski, ele é definido pela seguinte matriz

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em que } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{A.4})$$

Frequentemente utilizamos derivadas e principalmente para escrever as lagrangianas. A derivada ∂_μ é definida por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial^0; \nabla), \quad (\text{A.5})$$

e conseqüentemente

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial^0; -\nabla). \quad (\text{A.6})$$

A notação “slash” é utilizado para designar a multiplicação de uma matriz γ por um quadrivetor: $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu = \gamma^\mu a_\mu$. Para as matrizes de Dirac, empregaremos a representação de Bjorken e Drell

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \text{ sendo } \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\tau} \\ -\vec{\tau} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

¹Está implícita a convenção de Einstein - índices repetidos são sempre somado.

com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0_2 \\ 0_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau^i \\ -\tau^i & 0_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

no qual $\mathbb{1}_2$ é a matriz identidade 2×2 e τ^i são as matrizes de Pauli representadas por

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

As matrizes de Pauli obedecem as seguintes relações de

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.10})$$

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k, \quad (\text{A.11})$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor de Levi-Civita². Outras propriedades das matrizes de Pauli são

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \tau_i^2 = \tau_j^2 = \tau_k^2 = \mathbb{1}_2, \quad \det(\tau_i) = 1, \quad \text{tr}(\tau_i) = 0. \quad (\text{A.12})$$

A matriz γ_5 , é definida em termos das matrizes γ^μ por

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma. \quad (\text{A.13})$$

As matrizes γ obedecem as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0. \quad (\text{A.14})$$

outras propriedades importantes são

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5; \quad (\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4. \quad (\text{A.15})$$

Algumas identidades de traços úteis para resolução dos cálculos existentes no texto

$$\text{tr}[\gamma_5] = \text{tr}[\gamma^\mu] = \text{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma] = \text{tr}[\text{número ímpar de matrizes } \gamma] = 0, \quad (\text{A.16})$$

²Estabelecido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ for uma permutação par} \\ -1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ for uma permutação ímpar} \\ 0, & \text{outras situações} \end{cases},$$

a matriz γ^5 é um produto de números pares de matrizes gama, logo seguimos a regra acima e assim concluímos que o traço de γ^5 multiplicado por um número ímpar de matrizes gama resultam em zero, como por exemplo

$$\text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu] = \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = 0, \quad (\text{A.17})$$

e há outras regras que são utilizadas neste trabalho

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\mathbf{1}_4] &= 4, \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] &= 0, \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \\ \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Por último e não menos importante, temos as matrizes de Gell-Mann que constituem uma representação no grupo SU(3) no espaço de cores, que são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Essas matrizes são hermitianas e suas propriedades serão ausentes neste trabalho.

A.2 Coordenadas hipersféricas

Coordenadas hipersféricas em 4-D são dadas por

$$d^4k = k^3 dk \sin^2(\theta_2) d\theta_2 \sin(\theta_1) d\phi, \quad (\text{A.20})$$

para n -dimensões, teríamos:

$$d^n k = k^{n-1} dk \sin^{n-2}(\theta_{n-2}) d\theta_{n-2} \sin^3(\theta_3) d\theta_3 \sin^2(\theta_2) d\theta_2 \sin(\theta_1) d\phi \quad (\text{A.21})$$

A.3 Grau Superficial de Divergências

A análise de grau superficial de divergências apresentado neste texto nos possibilita (ainda de forma superficial) a possibilidade de a integral apresentar divergência.

O grau superficial de divergência é o número de potência de k (momento interno do diagrama), incluindo o elemento de integração, menos o número de potência de k no denominador, ou seja:

$$G.D = P_{num} - P_{den}. \quad (\text{A.22})$$

1. Se $G.D \geq 0 \Rightarrow$ a integral é divergente.

- Se $G.D = 2 \Rightarrow$ a integral (provavelmente) é quadraticamente divergente.
- Se $G.D = 1 \Rightarrow$ a integral (provavelmente) é linearmente divergente.
- Se $G.D = 0 \Rightarrow$ a integral é logaritmicamente divergente.

2. Se $G.D < 0 \Rightarrow$ a integral é convergente.

Divergências que ocorrem quando $k \rightarrow \infty$ são ultravioletas, as que advêm quando $k \rightarrow 0$ são conhecidas como infravermelho (se encontram em teorias não massivas, ou de partículas sem massa).

A.4 Sobre os Termos de Superfície

Os termos de superfície são consequências, que surgem devido a translações realizadas em integrais linearmente divergente ou com divergências superiores. Logo abaixo, vamos realizar uma simples demonstração, do surgimento dos termos de superfície e o motivo de seu nome, tal demonstração está contida em [11].

Escrevemos a seguinte equação

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)], \quad (\text{A.23})$$

em que “ $f(x)$ ” é uma função que pertence ao regime de uma dimensão, e “ $\Delta(a)$ ” é a translação realizada entre “ $f(x+a) - f(x)$ ”. Expandindo a função “ $f(x+a)$ ” em “ a ”,

teremos

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \dots - f(x) \right] \\ &= a [f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2} [f'(\infty) - f'(-\infty)] + \dots .\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

“ $\Delta(a)$ ” será cancelado quando a função “ $f(x)$ ” for convergente ou possuir divergência logarítmica, pois teremos

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots = 0.$$

Contudo, para funções com divergências lineares, obteremos

$$f(\pm\infty) \neq 0 \text{ e } f'(\pm\infty) = \dots = 0.$$

e conseqüentemente

$$\Delta(a) = a [f(\infty) - f(-\infty)]. \quad (\text{A.25})$$

Para funções com divergências quadráticas, teremos

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) \neq 0 \text{ e } f''(\pm\infty) = \dots = 0.$$

e conseqüentemente

$$\Delta(a) = a [f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2} [f'(\infty) - f'(-\infty)], \quad (\text{A.26})$$

a mesma lógica é utilizada para integrais com divergências superiores.

Estas equações “ $\Delta(a)$ ” corresponde ao “termos de superfície”, pois em uma dimensão os pontos inicial e final de uma linha são o que corresponde aos termos de superfície, para duas dimensões os termos corresponderão com o perímetro da figura, para três dimensões teremos a superfície objeto, o mesmo raciocínio é válido para n-dimensões e até mesmo para hipersféricas, que podem ser conferidas em [11].

A equação correspondente aos termos de superfície em “n” dimensões é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= \int d^n(r) [f(r+a) - f(r)] \\ &= \int d^n r \left[a^\lambda \frac{\partial}{\partial r_\lambda} f(r) + \frac{1}{2} a^\lambda \frac{\partial}{\partial r_\lambda} a^\sigma \frac{\partial}{\partial r_\sigma} f(r) + \dots \right].\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

Isolando o termo “ $f(x + a)$ ” na equação acima, encontramos

$$f(r + a) = f(r) + a^\lambda \frac{\partial}{\partial r_\lambda} f(r) + \frac{1}{2} a^\lambda \frac{\partial}{\partial r_\lambda} a^\sigma \frac{\partial}{\partial r_\sigma} f(r) + \dots \quad (\text{A.28})$$

Que corresponde com o operador de translação, equação 3.94, demonstrado em [37].

A.5 Expansão Derivativa

Nesta seção iremos demonstrar como se obtêm o resultado da transformação de Chan [10] contida na 6.13. Primeiro, iremos definir o nosso “ $\ln(\hat{\mathcal{O}}(k))$ ”, que possui uma formula análoga a equação 3.30, logo

$$S = \text{Tr} [\ln(\hat{\mathcal{O}}(k))] = \text{Tr} [\ln(i\cancel{\partial} - M + \Lambda)] = \text{Tr} [\hat{\Gamma}] \quad (\text{A.29})$$

com o pretexto de escrever uma Ação mais generalizada, adicionamos o termo “ Λ ”, onde ele pode ser constituído de campos auxiliares e(ou) fontes.

Neste momento, realizamos a transformação de Chan adicionando uma matriz identidade do tipo

$$\mathbb{1} = UU^{-1} = e^{-il \cdot x} e^{il \cdot x} \quad (\text{A.30})$$

dentro do traço da equação A.29, posteriormente, emprega-se a propriedade cíclica do traço, logo encontramos

$$\hat{\Gamma} = \ln(i\cancel{\partial} - M + \Lambda) = e^{-il \cdot x} e^{il \cdot x} \ln(i\cancel{\partial} - M + \Lambda) = e^{il \cdot x} \ln(i\cancel{\partial} - M + \Lambda) e^{-il \cdot x} \quad (\text{A.31})$$

neste ponto realizamos uma expansão em série Taylor no logaritmo, mas para isso devemos fazer uso de utensílios, vejamos a seguinte expansão

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots \quad (\text{A.32})$$

se fazermos “ $x = 1 + y$ ”consequentemente adquirimos “ $y = x - 1$ ”, e, portanto, teremos uma nova expansão, sendo ela

$$\ln(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \dots \quad (\text{A.33})$$

Agora podemos expandir o logaritmo quando comparamos com expansão anterior, ou seja

$$\ln(i\cancel{\partial} - M + \Lambda) = (i\cancel{\partial} - M + \Lambda - 1) - \frac{1}{2}(i\cancel{\partial} - M + \Lambda - 1)^2 + \frac{1}{3}(i\cancel{\partial} - M + \Lambda - 1)^3 - \dots$$

Substituindo a expansão acima no último termo da $\hat{\Gamma}$, encontramos

$$\hat{\Gamma} = e^{il \cdot x} \left\{ (i\hat{\phi} - M + \Lambda - 1) - \left[\frac{1}{2} (i\hat{\phi} - M + \Lambda - 1)^2 \right] + \dots \right\} e^{-il \cdot x} \quad (\text{A.34})$$

Devemos atuar com a exponencial do lado direito da equação A.34, pelo lado esquerdo, em cada termo do operador. Contudo, lembremos que operador derivada ∂_μ obedece a regra de Leibnitz:

$$\partial_\mu(fg) = f\partial_\mu(g) + g\partial_\mu(f), \quad (\text{A.35})$$

em que f e g são apenas funções. Esta propriedade pode ser estendida também para o caso de operadores:

$$\partial_\mu \hat{A} = \partial_\mu \hat{A} + \hat{A} \partial_\mu. \quad (\text{A.36})$$

Então, similarmente, temos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) e^{-il \cdot x} = (i\gamma^\mu \partial_\mu) e^{-il \cdot x} + e^{-il \cdot x} (i\gamma^\mu \partial_\mu) = e^{-il \cdot x} \gamma^\mu (i\partial + l)_\mu \quad (\text{A.37})$$

percebe-se que aplicação das exponenciais em cada termo, ganha-se uma variável “ l ” somado em “ $i\hat{\phi}$ ”, como podemos ver em “ $\hat{\Gamma}$ ”

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= e^{ilx} \left\{ (i\hat{\phi} - M + \Lambda - 1) - \left[\frac{1}{2} (i\hat{\phi} - M + \Lambda - 1)^2 \right] + \dots \right\} e^{-ilx} = \\ &= e^{ilx} e^{-ilx} \left\{ (i\hat{\phi} + l - M + \Lambda - 1) - \left[\frac{1}{2} (i\hat{\phi} + l - M + \Lambda - 1)^2 \right] + \dots \right\} = \\ \hat{\Gamma} &= \underbrace{e^{ilx} e^{-ilx}}_1 \ln(i\hat{\phi} + l - M + \Lambda) = \ln(i\hat{\phi} + l - M + \Lambda). \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Repare que todo o processo de A.38 é o resultado e a continuação dos cálculos efetuados a partir da A.31, e substituir ambos os resultados, ou seja, “ $\hat{\Gamma}$ ” em A.29, nos possibilita verificar a transformação de Chan

$$\begin{aligned} S &= \text{Tr} [\ln(\hat{\mathcal{O}})] = \text{Tr} [e^{-il \cdot x} e^{il \cdot x} \ln(\hat{\mathcal{O}})] = \text{Tr} [e^{il \cdot x} \ln(\hat{\mathcal{O}}) e^{-il \cdot x}] = \\ &= \text{Tr} [e^{il \cdot x} e^{-il \cdot x} \ln(\hat{\mathcal{O}} + l)] = \text{Tr} [\ln(\hat{\mathcal{O}} + l)]. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

APÊNDICE

B

QUEBRA E A INVARIÂNCIA DE SIMETRIA

Este apêndice foi desenvolvido como um material complementar do capítulo 2, no qual os cálculos foram realizados rigorosamente, porém o apêndice A tem função semelhante para entendimento dos cálculos realizados abaixo.

B.1 Quebra de simetria

As características simétricas na natureza sempre foram muito importantes para a Física. E na Teoria Clássica de Campos há um grande exemplo, o Teorema de Noether nos diz que sempre que existe uma simetria em uma teoria, tem que haver uma quantidade conservada (carga, corrente, etc). Podemos demonstrar tal característica por meio da análise do divergente da corrente axial

$$j^{\mu 5} = \bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\Psi(x). \quad (\text{B.1})$$

Se o divergente da corrente for não-nulo a simetria associada deixa de existir na lagrangiana, e, portanto, quebrada. A equação de Dirac para um férmion de massa m é dado

por

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m) \Psi(x) = 0, \quad (\text{B.2})$$

e seu complexo conjugado é

$$\bar{\Psi}(x) \left(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m \right) = 0, \quad (\text{B.3})$$

em que usamos a notação $\bar{\Psi}(x) \overleftarrow{\not{\partial}} = \partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu$. Das duas equações anteriores podemos escrever que

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) &= -im\Psi(x), \\ \partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu &= im\bar{\Psi}(x). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Aplicando o operador divergente na corrente axial encontramos

$$\begin{aligned} \partial_\mu (j^{\mu 5}) &= \partial_\mu \left[\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi(x) \right] \\ &= \partial_\mu \left[\bar{\Psi}(x) \right] \gamma^\mu \gamma^5 \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 [\partial_\mu \Psi(x)]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Como $\bar{\Psi}(x)$ e $\Psi(x)$ são soluções da equação de Dirac, utilizando os resultados contidos em B.4 e por meio das relações de anti-comutação de γ^μ e γ^5 , adquirimos

$$\begin{aligned} \partial_\mu (j^{\mu 5}) &= im\bar{\Psi}(x) \gamma^5 \Psi(x) + im\bar{\Psi}(x) \gamma^5 \Psi(x) \\ &= 2im\bar{\Psi}(x) \gamma^5 \Psi(x). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Concluimos que para que haja conservação da corrente axial é necessário que o termo de massa seja nulo, senão, a simetria quiral é quebrada.

B.2 Invariância Quiral

Nesta seção iremos mostrar que a lagrangiana do modelo de NJL sem termo de massa é invariante perante uma transformação quiral. A transformação quiral do spinor $\Psi(x)$ é dada por

$$\Psi(x) \rightarrow \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \Psi(x), \quad (\text{B.7})$$

sendo $\vec{\theta}$ uma constante. O spinor conjugado se transforma da seguinte forma

$$\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x) \gamma_0, \quad (\text{B.8})$$

e diante de uma transformação quiral

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \left[\exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}\gamma_5) \right]^\dagger \gamma_0 = \Psi^\dagger(x) \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}\gamma_5), \quad (\text{B.9})$$

o vetor $\vec{\theta}$ é concedido por meio de três parâmetros sendo eles θ_1 , θ_2 e θ_3 que demonstra que naturalmente ele pode ser escrito na forma $\vec{\theta} = \theta\hat{n}$, no qual \hat{n} é um versor. E por meio das propriedades dos versores consta-se que

$$\sum_k n_k^2 = 1. \quad (\text{B.10})$$

A exponencial pode ser expandida em uma série de potencias

$$\exp(i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5) = 1 + i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5 + \frac{(i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5)^2}{2!} + \dots. \quad (\text{B.11})$$

Percebe-se ainda que

$$\begin{aligned} (\vec{\tau} \cdot \hat{n})^2 &= (\tau_1 n_1 + \tau_2 n_2 + \tau_3 n_3)^2 \\ &= (\tau_1 n_1)^2 + (\tau_2 n_2)^2 + (\tau_3 n_3)^2 + n_1 n_2 (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_1) + \dots \\ &= n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Rearranjando os termos da série contida em B.11

$$\begin{aligned} \exp(i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots - i\vec{\tau} \cdot \hat{n}\gamma_5 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \cos(\theta) + i\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5 \sin(\theta). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

do mesmo modo, podemos encontrar

$$\exp(-i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5) = \cos(\theta) - i\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5 \sin(\theta). \quad (\text{B.14})$$

Fazendo uso de tal relação $\{\gamma_0, \gamma_5\} = 0$ e utilizando como base a equação acima deduz-se que

$$\exp(-i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5)\gamma_0 = \gamma_0 \exp(i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5), \quad (\text{B.15})$$

substituindo este resultado em B.9, temos

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) \exp(i\theta\hat{n} \cdot \vec{\tau}\gamma_5). \quad (\text{B.16})$$

Neste ponto temos conhecimento como o spinor conjugado se transforma diante de uma transformação quiral. Vamos dar início a demonstração, começamos pela parte cinética da lagrangiana que se mostrará invariante sob a transformação quiral. Com intuito de simplificar as notações dos spinores fazemos $[\bar{\Psi}(x), \Psi(x)] \Rightarrow [\bar{\Psi}, \Psi]$, então

$$\begin{aligned}
i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi &\rightarrow i\bar{\Psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\not{\partial}[\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\Psi] \\
&= i\bar{\Psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\gamma^\mu\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\partial_\mu\Psi \\
&= i\bar{\Psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\exp(-i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

e com isso verificamos que a parte cinética da lagrangiana é invariante. Resta analisar a parte de interação, ou seja, as quantidades $\bar{\Psi}\Psi$ e $i\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\Psi$

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}\Psi &\rightarrow \bar{\Psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\Psi \\
&= \bar{\Psi}\exp[i(2\theta)\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5] \\
&= \bar{\Psi}[\cos(2\theta) + i\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\sin(2\theta)]\Psi \\
\bar{\Psi}\Psi &\rightarrow \bar{\Psi}\Psi\cos(2\theta) + i\bar{\Psi}\gamma_5(\hat{n}\cdot\vec{\tau})\Psi\sin(2\theta).
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Para o outro termo

$$\begin{aligned}
\Psi i\gamma_5\vec{\tau}_i\Psi &\rightarrow i\bar{\Psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\gamma_5\tau_i\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\Psi \\
&= i\bar{\Psi}[\cos(\theta) + i\gamma_5\hat{n}\cdot\vec{\tau}\sin(\theta)]\gamma_5\tau_i[\cos(\theta) + i\gamma_5\hat{n}\cdot\vec{\tau}\sin(\theta)]\Psi,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

percebe-se que

$$\hat{n}\cdot\vec{\tau}\tau_i = \sum_k n_k\tau_k\tau_i = \sum_k n_k(2\delta_{ki} - \tau_i\tau_k) = 2n_i - \tau_i(\hat{n}\cdot\vec{\tau}), \tag{B.20}$$

substituindo B.20 em B.19, tira-se

$$\begin{aligned}
i\bar{\Psi}[\cos(\theta)\gamma_5\tau_i + i\gamma_5^2\sin(\theta)(2n_i - \tau_i(\hat{n}\cdot\vec{\tau}))](\cos(\theta) + i\gamma_5(\hat{n}\cdot\vec{\tau})\sin(\theta))\Psi = \\
= i\left\{\bar{\Psi}\gamma_5\tau_i\Psi + in_i\sin(2\theta)(\bar{\Psi}\Psi) - 2n_i(\bar{\Psi}\gamma_5\hat{n}\cdot\vec{\tau}\Psi)\sin^2(\theta)\right\}.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Para demonstrar a invariância da lagrangiana de interação, é preciso tomar o quadrado das últimas equações, ou seja:

$$\begin{aligned}
(\bar{\Psi}\Psi)^2 &= (\bar{\Psi}\Psi)^2\cos^2(2\theta) - (\bar{\Psi}\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\Psi)^2\sin^2(2\theta) + \\
&\quad + 2i(\bar{\Psi}\Psi)(\bar{\Psi}\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\Psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)
\end{aligned} \tag{B.22}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left[i \left(\bar{\Psi} \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \gamma_5 \tau_i \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \Psi \right) \right]^2 = \\
& = i^2 \left\{ \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \tau_i \Psi \right)^2 - \sin^2(2\theta) \left(\bar{\Psi} \Psi \right)^2 + 4 \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 \sin^4(\theta) \right. \\
& + 2i \sin(2\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \Psi \right) - 4 \sin^2(\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 - \\
& \left. - 4i \sin(2\theta) \sin^2(\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) \right\}. \tag{B.23}
\end{aligned}$$

Podemos realizar as seguintes simplificações na equação acima

$$\begin{aligned}
4 \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 \sin^4(\theta) - 4 \sin^2(\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 & = \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 4 \sin^2(\theta) \left(\sin^2(\theta) - 1 \right) \\
& = - \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 \sin^2(2\theta). \tag{B.24}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
2i \sin(2\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \Psi \right) - 4i \sin(2\theta) \sin^2(\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) & = \\
= \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \Psi \right) \left[2i \sin(2\theta) \left(1 - 2 \sin^2(\theta) \right) \right] & = \\
= \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \Psi \right) 2i \sin(2\theta) \cos(2\theta). & \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Inserindo tais substituições em B.23 temos

$$\begin{aligned}
& \left[i \left(\bar{\Psi} \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \gamma_5 \tau_i \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \Psi \right) \right]^2 = \\
& = i^2 \left\{ \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \tau_i \Psi \right)^2 - \sin^2(2\theta) \left(\bar{\Psi} \Psi \right)^2 - \sin^2(2\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2i \sin(2\theta) \cos(2\theta) \left(\bar{\Psi} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) \right\}. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Se introduzirmos os resultados de B.22 e B.26 na parte de interação da lagrangiana de NJL, encontramos

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\bar{\Psi} \Psi \right)^2 + \left(\bar{\Psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \right)^2 \right] \rightarrow \left(\bar{\Psi} \Psi \right)^2 \cos^2(2\theta) - \left(\bar{\Psi} \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 \Psi \right)^2 \sin^2(2\theta) + \\
& + 2i \left(\bar{\Psi} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 \Psi \right) \cos(2\theta) \sin(2\theta) + \left(\bar{\Psi} i \gamma_5 \tau_i \Psi \right)^2 + \sin^2(2\theta) \left(\bar{\Psi} \Psi \right)^2 + \\
& + \sin^2(2\theta) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right)^2 - 2i \sin(2\theta) \cos(2\theta) \left(\bar{\Psi} \Psi \right) \left(\bar{\Psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \Psi \right) = \\
& = \left[\left(\bar{\Psi} \Psi \right)^2 + \left(\bar{\Psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \right)^2 \right], \tag{B.27}
\end{aligned}$$

e assim verificamos que a lagrangiana do modelo de NJL é invariante sob uma transformação quiral.

APÊNDICE

C

INTERAÇÃO ELETRO-FRACA

Neste apêndice iremos realizar um breve estudo sobre as interações fracas e eletrofracas. O nosso objetivo é fornecer um conhecimento prévio para compreensão da origem do vértice fraco contido no decaimento raro do pión visualizado no Capítulo 5 deste trabalho.

C.1 Interações fundamentais e modelo-padrão

No âmbito da Mecânica Clássica, o termo força pode ser aplicado para a tração, o atrito, o peso, a força de contato etc. E na verdade, correspondem à composição de inúmeras interações fundamentais (eletromagnéticas). No mundo das partículas elementares, é usual dar-se preferência ao termo interação, em vez de força.

Objetos exercem influência uns sobre os outros produzindo um campo de interação ou “força” em torno de si. Na natureza possui diversas interações que são consideradas fundamentais, não muitas, como veremos.

A mais famosa e antiga interação é a gravitacional. Em que um corpo com massa cria um campo gravitacional em torno de si e exerce uma força sobre um outro corpo com massa, e vice-versa.

Há também a interação eletromagnética. Em que um corpo carregado eletricamente cria em torno de si um campo elétrico, que exerce uma força elétrica em outro corpo

carregado, caso a partícula esteja em movimento, teremos também uma força magnética, e vice-versa.

Percebe-se que ambas interações anteriores dependem de alguma propriedade fundamental da matéria, neste caso, massa e carga. Os quarks também possuem uma propriedade fundamental, a carga cor. Que é responsável pela interação forte, que se manifesta pela força forte. Esta força que permite que os núcleons (prótons e nêutrons) possam continuar juntos. Possui um raio máximo de ação com cerca de 1fm, apesar de atuar em uma distância curtíssima, dentro de seu raio de ação, ela é a mais intensa das interações. Essa interação se originou através da proposta de Yukawa em 1935 [36].

A quarta interação fundamental, é a interação fraca, tendo uma força fraca e seu respectivo campo fraco. Por pertencer ao mundo subatômico, não é percebida diretamente, mas seus efeitos são importantíssimos. Eles ocorrem em um dos estágios da reação nuclear que ocorrem no Sol, e no decaimento beta “ β ”.

Há na natureza quatro interações fundamentais, e talvez menos, pois já há teoricamente uma unificação da força eletromagnética com a fraca, conhecida como eletro-fraca, e busca-se uma unificação ainda maior.

Os léptons e os quarks são os “tijolos” da matéria, e para construir demais partículas por meio delas, é necessário mantê-las juntas, é neste ponto que entram a ideia das interações e suas partículas mediadoras que são bóson, partículas com números de spin inteiros.

Os fótons são mediadores da interação eletromagnética, os glúons são mediadores da interação forte, há oito tipos de glúons, para a interação gravitacional teríamos o gráviton, porém sua existência é, ainda, especulativa. O gráviton ainda não foi detectado. Ele seria um bóson sem massa com número de spin 2 [49].

Os mediadores para a interação fraca são os bósons W^\pm (W^+ e W^-) e Z^0 , os índices (+, -, 0) referem-se a carga elétrica, contrário dos bósons anteriores, estes mediadores possuem massas. Elas foram detectadas em 1983, no colisor próton/antipróton do CERN. Em 1984, Carlo Rubia Simon van der Meer ganharam o prêmio Nobel por tais descobertas, mas vale lembrar, que tais bósons vetoriais foram previsto por Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg, por meio da teoria eletro-fraca [49].

A junção dessas teorias é que se denomina de modelo padrão, em outras palavras, o modelo padrão (MP) das partículas fundamentais e suas interações é a teoria que descreve os fenômenos subnucleares. O MP é validado por uma gama de dados empíricos presentes nas últimas décadas [17].

C.2 Interação fraca

Os bósons vetoriais W^\pm e Z^0 são mediadores da interação fraca. Ao contrário do fóton (mediador da QED) e dos glúons (mediador da QCD), eles são bóson extremamente pesados¹. Os seus valores experimentais são

$$M_W = 80,4 \pm 0,3 \text{ GeV}/c^2 \quad \text{e} \quad M_Z = 91,188 \pm 0,002 \text{ GeV}/c^2. \quad (\text{C.1})$$

O propagador deste bóson vetorial massivo é apresentado como

$$S = \frac{-i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right)}{q^2 - M^2}, \quad (\text{C.2})$$

onde M representa as massas dos três partículas (M_\pm e M_Z). Contudo, em pratica, q^2 apresenta um valor muito pequeno comparado com M^2 , acarretando uma mudança no propagador

$$S \approx \frac{i g_{\mu\nu}}{M^2}. \quad (\text{C.3})$$

Porém, quando temos processos que envolvem energias comparáveis com $(Mc)^2$, devemos utilizar a equação do propagador em sua forma natural.

Os estudo das interações fracas mediadas por bósons carregados (W^\pm) é mais compreensível, sendo o mais complexo, quando utilizamos o bóson com carga neutra (Z^0). Iremos concentrar nossos estudos no primeiro caso, e inciaremos com o acoplamento de W^\pm com os léptons. Imagine o seguinte processo, um lépton se convertendo com seu respectivo neutrino e emitindo W^- ². É importante saber, que as regras de Feynman para teoria fraca são semelhante as da Eletrodinâmica Quântica, exceto para o vértice, que no nosso caso será

$$\frac{-i g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5). \quad (\text{C.4})$$

O termo $2\sqrt{2}$ é um valor puramente convencional, a constante de acoplamento fraco é dado por $g_W = \sqrt{4\pi\alpha_W}$, o fator $(\mathbb{1} - \gamma_5)$ é extremamente importante, somente γ^μ produziria um acoplamento vetorial, enquanto $\gamma^\mu \gamma_5$ nos fornece um vetor axial. Uma teoria que adiciona um vetor a um vetor axial é obrigado a violar a simetria de paridade, é este fenômeno que ocorre nas interações fracas [25].

No resultado do cálculo da amplitude de probabilidade do decaimento do múon ($\mu \rightarrow$

¹São as partículas elementares mais pesadas já detectadas [25].

²Também há o processo reverso ($\nu_l \rightarrow l^- + W^+$).

$e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$), que pode ser acompanhado em [25], nota-se que g_W e M_W não aparecem separadamente

$$\Gamma_\mu = \frac{m_\mu}{12(8\pi)^3} \left(\frac{m_\mu g_W}{M_W} \right)^4. \quad (\text{C.5})$$

A equação de meia-vida do múon é dado por

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = \frac{12(8\pi)^3}{m_\mu} \left(\frac{M_W}{m_\mu g_W} \right)^4. \quad (\text{C.6})$$

É convencional expressar as interações fracas por meio das “constantes de acoplamento Fermi”,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2}, \quad (\text{C.7})$$

utilizando a constante de acoplamento de Fermi, podemos reescrever a equação de meia-vida do múon

$$\tau_\mu = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}. \quad (\text{C.8})$$

Na teoria original de Fermi do decaimento beta em 1933, não havia a presença do W^\pm , as interações eram descritas pelo um acoplamento direto de quatro-partículas [25], como podemos visualizar na figura abaixo:

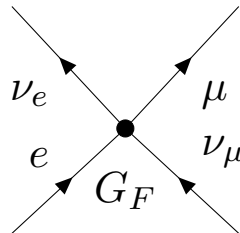


Figura C.1: Acoplamento direto de quatro-partículas.

Podemos ver na Figura C.1, que a constante de acoplamento é a própria constante de Fermi, definida pela equação C.7. A teoria de Fermi no panorama moderna³, combina o propagador W^\pm com dois vértices, Figura C.2, essa nova perspectiva funciona muito

³A teoria de Fermi do decaimento β , que inclui o neutrino pela primeira vez, assumia que as interações fracas eram produzidas apenas por correntes carregadas, em outras palavras, levavam a processos que continha mudança na carga elétrica [17]. A título de exemplo, nessa teoria o decaimento β é descrito como transformação de um núcleo “pai” contendo um número de massa A e atômico Z , e um núcleo “filho” com o mesmo valor de A , entretanto, com um número atômico $Z + 1$, e simultaneamente, há uma emissão espontânea de um elétron e seu respectivo anti-neutrino. Ou seja, teríamos o seguinte processo

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e,$$

bem, mas isso se deve ao fato dos bósons W^\pm serem partículas pesados, já que a equação C.3 é uma excelente aproximação para o propagador C.2, e de fato, nos anos cinquenta já era sabido que a teoria de Fermi no regime de altas energias não podia ser aplicada. A concepção de um mediador fraco foi sugerida por O. Klein em 1938.

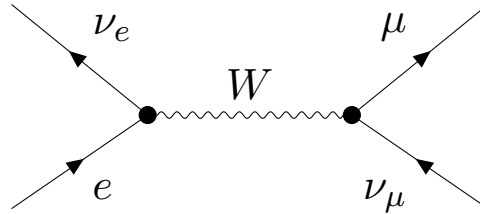


Figura C.2: Perspectiva moderna da Teoria de Fermi.

O valor da constante de Fermi é de $1,166 \times 10^{-5}/\text{GeV}^2$, utilizando esse valor na equação C.7, encontraremos o valor de g_W , e posteriormente encontramos o valor da constante de estrutura fina, que é

$$\alpha_W = \frac{g_W^2}{4\pi} = \frac{1}{29}, \quad (\text{C.9})$$

que é cinco vezes maior que a constante de estrutura fina eletromagnética ($\alpha = \frac{1}{137}$). Neste ponto, entendemos que as interações fracas são fracas devido aos mediadores bosônicos serem massivos.

Para as interações carregadas de quarks, temos apenas uma pequena mudança na equação do vértice. Cabibbo [9] em 1963 sugeriu uma adição de $\cos(\theta_C)$ no vértice do processo $d \rightarrow u + W^-$, assim temos a seguinte equação

$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) \cos(\theta_C), \quad (\text{C.10})$$

enquanto para o processo $s \rightarrow u + W^-$, teremos a adição de $\sin(\theta_C)$, então adquirimos

$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) \sin(\theta_C). \quad (\text{C.11})$$

tal processo implica uma mudança de carga elétrica no núcleo. Este processo se torna mais claro, quando descrevemos a transformação de um nêutron em um próton

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e,$$

também podemos escrever em termos dos quarks constituintes dos núcleons

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Entre 1932 e 1973, dados empíricos demonstraram que o decaimento β e demais processos fracos, poderiam ser explicados pela Teoria de Fermi modificada com adição da violação de paridade. Essa teoria é conhecida como “teoria V-A” [16].

O ângulo de Cabbibo é realmente muito pequeno, experimentalmente seu valor é $\theta_C = 13,1^\circ$.

Bludman [8] em 1958 sugeriu que poderia existir uma interação fraca neutra, que seria mediada por um bóson vetorial sem carga, conhecido por Z^0 . Em um trabalho publicado por Glashow em 1961 [19] sobre a unificação da interação fraca e eletromagnética, percebe-se que esta teoria de unificação requer a existência de um processo fraco e neutro. Weinberg e Salam em 1967 [25][17][55], de forma independentes, formularam o modelo de Glashow's com quebra espontânea de simetria, posteriormente, em 1971, 't Hooft demonstrou a renormalização do esquema Glashow-Weinberg-Salam (GWS) [51].

A equação de vértice do bóson vetorial Z^0 é dado por

$$\frac{-ig_Z}{2}\gamma^\mu (c_V^f - c_A^f\gamma_5), \quad (\text{C.12})$$

a constante de acoplamento neutra é representado por g_Z , os coeficientes c_V^f e c_A^f depende dos quarks e léptons (f) envolvido no processo, ver a tabela C.1. Estes coeficientes no modelo GWS, podem ser encontrados por meio do ângulo de Weinberg θ_w , como demonstra as equações abaixo:

$$g_W = \frac{g_e}{\sin(\theta_w)}, \quad g_Z = \frac{g_e}{\sin(\theta_w)\cos(\theta_w)}, \quad (\text{C.13})$$

sendo g_e é a constante de acoplamento eletromagnético, e o valor experimental de θ_w é de $28,7^\circ$ [25]. A equação relacionada ao propagador do bóson Z^0 é análogo ao do W^\pm . E para finalizar esta seção, a equação que relaciona os bósons vetoriais da interação fraca é apresentada como

$$M_W = M_Z \cos(\theta_w). \quad (\text{C.14})$$

Tabela C.1: Valores dos coeficientes do vértice neutro no modelo GWS.

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2\sin(\theta_w)$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2(\theta_w)$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2(\theta_w)$	$-\frac{1}{2}$

C.3 Interação Eletro-Fraca

Na seção anterior, começamos uma breve discussão a respeito da unificação da teoria fraca com eletromagnética. Vimos que essa discussão começou com Glashow e posteriormente fluiu para Weinberg e Salam, que adicionaram no modelo o mecanismo de Higgs, para explicar a massa dos bósons vetoriais W^\pm e Z^0 . Entretanto, de início, nos deparamos com um problema que parece dificultar a unificação. Pois a teoria eletromagnética é puramente vetorial (γ^μ), enquanto a interação fraca possui partes que são vetorial e axial.

Podemos ver a dependência axial e vetorial na interação fraca, através da corrente fraca (neste exemplo ela possuirá uma carga negativa), que encontrada por meio da amplitude de probabilidade do processo que envolve o elétron, neutrino e o bóson vetorial W^- . A equação da corrente fraca será

$$J_\mu^- = \bar{\nu}\gamma^\mu \left(\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) e, \quad (\text{C.15})$$

nota-se a dependência vetorial (γ^μ), e vetor axial ($\gamma^\mu\gamma_5$).

Iremos utilizar as seguintes definições, com intuito de escrever a equação da corrente fraca em uma forma puramente vetorial. Começaremos com o espinor de uma partícula, com os seguintes operadores de helicidades, que estão sendo representados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u_L(p) &\equiv \frac{(\mathbb{1} - \gamma_5)}{2} u(p), & u_R(p) &\equiv \frac{(\mathbb{1} + \gamma_5)}{2} u(p), \\ \bar{u}_L(p) &= \bar{u}(p) \frac{(\mathbb{1} + \gamma_5)}{2}, & \bar{u}_R(p) &= \bar{u}(p) \frac{(\mathbb{1} - \gamma_5)}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

e para anti-partícula teremos as seguintes definições

$$\begin{aligned} \nu_L(p) &\equiv \frac{(\mathbb{1} + \gamma_5)}{2} \nu(p), & \nu_R(p) &\equiv \frac{(\mathbb{1} - \gamma_5)}{2} \nu(p), \\ \bar{\nu}_L(p) &= \bar{\nu}(p) \frac{(\mathbb{1} - \gamma_5)}{2}, & \bar{\nu}_R(p) &= \bar{\nu}(p) \frac{(\mathbb{1} + \gamma_5)}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Utilizando as definições acima, conseguimos escrever a corrente fraca numa forma vetorial, em termos de espinores quirais

$$J_\mu^- = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L, \quad (\text{C.18})$$

podemos definir a corrente fraca com carga positiva, descrevendo o processo $\nu_e \rightarrow e^- + W^+$,

que será

$$J_\mu^+ = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L, \quad (\text{C.19})$$

podemos ainda escrever as equações C.18 e C.19, numa notação compacta, vamos introduzir um dublete⁴ (elétron e neutrino) com helicidade negativa

$$X_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad (\text{C.20})$$

de modo que teremos a seguinte equação

$$J_\mu^\pm = \bar{X}_L \gamma^\mu \tau^{(\pm)} X_L, \quad (\text{C.21})$$

com

$$\tau^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i\tau_2). \quad (\text{C.22})$$

A corrente fraca que possui simetria de isospin, corresponderá com a equação

$$J_\mu^3 = \bar{X}_L \gamma^\mu \frac{1}{2} \tau^3 X_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L, \quad (\text{C.23})$$

neste caso percebe-se, a função do fator $\frac{1}{2} \tau^3$.

Antes de prosseguir, será que poderemos escrever a corrente eletromagnética em termos de espinores quirais? E realmente podemos, primeiro vamos reescrever uma partícula em termos de espinores quirais

$$u = \left(\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \right) u + \left(\frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \right) u = u_L + u_R, \quad (\text{C.24})$$

similarmente teremos $\bar{u} = \bar{u}_L + \bar{u}_R$. Assim, podemos realizar uma alteração na corrente eletromagnética

$$J_\mu^{em} = -\bar{e} \gamma^\mu e = -(\bar{e}_L + \bar{e}_R) \gamma^\mu (e_L + e_R) = -\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{e}_R \gamma^\mu e_R. \quad (\text{C.25})$$

A equação geral da corrente eletromagnética, que considera a soma sobre todas as

⁴Há outros dubletes de léptons e quarks, sendo eles:

$$X_L \rightarrow \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L.$$

partículas do dubletos é dado por:

$$J_\mu^{em} = \sum_{i=1}^2 Q_i (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL} + \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR}) ,$$

onde Q é a carga elétrica.

Percebe-se que a corrente fraca possui helicidade negativa, enquanto a corrente eletromagnética pode ser mista, possuindo helicidade negativa e positiva.

Ainda não temos a corrente fraca neutra, mas não estamos longe deste objetivo, ao contrário das correntes J_μ^\pm e J_μ^3 , as neutras possuem componentes com quiralidades positivas. Desta forma, iremos realizar uma analogia com a Hipercarga, fórmula de Gell-Mann-Nishijima, em que a carga elétrica é representada pela letra Q , I^3 representa o isospin, e a hipercarga é retratado por Y [25][46].

$$Q = I^3 + \frac{1}{2}Y . \quad (C.26)$$

Assim, introduzimos a corrente de hipercarga fraca

$$J_\mu^Y = 2J_\mu^{em} - 2J_\mu^3 . \quad (C.27)$$

O grupo de simetria da teoria eletro-fraca é o $SU(2)_L \otimes U(1)$, o grupo relacionado com a parte fraca será $SU(2)_L$, e a parte $U(1)_L$ se refere a hipercarga fraca, que possui ambas quiralidades.

A equação do modelo de Glashow-Weinberg-Salam (GWS) é dado por

$$-i \left[g_W J_\mu \cdot W^\mu + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu \right] , \quad (C.28)$$

no modelo GWS, as três correntes fracas se acoplam com g_W e é intermediado pelo tripleto do bóson vetorial W relacionado ao fator $SU(2)_L$, enquanto as correntes de hipercarga fraca se acoplam com $g'/2$ e são mediados pelo singleto do bóson vetorial B , relacionado ao fator $U(1)_Y$. A quarta partícula vetorial permanece sem massa e pode ser identificada como fóton [17][25][46].

A produção de um bóson sem massa (fóton), vem de uma combinação linear de dois estados neutros W^3 e B , enquanto uma combinação ortogonal desse estados neutros, nos fornecem um bóson massivo (Z^0)

$$\begin{aligned} A^\mu &= B^\mu \cos(\theta_W) + W^{\mu 3} \sin(\theta_W) , \\ Z^\mu &= -B^\mu \sin(\theta_W) + W^{\mu 3} \cos(\theta_W) . \end{aligned} \quad (C.29)$$

Esse é o motivo dos ângulos de Weinberg serem conhecidos como angulo de mistura eletro-fraco. Em termos de A^μ e Z^μ , então, a parte neutra da interação eletro-fraco, pode ser investigado pela equação C.28, que será

$$-i \left[g_W J_\mu^3 W^{\mu 3} + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu \right] = -i \left\{ \left[g_W \sin(\theta_W) J_\mu^3 + \frac{g'}{2} \cos(\theta_W) J_\mu^Y \right] A^\mu + \left[g_W \cos(\theta_W) J_\mu^3 - \frac{g'}{2} \sin(\theta_W) J_\mu^Y \right] Z^\mu \right\}. \quad (\text{C.30})$$

Sabemos que o acoplamento eletromagnético é dado por $-ig_e J_\mu^{em} A^\mu$, e utilizando a equação C.27, podemos concluir que

$$g_W \sin(\theta_W) = g' \cos(\theta_W) = g_e. \quad (\text{C.31})$$

Aqui percebemos que os acoplamentos fracos e eletromagnéticos não são independentes, evidentemente, nota-se a consistência da unificação da teoria eletro-fraco. Utilizando as equações C.7, C.30 e C.31, obtemos

$$-ig_Z \left(J_\mu^3 - \sin^2(\theta_W) J_\mu^{em} \right) Z^\mu, \quad (\text{C.32})$$

onde

$$g_Z = \frac{g_e}{\sin(\theta_W) \cos(\theta_W)}. \quad (\text{C.33})$$

Infelizmente, terei que deixar em aberto algumas questões, sendo elas as seguintes: Onde se encontra a quebra espontânea de simetria? Qual é o motivo dos estados B e W se misturarem? Para responder essas perguntas teríamos que adentrar na Teoria de Gauge, que estenderia esse apêndice e fugiria do seu objetivo. Poderia responder o fenômeno da quebra espontânea de simetria, com a seguinte resposta: Weinberg e Salam de forma independente adicionaram um dubleto de campos escalares, escolheu um potencial dos campos escalares de forma que a lagrangiana original de Glashow fosse simétrica, e haveriam soluções que não são simétricas, e isto seria a quebra espontânea de simetria. Para mais informações recomendo que o leitor estude as seguintes referências [17][18][25][46].

C.4 Determinação da estrutura de Dirac

Após uma intensa revisão sobre interações fracos e eletro-fraco, agora temos competência para investigar a estrutura de Dirac.

Para encontrar a estrutura de Dirac contido no vértice (3), precisamos do acoplamento dos quarks com o bóson W . Este acoplamento também é conhecido no modelo padrão e é semelhante com o acoplamento envolvendo léptons, é importante ressaltar que o bóson altera o sabor dos quarks. O diagrama que iremos estudar se encontra logo abaixo

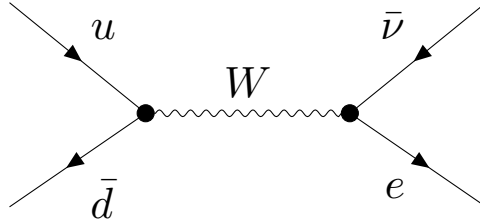


Figura C.3: Decaimento do píon carregado.

Para descrever a amplitude do diagrama da figura C.3, iremos precisar do vértice eletro-fraco

$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5), \quad (\text{C.34})$$

e do propagador do bóson

$$S = -i \left(\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q'_\mu q'_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \right). \quad (\text{C.35})$$

por meio destas duas expressões podemos escrever a amplitude de probabilidade

$$\Gamma_W = -i \left[\left(\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \right) \bar{d} \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u \left(\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q'_\mu q'_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \right) \left(\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \right) \bar{u} \gamma^\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) e \right] \cos(\theta_C),$$

na pratica o q^2 é muito pequeno, ocasionando numa mudança do propagador

$$S \approx -i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \text{ para } q^2 \ll M_W^2. \quad (\text{C.36})$$

Passamos a adquirir a seguinte amplitude

$$\Gamma_W = -i2 \frac{g_W^2}{M_W} \left(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L g_{\mu\nu} \bar{u}_L \gamma^\nu e_L \right). \quad (\text{C.37})$$

Podemos simplificar ou apresentar esta equação sob outra forma, entretanto este não é o nosso foco, vamos agora determinar a estrutura de Dirac para o vértice $Wq\bar{q}$. Neste

exato momento iremos fazer uso dos operadores de projeção

$$\begin{aligned} u_L &= P_L u = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) u, \\ \bar{d}_L &= \bar{d} P_R = \frac{1}{2} \bar{d} (\mathbb{1} + \gamma_5), \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

por meio das equações anteriores, podemos calcular a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L &= \frac{1}{4} \bar{d} (\mathbb{1} + \gamma_5) \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) u = \frac{1}{4} \bar{d} \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) (\mathbb{1} - \gamma_5) u \\ &= \frac{1}{2} \bar{d} \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma_5) u, \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

concluimos que o vértice eletro-fraco será dado por

$$\frac{\gamma^\mu}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \otimes \tau_1^-, \quad (\text{C.40})$$

onde a matriz τ_1^- representa a estrutura de sabor e é dado por:

$$\tau_1^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 - i\tau_2). \quad (\text{C.41})$$

APÊNDICE

D

CÁLCULOS PORMENORES DO FATOR DE FORMA ELETROMAGNÉTICO

Neste apêndice será realizado alguns cálculos que eu o autor considero maçante e repetitivos pois a ideia central dos cálculos já foi apresentado no capítulo 3 deste trabalho. Contudo, apesar dos cálculos serem trabalhosos e extensos, essas características não exclui o fato de serem resultados importantes e curiosos para compreensão do capítulo 4.

D.1 Obtenção da amplitude de probabilidade no espaço de momentos

Objetivo desta seção é demonstrar que o cálculo do Traço para o Fator de Forma Eletromagnético pode ser retirado da lagrangiana efetiva do modelo de NJL. Como já havia sido comentado no capítulo 4, utilizamos o diagrama da figura 4.7 só para visualizar que os termos que iremos reorganizar na lagrangiana tem que ser proporcional a $\pi^2 J_\mu$. Entretanto, não precisamos saber como será os sentidos dos momentos internos do diagrama. O leitor verá neste cálculo que o diagrama do Fator de Forma irá surgir de forma natural.

O Fator de Forma Eletromagnético para o pión é definido como:

$$\langle \pi^-(p') | J_\mu | \pi^-(p) \rangle = e \Gamma_\mu^{em} = (p'_\mu + p_\mu) e F_\pi^{em}(q^2). \quad (\text{D.1})$$

Combinando a definição acima com a expressão 4.6 passamos a adquirir a seguinte equação

$$\Gamma_{\mu}^{em} = -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \left(i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} i\gamma^{\mu} \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right). \quad (\text{D.2})$$

Contudo, ainda são necessária algumas manipulações algébricas na equação acima, para que possamos encontrar a amplitude de probabilidade do diagrama da figura 4.1. Reescrevendo o traço fazendo uso da propriedade 3.45, porém para três operadores¹, obteremos:

$$\Gamma_{\mu}^{em} = -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \left\langle x \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| y \right\rangle \left\langle y \left| i\gamma^{\mu} \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| z \right\rangle \left\langle z \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| x \right\rangle.$$

Aplicando a relação de completeza do espaço dos momentos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{em} &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'''}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \left\langle x \left| k \right\rangle \left\langle k \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k' \right\rangle \left\langle k' \left| y \right\rangle \left\langle y \left| i\gamma^{\mu} \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k'' \right\rangle \left\langle k'' \left| z \right\rangle \left\langle z \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k''' \right\rangle \left\langle k''' \left| x \right\rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que $\langle x|k\rangle = e^{ikx}$, então

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{em} &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'''}{(2\pi)^4} \times \\ &\times e^{ikx} \left\langle k \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k' \right\rangle e^{-ik'y} \left\langle y \left| i\gamma^{\mu} \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k'' \right\rangle e^{-ik''z} \left\langle z \left| i\gamma_5 \frac{1}{i\cancel{\partial} - M} \right| k''' \right\rangle e^{-ik'''x} \\ &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'''}{(2\pi)^4} \times \\ &\times e^{ikx} i\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k}' - M} \langle k|k'\rangle e^{-ik'y} i\gamma^{\mu} \frac{1}{\cancel{k}'' - M} e^{ik''y} e^{-ik''z} i\gamma_5 \frac{1}{\cancel{k}''' - M} e^{ik'''z} e^{-ik'''x}. \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

Aplicaremos a transformada de Fourier² em cada termo começando em z seguindo para y e finalizando em x . Porém, para cada aplicação da transformada iremos localizar uma

¹Traço para três operadores:

$$\text{Tr} \hat{A}\hat{B}\hat{C} = \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \langle x|\hat{A}|y\rangle \langle y|\hat{B}|z\rangle \langle z|\hat{C}|x\rangle.$$

²A transformada de Fourier para uma variável espacial w :

$$\Gamma(p) = \int d^4w e^{-ip \cdot w} \Gamma(w). \quad (\text{D.4})$$

função delta de Dirac correspondente. Realizando a transformada em z por meio do termo e^{-ip_0z} :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\mu^{em} &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'''}{(2\pi)^4} \times \\
 &\quad \times e^{-ix(k'''-k)} e^{iy(k''-k')} e^{iz(k'''-k''-p_0)} \langle k|k' \rangle i\gamma_5 \frac{1}{k' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{k'' - M} i\gamma_5 \frac{1}{k''' - M} \\
 &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'''}{(2\pi)^4} \times \\
 &\quad \times e^{-ix(k'''-k)} e^{iy(k''-k')} (2\pi)^4 \delta^4 [k''' - (k'' + p_0)] \langle k|k' \rangle i\gamma_5 \frac{1}{k' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{k'' - M} i\gamma_5 \frac{1}{k''' - M} \\
 &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle e^{-ix(k''+p_0-k)} e^{iy(k''-k')} \times \\
 &\quad \times i\gamma_5 \frac{1}{k' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{k'' - M} i\gamma_5 \frac{1}{k'' + p_0 - M}. \tag{D.5}
 \end{aligned}$$

Transformada de y por meio do termo e^{-ip_1y} ,

$$\begin{aligned}
 &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int d^4y \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle e^{-ix(k''+p_0-k)} e^{iy[k''-(k'+p_1)]} \times \\
 &\quad \times i\gamma_5 \frac{1}{k' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{k'' - M} i\gamma_5 \frac{1}{k'' + p_0 - M} \\
 &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \int \frac{dk''}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle e^{-ix(k''+p_0-k)} (2\pi)^4 \delta^4 [k'' - (k' + p_1)] \times \\
 &\quad \times i\gamma_5 \frac{1}{k' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{k'' - M} i\gamma_5 \frac{1}{k'' + p_0 - M} \\
 &= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle e^{-ix[(k'+p_1+p_0-k)]} \times \\
 &\quad \times i\gamma_5 \frac{1}{k' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{k' + p_1 - M} i\gamma_5 \frac{1}{k' + p_1 + p_0 - M}. \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

Transformada de x por meio do termo e^{-ip_2x} ,

$$\begin{aligned}
&= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int d^4x \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle e^{ix[(-k'-p_1-p_0+k-p_2)]} \times \\
&\quad \times i\gamma_5 \frac{1}{\not{k}' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{\not{k}' + p_1 - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k}' + p_1 + p_0 - M} \\
&= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \int \frac{dk'}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle (2\pi)^4 \delta^4 [(k - p_2 - p_0) - (k' + p_1)] \times \\
&\quad \times i\gamma_5 \frac{1}{\not{k}' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{\not{k}' + p_1 - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k}' + p_1 + p_0 - M} \\
&= -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \text{Tr} \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \langle k|k' \rangle i\gamma_5 \frac{1}{\not{k}' - M} i\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - p_2 - p_0 - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - p_2 - M}. \quad (\text{D.7})
\end{aligned}$$

A função $\langle k|k' \rangle = \delta^4(k - k')$ e é responsável pela existência da equação acima, se $k \neq k'$ teremos $\langle k|k' \rangle = 0$, mas como objetivo é garantir a existência da equação, então $k = k'$ resultando $\langle k|k' \rangle = 1$. Logo depois fazemos que $p_2 \rightarrow p$ e $p_0 \rightarrow -p'$, ocasionando que $p' - p = q$. Assim

$$\Gamma_\mu^{em} = -ig_{\pi\bar{q}q}^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - M} i\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - M} i\gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p} - M} \right] \quad (\text{D.8})$$

no qual condiz com o diagrama de triângulo presente na figura 4.1.

D.2 Operação do traço

Nesta seção será realizado o cálculo do traço no espaço de Dirac contido na equação 4.10. Definindo N_μ como o traço presente no numerador da integral:

$$N_\mu = \text{Tr} \left\{ \mathbf{1}(\not{k} + M)\gamma^\mu [(\not{k} + \not{q}) + M] [-(\not{k} - \not{p}) + M] \right\}. \quad (\text{D.9})$$

Expandindo os termos contidos no traço

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left[-\not{k}\gamma^\mu\not{k}\not{k} + \not{k}\gamma^\mu\not{k}\not{p} + \not{k}\gamma^\mu\not{k}M - \not{k}\gamma^\mu\not{q}\not{k} + \not{k}\gamma^\mu\not{q}\not{p} + \not{k}\gamma^\mu\not{q}M - \right. \\
&\quad \left. -\not{k}\gamma^\mu M\not{k} + \not{k}\gamma^\mu M\not{p} + \not{k}\gamma^\mu MM - M\gamma^\mu\not{k}\not{k} + M\gamma^\mu\not{k}\not{p} + M\gamma^\mu\not{k}M - \right. \\
&\quad \left. -M\gamma^\mu\not{q}\not{k} + M\gamma^\mu\not{q}\not{p} + M\gamma^\mu\not{q}M - M\gamma^\mu M\not{k} + M\gamma^\mu M\not{p} + M\gamma^\mu MM \right]. \quad (\text{D.10})
\end{aligned}$$

De acordo com o teorema de traço, o produto de números ímpar de matrizes gama

são zero. Ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{k}M) &= \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{q}M) = \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu M\not{k}) = \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu M\not{p}) = \text{Tr}(M\gamma^\mu\not{k}\not{k}) = \\ &= \text{Tr}(M\gamma^\mu\not{k}\not{p}) = \text{Tr}(M\gamma^\mu\not{q}\not{k}) = \text{Tr}(M\gamma^\mu\not{q}\not{p}) = \text{Tr}(M\gamma^\mu M^2) = 0. \end{aligned}$$

Desta forma, irá sobrar apenas os seguintes traços

$$\begin{aligned} N_\mu &= \text{Tr} \left[-\not{k}\gamma^\mu\not{k}\not{k} + \not{k}\gamma^\mu\not{k}\not{p} - \not{k}\gamma^\mu\not{q}\not{k} + \not{k}\gamma^\mu\not{q}\not{p} + \not{k}\gamma^\mu MM + M\gamma^\mu\not{k}M + \right. \\ &\quad \left. + M\gamma^\mu\not{q}M - M\gamma^\mu M\not{k} + M\gamma^\mu M\not{p} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Para facilitar e também com intuito de ser mais compreensível, iremos dividir o cálculo do traço acima em dois termos, sendo o primeiro os cálculos dos traços em que há produtos de quatro matrizes gama, e o segundo cálculo dos traço em que há produtos de duas matrizes gama. Então:

$$\begin{aligned} N_{\mu_1} &= -\text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{k}\not{k}) + \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{k}\not{p}) - \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{q}\not{k}) + \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{q}\not{p}) \\ &= 4 \left[-(k_\mu k \cdot k - k_\mu k \cdot k + k_\mu k \cdot k) + (k_\mu p \cdot k - p_\mu k \cdot k + k_\mu k \cdot p) - \right. \\ &\quad \left. -(q_\mu k \cdot k - k_\mu q \cdot k + k_\mu q \cdot k) + (q_\mu p \cdot k - p_\mu q \cdot k + k_\mu q \cdot p) \right] \\ &= 4 \left[-k_\mu k^2 + 2k_\mu p \cdot k - p_\mu k^2 - q_\mu k^2 + q_\mu p \cdot k - p_\mu q \cdot k + k_\mu q \cdot p \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Realizando o calculo do traço para produto de duas matrizes gama:

$$\begin{aligned} N_{\mu_2} &= \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu MM) + \text{Tr}(M\gamma^\mu\not{k}M) + \text{Tr}(M\gamma^\mu\not{q}M) - \text{Tr}(M\gamma^\mu M\not{k}) + \text{Tr}(M\gamma^\mu M\not{p}) \\ &= 4[M^2 k_\mu + M^2 k_\mu + M^2 q_\mu - M^2 k_\mu + M^2 p_\mu] \\ &= 4M^2(k_\mu + q_\mu + p_\mu). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Combinado N_{μ_1} com N_{μ_2} e reagrupando alguns termos semelhantes, adquirimos:

$$N_\mu = 4[-k_\mu k^2 - k^2(p_\mu + q_\mu) + k(q_\mu p - p_\mu q) + k_\mu(q \cdot p + 2k \cdot p + M^2) + M^2(q_\mu + p_\mu)].$$

D.3 Operação do traço com roteamento arbitrário

Nesta seção será realizado o cálculo do traço no espaço de Dirac da equação do Fator de Forma Eletromagnético com roteamento arbitrário presente no capítulo 6 deste trabalho. Definindo N_μ como o traço presente no numerador da integral:

$$N_\mu = \text{Tr} \left\{ \mathbb{1}(\not{k} + \not{p} + M)\gamma^\mu [(\not{k} + \not{p} + \not{q}) + M] [-\not{k} + M] \right\}. \quad (\text{D.14})$$

Expandindo os termos presentes no traço

$$\begin{aligned}
= \text{Tr} & \left[-\not{k}' \gamma^\mu \not{k}' \not{k}' - \not{k}' \gamma^\mu \not{p} \not{k}' - \not{k}' \gamma^\mu \not{q} \not{k}' + \not{k}' \gamma^\mu M^2 - \not{p} \gamma^\mu \not{k}' \not{k}' - \not{p} \gamma^\mu \not{p} \not{k}' - \not{p} \gamma^\mu \not{q} \not{k}' + \right. \\
& \left. + \not{p} \gamma^\mu M^2 + \not{p} \gamma^\mu M^2 + \not{q} \gamma^\mu M^2 \right], \tag{D.15}
\end{aligned}$$

cancelando os termos que contém produtos de n matrizes γ ímpares, adquirimos

$$\begin{aligned}
N_\mu = 4 & \left[-k_\mu k^2 - 2p_\mu k^2 - q_\mu k^2 + k_\mu M^2 - 2p_\mu k \cdot p - q_\mu k \cdot p + k_\mu p^2 - q_\mu k \cdot p - \right. \\
& \left. - p_\mu k \cdot q + k_\mu p \cdot q + p_\mu M^2 + p_\mu M^2 + q_\mu M^2 \right], \tag{D.16}
\end{aligned}$$

realizando algumas simplificações, obtemos

$$N_\mu = 4 \left[-k'_\mu (k'^2 - M^2) - (k'^2 - M^2) (2p + q)_\mu + k'_\mu (p^2 + p \cdot q) - k' \cdot p (2p + q)_\mu - p_\mu k' \cdot q \right].$$

APÊNDICE

E

CÁLCULOS PORMENORES DO FATOR DE FORMA AXIAL E VETORIAL

Neste apêndice será realizado alguns cálculos que eu o autor considero maçante e repetitivos pois a ideia central dos cálculos já foi apresentado no capítulo 3 deste trabalho. Contudo, apesar dos cálculos serem trabalhosos e extensos, essas características não exclui o fato de serem resultados importantes e curiosos para compreensão do capítulo 5.

E.1 Operação dos Traços no espaço de Dirac

Começaremos os cálculos dos traços de Dirac pela equação:

$$\begin{aligned} T_+^{\mu\nu} &= -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \operatorname{Tr} \left\{ \frac{\gamma_5(\not{k} + M)\gamma^\mu [(\not{k} - \not{q}) + M] \gamma^\nu (\mathbb{1} - \gamma_5) [(\not{k} - \not{p}) + M]}{(k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\ &= -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \frac{N_+^{\mu\nu}}{(k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]}. \end{aligned}$$

O nosso interesse é no termo $N_+^{\mu\nu}$ onde se encontra as matrizes de Dirac

$$\begin{aligned} N_+^{\mu\nu} &= \text{Tr} \left[\gamma_5 (\not{k} + M) \gamma^\mu (\not{k} - \not{q} + M) \gamma^\nu (\mathbb{1} - \gamma_5) (\not{k} - \not{p} + M) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\gamma_5 (\not{k} + M) \gamma^\mu (\not{k} - \not{q} + M) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} + M) - (\not{k} + M) \gamma^\mu (\not{k} - \not{q} + M) \gamma^\nu \times \right. \\ &\quad \left. \times (-\not{k} + \not{p} + M) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Multiplicando as matrizes e cancelando os termos que contém produto de “ n ” matrizes ímpares, obtemos

$$\begin{aligned} N_+^{\mu\nu} &= \text{Tr} \left(\gamma_5 \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu M - \gamma_5 \not{k} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu M + \gamma_5 \not{k} \gamma^\mu M \gamma^\nu \not{k} - \gamma_5 \not{k} \gamma^\mu M \gamma^\nu \not{p} + \gamma_5 M \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_5 M \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} - \gamma_5 M \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{k} + \gamma_5 M \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{p} - \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu M + \not{k} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu M + \not{k} \gamma^\mu M \gamma^\nu \not{k} - \right. \\ &\quad \left. - \not{k} \gamma^\mu M \gamma^\nu \not{p} + M \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} - M \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} - M \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{k} + M \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{p} - M \gamma^\mu M \gamma^\nu M \right). \end{aligned}$$

Resolvendo primeiramente apenas os termos que contém dependência de γ_5 , encontramos

$$\begin{aligned} 4iM \left(\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\alpha k_\beta - \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\alpha q_\beta + \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} k_\alpha k_\beta - \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} k_\alpha p_\beta + \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} k_\alpha k_\beta - \right. \\ \left. - \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} q_\alpha k_\beta + \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} q_\alpha p_\beta \right) = 4iM \left(\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\alpha k_\beta + \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} q_\alpha p_\beta \right). \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

O traço dos termos abaixo vai se anular

$$\text{Tr} \left[-\not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu M + \not{k} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu M + M \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} - M \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{k} \right] = 0, \quad (\text{E.3})$$

enquanto os que se encontram abaixo se cancelam parcialmente

$$\text{Tr} \left[-\not{k} \gamma^\mu M \gamma^\nu \not{p} - M \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \right] = 4M (-2k^\mu p^\nu), \quad (\text{E.4})$$

os termos restantes resultam em

$$\text{Tr} \left[\not{k} \gamma^\mu M \gamma^\nu \not{k} + M \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{p} - M \gamma^\mu M \gamma^\nu M \right] = g^{\mu\nu} k^2 + q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} q \cdot p + q^\nu p^\mu. \quad (\text{E.5})$$

Combinando os resultados das equações E.2, E.3, E.4 e E.5 encontramos o resultado da equação E.1, que se encontra logo abaixo

$$N_+^{\mu\nu} = 4iM \left(\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\alpha k_\beta + \epsilon^{\alpha\mu\nu\beta} q_\alpha p_\beta \right) + 4M \left(g^{\mu\nu} k^2 - 2k^\mu p^\nu + q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} q \cdot p + q^\nu p^\mu - M^2 g^{\mu\nu} \right).$$

Agora vamos resolver os traços de Dirac referente à segunda equação

$$\begin{aligned}
T_-^{\mu\nu} &= -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \operatorname{Tr} \left\{ -\frac{\gamma_5 [(k - \not{p}) - M] \gamma^\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) [(k - \not{q}) - M] \gamma^\mu (\not{k} - M)}{(k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\
&= -ig_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \frac{-N_-^{\mu\nu}}{(k^2 - M^2) [(k - q)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2]}, \tag{E.6}
\end{aligned}$$

começando por denominar $N_-^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
N_-^{\mu\nu} &= \operatorname{Tr} \left[\gamma_5 (\not{k} - \not{p} - M) \gamma^\nu (\mathbf{1} - \gamma_5) (\not{k} - \not{q} - M) \gamma^\mu (\not{k} - M) \right] \\
&= \operatorname{Tr} \left[\gamma_5 (\not{k} - \not{p} - M) \gamma^\nu (\not{k} - \not{q} - M) \gamma^\mu (\not{k} - M) + (-\not{k} + \not{p} - M) \gamma^\nu (\not{k} - \not{q} - M) \times \right. \\
&\quad \left. \times \gamma^\mu (\not{k} - M) \right]. \tag{E.7}
\end{aligned}$$

Multiplicando as matrizes e cancelando os termos que contém produto de “ n ” matrizes ímpares, obtemos

$$\begin{aligned}
N_-^{\mu\nu} &= \operatorname{Tr} \left[-\gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu M + \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu M - \gamma_5 \not{k} \gamma^\nu M \gamma^\mu \not{k} + \gamma_5 \not{p} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu M - \gamma_5 \not{p} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu M + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_5 \not{p} \gamma^\nu M \gamma^\mu \not{k} - \gamma_5 \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} + \gamma_5 M \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \not{k} + \not{k} \gamma^\nu M \gamma^\mu \not{k} + \not{k} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu M - \not{k} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu M - \right. \\
&\quad \left. - \not{p} \gamma^\nu M \gamma^\mu \not{k} - \not{p} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu M + \not{p} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu M - M \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} + M \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \not{k} - M \gamma^\nu M \gamma^\mu M \right].
\end{aligned}$$

Resolvendo os termos com dependência de γ_5 adquirimos

$$\begin{aligned}
4iM \left(-\epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} k_\alpha k_\beta + \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} k_\alpha q_\beta - \epsilon^{\alpha\nu\mu\beta} k_\alpha k_\beta + \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha k_\beta - \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta + \epsilon^{\alpha\nu\mu\beta} p_\alpha k_\beta - \right. \\
\left. - \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} k_\alpha k_\beta + \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} q_\alpha k_\beta \right) = -4iM \left(\epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta + \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} k_\alpha k_\beta \right). \tag{E.8}
\end{aligned}$$

Neste cálculo não teremos nenhuns termos que irão se cancelar. Todavia isto não nos impede de abordar os cálculos dos traços separadamente, pois acredito que ao realizar um procedimento análogo ao anterior, os cálculos passam a ser mais compreensível. Assim temos

$$\operatorname{Tr} \left[\not{k} \gamma^\nu M \gamma^\mu \not{k} + \not{k} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu M - \not{k} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu M - M \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} + M \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \not{k} \right] = 4M g^{\mu\nu} k^2. \tag{E.9}$$

A segunda combinação resulta em

$$\operatorname{Tr} \left[-\not{p} \gamma^\nu M \gamma^\mu \not{k} - \not{p} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu M \right] = 4M (-2p^\nu k^\mu), \tag{E.10}$$

e na terceira combinação encontramos

$$\operatorname{Tr} \left[\not{p} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu M - M \gamma^\nu M \gamma^\mu M \right] = 4M \left(-g^{\mu\nu} p \cdot q + p^\nu q^\mu + p^\mu q^\nu - M^2 g^{\mu\nu} \right) \tag{E.11}$$

Combinando os resultados contidos nas equações E.8, E.9, E.10 e E.11, e substituindo em E.7, tira-se que

$$N_-^{\mu\nu} = 4iM \left(\epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} p_\alpha q_\beta + \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta} k_\alpha k_\beta \right) - 4M \left(g^{\mu\nu} k^2 - 2k^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot q - M^2 g^{\mu\nu} \right).$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AMENDOLIA, S. R., AND ET AL. *A measurement of the space-like pion electromagnetic form factor.* Nuclear Physics B 277, 1986.
- [2] BAJC, B., BLIN, A., HILLER, B., NEMES, M., AND ROSINA, M. *Momentum dependent vertices $\sigma\gamma\gamma$, $\sigma\rho\gamma$ and $\sigma\rho\rho$: the NJL scalar hidden by chiral symmetry.* Z. Phys. A, 1994.
- [3] BARNETT, R., AND ET AL. *Review of Particle Physics.* Physical Review D, 1996.
- [4] BASSALO, J. M. F., AND CATTANI, M. S. D. *Elementos de Física Matemática vol. 1.* Livraria da Física, 2010.
- [5] BATTISTEL, O. A., AND DALLABONA, G. *A Systematization for One-Loop 4D Feynman Integrals-Different Species of Massive Fields.* Journal of Modern Physics, 2012.
- [6] BIJNENS, J., AND TALAVERA, P. *$\pi \rightarrow l\nu\gamma$ form factors at two-loop.* Nuclear Physics B 489, 1997.
- [7] BLIN, A., HILLER, B., AND SCHADEN, M. *Electromagnetic Form Factors in the Nambu-Jona-Lasinio Model.* Zeitschrift for Physik A Atomic Nuclei, 1988.
- [8] BLUDMAN, S. A. *On the Universal Fermi Interaction.* Nuovo Cimento, 1958.
- [9] CABIBBO, N. *Unitary Symmetry and Leptonic decays.* Physical Review Letters, 1963.

- [10] CHAN, L.-H. *Derivative Expansion for the One-Loop Effective Actions with Internal Symmetry*. Physical Review Letters, 1986.
- [11] CHENG, T., AND LI, L. *Gauge theory of elementary particle physics*. Clarendon Press, 2006.
- [12] DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific, 2006.
- [13] DIAS, E. W. *Independência de ambiguidades na versão renormalizável do modelo de Nambu-Jona-Lasinio $SU(2)$* . Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- [14] EISBERG, R., AND RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Campus, 1979.
- [15] FERNANDES, C. J. L. B. *Fatores de forma do decaimento $\pi^- \rightarrow \gamma e \bar{\nu}_e$ no quadro do modelo de Nambu e Jona-Lasinio*. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 1995.
- [16] FEYNMAN, R., AND GELL-MANN, M. *Theory of the Fermi Interaction*. Physical Review, 1958.
- [17] FORTES, E. C. F. S., TIJERO, M. C., AND PLEITEZ, V. *A descoberta das correntes neutras das interações fracas*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 3, 2007.
- [18] GENG, C. Q., HO, I.-L., AND WU, T. H. *Axial-vector form factors for $K_{l2\gamma}$ and $\pi_{l2\gamma}$ at $O(p^6)$ in chiral perturbation theory*. Nuclear Physics B 684, 2004.
- [19] GLASHOW, S. L. *Partial-Symmetries of Weak Interactions*. Nuclear Physics, 1961.
- [20] GOLDBERGER, M. L., AND TREIMAN, S. B. *Conserved Currents in the Theory of Fermi Interactions*. Physical Review, 1958.
- [21] GOLDSTONE, J. *Field theories with « Superconductor » solutions*. Il Nuovo Cimento, 1961.
- [22] GOLDSTONE, J., SALAM, A., AND WEINBERG, S. *Broken Symmetries*. Physical Review, 1962.
- [23] GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos*. Edusp, 2015.
- [24] GONÇALVES, B. F. *O efeito dos termos de superfície no modelo de Nambu-Jona-Lasinio*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São João del Rei, 2015.
- [25] GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. WILEY-VHC, 2004.

- [26] GUIMARÃES, A. V. A. *Transformação de chan e termos de superfície no cálculo de fatores de forma eletromagnético no modelo de Nambu-Jona-Lasínio*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São João del Rei, 2017.
- [27] JOVANOVIĆ, V. B., IGNJATOVIĆ, S. R., BORKA, D., AND JOVANOVIĆ, P. *Constituent quark masses obtained from hadron masses with contributions of Fermi-Breit and Glozman-Riska hyperfine interactions*. Physical Review D, 2010.
- [28] KLEVANSKY, S. P. *The Nambu-Jona-Lasínio model of quantum chromodynamics*. Reviews of the Modern Physics, 1992.
- [29] LAVELLE, M., AND MCMULLAN, D. *Constituinte quark from QCD*. Physics Reports, 1997.
- [30] MARCIANO, W. J. *Heavy top-quark mass predictions*. Physical Review Letters, 1989.
- [31] MATEU, V., AND PORTOLÉS, J. *Form factors in the radiative pion decay*. The European Physical Journal C, 2007.
- [32] MIRANSKY, V. *Dynamics of spontaneous chiral symmetry breaking and the continuum limit in quantum eletrodynamics*. II Nuovo Cimento A Series 11, 1985.
- [33] MIRANSKY, V. *Electroweak symmetry breaking and dynamics of tight bound states*. International Journal of Modern Physics A, 1991.
- [34] MIRANSKY, V., TANABASHI, M., AND YAMAWAKI, K. *Dynamical eletroweak symmetry breaking with large anomalous dimension and t quark condensate*. Physics Letters B, 1989.
- [35] MIRANSKY, V., TANABASHI, M., AND YAMAWAKI, K. *Is the t quarks responsible for the mass of W and Z bosons?* Modern Physics Letters A, 1989.
- [36] MOREIRA, M. A. *A física dos quarks e a epistemologia*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 2, 2007.
- [37] MOTA, A. L. *O modelo de Nambu-Jona-Lasínio como uma Teoria Quântica de Campos*. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.
- [38] MUTA, T. *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*. World Scientific Publishing Company, 2009.
- [39] NAMBU, Y., AND LASÍNIO, G. L. *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I*. Physical Review, 1961.

- [40] NAMBU, Y., AND LASÍNIO, G. L. *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity II*. Physical Review, 1961.
- [41] NETO, J. B. *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica*. Livraria da Física, 2017.
- [42] OLIVE, K. A., AND ET AL. *Review of Particle Physics*. Chinese Phys. C 38, 2014.
- [43] PASSARINO, G., AND VELTMAN, M. *One-Loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model*. Nuclear Physics B 160, 1979.
- [44] PESKIN, M. E., AND SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Levant Books, 1995.
- [45] PORTO, J. S. *Anomalia de escala e invariância de calibre em eletrodinâmica quântica: um estudo diagramático*. Tese de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [46] RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2001.
- [47] SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1967.
- [48] SAKURAI, J. J. *Mecânica Quântica Moderna*. bookman, 2013.
- [49] SCHUMM, B. A. *Deep Down Things: The Breathtaking Beauty of Particle Physics*. The Johns Hopkins University Press, 2004.
- [50] SILVA, W. C. *Fatores de Forma no Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$* . Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São João del Rei, 2019.
- [51] 'T HOOFT, G. *Renormalization of Massless Yang-Mills Fields*. Nuclear Physics, 1971.
- [52] TANABASHI, M., AND ET AL. *Review of Particle Physics*. Physical Review D, 98, 2018.
- [53] VIGLIONI, A. C. D. *Fatores de Forma do Decaimento Radiativo do Píon usando o modelo Nambu-Jona-Lasinio*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, 2003.
- [54] VOLKOV, M. K., AND RADZHABOV, A. E. *The Nambu-Jona-Lasinio model and its development*. Reviews of Topical Problems, 2006.
- [55] WEINBERG, S. *A model of Leptons*. Physical Review Letters, 1967.

-
- [56] WILLEY, R. S. *Ambiguity of calculations in the Nambu-Jona-Lasinio model and its singular relation to the linear σ model*. Physical Review D, 1993.
- [57] WOLYNEC, E. *Electron scattering and nuclear structure*. Proceedings of the 2 Nuclear Physics Session of the George André Swiece Summer School -V1, 1985.