

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Departamento de Ciências Naturais

Wagno Cesar e Silva

Fatores de Forma no Modelo Espectral de
Quarks $SU(3)_f$

São João del-Rei - MG

Julho de 2019

Wagno Cesar e Silva

FATORES DE FORMA NO MODELO ESPECTRAL DE QUARKS $SU(3)_f$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, em associação ampla com as Universidades Federais de Alfenas e Lavras, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Mota

Co-orientador: Prof. Dr. Edson Wander Dias

São João del-Rei - MG
Departamento de Ciências Naturais - UFSJ
Julho de 2019



Universidade Federal
de São João del-Rei

Programa de Pós-Graduação em Física



São João del-Rei, 01 de julho de 2019

A Dissertação “Fatores de Forma no Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$ ”, elaborada por **Wagno César e Silva** e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. André Luiz Mota - (UFSJ)
Orientador

Prof. Dr. Edson Wander Dias - (UFSJ)
Coorientador

Prof. Dr. Jakson Miranda Fonseca – (UFV)

Prof. Dr. Heron Carlos de Godoy Caldas (UFSJ)

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586f Silva, Wagno Cesar e .
Fatores de Forma no Modelo Espectral de Quarks
SU(3)_f / Wagno Cesar e Silva ; orientador André
Luiz Mota; coorientador Edson Wander Dias. -- São
João del-Rei, 2019.
95 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2019.

1. Modelos Quirais de Quarks. 2. Fatores de Forma
Eletromagnéticos. 3. Cromodinâmica Quântica. I. Mota,
André Luiz, orient. II. Dias, Edson Wander, co
orient. III. Título.

Agradecimentos

Deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

- Ao meu orientador, Prof. André Mota, pela valiosa ajuda e orientação na conclusão desta dissertação. Agradeço por sua atenção sempre prestativa e gentil, pela paciência e pela confiança depositada em mim. Sua experiência, atenção aos detalhes e conhecimento na área, me ensinaram muito sobre como pensar e abordar problemas de pesquisa;
- Ao meu co-orientador, Prof. Edson Dias, pelos ensinamentos, pelo entusiasmo, pelo incentivo e também pelas memoráveis aulas e discussões sobre Teoria Quântica de Campos, que contribuíram enormemente para minha formação na área. Sua confiança em meus estudos tem sido inspiradora e incentivadora;
- Ao Prof. Jackson Miranda e ao Prof. Heron Caldas, por terem aceitado o convite para banca examinadora e disporem do seu tempo para analisar este trabalho;
- Aos demais professores do programa de Pós-Graduação em Física da UFSJ, especialmente ao Prof. Fernando Marroquim, pelos excelentes cursos que foram de grande importância para minha formação acadêmica;
- Aos colegas, e sobretudo, grandes amigos, que conheci durante o mestrado: Públio Rwany e Filipe Batista, pelos estudos e pelas inúmeras discussões sobre vários tópicos de Física, Vítor Barra e Felipe Augusto, pelo apoio e hospitalidade em Juiz de Fora. Sou muito grato a todos;
- Aos alunos de iniciação científica do grupo de Teoria Quântica de Campos (LATEC-DCNAT), pela boa convivência e pela participação no grupo de estudos formado por mim e o Públio;
- À minha família, em especial aos meus pais, pelo constante apoio e incentivo desde o início dos meus estudos acadêmicos até os dias atuais;
- Por fim, agradeço à UFSJ pela oportunidade.

Resumo

FATORES DE FORMA NO MODELO ESPECTRAL DE QUARKS $SU(3)_f$

Wagno Cesar e Silva

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Mota

Co-orientador: Prof. Dr. Edson Wander Dias

Neste trabalho estudamos vários aspectos fenomenológicos dos mésons leves no contexto de um modelo quiral finito, conhecido como modelo espectral de quarks. Este modelo é construído a partir de uma representação espectral generalizada para o propagador do quark em combinação com a técnica de calibre, que fornece soluções específicas para as identidades de Ward-Takahashi e garante as invariâncias eletromagnética e quiral. Além disso, exigências físicas, como a unitariedade e a finitude dos observáveis hadrônicos, estabelecem algumas das relações necessárias para determinar os parâmetros relevantes da distribuição espectral - tornando o modelo livre de divergências.

A partir de uma versão $SU(3)_f$ do modelo espectral de quarks, que inclui diferentes sabores, realizamos a extensão da identidade de Ward-Takahashi com duas correntes axiais e determinamos observáveis mesônicos relevantes, dentre os quais podemos destacar a função de correlação pseudoescalar, o fator de forma e o raio eletromagnético do káon. Calculamos também alguns observáveis no setor de vácuo, como o condensado não-local de quarks, a virtualidade média e o tensor de polarização. Finalmente, resultados numéricos para o modelo foram obtidos a partir da construção de uma proposta de implementação para as distribuições espectrais.

Abstract

FORM FACTORS IN SPECTRAL QUARK MODEL $SU(3)_f$

Wagno Cesar e Silva

Supervisor: Prof. Dr. André Luiz Mota

Co-supervisor: Prof. Dr. Edson Wander Dias

In this work we study several phenomenological aspects of light mesons in the context of a finite chiral model known as the Spectral Quark Model. This model is constructed from a generalized spectral representation for the quark propagator in combination with the gauge technique, which provides particular solutions to the Ward-Takahashi identities and guarantees electromagnetic and chiral invariance. Moreover, physical requirements, such as unitarity and finitude of hadronic observables, set some of the relationships necessary to determine the relevant parameters of the spectral distribution - making the model divergences-free.

From a $SU(3)_f$ version of the spectral quark model, which includes different quark flavors, we performed an extension of axial-axial Ward-Takahashi identity and determined relevant mesonic observables, from which we can highlight the pseudoscalar correlation function, the form factor and electromagnetic radius of káon. We also calculated some observables in the vacuum sector as the non-local quarks condensate, average virtuality and polarization tensor. Numerical results for the model were obtained from the construction of an proposed implementation for the spectral distributions.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 12 |
| 2 | Aspectos Teóricos/Fenomenológicos da Cromodinâmica Quântica | 15 |
| 2.1 | Modelo de Quarks | 15 |
| 2.2 | Lagrangiana da QCD | 16 |
| 2.2.1 | Liberdade Assintótica | 17 |
| 2.2.2 | Confinamento de cor | 18 |
| 2.2.3 | Simetria de Calibre | 19 |
| 2.2.4 | Simetria Quiral | 19 |
| 3 | Relações de Simetria | 22 |
| 3.1 | Identidades de Ward-Takahashi | 22 |
| 3.2 | Relação de Goldberger-Treiman | 26 |
| 4 | Modelos Quirais de Quarks | 28 |
| 4.1 | Introdução | 28 |
| 4.2 | Modelo Espectral de Quarks | 29 |
| 4.3 | Momentos da função espectral | 31 |
| 4.3.1 | Limite $p \rightarrow \infty$ | 33 |
| 4.4 | Técnica de Calibre | 33 |
| 4.4.1 | Vértices com uma corrente | 34 |
| 4.4.2 | Relação de Goldberger-Treiman | 36 |
| 4.4.3 | Vértices com duas correntes | 37 |
| 5 | Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$ | 38 |
| 5.1 | Introdução | 38 |
| 5.2 | Regularização Espectral | 38 |
| 5.3 | Condensado de Quarks | 39 |
| 5.4 | Condensado não-local de Quarks | 40 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.5 | Densidade de Energia no Vácuo | 42 |
| 5.6 | Técnica de Calibre | 43 |
| 5.6.1 | Vértices com uma corrente | 43 |
| 5.6.2 | Relação Análoga de Goldberger-Treiman para o Káon | 45 |
| 5.6.3 | Vértices com duas correntes | 45 |
| 5.7 | Polarização do Vácuo | 47 |
| 5.8 | Decaimento fraco do Káon | 49 |
| 5.9 | Função de correlação pseudoescalar | 52 |
| 5.9.1 | Massa do káon | 54 |
| 5.10 | Fator de Forma Eletromagnético do Káon | 55 |
| 6 | Resultados | 63 |
| 6.1 | Aproximação para o caso de apenas um sabor | 63 |
| 6.2 | Aproximação para o caso de dois sabores distintos | 67 |
| 7 | Conclusões | 70 |
| A | Convenções e Notações | 72 |
| B | Simetrias e Leis de Conservação | 75 |
| B.1 | Teorema de Noether | 75 |
| C | Resultados úteis | 77 |
| C.1 | Identities usadas na seção 4.3 | 77 |
| C.1.1 | Prova da identidade (4.13) | 77 |
| C.1.2 | Prova da identidade (4.19) | 78 |
| C.2 | Cálculo das integrais I_1 , I_2 e I_3 | 78 |
| C.2.1 | Integral I_1 | 78 |
| C.2.2 | Integral I_2 | 80 |
| C.2.3 | Integral I_3 | 84 |
| C.3 | Verificação da solução para o vértice axial (com 2 distribuições espectrais) | 85 |
| C.4 | Obtenção da solução para o vértice axial-axial (com duas distribuições espectrais) | 85 |
| C.5 | Operações de traço | 88 |
| C.6 | Resultado das integrais usadas no cálculo de $\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)$, $\Pi_{PS}(q^2)$ e do fator de forma do Káon | 89 |
| | Referências Bibliográficas | 92 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Contribuição a um loop para polarização do vácuo na QCD. | 18 |
| 6.1 | Fator de forma eletromagnético para o pión na região tipo-espaço. | 66 |
| 6.2 | Fator de forma eletromagnético para o káon na região tipo-espaço. | 69 |
| C.1 | Contorno superior C_1 que contém o pólo $p_0 = -\bar{\omega} + i\delta$ | 80 |
| C.2 | Contorno inferior C_2 que contém o pólo $p_0 = \bar{\omega} - i\delta$ | 81 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 6.1 | Resultados para o SQM com apenas uma distribuição espectral. | 66 |
| 6.2 | Resultados para a versão $SU(3)_f$ do Modelo Espectral de Quarks. | 68 |
| A.1 | Símbolos usados nas representações diagramáticas. | 74 |

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) é estabelecida como a teoria de campos fundamental das interações fortes. Este fato é apoiado experimentalmente por processos que envolvem altas energias, como o espalhamento profundamente inelástico, no qual predições perturbativas com quarks assintoticamente livres explicam muito bem os dados empíricos. No domínio de baixas energias¹, entretanto, a predição da teoria fica comprometida, pois a constante de acoplamento efetiva da interação forte assume valores consideráveis e, com isso, o tratamento perturbativo usual torna-se inviável. Dessa forma, métodos mais sofisticados, tais como modelos efetivos ou QCD na rede, são desenvolvidos para estudar os aspectos não-perturbativos da teoria.

Pertencendo à classe de modelos efetivos, os modelos quirais de quarks são muito bem sucedidos na descrição da fenomenologia de baixas energias da QCD. Como é possível verificar em diversas abordagens [1–8], tais modelos são construídos introduzindo os quarks como os únicos graus de liberdade relevantes e reproduzindo simetrias importantes da QCD, como as invariâncias de calibre e quiral. Além disso, o comportamento não-perturbativo manifesta-se pela presença de uma massa constituinte para os quarks, consequência de um vácuo com estrutura não-trivial.

Por se tratarem de uma aproximação para a QCD em baixas energias, os modelos efetivos necessitam da introdução de parâmetros externos à teoria. Geralmente, a introdução desses parâmetros traz consequências indesejáveis: em modelos quirais de quarks, por exemplo, a supressão dos graus de liberdade de altas energias (tais como glúons) estabelece certa escala, ou corte (que podemos entender como o valor de energia abaixo do qual supõe-se válido o modelo), que adquire um significado físico, e deve ser mantida em todas as etapas dos cálculos. A forma precisa com que este corte de energia deve ser introduzido não é de todo clara, atribuindo, portanto, certa ambiguidade à construção destes modelos. Outros modelos, inclusive, precisam da introdução de graus de liberdade adicionais, tais como campos mesônicos [9, 10] ou gluônicos [11] que, mesmo garantindo sua renormalização, introduzem acoplamentos e massas extras não

¹Também conhecido na literatura como regime infravermelho.

presentes na teoria subjacente.

Um modelo quiral relativamente recente, que possui um método específico de regularização e consegue contornar alguns dos problemas decorrentes da introdução de parâmetros extras, é o chamado Modelo Espectral de Quarks (SQM, da denominação *Spectral Quark Model*) [12, 13]. Neste modelo, o comportamento não-perturbativo é introduzido a partir da representação de Lehmann para o propagador do quark, ao qual está associado uma dada distribuição espectral. Dessa forma, a escala característica para a região de baixas energias, como mencionada anteriormente, surge no modelo ligada à distribuição espectral, de maneira bem menos artificial que em outros modelos, nos quais o limite infinito (artificial) para esta escala produz resultados divergentes, além de quantidades ambíguas [14, 15], geralmente dependentes do esquema de regularização empregado, estarem presentes nestes modelos. Sob este ponto de vista, o SQM pode ser considerado um modelo finito, no sentido de que não existe nenhum parâmetro artificialmente introduzido que leve ao surgimento de divergências. Além disso, o modelo também utiliza a chamada técnica de calibre [16, 17] para determinar as funções de vértices que satisfazem as identidades de Ward-Takahashi, garantindo assim, as invariâncias eletromagnética (calibre) e quiral.

Como inicialmente formulado, isto é, incluindo apenas um sabor de quark, o SQM mostrou-se eficaz para descrever a fenomenologia de hádrons de baixa energia [18, 19] e outros efeitos como o loop de Polyakov [20] e anomalia quiral [21]. Entretanto, ainda não era possível utilizar o modelo na descrição de estados envolvendo quarks com dois sabores diferentes, como mésons estranhos por exemplo.

O desenvolvimento do modelo espectral de quarks, incluindo diferentes sabores – os quarks up, down e strange – foi introduzido em [22, 23]. Em outros modelos quirais, esta descrição corresponde às versões que implementam a simetria $SU(3)_f$ nos modelos. A inclusão do quark strange permite o uso do modelo na descrição da física do méson káon, um méson considerado leve, constituído por um quark up e um quark strange. A massa do káon ($m_{K^\pm} \simeq 494 \text{ MeV}$) não é, entretanto, tão baixa quanto a denominação de méson leve poderia fazer entender: esta massa é aproximadamente 50% da escala da QCD, da ordem de 1 GeV. Além disso, o quark strange possui massa estimada em 150 MeV, muito acima da massa dos quarks up e down, da ordem de 5 MeV. Desta forma, a física do méson káon parece estar concentrada em uma região intermediária entre os mésons mais leves (píons) e os mésons pesados.

Um problema sistemático na descrição da física do káon é a determinação de seu decaimento fraco: os modelos efetivos que descrevem o káon sistematicamente fornecem valores para a constante de decaimento fraco desta partícula menores que o observado experimentalmente, quando a massa constituinte do quark up é ajustada para valores condizentes com a descrição física do méson vetorial ρ . Problemas como este, ligados à fenomenologia do méson káon, ainda não foram analisados no contexto do modelo espectral de quarks.

Neste trabalho, pretendemos estudar vários aspectos fenomenológicos da QCD através do Modelo Espectral de Quarks. Em particular, pretendemos estender o desenvolvimento do modelo

introduzido em [22, 23], que inclui a descrição de mésons formados por quarks de diferentes sabores, para a descrição analítica de observáveis no setor de vácuo (condensado não-local de quarks, virtualidade média e tensor de polarização) e no setor mesônico (função de correlação pseudoescalar, fator de forma eletromagnético e raio quadrático médio), além da obtenção de estimativas numéricas para estes observáveis e sua comparação com os valores experimentais conhecidos.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos uma breve descrição dos aspectos gerais da Cromodinâmica Quântica, dentre os quais se encontram duas principais características da física dos hádrons de baixa energia: o confinamento e a quebra espontânea da simetria quiral. No capítulo 3, realizamos uma abordagem mais aprofundada sobre algumas consequências das simetrias de calibre e quiral, introduzindo importantes relações que serão utilizadas no desenvolvimento do nosso trabalho - as Identidades de Ward-Takahashi e a relação de Goldberger-Treiman. No capítulo 4, partimos das características não-perturbativas incorporadas na construção de um modelo quiral de quarks e introduzimos o modelo utilizado neste trabalho, chamado Modelo Espectral de Quarks. Mostramos como o modelo é construído e as condições necessárias que garantem a finitude do mesmo. No capítulo 5 apresentamos o desenvolvimento do modelo espectral de quarks no setor $SU(3)_f$ - que contém as modificações necessárias para descrição fenomenológica dos méson leves formados por quarks de diferentes sabores - a partir do qual estendemos a identidade de Ward-Takahashi axial-axial para o caso de vértices que envolvem dois sabores distintos de quarks e realizamos o cálculo de vários observáveis físicos. No capítulo 6 propomos uma implementação para a distribuição espectral que permitiu a obtenção de resultados numéricos para os observáveis dos mésons pión e káon. Finalmente, no capítulo 7 expomos as conclusões obtidas neste trabalho e as perspectivas para continuação do mesmo. Em seqüências, temos três apêndices que suplementam a dissertação: no primeiro, estabelecemos as notações e convenções adotadas, no segundo realizamos uma revisão sobre o Teorema de Noether e no terceiro explicitamos os cálculos de alguns resultados utilizados ao longo do trabalho. Ao final, encontram-se as referências bibliográficas.

Capítulo 2

Aspectos Teóricos/Fenomenológicos da Cromodinâmica Quântica

Neste capítulo, após uma breve revisão histórica sobre o modelo de quarks, apresentamos a estrutura da Lagrangiana da QCD e abordamos algumas de suas propriedades básicas de simetria.

2.1 Modelo de Quarks

O modelo de quarks foi introduzido em 1964 por Gell-Mann [24] e Zweig [25], de forma independente, para explicar as propriedades dos hádrons (partículas que interagem pela força forte). De acordo com este modelo, os hádrons são compostos por partículas mais fundamentais, chamadas de quarks, sendo os mésons descritos como estados ligados de quarks e anti-quarks, enquanto os bárions compostos por três quarks (e anti-bárions por três anti-quarks):

$$\text{Hádrons} \begin{cases} \text{mésons } (\pi, K, \rho, \omega, \dots) = q\bar{q}, \\ \text{bárions } (p, n, \Lambda, \Sigma, \dots) = qq\bar{q}. \end{cases}$$

Para justificar o spin e a carga dos hádrons, os quarks deveriam possuir spin semi-inteiro e carga fracionária. Além disso, eram necessários três sabores de quarks (up, down e strange) para explicar o espectro de hádrons que se conhecia na época. Entretanto, nos anos seguintes, novas descobertas na física hadrônica exigiram a introdução de novos sabores: em 1974, o quark charm foi introduzido para explicar a existência do méson J/ψ ¹, e mais dois quarks, bottom e top, foram postulados na década de 1970 para explicar a violação de CP ² em decaimentos do méson cáon. Hoje, existem seis sabores conhecidos: u (up), d (down), s (strange), c (charm), b (bottom) e t (top).

¹Por tratar-se de um estado ligado de charm e anti-charm, o méson J/ψ também é conhecido como charmônio.

² CP é a combinação de duas simetrias discretas: C (conjugação de carga) – consiste em transformar uma partícula em sua antipartícula – e P (paridade) – consiste na seguinte transformação de coordenadas $(t, \vec{x}) \mapsto (t, -\vec{x})$.

O modelo de quarks foi bem sucedido em prever e explicar os novos estados hadrônicos, embora, nos primórdios de sua concepção, o modelo apresentasse dificuldades em responder algumas questões fundamentais, sendo uma delas relacionada à ausência de combinações antissimétricas das representações de spin e de sabor no setor dos bárions. Como todo férmion, os bárions obedecem à estatística de Fermi-Dirac (ou seja, possuem função de onda antissimétrica). No entanto, havia a detecção de uma ressonância leve, Δ^{++} , com spin 3/2, formada por quarks de mesmo sabor e com spins paralelos³ $|u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$, o que resulta em uma função de onda simétrica para o bárion.

Para conciliar o setor bariônico do modelo de quarks com a estatística de Fermi-Dirac, Gell-Mann propôs um número quântico adicional para os quarks. E fez-se a suposição *ad hoc* que a função de onda dos bárions era totalmente anti-simétrica nesse novo número quântico, denominado de “**cor**”. Com isso, atribuiu-se três “cores” diferentes para cada sabor de quark. Há, portanto, uma nova simetria interna que gira os graus de liberdade das cores entre si e, como são três cores, o grupo de simetria é o $SU(3)_c$ (global).

Pode-se destacar ainda o fato dos hádrons serem invariantes de cor, ou seja, a combinação anti-simétrica de cores é invariante. Isso pode ser verificado construindo um objeto totalmente anti-simétrico nos três índices de cores, ϵ_{ijk} , sendo $\epsilon_{123} = 1$:

$$U_i^l U_j^m U_k^n \epsilon_{lmn} = \epsilon_{ijk} \det(U) \quad (2.1)$$

que é invariante sob $SU(3)_c$, uma vez que $\det(U) = 1$:

$$\epsilon_{ijk} \longrightarrow U_i^l U_j^m U_k^n \epsilon_{lmn} = \epsilon_{ijk}. \quad (2.2)$$

Assim, as combinações permitidas, que formam um singlete de cor com função de onda invariante, são:

$$\text{mésons} = \bar{q}_{ai} q^{bi}, \quad \text{bárions} = \epsilon_{ijk} q^{ai} q^{bj} q^{ck}, \quad \text{anti-bárions} = \epsilon^{ijk} \bar{q}_{ai} \bar{q}_{bj} \bar{q}_{ck},$$

onde a, b, c são índices de sabores e i, j, k índices de cores.

Outras questões que ainda permaneciam sem respostas, em parte, foram resolvidas promovendo a simetria $SU(3)_c$ global à uma simetria local. Para isso, foi necessário introduzir um novo bóson vetorial com dinâmica descrita por uma Lagrangiana de Yang-Mills [26]. Esse bóson vetorial era o candidato perfeito para mediar as interações fortes entre os quarks, e isso foi um grande indício de que uma teoria fundamental pudesse ser construída com base no grupo de simetria local $SU(3)_c$. Hoje, esta teoria é conhecida como Cromodinâmica Quântica.

2.2 Lagrangiana da QCD

A Cromodinâmica Quântica é uma teoria de calibre não-abeliana⁴ baseada no grupo de simetria $SU(3)$ de cor. Seus campos elementares são os quarks (campos de matéria) e os glúons

³Obviamente, isso viola o princípio de exclusão de Pauli.

⁴Uma teoria de calibre é dita não-abeliana quando os geradores do grupo no qual está baseada não comutam entre si.

(campos de calibre) [27]. A Lagrangiana da QCD pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q} [i\gamma^\mu D_\mu - m_q] q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde $q = (u, d, s, \dots)$ é o campo de quarks com N_c cores e N_f sabores, $\bar{q} = q\gamma_0$, γ^μ são as matrizes de Dirac e $m_q = \text{diag}(m_u, m_d, \dots)$ é a matriz formada pela massa corrente dos quarks⁵. A derivada de calibre covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_s \lambda_a A_\mu^a, \quad (2.4)$$

que inclui os campos de calibre A_μ^a , com $a = 1, 2, \dots, 8$, acopla os setores fermiônico e bosônico. A constante de acoplamento forte é denotada por g_s e λ_a são as matrizes de Gell-Mann (ver apêndice A). O tensor intensidade do campo de glúons $G_{\mu\nu}^a$ é definido como

$$G_{\mu\nu}^a = \frac{i}{g_s \lambda_a} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.5)$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$. O último termo em (2.5) é responsável pela auto-interação entre os campos de glúons. Este termo é necessário para garantir que a Lagrangiana (2.3) seja invariante sobre transformações de calibre não-abelianas [27].

Observe que, por simplicidade, omitimos os campos fantasmas e possíveis termos fixadores de calibre, que são introduzidos durante a quantização da teoria a partir do método de Faddeev-Popov [29]. Portanto, a lagrangiana (2.3) apenas especifica a teoria no nível “clássico”.

2.2.1 Liberdade Assintótica

Com o processo de renormalização⁶, verifica-se que o valor efetivo da constante de acoplamento adquire um termo de correção finito que depende da escala de energia, ou seja, o acoplamento torna-se variável (*running coupling*). Essa variação da constante de acoplamento sob mudanças de escala pode ser entendida como consequência da polarização do vácuo. Na Eletrodinâmica Quântica (QED), a polarização do vácuo é devida às flutuações do fóton em pares elétron-pósitron virtuais (ou pares fermiônicos mais massivos). Neste cenário, o vácuo atua como um tipo de meio dielétrico, blindando parcialmente a carga (*screening*), de forma que quanto mais nos aproximamos menor é a blindagem, e maior é a carga efetiva.

Por outro lado, devido à auto-interação dos campos de glúons (consequência do caráter não-abeliano), na QCD, temos duas formas de polarização do vácuo (Figura 2.1). Uma análoga à QED, onde encontramos pares quark-antiquark virtuais, cuja contribuição atua blindando a carga de cor, e portanto, fazendo com que o acoplamento aumente em pequenas distâncias (ou seja, altas

⁵A massa corrente é uma quantidade que pode ser estimada em termos das massas dos hádrons através da Álgebra de Correntes. Ela difere da chamada massa constituinte, que leva em conta a contribuição do mecanismo de geração dinâmica de massa em função das interações entre os quarks [28].

⁶A renormalização é um importante procedimento que permite lidar com os infinitos que surgem do cálculo das amplitudes de probabilidades em Teorias Quânticas de Campos. Uma revisão detalhada sobre o assunto é apresentada, por exemplo, na referência [30].

energias). A outra forma de polarização do vácuo consiste no aparecimento de pares de glúons virtuais, que possuem efeito contrário aos pares fermiônicos, produzindo uma anti-blindagem (*antiscreening*) que diminui a constante de acoplamento em pequenas distâncias. Dessa forma, a variação do acoplamento forte depende do resultado da combinação dos efeitos de blindagem e anti-blindagem.

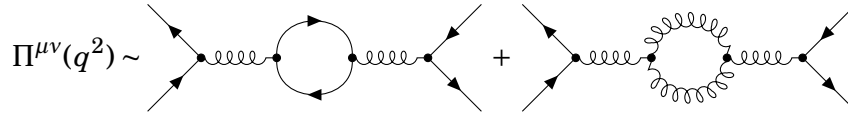


Figura 2.1: Contribuição a um loop para polarização do vácuo na QCD. Conforme notação adotada (ver apêndice A), as linhas sólidas com uma seta denotam quarks/antiquarks e as “linhas helicoidais” representam os glúons.

Na ordem de um loop, a constante de acoplamento efetiva (para as interações fortes) pode ser expressa como [31]:

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g_s^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{[11N_c - 2N_f] \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2 \quad (2.6)$$

onde Q é o momento transferido e $\Lambda_{QCD} \simeq 340$ MeV é um parâmetro de escala introduzido para garantir que α_s seja suficientemente pequena, permitindo o uso da expansão perturbativa.

Na QCD com $N_c = 3$ e $N_f = 6$, verificamos que o efeito de anti-blindagem domina, e com isso, em altas energias, a intensidade da interação forte tende a zero, de modo que os quarks dentro dos hádrons se comportem como partículas livres. Essa propriedade é chamada liberdade assintótica (trata-se de um fenômeno característico das teorias de Yang-Mills em geral [32]).

2.2.2 Confinamento de cor

Outra propriedade peculiar da QCD surge no regime de baixas energias. Neste regime, a intensidade da interação forte aumenta, de tal forma que a atração entre os quarks tende a mantê-los confinados dentro dos hádrons. Podemos dizer que a energia necessária para isolar um quark de um hádron é tão grande que torna-se mais fácil criar um novo par quark-antiquark. Por isso, qualquer sistema de interação forte, à temperatura e densidade zero, deve ser um singlete de cor na escala de energias menores do que Λ_{QCD} . Esta propriedade é conhecida como confinamento de cor⁷.

Evidentemente, neste nível, o método perturbativo usual não pode mais ser aplicado, uma vez que a constante de acoplamento efetiva assume grandes valores. Assim, o estudo dos estados hadrônicos que se encontram nesta faixa de energia tem que ser realizado usando abordagens não-perturbativas, tais como QCD na rede ou modelos efetivos.

⁷Vale salientar que o confinamento de cor é uma conjectura teórica consistente com fatos experimentais. Sua prova formal, na QCD, ainda não foi obtida.

2.2.3 Simetria de Calibre

Por construção, a Lagrangiana (2.3) é invariante de calibre. De tal modo que os campos de matéria transformam-se como:

$$\begin{cases} q \rightarrow q' = U(x)q, \\ \bar{q} \rightarrow \bar{q}' = U^\dagger(x)\bar{q}, \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $U(x)$ é uma matriz unitária 3×3 no espaço de cor, que pode ser escrita em termos dos geradores da álgebra de Lie do grupo $SU(3)_c$:

$$U(x) = e^{-ig_s \theta^a(x) \lambda_a}, \quad (2.9)$$

$\theta^a(x)$ são parâmetros do grupo. Note que a dependência com as coordenadas do espaço-tempo, x , indica que trata-se de uma transformação local. Para os campos de calibre A_μ , temos

$$\lambda_a A_\mu^a \rightarrow \lambda_a A_\mu'^a = U(x) \lambda_a A_\mu^a U^\dagger(x) + \frac{i}{g_s} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x). \quad (2.10)$$

2.2.4 Simetria Quiral

Além da simetria local $SU(3)_c$, existem diversas simetrias globais (aproximadas) que podem ser implementadas na Lagrangiana da QCD, como por exemplo, as simetrias no espaço dos sabores $SU(N_f)$.

Considere a Lagrangiana (2.3) para três sabores u , d e s , no limite quiral ($m_u = m_d = m_s = 0$):

$$\mathcal{L}_{QCD} \Big|_{m=0} = \bar{q} i \gamma^\mu D_\mu q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

É possível verificar que (2.11) é invariante sob o seguinte conjunto de transformações:

$$\begin{cases} U(3)_V : q \rightarrow e^{i \frac{\lambda_a}{2} \alpha_V^a} q, & a = 0, 1, \dots, 8 \\ U(3)_A : q \rightarrow e^{i \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \alpha_A^b} q, & b = 0, 1, \dots, 8 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\quad (2.13)$$

onde α_V^a e α_A^b são parâmetros das transformações⁸, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ e $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}_3$. Os grupos relacionados às transformações (2.12) e (2.13) podem ser decompostos em

$$U(3)_V \otimes U(3)_A = SU(3)_V \otimes U(1)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_A, \quad (2.14)$$

onde o símbolo \otimes denota o produto tensorial. A simetria $U(1)_A$ está quebrada no nível quântico devido à existência de uma anomalia axial⁹ [4]. Dessa forma, no limite quiral, a teoria apresenta a simetria global:

$$SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V. \quad (2.15)$$

⁸Os índices V e A denotam o caráter vetorial e axial, respectivamente.

⁹Também conhecida como anomalia de Adler-Bell-Jackiw.

A partir do teorema de Noether (apêndice B.1), verificamos que surgem 9 correntes vetoriais e 8 axiais:

$$J_V^{\mu, a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad a = 0, 1, \dots, 8 \quad (2.16)$$

$$J_A^{\mu, b}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} q(x), \quad b = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.17)$$

Quando consideramos os termos de massa na Lagrangiana (2.3) a simetria é quebrada explicitamente, e verificamos que:

$$\partial_\mu J_V^\mu(x) = 0, \quad (2.18)$$

$$\partial_\mu J_V^{\mu, a}(x) = i\bar{q}(x) \left[m_q, \frac{\lambda_a}{2} \right] q(x), \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (2.19)$$

$$\partial_\mu J_A^{\mu, b}(x) = i\bar{q}(x) \left\{ m_q, \frac{\lambda_b}{2} \right\} \gamma_5 q(x), \quad b = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.20)$$

A Eq.(2.18) representa fisicamente a conservação do número bariônico, ocorrendo separadamente para cada sabor, em todos os processos envolvendo interações fortes.

Para as quadri-divergências das correntes de Noether proporcionais às massas dos quarks, expressões (2.19) e (2.20), temos os seguintes casos:

- massas não-nulas e degeneradas ($m_u = m_d = m_s \neq 0$): apenas a corrente vetorial é conservada ($\partial_\mu J_V^{\mu, a}(x) = 0$), uma vez que $\left[\mathbb{1}, \frac{\lambda_a}{2} \right] = 0$. Um caso particular ocorre quando $m_u = m_d \neq m_s$, que corresponde a simetria de isospin $SU(2)_V$;
- massas distintas ($m_u \neq m_d \neq m_s$): as partes $SU(3)_A$ e $SU(3)_V$ são afetadas pela quebra explícita e, como consequência, as correntes correspondentes não são conservadas. No entanto, como as massas correntes dos quarks u , d e s são pequenas ($m_{u,d} \lesssim 10$ MeV e $m_s \sim 95$ MeV) comparadas com as massas típicas dos hádrons (~ 1 GeV), os termos $m_u \bar{u}u$, $m_d \bar{d}d$ e $m_s \bar{s}s$, que contribuem para quebra da simetria, podem ser tratados como pequenas perturbações.

Ainda no limite quiral ($m_u = m_d = m_s = 0$), podemos ter, além da quebra explícita (que ocorre no nível da Lagrangiana), também uma quebra espontânea de simetria¹⁰ (*SSB* da denominação *Spontaneous Symmetry Breaking*):

$$SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \xrightarrow{SSB} SU(3)_V \otimes U(1)_V. \quad (2.21)$$

Nota-se que, neste processo, a corrente axial não é conservada¹¹. Isto significa que o vácuo da teoria deixa de ser invariante sob transformações do sub-grupo $SU(3)_A$.

¹⁰A quebra espontânea acontece quando o estado fundamental do sistema - neste caso, o estado de vácuo $|0\rangle$ - não compartilha a simetria da Lagrangiana.

¹¹Na verdade, veremos na seção 3.2 que a corrente axial pode ser considerada como parcialmente conservada.

Do ponto de vista das cargas de Noether, temos que:

$$\begin{cases} Q_V^a |0\rangle = 0, & a = 0, 1, \dots, 8 \\ Q_A^b |0\rangle \neq 0, & b = 1, 2, \dots, 8 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\quad (2.23)$$

onde Q_V^a e Q_A^b são as cargas correspondentes às correntes vetorial e axial, respectivamente.

De acordo com o teorema de Goldstone, a quebra espontânea de uma simetria global dá origem, para cada gerador do grupo associado à respectiva simetria quebrada, a uma partícula de spin-0 e massa nula, os chamados bósons de Goldstone [33,34]. Dessa forma, (2.21) implica no surgimento de oito bósons de Goldstone:

$$Q_A^b |0\rangle \sim |\phi^b\rangle, \quad b = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.24)$$

Sabemos, entretanto, que a simetria quiral é quebrada explicitamente pela massa corrente dos quarks, o que sugere que os bósons de Goldstone, gerados pela carga axial, adquirem uma pequena massa - comparada com as massas típicas dos hádrons ($\sim 1\text{GeV}$) - tornando-se pseudo-bósons, que, por sua vez, são identificados com o octeto de mésons pseudo-escalares $\{\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta\}$.

Outra característica do regime não-perturbativo, que está relacionada à quebra espontânea da simetria quiral, surge do fato de que a interação confinante entre quarks e glúons induz um rearranjo no estado fundamental, de tal forma que o mesmo seja preenchido por condensados de quarks não-nulos, isto é, pares de quark-antiquark com valor esperado diferente de zero:

$$\langle \bar{q}q \rangle \neq 0 \implies \begin{cases} \langle \bar{u}u \rangle \neq 0, \\ \langle \bar{d}d \rangle \neq 0, \\ \langle \bar{s}s \rangle \neq 0. \end{cases}$$

Assim, a estrutura do vácuo torna-se não-trivial, e os condensados de quarks atuam como um parâmetro de ordem para a transição de fase quiral da QCD, ou seja, “sinalizam” a quebra espontânea da simetria quiral.

Capítulo 3

Relações de Simetria

Simetrias desempenham um papel crucial em praticamente todos os aspectos relacionados ao estudo das interações fundamentais. Vimos na seção 2.2 que, além de conhecer quais simetrias se aplicam na lagrangiana da QCD, também é de extrema importância entender como essas simetrias são quebradas em diferentes regimes de energia. Neste capítulo, realizaremos uma abordagem mais aprofundada sobre alguns dos resultados mais importantes que seguem das simetrias de calibre e quiral, e que são fundamentais para o entendimento e desenvolvimento do nosso trabalho.

3.1 Identidades de Ward-Takahashi

As identidades de Ward-Takahashi [35, 36] expressam, em termos das funções de Green, as consequências da simetria em um nível quântico. Podemos dizer que, de certa forma, as identidades de Ward-Takahashi são o análogo quântico do Teorema de Noether.

Para exemplificar a obtenção destas identidades, iremos deduzi-las no contexto da Eletrodinâmica Quântica (ou seja, no cenário de uma teoria de calibre abeliana). Iniciemos considerando o funcional gerador das funções de Green para a QED, dado por

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}, \quad (3.1)$$

onde N é uma constante de normalização, J^μ , $\bar{\eta}$ e η são as fontes dos campos A_μ , ψ e $\bar{\psi}$ respectivamente. A ação efetiva é definida como

$$S_{eff} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{QED} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right] = S_{QED} + S_{GF} \quad (3.2)$$

com

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu \underbrace{(\partial_\mu + iA_\mu)}_{D_\mu} \psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.3)$$

A integral funcional $\int \mathcal{D}A_\mu$ contabiliza todas as configurações de campo possíveis para A_μ , incluindo aquelas que são fisicamente equivalentes (conectadas por uma transformação de

calibre). Isto resulta em uma contribuição infinita para o funcional gerador - e, portanto, para as funções de Green da teoria - o que impossibilita a construção de um propagador não-singular para o fóton. Essa dificuldade é superada com a introdução do termo fixador de calibre¹, $-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2$, que elimina a redundância da integral funcional e garante que a mesma forneça um resultado finito. O parâmetro ξ é um multiplicador de Lagrange responsável por fixar a classe de calibre covariante ($\xi = 1$ fornece o calibre de Feynman; e $\xi = 0$, o calibre de Landau).

A ação S_{QED} é invariante sob as transformações de calibre (local) do grupo $U(1)$, que podem ser escritas como:

$$\begin{cases} A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, & (3.4) \\ \psi \mapsto \psi' = \psi - ie\Lambda\psi, & (3.5) \\ \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}' = \bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi}, & (3.6) \end{cases}$$

sendo e a carga elétrica; e Λ , o parâmetro de transformação de calibre.

Por outro lado, a parte da ação efetiva que contém o termo fixador de calibre, S_{GF} , não é invariante sob estas transformações, como pode-se verificar a seguir:

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \mapsto -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \Lambda)^2 = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\mu \partial_\mu \Lambda) + O(\Lambda^2), \quad (3.7)$$

onde fazemos a hipótese de que o parâmetro de transformação, Λ , seja uma função infinitesimal. Isso justifica o fato de considerarmos apenas os termos lineares em Λ . Além da ação efetiva, devemos avaliar como as fontes se comportam sob tais transformações:

$$\begin{aligned} J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta &\mapsto J^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) + \bar{\eta}(\psi - ie\Lambda\psi) + (\bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi})\eta \\ &= J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \underbrace{J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie\Lambda \bar{\eta}\psi + ie\Lambda \bar{\psi}\eta}_{\text{contribuição das fontes}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dessa forma, a expressão para o funcional gerador se torna

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] \mapsto N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\mu \partial_\mu \Lambda) + J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)\Lambda \right)} e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}.$$

Integrando por partes os dois primeiros termos da primeira exponencial e considerando que os campos tendem a zero na “fronteira” do volume (Teorema de Green), podemos fatorar Λ :

$$\int d^4x \left[-\frac{i}{\xi}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\mu \partial_\mu \Lambda) + J^\mu \partial_\mu \Lambda \right] = \int d^4x \left[-\frac{i}{\xi} \square (\partial^\mu A_\mu) \Lambda - \partial_\mu J^\mu \Lambda \right], \quad (3.9)$$

onde $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ é o operador d'Alembertiano. Logo,

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] \mapsto N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{\xi} \square (\partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu J^\mu - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right) \Lambda} e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}.$$

¹Para teorias de calibre não-abelianas, tais como a QCD, a fixação de calibre inclui os chamados campos fantasmas de Faddeev-Popov [29], necessários para cancelar graus de liberdade não-físicos (presentes nos calibres covariantes) e garantir a unitariedade da teoria. No caso da QED, os campos fantasmas não se acoplam aos campos de calibre (isto é, aos campos de fóton) e, portanto, sua contribuição para o funcional gerador é apenas uma constante multiplicativa, que pode ser absorvida na constante de normalização.

Uma vez que Λ é uma função infinitesimal, podemos expandir a primeira exponencial, o que resulta em

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] \longmapsto Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \left[i \int d^4x \mathcal{O}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) \Lambda \right] e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]},$$

onde $\mathcal{O}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) = -\frac{1}{\xi} \square (\partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu J^\mu - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)$. Uma maneira conveniente de tratarmos $\mathcal{O}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$ é transformá-lo em um operador diferencial, realizando as seguintes substituições:

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}, & (3.10) \\ \psi \longrightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, & (3.11) \\ \bar{\psi} \longrightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}. & (3.12) \end{cases}$$

Com isso,

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] \longmapsto Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] - i \int d^4x \Lambda \left[-\frac{i}{\xi} \square \partial_\mu \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right) + \partial_\mu J^\mu + e\bar{\eta} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) - e\eta \left(\frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta].$$

Portanto, para restaurar a invariância de $Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta]$, qualquer que seja Λ , devemos exigir que

$$\left[-\frac{i}{\xi} \square \partial_\mu \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right) + \partial_\mu J^\mu + e\bar{\eta} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) - e\eta \left(\frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = 0. \quad (3.13)$$

Note que a equação anterior é linear nas derivadas funcionais em relação às diferentes fontes (pode-se dizer que isso se deve a escolha de um termo fixador de calibre linear). A linearidade permite escrevermos (3.13) como:

$$\partial_\mu J^\mu + \left[-\frac{i}{\xi} \square \partial_\mu \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right) + e\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - e\eta \frac{\delta}{\delta \eta} \right] W[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = 0, \quad (3.14)$$

onde $W[J^\mu, \bar{\eta}, \eta]$ é o funcional gerador das funções de Green conexas: $iW[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] := \ln Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta]$.

Podemos também expressar (3.14) em termos do funcional gerador das funções de Green irreduzíveis (Ação efetiva), que é definido como a transformada de Legendre de $W[J^\mu, \bar{\eta}, \eta]$:

$$\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = W[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] - \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta), \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{cases} A_\mu = \frac{\delta W}{\delta J^\mu}, & \psi = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}}, & \bar{\psi} = -\frac{\delta W}{\delta \eta}, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} J^\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu}, & \eta = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}}, & \bar{\eta} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Assim, fazendo uso das relações acima, a Eq.(3.14) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\square}{\xi} \partial_\mu A^\mu - i \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + ie \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \psi + ie \bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = 0. \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) é responsável por garantir a invariância de calibre de $Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta]$ em todas as ordens de perturbação. Agora, podemos obter uma expressão para o vértice diferenciando funcionalmente (3.18) em relação a $\psi(y)$ e $\bar{\psi}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\psi(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)} \left[i\partial_x^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)} \right] &= \frac{\delta}{\delta\psi(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)} \left[-ie\psi(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} + ie\bar{\psi}(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} \right] \\ i\partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta A^\mu(x)} &= ie \underbrace{\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)} \frac{\delta\psi(x)}{\delta\psi(y)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}}_{\delta^4(x-y)} + ie \underbrace{\frac{\delta}{\delta\psi(y)} \frac{\delta\bar{\psi}(x)}{\delta\bar{\psi}(z)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}}_{\delta^4(x-z)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Anti-comutando as derivadas funcionais com relação aos campos fermiônicos no primeiro termo do lado direito, e em seguida, fazendo $A_\mu = \bar{\psi} = \psi = 0$, teremos

$$i\partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta A^\mu(x)} = ie \left[\delta^4(x-z) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} - \delta^4(x-y) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(z)} \right]. \quad (3.20)$$

A expressão (3.20) pode ser reescrita no espaço dos momentos. Para isto, introduzimos as seguintes transformadas de Fourier:

$$\left\{ \begin{aligned} \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'\cdot y - p\cdot z - q\cdot x)} \partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta A^\mu(x)} &= e(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) q^\mu \Gamma_\mu(p', p, q), \quad (3.21) \\ \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'\cdot y - p\cdot z - q\cdot x)} \delta^4(x-z) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} &= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S^{-1}(p'), \quad (3.22) \\ \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'\cdot y - p\cdot z - q\cdot x)} \delta^4(x-y) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(z)} &= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S^{-1}(p), \quad (3.23) \end{aligned} \right.$$

onde $S(p')$ e $S(p)$ denotam propagadores fermiônicos no espaço de momentos e $\Gamma_\mu(p', p, q)$ é a função de vértice amputada. Dessa forma, multiplicando (3.20) por $e^{i(p'\cdot y - p\cdot z - q\cdot x)}$ e integrando em x, y e z , obtemos

$$q^\mu \Gamma_\mu(p', p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p) \quad (3.24)$$

que é conhecida como Identidade de Ward-Takahashi² [37], cuja representação diagramática é:

$$q^\mu \left[\begin{array}{c} \text{diagrama de vértice amputado} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{diagrama de propagador} \end{array} \right]^{-1} - \left[\begin{array}{c} \text{diagrama de propagador} \end{array} \right]^{-1}.$$

Podemos, ainda, expressar a Identidade de Ward-Takahashi em termos da função de vértice não amputada, $\Lambda_\mu(p', p)$, definida como

$$\Lambda_\mu(p', p) = iS(p')\Gamma_\mu(p', p)iS(p). \quad (3.25)$$

²No limite de $q \rightarrow 0$, encontramos a Identidade de Ward:

$$\Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p^\mu},$$

um caso particular de (3.24).

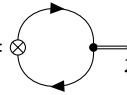
Logo,

$$q^\mu \Lambda_\mu(p', p) = S(p') - S(p). \quad (3.26)$$

As condições (3.24) e (3.26) são expressões que refletem as simetrias das amplitudes em Teorias Quânticas de Campos, e que as correntes devem satisfazer em nível quântico.

3.2 Relação de Goldberger-Treiman

A relação de Goldberger-Treiman [38] estabelece uma conexão entre as propriedades de interações forte e fraca dos hádrons. Para obter a relação de Goldberger-Treiman, vamos considerar o processo de decaimento fraco do pión. Devido à paridade, tal processo é dominado pelo elemento de matriz da corrente axial entre o estado de vácuo e de um pión, $\langle 0 | J_A^\mu | \pi \rangle$. Este elemento de matriz deve ser proporcional ao quadri-momento do pión q^μ :

$$\langle 0 | J_A^{a, \mu} | \pi^b(q) \rangle = \otimes \left(\text{diagrama} \right) = i f_\pi q^\mu \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}, \quad (3.27)$$


onde: \otimes indica a inserção da corrente axial (na representação diagramática); $f_\pi \simeq 92$ MeV é a constante de decaimento fraco do pión, determinada experimentalmente; os índices a e b se referem ao isospin e μ indica o caráter vetorial de Lorentz da corrente axial. Tomando o quadri-divergente da Eq.(3.27), teremos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \partial_\mu J_A^{a, \mu} | \pi^b(q) \rangle &= f_\pi q_\mu q^\mu \delta^{ab} e^{-iq \cdot x} \\ &= f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Note que a simetria quiral é quebrada, pois a conservação exata da corrente axial (isto é, $\partial_\mu J_A^{a, \mu} = 0$) exigiria que o pión não tivesse massa. No entanto, devido ao fato da massa do pión ser pequena comparada com as escalas hadrônicas, temos uma indicação de que a corrente axial é parcialmente conservada. A expressão (3.28) é conhecida como a hipótese PCAC (Partial Conservation of the Axial Current).

Além disso, (3.28) fornece outra informação interessante: a corrente axial pode ser transportada pelo campo do pión. Como este último possui spin 0, o mesmo deve obedecer à equação de Klein-Gordon:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\pi^2) \Phi^a(x) = 0, \quad (3.29)$$

cujas soluções são ondas planas (a menos de uma constante de normalização), $\Phi^a(x) = e^{-iq \cdot x}$. Isso nos permite reescrever (3.28), como

$$\partial_\mu J_A^{a, \mu} = f_\pi \partial^\mu \partial_\mu \Phi^a(x) \Rightarrow J_A^{a, \mu} = f_\pi \partial^\mu \Phi^a(x). \quad (3.30)$$

Outro exemplo relacionado à conservação da corrente axial é fornecido pela interação pión-núcleon. A corrente axial do núcleon é dada por [39]:

$$J_N^{a, \mu} = g_a \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N, \quad (3.31)$$

onde $\psi_N = (\text{próton}, \text{nêutron})$ é a representação isoespinorial do próton e nêutron, o fator g_a é devido à renormalização da corrente axial do núcleon e τ^a é um elemento do grupo de isospin $SU(2)$. Como o campo que descreve o núcleon obedece às equações de Dirac:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N) \psi_N(x) = 0, \\ \bar{\psi}_N(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_N) = 0, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N) \psi_N(x) = 0, \\ \bar{\psi}_N(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_N) = 0, \end{array} \right. \quad (3.33)$$

podemos usar tais equações para escrever o quadri-divergente da corrente axial (3.31) na forma

$$\partial_\mu J_N^{a,\mu} = i g_a m_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N. \quad (3.34)$$

Vemos que a massa do núcleon, m_N , não permite a conservação da corrente axial. No entanto, lembremos que o núcleon interage fortemente com o pión. Portanto, se considerarmos a soma das contribuições de ambas as correntes, podemos recorrer à ideia de uma corrente axial parcialmente conservada. Usando as relações (3.30) e (3.31), podemos escrever a corrente axial total como

$$J_T^{a,\mu} = g_a \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N + f_\pi \partial^\mu \Phi^a. \quad (3.35)$$

Se agora exigimos que a corrente axial total seja conservada, chegamos à seguinte relação

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi^a = -i g_a \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N, \quad (3.36)$$

que tem a forma de uma equação de Klein-Gordon para um pión sem massa interagindo com o núcleon. Se exigirmos que o quadri-divergente da corrente axial seja consistente com o resultado da hipótese PCAC, Eq.(3.28), podemos introduzir um termo apropriado de massa para o pión na expressão (3.36), o que nos fornece:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2) \Phi^a = -i g_a \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N, \quad (3.37)$$

onde identificamos a expressão para o acoplamento pión-núcleon:

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{m_N}{f_\pi}, \quad (3.38)$$

que é chamada relação de Goldberger-Treiman [40]. Como vimos, tal relação é uma consequência da quebra espontânea da simetria quiral e da hipótese PCAC. Todo modelo quiral deve conseguir reproduzi-la, e no caso do modelo espectral, ela é essencial, por exemplo, no estudo do decaimento anômalo do pión [21].

Modelos Quirais de Quarks

Neste capítulo, apresentaremos brevemente algumas características dos modelos quirais de quarks e introduziremos o modelo espectral de quarks, que é um modelo efetivo utilizado como alternativa para descrição da QCD em baixas energias.

4.1 Introdução

Modelo quiral de quarks é um nome genérico para qualquer teoria de campo relativística que descreva características não-perturbativas da QCD. Em geral, tais modelos são construídos de forma a incorporarem determinadas características comuns, listadas a seguir:

1. os quarks são introduzidos nestes modelos como únicos graus de liberdade explícitos, ou seja, os glúons são representados por uma constante de acoplamento, de forma que as interações sejam pontuais;
2. o comportamento não-perturbativo manifesta-se pela presença de uma massa constituinte para os quarks, consequência de um vácuo não-trivial;
3. diversas simetrias da QCD são reproduzidas, principalmente as invariâncias de calibre e quiral;
4. essas simetrias são expressas pelas Identidades de Ward-Takahashi, e modelos quirais de quarks oferecem soluções particulares para as mesmas.

Apesar dos modelos efetivos, em geral, fornecerem uma descrição quantitativa razoavelmente precisa de processos hadrônicos, há uma falha sistemática na construção dos mesmos, uma fonte de ambiguidades, que reside no fato de que os modelos quirais de quarks são, supostamente, uma aproximação da QCD em baixas energias. Um ingrediente essencial é a supressão de graus de liberdade de altas energias, separando o regime de baixas energias, onde o modelo é suposto funcionar, e o regime de altas energias, onde a dinâmica da QCD genuína, em termos de quarks

explícitos e glúons, deveria defini-lo. Isto estabelece uma certa escala, ou corte (que podemos entender como o valor de energia abaixo do qual supõe-se válido o modelo). A escala adquire um significado físico, e deve ser mantida em todo tratamento destes modelos. A forma precisa com que este corte de energia deve ser introduzido não é de todo clara, sendo a razão para a mencionada ambiguidade. Dessa forma, não é possível decidir por um modelo ou outro apenas por suas características teóricas, sendo fundamental, portanto, a avaliação de seu poder de predição.

4.2 Modelo Espectral de Quarks

O modelo espectral de quarks é uma abordagem na qual um modelo quiral de quarks é construído a partir de uma generalização da representação de Lehmann para o propagador do quark [38], representado por uma dada função espectral $\rho(\omega)$, e a chamada técnica de calibre [16, 17]. Na representação de Lehmann, o propagador do quark é dado por:

$$S(p) = \int_C d\omega \frac{\rho(\omega)}{p - \omega}, \quad (4.1)$$

onde ω é a massa espectral (massa constituinte do quark), $\rho(\omega)$ é a função espectral (ou distribuição espectral) e C denota um contorno no plano complexo escolhido adequadamente.

O conceito de massa constituinte está relacionado à hipótese de que os quarks dentro dos hádrons não são partículas pontuais livres. Enquanto a massa dos hádrons é algumas centenas de MeV (podendo chegar até alguns GeV), a massa corrente dos quarks mais leves é da ordem de 4 MeV. Considera-se, então, que os quarks dentro dos hádrons adquirem uma massa efetiva (denominada massa constituinte) por causa do meio no qual estão inseridos (glúons, quarks virtuais, etc.). Assim, o propagador (4.1) pode ser considerado como o propagador de uma partícula não pontual, à qual está relacionada uma função espectral $\rho(\omega)$, que descreve como a massa efetiva do quark é distribuída dentro dos hádrons.

Exigências físicas naturais, como a normalização adequada e a finitude dos observáveis hadrônicos, são alcançadas pelo cumprimento das seguintes condições para os momentos da distribuição espectral $\rho(\omega)$:

$$\rho_0 \equiv \int d\omega \rho(\omega) = 1, \quad (4.2)$$

$$\rho_n \equiv \int d\omega \omega^n \rho(\omega) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

sendo os observáveis físicos proporcionais aos momentos negativos (ou momentos inversos),

$$\rho_{-n} \equiv \int d\omega \omega^{-n} \rho(\omega) \quad (4.4)$$

e aos momentos logarítmicos,

$$\begin{aligned}
\rho'_n &\equiv \int d\omega \log\left(\frac{\omega^2}{\mu^2}\right) \omega^n \rho(\omega) \\
&= \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega) - \underbrace{\int d\omega \log(\mu^2) \omega^n \rho(\omega)}_{=0} \\
&= \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Na última passagem de (4.5), usamos a condição (4.3) para remover a dependência na escala μ , garantindo assim a ausência de qualquer transmutação dimensional. A única exceção é o momento ρ'_0 :

$$\rho'_0(\mu^2) = \int d\omega \log\left(\frac{\omega^2}{\mu^2}\right) \rho(\omega), \tag{4.6}$$

que depende de uma escala μ e que não é regularizada pelo método espectral.

Não é necessário, a princípio, determinar a forma da distribuição espectral $\rho(\omega)$, mas sim as consequências gerais e relações implícitas que seguem das condições espectrais (4.2 - 4.5). Na seção 4.3, mostramos uma forma de se obter estas condições.

Em Teorias Quânticas de Campos, o cálculo das amplitudes de probabilidade quase sempre exige o emprego de esquemas de regularização e renormalização, a partir dos quais podemos identificar e eliminar (quando possível) as divergências presentes nas diferentes amplitudes. Uma preocupação na escolha de um esquema de regularização é que o mesmo deve preservar propriedades de simetria presentes na teoria. A regularização espectral permite resolver explicitamente as identidades de Ward-Takahashi eletromagnética (ou de calibre) e quiral, através da técnica de calibre, como veremos na seção 4.4.

Dessa forma, o modelo com a regularização espectral, expressões (4.1), (4.2) e (4.3), suprido com acoplamentos obtidos por meio da técnica de calibre, possui simultaneamente as seguintes características:

- fornece valores finitos para os observáveis hadrônicos, que podem ser usados para fixar os momentos inversos (4.4) e os momentos log (4.5);
- satisfaz, por construção, as identidades de Ward-Takahashi de calibre e quiral, reproduzindo assim, todas as exigências de simetria necessárias.

A satisfação das características acima simultaneamente por um modelo quiral de quarks não é algo trivial [13]. A regularização introduzida pela técnica de calibre é especial pois ela não apenas torna a teoria finita, mas também corresponde a tomar o limite de *cut-off* infinito naqueles observáveis que não dependem da massa constituinte. Isto permite a avaliação adequada de anomalias, pois o valor próximo do experimental para a largura de decaimento anômalo do pión (decaimento do pión neutro em dois fótons) pode ser obtido apenas em um modelo quiral de quarks na ausência de um regularizador (ou no limite em que o *cut-off* vai para o infinito) [41].

4.3 Momentos da função espectral

Podemos parametrizar o propagador (4.1) na forma

$$\begin{aligned} S(p) &= A(p)\not{p} + B(p) = A(p) \left[\not{p} + \frac{B(p)}{A(p)} \right] \\ &= \frac{Z(p)}{\not{p} - M(p)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

com

$$\left\{ \begin{aligned} A(p) &= \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B(p) &= \int d\omega \frac{\rho(\omega)\omega}{p^2 - \omega^2}. \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

A função $M(p)$ em (4.7) é a auto-energia do quark, enquanto $Z(p)$ é a renormalização da função de onda do quark, dadas por

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (4.10)$$

$$Z(p) = [p^2 - M^2(p)] A(p). \quad (4.11)$$

Observe que se $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$ a massa do quark seria zero, $M(p^2) = 0$, e a quebra espontânea da simetria quiral não ocorreria. Portanto, em geral, espera-se que $\rho(\omega)$ não seja uma função par.

Como os observáveis físicos são proporcionais aos momentos da função espectral $\rho(\omega)$, é conveniente relacionarmos os momentos negativos (4.4) e os momentos log (4.5) às integrais que envolvem $M(p)$ e $Z(p)$. Para isso, assumiremos que o seguinte conjunto de condições espectrais seja satisfeito:

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) = \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

e utilizaremos a seguinte identidade (cuja prova se encontra no apêndice C.1.1):

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{p - \omega} = \not{p}^n S(\not{p}) - \not{p}^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Substituindo (4.7) em (4.13) e racionalizando os denominadores, teremos

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} = \not{p}^n Z(p) \frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p}^{n-1}. \quad (4.14)$$

Temos duas possibilidades para n , par ou ímpar. Para $n = 2k$ (par), encontramos:

$$\begin{aligned} \int d\omega \omega^{2k} \rho(\omega) \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} &= p^{2k} Z(p) \frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p}^{2k-1} \\ \int d\omega \left[\rho(\omega) \frac{\not{p} \omega^{2k}}{p^2 - \omega^2} + \rho(\omega) \frac{\omega^{2k+1}}{p^2 - \omega^2} \right] &= p^{2k} \frac{\not{p} Z(p)}{p^2 - M^2(p)} + p^{2k} \frac{Z(p) M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \frac{p^{2k}}{\not{p}} \times \frac{\not{p}}{\not{p}} \\ \not{p} L_{2k}(p^2) + L_{2k+1}(p^2) &= \not{p} p^{2k} \frac{Z(p)}{p^2 - M^2(p)} + p^{2k} \frac{Z(p) M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p} p^{2k-2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde, na última passagem, definimos

$$L_n(p^2) = \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \quad (4.16)$$

Comparando termos de mesma potência em p , obtemos as seguintes identidades:

$$L_{2k}(p^2) = p^{2k} \frac{Z(p)}{p^2 - M^2(p)} - p^{2k-2} \quad (4.17)$$

$$L_{2k+1}(p^2) = p^{2k} \frac{Z(p) M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (4.18)$$

que são obtidas também para o caso de n ímpar. A partir do conjunto de condições espectrais (4.12), encontramos as seguintes relações de recorrência para $n > 2$:

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = p^2 \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}, \quad n > 2 \quad (4.19)$$

$$L_n(p^2) = p^2 L_{n-2}(p^2), \quad n > 2 \quad (4.20)$$

cujas verificações se encontra no apêndice (C.1.2). De (4.5), temos que

$$\begin{aligned} \rho'_n &= \int d\omega \omega^n \log(\omega^2) \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \int_0^\infty dp^2 \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Passando para o espaço Euclidiano ($p^2 \mapsto -p_E^2$), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho'_n &= - \int_0^\infty dp_E^2 L_n(-p_E^2) \\ &= - \int_0^\infty dp_E^2 p_E^2 L_{n-2}(-p_E^2), \end{aligned} \quad (4.22)$$

que descreve os momentos log de $\rho(\omega)$ em termos de $M(p)$ e $Z(p)$.

Já os momentos negativos podem ser obtidos a partir da derivada do propagador do quark (4.1) na origem:

$$\rho_{-n} = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega^n} = - \left(\frac{d}{d\mathbf{p}} \right)^{n-1} S(\mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{p}=0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

Assim, dado o propagador do quark $S(\mathbf{p})$, podemos obter os momentos log e os momentos negativos apenas utilizando as relações (4.22) e (4.23) sem precisar encontrar a forma explícita da função espectral.

4.3.1 Limite $p \rightarrow \infty$

Para grandes momentos, limite em que $p \rightarrow \infty$, podemos expandir o propagador do quark (4.1), na forma:

$$S(p)\Big|_{p \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\not{p}} \int d\omega \rho(\omega) + \frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega + \frac{1}{\not{p}^3} \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 + \dots \quad (4.24)$$

Uma vez que na região assintótica o propagador do quark é normalizado para

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}}, \quad (4.25)$$

podemos obter de (4.24) a seguinte condição espectral

$$\rho_0 = \int d\omega \rho(\omega) = 1. \quad (4.26)$$

Considerando que a função de massa $M(p)$ deve assintoticamente se anular, a relação (4.10) se torna

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \mapsto M(p)\Big|_{p \rightarrow \infty} = \frac{\frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega}{\frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega)} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{1} = 0; \quad (4.27)$$

com isso, obtemos que $\rho_1 = 0$. Observe que se todas as condições espectrais fossem determinadas a partir da mesma expansão para grandes momentos, trivialmente isso resultaria em um propagador total para o quark livre e sem massa. Portanto, a expansão para grandes momentos não pode representar o propagador completo (e não trivial) do quark.

Como mencionado no início da seção 4.2, o modelo espectral de quarks também faz uso da técnica de calibre para determinar representações particulares das funções de vértice que satisfazem as identidades de Ward-Takahashi. Essas quantidades são determinadas na seção a seguir.

4.4 Técnica de Calibre

Nesta seção, vamos especificar os acoplamentos dos vértices, com uma e duas correntes, para quarks de massas iguais a fim de, a partir das identidades de Ward-Takahashi (WT), obtermos as funções de vértice vetorial e axial.

Na seção 2.2.4, vimos que na QCD as correntes vetorial e axial podem ser definidas como:

$$J_V^{\mu, a}(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.28)$$

$$J_A^{\mu, a}(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.29)$$

onde λ_a são as matrizes de Gell-Man, γ^μ as matrizes de Dirac e $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ é a matriz auxiliar. A conservação da corrente vetorial (CVC) e a conservação parcial da corrente axial (PCAC)

implicam que:

$$\partial_\mu J_V^{\mu, a}(x) = 0, \quad (4.30)$$

$$\partial_\mu J_A^{\mu, a}(x) = \bar{q}(x) m_q i\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x), \quad (4.31)$$

sendo $m_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ a matriz de massa corrente dos quarks. Cabe destacar que qualquer teoria efetiva da QCD deve incorporar esses vínculos. As relações (4.30) e (4.31) implicam em um conjunto de identidades de WT de calibre e quiral entre as funções de Green envolvendo correntes vetoriais, axiais e operadores de campos de quarks, que são baseadas em regras de comutação locais entre correntes e campos:

$$\left[J_V^{0, a}(x), q(x') \right]_{x_0=x'_0} = -\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x) \delta(x-x'), \quad (4.32)$$

$$\left[J_A^{0, a}(x), q(x') \right]_{x_0=x'_0} = -\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(x) \delta(x-x'). \quad (4.33)$$

Assim como na QED, procura-se por soluções aproximadas de um conjunto completo de equações ligando as funções de Green em vários modelos quânticos de campos. A maioria dessas aproximações equivale a somar conjuntos específicos de gráficos de perturbações com a esperança de que a seleção irá fornecer contribuições dominantes na região cinética de interesse. Em teorias de calibre, grande parte dessas aproximações viola as restrições de calibre entre as funções de Green e isso torna difícil avaliar a veracidade ou não das soluções encontradas. No entanto, há um método de aproximação que tem a virtude de preservar as identidades de WT em todas as fases, denominado **técnica de calibre** [16, 17].

4.4.1 Vértices com uma corrente

As funções de vértice vetorial e axial não amputadas são definidas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \Lambda_V^{\mu, a}(p', p) &= \begin{array}{c} \text{---} p \\ \diagdown \quad \bullet \\ \diagup \quad q \\ \text{---} p+q \end{array} = iS(p') \Gamma_V^{\mu, a}(p', p) iS(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0 | T \{ J_V^{\mu, a}(0) q(x') \bar{q}(x) \} | 0 \rangle e^{i(p'x' - px)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_A^{\mu, a}(p', p) &= \begin{array}{c} \text{---} p \\ \diagdown \quad \bullet \\ \diagup \quad q \\ \text{---} p+q \end{array} = iS(p') \Gamma_A^{\mu, a}(p', p) iS(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0 | T \{ J_A^{\mu, a}(0) q(x') \bar{q}(x) \} | 0 \rangle e^{i(p'x' - px)}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde os Γ 's são as correspondentes funções de vértice amputadas¹. A identidade de WT para o vértice vetorial é dada por

$$(p' - p)_\mu \Lambda_V^{\mu, a}(p', p) = S(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S(p), \quad (4.36)$$

com $p' = p + q$. Para o vértice axial, tem-se

$$-(p' - p)_\mu \Lambda_A^{\mu, a}(p', p) = S(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S(p). \quad (4.37)$$

A técnica de calibre consiste em escrever soluções tentativa (funções de vértices) com o propósito de satisfazer as identidades de WT, expressões (4.36) e (4.37). Para um sabor, escrevemos a solução tentativa a partir da definição da função de vértice vetorial, Eq.(4.34), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Lambda_V^{\mu, a}(p', p) &= iS(p') \Gamma_V^{\mu, a}(p', p) iS(p) \\ &= \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Podemos agora verificar se a solução tentativa (4.38) é de fato a solução para função de vértice vetorial. Para isso, basta inserirmos (4.38) na identidade de WT para o vértice vetorial, Eq.(4.36):

$$(p' - p)_\mu \underbrace{iS(p') \Gamma_V^{\mu, a}(p', p) iS(p)}_{\Lambda_V^{\mu, a}(p', p)} = S(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S(p). \quad (4.39)$$

Avaliando apenas o lado esquerdo de (4.39), teremos

$$\begin{aligned} (p' - p)_\mu \underbrace{iS(p') \Gamma_V^{\mu, a}(p', p) iS(p)}_{\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2}} &= iS(p') (\not{p}' - \not{p}) \frac{\lambda_a}{2} iS(p) \\ &= iS(p') (\not{p}' - \omega - \not{p} + \omega) \frac{\lambda_a}{2} iS(p) \\ &= \cancel{iS(p') (\not{p}' - \omega) \frac{\lambda_a}{2} iS(p)} - \cancel{iS(p') (\not{p} - \omega) \frac{\lambda_a}{2} iS(p)} \\ &= S(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S(p). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Vemos que a solução tentativa (4.38) satisfaz a identidade de WT para o vértice vetorial. Seguindo procedimento semelhante, podemos obter a solução para o vértice axial. Então, inicialmente, construímos a solução tentativa a partir da definição (4.35):

$$\Lambda_A^{\mu, a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \quad (4.41)$$

¹Esclarecimento sobre convenções: utilizamos $e^{-ip \cdot x}$ para partículas entrando no vértice e $e^{ip \cdot x}$ para partículas saindo. No caso de partículas livres sem massa, as funções irredutíveis são normalizadas de acordo com $\Gamma_V^{\mu, a} = \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2}$ e $\Gamma_A^{\mu, a} = \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2}$.

e, em seguida, inserimos essa solução na identidade (4.37):

$$\begin{aligned}
-(p' - p)_\mu iS(p') \Gamma_A^{\mu, a}(p', p) iS(p) &= -iS(p')(p' - p) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} iS(p) \\
&= \cancel{S(p')(p' - \omega)} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S(p) + S(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 [2\omega + (p - \omega)] S(p) \\
&= S(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S(p) + S(p') 2\omega \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S(p). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Na primeira passagem de (4.42), somamos e subtraímos 2ω e também usamos a propriedade de anti-comutação das matrizes γ (ver apêndice A), $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$, no segundo termo. Note que a solução tentativa (4.41) satisfaz a identidade de WT axial a menos de um termo proporcional à massa espectral. Dessa forma, precisamos subtrair esse termo em (4.41), o que resulta em

$$\Lambda_A^{\mu, a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega}. \tag{4.43}$$

4.4.2 Relação de Goldberger-Treiman

Uma consequência da identidade de WT axial, válida apenas se $\rho(\omega) \neq \delta(\omega)$, é a ocorrência de um pólo pseudoescalar sem massa, identificado com o pión. Próximo ao pólo ($q^2 \rightarrow 0$), o decaimento do pión, dado pelo vértice axial (4.43), é dominado pelo acoplamento pseudoescalar. Nesse limite, o vértice axial está associado à função de onda do pión² por meio da relação

$$\begin{aligned}
\Lambda_A^{\mu, a}(p', p) \Big|_{q \rightarrow 0} &= \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \left(-\frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \\
&= -2f_\pi \frac{q^\mu}{q^2} \Lambda_\pi^a(p', p), \tag{4.45}
\end{aligned}$$

onde f_π é a constante de decaimento fraco do pión. De (4.45), tiramos que

$$\Lambda_\pi^a(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \tag{4.46}$$

sendo que o acoplamento pseudoescalar entre os quarks e o pión é dado por

$$g_\pi(\omega) = \frac{\omega}{f_\pi}. \tag{4.47}$$

Nota-se que (4.47) é a versão espectral da relação de Goldberger-Treiman (veja seção 3.2).

²A função de onda do pión, correspondente ao vértice $\pi \rightarrow q\bar{q}$, é definida como:

$$\left. \begin{array}{c} \text{Diagrama de um pión } \pi^+ \text{ decaindo em } \bar{d} \text{ e } u \end{array} \right\} \Rightarrow \Lambda_\pi^a(p', p) = i \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0 | T \{ q(0) \bar{q}(x) \} | \pi^a(q) \rangle. \tag{4.44}$$

4.4.3 Vértices com duas correntes

Os vértices com duas correntes, axiais ou vetoriais, serão necessários para o cálculo dos fatores de forma. Portanto, nesta subseção, iremos explicitar a obtenção do vértice axial-axial, definido por

$$(2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q) \Lambda_{AA}^{\mu, a; \nu, b}(p', q'; p, q) = \int d^4x d^4x' d^4y' d^4y e^{i(q' \cdot x' + p' \cdot y' - q \cdot x - p \cdot y)} \times \langle 0 | T \{ J_A^{\mu, a}(x) J_A^{\nu, b}(x') q(y) \bar{q}(y') \} | 0 \rangle, \quad (4.48)$$

que no caso do $SU(2)_f$, satisfaz à seguinte identidade de Ward-Takahashi³:

$$-i q_\mu \Lambda_{AA}^{\mu, a; \nu, b}(p', q'; p, q) = i \epsilon_{bac} \Lambda_V^{\nu, c}(p', p) + \frac{\tau_a}{2} \gamma_5 \Lambda_A^{\nu, b}(p' - q, p) + \Lambda_A^{\nu, b}(p', p + q) \frac{\tau_a}{2} \gamma_5, \quad (4.49)$$

com

$$\begin{cases} \Lambda_V^{\nu, c}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \gamma^\nu \frac{\tau_c}{2} \frac{i}{p - \omega}, \\ \Lambda_A^{\nu, b}(p' - q, p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - q - \omega} \left(\gamma^\nu - \frac{2\omega q^\nu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_b}{2} \frac{i}{p - \omega}, \\ \Lambda_A^{\nu, b}(p', p + q) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \left(\gamma^\nu - \frac{2\omega q^\nu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_b}{2} \frac{i}{p + q - \omega}, \end{cases}$$

ϵ_{bac} é tensor de Levi-Civita e τ_a são as matrizes de Pauli (veja apêndice A). A solução para (4.49), obtida a partir da técnica de calibre, é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda_{AA}^{\mu, a; \nu, b}(p', q'; p, q) &= \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \left\{ \left(\gamma^\nu - \frac{2\omega q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_b}{2} \frac{i}{p + q - \omega} \times \right. \\ &\quad \times \left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} + \left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} \frac{i}{p' - q - \omega} \times \\ &\quad \left. \times \left(\gamma^\nu - \frac{2\omega q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_b}{2} + \frac{\omega q'^\nu q^\mu}{q'^2 q^2} \delta_{ab} \right\} \frac{i}{p - \omega}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

No limite de q^2 e $q'^2 \rightarrow 0$, verificamos que o vértice axial-axial, dado pela Eq.(4.50), está associado à amplitude de espalhamento não amputada, $\pi q \rightarrow \pi q$, pela seguinte relação

$$\Lambda_{AA}^{\mu, a; \nu, b}(p', q'; p, q) \Big|_{q, q' \rightarrow 0} = f_\pi^2 \frac{q^\mu q'^\nu}{q^2 q'^2} \Lambda_{\pi\pi}^{ab}(p', q'; p, q), \quad (4.51)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pi\pi}^{ab}(p', q'; p, q) &= \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \left\{ \frac{\omega}{f_\pi^2} \delta_{ab} + \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_b \frac{i}{p + q - \omega} \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_a \frac{i}{p' - q - \omega} \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_b \right\} \frac{i}{p - \omega}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Os resultados apresentados neste capítulo para o modelo espectral de quarks serão utilizados como base para extensão do modelo, incluindo diferentes sabores de quarks, que será introduzida no próximo capítulo.

³Nesta subseção, a e b são índices de isospin, ou seja, assumem valores de 1 a 3.

Capítulo 5

Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$

Neste capítulo, apresentaremos o desenvolvimento do modelo introduzido em [22, 23], que inclui a descrição de mésons formados por quarks de diferentes sabores, e realizaremos a extensão desse desenvolvimento para a descrição analítica de observáveis físicos não determinados anteriormente, como o condensado não-local de quarks, a função de correlação pseudoescalar e o fator de forma eletromagnético do méson káon. Portanto, este capítulo engloba os resultados originais produzidos neste trabalho e os obtidos em [22, 23].

5.1 Introdução

A versão do modelo espectral de quarks com três sabores [23] foi desenvolvida de forma análoga à formulação original apresentada em [12]. No entanto, devido à inclusão do quark strange, fez-se necessário a introdução de duas distribuições espectrais, $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$, para descrever as massas constituintes dos quarks up(down) e strange respectivamente. Dessa forma, empregando a representação de Lehmann para os propagadores desses quarks, tem-se

$$S_u(p') = \int_C d\omega' \frac{\rho_u(\omega')}{p' - \omega'} \quad \text{e} \quad S_s(p) = \int_C d\omega \frac{\rho_s(\omega)}{p - \omega}, \quad (5.1)$$

onde ω' e ω são as massas espectrais para os quarks up(down) e strange respectivamente, e C denota um contorno no plano complexo escolhido adequadamente.

5.2 Regularização Espectral

A regularização espectral é construída, assim como no modelo original [12], a partir de exigências físicas, implicando em condições sobre os momentos das distribuições $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$:

$$\text{normalização:} \quad \rho_{q,0} \equiv \int d\omega \rho_q(\omega) = 1, \quad (5.2)$$

$$\text{finitude dos observáveis:} \quad \rho_{q,n} \equiv \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

e

$$\text{observáveis físicos} \propto \begin{cases} \rho_{q,-n} \equiv \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^{-n}, & (5.4) \\ \rho'_{q,n} \equiv \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^n \log(\omega^2), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.5)$$

onde $\rho_q(\omega)$ denota, genericamente, qualquer uma das distribuições $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$.

Nas próximas seções, determinaremos alguns observáveis físicos que serão úteis para estabelecer condições a serem satisfeitas pelos momentos negativos (5.4) e os momentos log (5.5).

5.3 Condensado de Quarks

O condensado de quarks é o valor esperado no vácuo de um par quirial férmion/anti-férmion, sendo um parâmetro de ordem para transição de fase que ocorre devido a quebra espontânea da simetria quirial. O condensado de quarks é dado por:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - \omega} \right], \quad (5.6)$$

onde $N_c = 3$ é o número de cores. Tomado o traço no espaço de Dirac, encontramos

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle &= -iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} \right] \\ &= -i4N_c \int d\omega \rho_q(\omega) \omega \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2}}_{I_1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A integral em p é quadraticamente divergente, e portanto, requer o uso de um método de regularização auxiliar, que será removido no final do cálculo. Resolvendo I_1 por meio da regularização tipo *sharp cut-off* (ver apêndice C.2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle &= \frac{-N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho_q(\omega) \omega \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \\ &= \frac{-N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho_q(\omega) \omega \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log(\omega^2) - \omega^2 \log(\Lambda^2 + \omega^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para garantir a finitude dos resultados quando $\Lambda \rightarrow \infty$, temos as seguintes condições:

$$\int \rho_{q,1} = \int d\omega \rho_q(\omega) \omega = 0, \quad (5.9)$$

$$\int \rho_{q,3} = \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^3 = 0, \quad (5.10)$$

resultando em

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{-N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^3 \log(\omega^2) = \frac{-N_c}{4\pi^2} \rho'_{q,3}. \quad (5.11)$$

Assim, vemos que o cumprimento da condição espectral (5.3) nas relações (5.9) e (5.10), vem da exigência física de $\langle \bar{q}q \rangle$ ser finito. Além disso, nota-se que na fase perturbativa, sem quebra espontânea de simetria (onde $\rho_q(\omega) = \rho_q(-\omega) = \delta(\omega)$), teríamos $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, uma vez que o integrando de $\rho'_{q,3}$ é ímpar. Com estimativas experimentais para diferentes condensados [42] e [43], dadas por

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \simeq -(243 \text{ MeV})^3 \quad (5.12)$$

e

$$\langle \bar{s}s \rangle = 1.08 \langle \bar{u}u \rangle \simeq -1.08 (243 \text{ MeV})^3, \quad (5.13)$$

em escalas hadrônicas típicas de $0,5 - 1 \text{ GeV}$, podemos inferir os valores de $\rho'_{u,3}$ e $\rho'_{s,3}$. Avaliando o sinal dos condensados de quarks, verificamos que

$$\begin{cases} \rho'_{u,3} > 0, \\ \rho'_{s,3} > 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\quad (5.15)$$

5.4 Condensado não-local de Quarks

De maneira geral, condensados não-locais descrevem a distribuição de quarks e glúons no vácuo não-perturbativo (no regime de baixas energias). Isso significa que, no vácuo, quarks/glúons possuem virtualidade¹ diferente de zero. O condensado não-local de quarks é dado pela seguinte expressão:

$$Q_q(x) = \frac{\langle \bar{q}(0)q(x) \rangle}{\langle \bar{q}(0)q(0) \rangle}. \quad (5.16)$$

No nosso caso:

$$\langle \bar{q}(0)q(x) \rangle = -4iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \omega \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2} e^{ip \cdot x}}_{I_2} \quad (5.17)$$

e

$$\langle \bar{q}(0)q(0) \rangle = -4iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \omega I_1. \quad (5.18)$$

A integral em p no numerador de (5.16), I_2 , pode ser resolvida usando uma Transformada de Fourier-Bessel (ver Apêndice C.2.2), resultando em

$$\langle \bar{q}(0)q(x) \rangle = \frac{-N_c}{\pi^2} \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^3 \frac{K_1(\sqrt{-\omega^2 x^2})}{\sqrt{-\omega^2 x^2}}, \quad (5.19)$$

onde x é a coordenada no espaço de Minkowski e $K_1(\sqrt{-\omega^2 x^2})$ é a função de Bessel modificada (também conhecida como função de MacDonald). Enquanto no denominador, temos o condensado de quarks, $\langle \bar{q}(0)q(0) \rangle = \langle \bar{q}q \rangle$, cujo resultado já foi obtido na seção anterior. Assim,

$$\langle \bar{q}(0)q(0) \rangle = \frac{-N_c}{4\pi^2} \rho'_{q,3}. \quad (5.20)$$

¹A virtualidade representa o quanto o quadri-momento de uma partícula está fora da camada de massa.

Logo,

$$Q_q(x) = \frac{1}{\rho'_{q,3}} \int d\omega \rho_q(\omega) 4\omega^3 \frac{K_1(\sqrt{-\omega^2 x^2})}{\sqrt{-\omega^2 x^2}}. \quad (5.21)$$

Uma quantidade relacionada ao condensado não-local é a virtualidade média no vácuo desses quarks, definida como:

$$\lambda_q^2 \equiv \frac{\langle \bar{q} (\partial^2)^n q \rangle}{\langle \bar{q} q \rangle}. \quad (5.22)$$

No denominador de (5.22) temos o condensado de quarks, resultado já conhecido. Portanto, basta analisarmos o numerador:

$$\begin{aligned} \langle \bar{q} (\partial^2)^n q \rangle &= -4iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} e^{-ip \cdot x} (\partial^2)^n e^{ip \cdot x} \\ &= -4iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} e^{-ip \cdot x} (-p^2)^n e^{ip \cdot x} \\ &= -4iN_c \int d\omega \rho_q(\omega) \omega \underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-p^2)^n}{p^2 - \omega^2}}_{I_3}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Resolvendo a integral I_3 a partir do método de regularização *sharp cut-off* (ver apêndice C.2.3), obtemos

$$\langle \bar{q} (\partial^2)^n q \rangle = \frac{(-1)^{n+1} N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho_q(\omega) \omega \left[\frac{(-1)^n n! \Lambda^{2n+2}}{2(n+1)!} + \omega^{2n+2} \log\left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2}\right) + O(\Lambda^2) \right]. \quad (5.24)$$

Usando as condições espectrais:

$$\rho_{q,n} = \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.25)$$

encontramos que

$$\langle \bar{q} (\partial^2)^n q \rangle = \frac{(-1)^{n+1} N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho_q(\omega) \omega^{2n+3} \log(\omega^2) = \frac{(-1)^{n+1} N_c}{4\pi^2} \rho'_{q,2n+3}. \quad (5.26)$$

Inserindo as expressões (5.26) e (5.20) em (5.22), ficamos com

$$\lambda_q^2 = (-1)^n \frac{\rho'_{q,2n+3}}{\rho'_{q,3}}, \quad (5.27)$$

em particular, para $n = 1$, temos

$$\lambda_q^2 = -\frac{\rho'_{q,5}}{\rho'_{q,3}} \implies \begin{cases} \lambda_u^2 = -\frac{\rho'_{u,5}}{\rho'_{u,3}}, \\ \lambda_s^2 = -\frac{\rho'_{s,5}}{\rho'_{s,3}}, \end{cases}$$

enquanto as estimativas no método das Regras de Soma da QCD, sugerem o valor de $\lambda_q^2 \simeq 0,5 \pm 0,1 \text{ GeV}^2$ [44]. A positividade de λ_q^2 e dos momentos $\log \rho'_{u,3}$ e $\rho'_{s,3}$ (ver seção 5.3), exige que

$$\begin{cases} \rho'_{u,5} < 0, \\ \rho'_{s,5} < 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\begin{cases} \rho'_{u,5} < 0, \\ \rho'_{s,5} < 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

5.5 Densidade de Energia no Vácuo

A densidade de energia do vácuo, B , é a energia esperada do vácuo devido à criação espontânea de pares partícula-antipartícula virtuais. No modelo espectral de quarks, podemos calculá-la a partir do tensor energia-momento para um modelo puramente de quarks:

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \bar{q}(x) \frac{i}{2} [\gamma^\mu \partial^\nu + \gamma^\nu \partial^\mu] q(x) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_q(x), \quad (5.30)$$

$\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski (ver apêndice A) e $\mathcal{L}_q(x) = \bar{q}(x)(i\partial - \omega)q(x)$ é a densidade de lagrangiana quiral. Tomando o valor esperado no vácuo de $\theta^{\mu\nu}(x)$ e considerando duas distribuições espectrais, $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$, teremos

$$\begin{aligned} \langle \theta^{\mu\nu}(x) \rangle &= -2iN_c \int d\omega' \rho_u(\omega') \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p}' - \omega'} \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{p}'^\nu + \gamma^\nu \not{p}'^\mu) - \eta^{\mu\nu} (\not{p}' - \omega') \right] \right\} - \\ &\quad - iN_c \int d\omega \rho_s(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p} - \omega} \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \not{p}^\nu + \gamma^\nu \not{p}^\mu) - \eta^{\mu\nu} (\not{p} - \omega) \right] \right\} \\ &= -4iN_c \left[2 \int d\omega' \rho_u(\omega') \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{p'^\mu p'^\nu - \eta^{\mu\nu} (p'^2 - \omega'^2)}{p'^2 - \omega'^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int d\omega \rho_s(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} (p^2 - \omega^2)}{p^2 - \omega^2} \right] \\ &= B\eta^{\mu\nu} + \langle \theta_0^{\mu\nu}(x) \rangle, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde $\theta_0^{\mu\nu}(x)$ é o tensor energia-momento para teoria livre, avaliado com $\rho_u(\omega') = \rho_s(\omega) = \delta(\omega)$. De (5.31), tiramos que a densidade de energia no vácuo, é dada por

$$B = -iN_c \left[2 \int d\omega' \rho_u(\omega') \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\omega'^2}{p'^2 - \omega'^2} + \int d\omega \rho_s(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} \right]. \quad (5.32)$$

Usando o resultado da integral I_1 (apêndice C.2.1) em (5.32), encontramos

$$B = -\frac{N_c}{16\pi^2} \left\{ 2 \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega'^2 \left[\Lambda^2 + \omega'^2 \log \left(\frac{\omega'^2}{\Lambda^2 + \omega'^2} \right) \right] + \int d\omega \rho_s(\omega) \omega^2 \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \right\}.$$

Para que B seja uma quantidade finita, temos as seguintes condições:

$$\left\{ \rho_{u,2} = \rho_{s,2} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega'^2 = \int d\omega \rho_s(\omega) \omega^2 = 0, \right. \quad (5.33)$$

$$\left. \rho_{u,4} = \rho_{s,4} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega'^4 = \int d\omega \rho_s(\omega) \omega^4 = 0, \right. \quad (5.34)$$

resultando em

$$B = -\frac{N_c}{16\pi^2} \left[2 \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega'^4 \log(\omega'^2) + \int d\omega \rho_s(\omega) \omega^4 \log(\omega^2) \right] = -\frac{N_c}{16\pi^2} [2\rho'_{u,4} + \rho'_{s,4}]. \quad (5.35)$$

No caso de quebra espontânea da simetria quiral, espera-se que $\langle \theta_{00} \rangle < \langle \theta_{00} \rangle_0$, ou $B < 0$. De acordo com o método das Regras de Soma da QCD para o charmônio [45, 46], no caso de três sabores, tem-se

$$B = -\frac{9}{32} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle = -(224_{-70}^{+35} \text{ MeV})^4. \quad (5.36)$$

onde α_s é a constante de acoplamento efetiva para interações fortes e $G^2 = G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$, sendo $G_{\mu\nu}^a$ o tensor de intensidade do campo de glúons. Embora o resultado (5.36) apresente uma grande incerteza, podemos afirmar que

$$(2\rho'_{u,4} + \rho'_{s,4}) > 0. \quad (5.37)$$

5.6 Técnica de Calibre

Nesta seção, utilizaremos a técnica de calibre para determinar as funções de vértice, com uma e duas correntes, que satisfaçam as identidades de Ward-Takahashi no contexto de quarks com diferentes sabores.

5.6.1 Vértices com uma corrente

No caso $SU(3)_f$, as funções de vértices vetorial e axial não amputadas são definidas por:

$$\begin{aligned} \Lambda_V^{\mu,a}(p', p) &= \begin{array}{c} \text{---} p \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} p+q \end{array} \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = iS_u(p') \Gamma_V^{\mu,a}(p', p) iS_s(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0 | T \{ J_V^{\mu,a}(0) q(x') \bar{q}(x) \} | 0 \rangle e^{i(p'x' - px)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_A^{\mu,a}(p', p) &= \begin{array}{c} \text{---} p \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} p+q \end{array} \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = iS_u(p') \Gamma_A^{\mu,a}(p', p) iS_s(p) \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0 | T \{ J_A^{\mu,a}(0) q(x') \bar{q}(x) \} | 0 \rangle e^{i(p'x' - px)}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

respectivamente. Em contraste com o resultado obtido em (4.34) e (4.35), agora temos um propagador correspondente a um quark up/down e outro associado a um quark strange. Dessa forma, a identidade de WT para o vértice vetorial se torna

$$(p' - p)_\mu \Lambda_V^{\mu,a}(p', p) = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S_s(p), \quad (5.40)$$

do mesmo modo, para o vértice axial, teremos

$$-(p' - p)_\mu \Lambda_A^{\mu,a}(p', p) = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S_s(p). \quad (5.41)$$

Por meio da técnica de calibre, construímos a solução tentativa para o vértice vetorial, agora com duas distribuições espectrais, na forma

$$\begin{aligned}\Lambda_V^{\mu,a}(p', p) &= iS_u(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p', p)iS_s(p) \\ &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \frac{i}{p' - \omega'} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega}.\end{aligned}\quad (5.42)$$

Inserindo a solução tentativa (5.42) na identidade de WT vetorial, Eq.(5.40), temos

$$(p' - p)_\mu \underbrace{iS_u(p')\Gamma_V^{\mu,a}(p', p)iS_s(p)}_{\Lambda_V^{\mu,a}(p', p)} = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S_s(p). \quad (5.43)$$

Avaliando apenas o lado esquerdo de (5.43), obtemos

$$\begin{aligned}(p' - p)_\mu \Lambda_V^{\mu,a}(p', p) &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \frac{i}{p' - \omega'} (p' - p) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \\ &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \frac{i}{p' - \omega'} \left[p' - \omega' - p + \omega + (\omega' - \omega) \right] \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \\ &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \left[-\frac{\lambda_a}{2} \frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p' - \omega'} \frac{\lambda_a}{2} + \frac{i}{p' - \omega'} (\omega' - \omega) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \right].\end{aligned}$$

Agora, apliquemos as seguinte condições espectrais:

$$\rho_{u,0} = \rho_{s,0} = \int d\omega' \rho_u(\omega') = \int d\omega \rho_s(\omega) = 1. \quad (5.44)$$

Logo,

$$(p' - p)_\mu \Lambda_V^{\mu,a}(p', p) = S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} S_s(p) + \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \frac{i}{p' - \omega'} (\omega' - \omega) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega}. \quad (5.45)$$

Como pode-se verificar, a solução tentativa (5.42) satisfaz a identidade de WT para o vértice vetorial, Eq.(5.40), a menos de um termo, que pode ser utilizado para corrigir tal solução, resultando em:

$$\Lambda_V^{\mu,a}(p', p) = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \frac{i}{p' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \quad (5.46)$$

com $q^\mu = (p' - p)^\mu$. No limite do modelo espectral para apenas uma distribuição [12], obtemos

$$\Lambda_V^{\mu,a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega}, \quad (5.47)$$

que é o resultado esperado (encontrado na seção 4.4.1). Seguindo os mesmos passos, podemos obter uma solução para a função de vértice axial não amputada:

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p', p) = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega')\rho_s(\omega) \frac{i}{p' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega)q^\mu}{q^2} \right) \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega}, \quad (5.48)$$

que também reproduz o resultado esperado no limite do modelo espectral para uma distribuição:

$$\Lambda_A^{\mu,a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p' - \omega} \left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega}. \quad (5.49)$$

A verificação da solução (5.48) se encontra detalhada no apêndice C.3.

5.6.2 Relação Análoga de Goldberger-Treiman para o Káon

Note que o vértice axial não amputado possui um pólo em $q^2 \rightarrow 0$. Próximo a este pólo, o decaimento do káon, caracterizado por (5.48), é dominado pelo acoplamento pseudoescalar e o vértice axial é associado à função de onda do káon (correspondendo ao vértice $K \rightarrow q\bar{q}$) pela relação

$$\begin{aligned} \Lambda_A^{\mu,a}(p', p) \Big|_{q \rightarrow 0} &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \left(-\frac{(\omega' + \omega)q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \\ &= -2f_K \frac{q^\mu}{q^2} \Lambda_K^a(p', p), \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde f_K é a constante de decaimento fraco do káon. De (5.50) encontramos

$$\Lambda_K^a(p', p) = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \quad (5.51)$$

sendo o acoplamento entre os quarks e o káon dado por:

$$g_K(\omega', \omega) = \frac{\omega' + \omega}{2f_K}, \quad (5.52)$$

que é a relação análoga de Goldberger-Treiman para o káon [47].

5.6.3 Vértices com duas correntes

Como vimos na seção 4.4.3, o vértice com duas correntes axiais é definido como:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q) \Lambda_{AA}^{\mu,a;v,b}(p', q'; p, q) &= \int d^4x d^4x' d^4y' d^4y e^{i(q' \cdot x' + p' \cdot y' - q \cdot x - p \cdot y)} \times \\ &\times \langle 0 | T \{ J_A^{\mu,a}(x) J_A^{v,b}(x') q(y) \bar{q}(y') \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Considerando as modificações realizadas para o propagador dos quarks no caso $SU(3)_f$ (seção 5.6.1), a identidade de Ward-Takahashi para o vértice com duas correntes axiais torna-se

$$-iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu,a;v,b}(p', q'; p, q) = -if_{abc} \Lambda_V^{v,c}(p', p) + \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 \Lambda_A^{v,b}(p' - q, p) + \Lambda_A^{v,b}(p', p + q) \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5, \quad (5.54)$$

onde:

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda_V^{v,c}(p', p) &= \frac{1}{2} \int d\omega \left[\rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \right] \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma^v \frac{\lambda_c}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \\ \Lambda_A^{v,b}(p' - q, p) &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - q - \omega'} \left(\gamma^v - \frac{(\omega' + \omega)q^v}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \\ \Lambda_A^{v,b}(p', p + q) &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \left(\gamma^v - \frac{(\omega' + \omega)q^v}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \frac{i}{\not{p} + q - \omega}, \end{aligned} \right.$$

e f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$.

A partir da função de vértice axial-axial (5.53) e das modificações realizadas nos vértices vetorial e axial para uma corrente, podemos construir a seguinte solução para (5.54):

$$\begin{aligned} \Lambda_{AA}^{\mu, a; \nu, b}(p', q'; p, q) &= \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \left\{ \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left[\left(\gamma^\nu - \frac{(\omega' + \omega) q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \times \right. \right. \\ &\quad \times \frac{i}{\not{p} + \not{q} - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega'} \times \\ &\quad \left. \left. \times \left(\gamma^\nu - \frac{(\omega' + \omega) q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} + \frac{(\omega' + \omega) q^\mu q'^\nu}{q^2 q'^2} \left(\frac{\lambda_b \lambda_a}{2} + \frac{\lambda_a \lambda_b}{2} \right) \right] \frac{i}{\not{p} - \omega} \right\}, \quad (5.55) \end{aligned}$$

cuja obtenção está detalhada no apêndice C.4. Avaliando próximo aos pólos do káon (isto é, no limite de q^2 e $q'^2 \rightarrow 0$), verificamos que o vértice axial-axial, Eq.(5.55), pode ser associado à amplitude de espalhamento não amputada², $Kq \rightarrow Kq$, pela relação

$$\Lambda_{AA}^{\mu, a; \nu, b}(p', q'; p, q) \Big|_{q, q' \rightarrow 0} = f_K^2 \frac{q^\mu q'^\nu}{q^2 q'^2} \Lambda_{KK}^{ab}(p', q'; p, q), \quad (5.56)$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda_{KK}^{ab}(p', q'; p, q) &= \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \left\{ \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left[\frac{(\omega' + \omega)}{f_K^2} \left(\frac{\lambda_b \lambda_a}{2} + \frac{\lambda_a \lambda_b}{2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \frac{i}{\not{p} + \not{q} - \omega'} \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega'} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \frac{i}{\not{p} - \omega} \right\}. \quad (5.57) \end{aligned}$$

No limite do modelo espectral de quarks para uma distribuição, obtido pela substituição de $\rho_s(\omega) = \delta(\omega - \omega')$, encontramos

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pi\pi}^{ab}(p', q'; p, q) &= \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left\{ \frac{\omega}{f_\pi^2} \delta_{ab} + \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_b \frac{i}{\not{p} + \not{q} - \omega} \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_a \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega} \frac{\omega}{f_\pi} \gamma_5 \tau_b \right\} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \quad (5.58) \end{aligned}$$

que é exatamente o resultado esperado.

Como vimos, a técnica de calibre nos possibilitou encontrar as funções de vértice não amputadas vetorial e axial com duas distribuições $\rho_u(\omega')$ e $\rho_s(\omega)$. Essas funções de vértice serão fundamentais no cálculo de alguns observáveis físicos para o méson káon.

²Definida como:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q) \Lambda_{KK}^{ab}(p', q'; p, q) = \int d^4x d^4x' e^{i(p' \cdot x' - p \cdot x)} \langle K^a(q') | T \{ q(x) \bar{q}(x') \} | K^b(q) \rangle.$$

5.7 Polarização do Vácuo

A um loop, a contribuição de um par quark-antiquark para a polarização do vácuo é calculada a partir da função de correlação vetorial, que é construída fechando uma linha de quark no vértice vetorial não amputado (5.48), o que resulta em:

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2) &= \text{diagram} = \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J_V^{\mu a}(x) J_V^{\nu b}(0) \} | 0 \rangle \\
 &= -N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Lambda_V^{\mu a}(p+q, p) \gamma^\nu \frac{\lambda_b}{2} \right], \tag{5.59}
 \end{aligned}$$

lembrando que os índices a e b rotulam os geradores do grupo $SU(3)$. Considerando um par quark-antiquark (up-antiup/down-antidown), o tensor de polarização do vácuo pode ser escrito como

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = -N_c \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{(\not{p} + \not{q}) - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \gamma^\nu \frac{\lambda_b}{2} \right].$$

Das propriedades de traço envolvendo matrizes de Gell-Mann (apêndice A), sabemos que

$$\text{Tr} \left[\frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right] = \frac{\delta_{ab}}{2}, \tag{5.60}$$

então,

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = N_c \frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{(\not{p} + \not{q}) + \omega'}{(p+q)^2 - \omega'^2} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2} \right) \frac{\not{p} + \omega}{(p^2 - \omega^2)} \gamma^\nu \right].$$

Realizando o traço no espaço de Dirac (ver apêndice C.5), encontramos

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = N_c \frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{N^{\mu\nu}}{[(p+q)^2 - \omega'^2](p^2 - \omega^2)}, \tag{5.61}$$

$$\text{onde } N^{\mu\nu} = 4 \left[2p^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu - \frac{q^\mu p^\nu}{q^2} (\omega'^2 - \omega^2) - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (\omega\omega' - \omega^2) - \eta^{\mu\nu} (p^2 + p \cdot q - \omega\omega') \right].$$

A partir da parametrização de Feynman, podemos reescrever o denominador da Eq.(5.61):

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(A-B)x + B]^2}. \tag{5.62}$$

Escolhendo $A = (p+q)^2 - \omega'^2$ e $B = p^2 - \omega^2$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[(p^2 + 2p \cdot q + q^2 - \omega'^2 - p^2 + \omega^2)x + p^2 - \omega^2]^2} \\
 &= \int_0^1 dx \frac{1}{[2p \cdot qx + q^2x + p^2 - \omega'^2x + \omega^2x - \omega^2]^2},
 \end{aligned}$$

e completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{\underbrace{[2p \cdot qx + p^2 + q^2 x^2 - q^2 x^2 + q^2 x - \omega'^2 x + \omega^2 x - \omega^2]}_{(p+qx)^2}} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[(p+qx)^2 - \Xi'^2]^2}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde $\Xi'^2 \equiv \omega^2 - (\omega^2 - \omega'^2)x - q^2 x(1-x)$. Com isso,

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = N_c \frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{N^{\mu\nu}}{[(p+qx)^2 - \Xi'^2]^2}. \quad (5.64)$$

Agora, realizemos a seguinte mudança de variáveis: $p + qx \rightarrow p'$

$$\begin{aligned} i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} &= 4N_c \frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2 - \Xi'^2]^2} \left\{ 2(p' - qx)^\mu (p' - qx)^\nu + \right. \\ &\quad \left. + (p' - qx)^\mu q^\nu + q^\mu (p' - qx)^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (p' - qx)^\nu (\omega'^2 - \omega^2) - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (\omega\omega' - \omega^2) - \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\mu\nu} [(p' - qx)^2 + (p' - qx) \cdot q - \omega\omega'] \right\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Como o domínio de integração é simétrico, os termos lineares em p' , no numerador de (5.65), podem ser eliminados. Logo,

$$\begin{aligned} i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} &= 2N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2 - \Xi'^2]^2} \left\{ 2p'^\mu p'^\nu + 2q^\mu q^\nu x^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2q^\mu q^\nu x + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (\omega'^2 - \omega^2) x - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (\omega\omega' - \omega^2) - \eta^{\mu\nu} [p'^2 + (qx)^2 - q^2 x - \omega\omega'] \right\}. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, temos

$$\begin{aligned} i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} &= 2N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2 - \Xi'^2]^2} \left\{ 2p'^\mu p'^\nu - 2q^\mu q^\nu x(1-x) - \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\mu\nu} [p'^2 - q^2 x(1-x) - \omega\omega' - (\omega'^2 - \omega^2) x + (\omega\omega' - \omega^2)] \right\} \\ &= 2N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2 - \Xi'^2]^2} \left\{ 2p'^\mu p'^\nu - 2 \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times q^2 x(1-x) - \eta^{\mu\nu} (p'^2 - \Xi'^2) \right\} \\ &= 2N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \left\{ 2I^{\mu\nu} - 2 \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 x(1-x) I_{\log} - \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\mu\nu} I_{\text{quad}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

As integrais em p' podem ser resolvidas usando o método de regularização dimensional³ (ver apêndice C.6), resultando em:

$$i\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = 2N_c \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \left\{ 2 \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{i\Xi'^2}{(4\pi)^2} (\alpha' + 1) \right] - 2 \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 x(1-x) \frac{i\alpha'}{(4\pi)^2} - \frac{\eta^{\mu\nu} i\Xi'^2}{(4\pi)^2} (\alpha' + 1) \right\}, \quad (5.67)$$

onde $\alpha' = \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi}{\Xi'^2} \right) + O(\epsilon) \right]$.

Logo,

$$\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = \delta_{ab} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \bar{\Pi}_V(q^2)_{u\bar{u}} \quad (5.68)$$

com

$$\bar{\Pi}_V(q^2)_{u\bar{u}} = \frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \int_0^1 dx \left[-q^2 x(1-x) \alpha' \right]. \quad (5.69)$$

Note que (5.68) preserva a invariância de calibre da polarização do vácuo, ou seja,

$$q_\mu \Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{u\bar{u}} = 0. \quad (5.70)$$

A partir do mesmo procedimento, podemos obter a contribuição do par quark-antiquark (strange-antistrange) para a polarização do vácuo:

$$\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)_{s\bar{s}} = \delta_{ab} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \bar{\Pi}_V(q^2)_{s\bar{s}}, \quad (5.71)$$

onde

$$\bar{\Pi}_V(q^2)_{s\bar{s}} = \frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_s(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \int_0^1 dx \left[-q^2 x(1-x) \alpha' \right], \quad (5.72)$$

que também preserva a invariância de calibre.

Os resultados obtidos nesta seção corrigem os apresentados anteriormente em [22], onde relações entre novos momentos espectrais eram necessárias para garantir a satisfação da invariância de calibre para polarização do vácuo. Aqui, verificamos que apenas o uso da técnica de calibre em combinação com a regularização espectral é suficiente para preservar tal invariância, da mesma maneira como ocorre na versão do modelo com uma única distribuição espectral [12].

5.8 Decaimento fraco do Káon

A constante de decaimento fraco do káon é definida a partir do seguinte elemento de matriz (ver seção 3.2):

$$\langle 0 | J_A^{\mu, a}(x) | K^b(q) \rangle = i f_K q^\mu \delta_{ab} e^{-iq \cdot x} \quad (5.73)$$

³Por simplicidade, iremos utilizar a regularização dimensional nas aplicações envolvendo correntes vetoriais e axiais.

e pode ser calculada através da função de correlação axial-axial:

$$\begin{aligned} -i\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q^2) &= \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J_A^{\mu, a}(x) J_A^{\nu, b}(0) \} | 0 \rangle \\ &= -if_K^2 \delta_{ab} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.74)$$

De forma semelhante ao cálculo da polarização, fechamos uma linha de quark no vértice axial não amputado (5.49) e construímos a função de correlação axial-axial, resultando em

$$\begin{aligned} -i\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q^2) &= -N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Lambda_A^{\mu a}(k+q, k) \gamma^\nu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \\ &= -N_c \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\underbrace{\frac{i}{\not{k}' - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right)}_{\Gamma^{\mu, a}} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \underbrace{\frac{i}{\not{k} - \omega} \gamma^\nu \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2}}_{\Gamma^{\nu, b}} \right] \end{aligned}$$

com $k' = k + q$. Note que a expressão acima envolve apenas um vértice completo, $\Gamma^{\mu, a}$, e um vértice nú, $\Gamma^{\nu, b}$. Isto é necessário para evitar a dupla contagem e está em conformidade com o método de Pagels e Stokar [48]. Após calcularmos o traço no espaço de Dirac, realizarmos a parametrização de Feynman e resolvermos as integrais no momento interno k , a partir da regularização dimensional (esses cálculos são apresentados em [22]), obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q^2) &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \int_0^1 dx \alpha \left[-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (\omega'^2 - \omega^2) x - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} (\omega' \omega + \omega^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} q^2 x(1-x) + \eta^{\mu\nu} (\omega'^2 - \omega^2) x + \eta^{\mu\nu} (\omega' \omega + \omega^2) - 2\eta^{\mu\nu} q^2 x(1-x) \right] \\ &= \delta_{ab} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \bar{\Pi}_A(q^2), \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde

$$\bar{\Pi}_A(q^2) = \bar{\Pi}_V(q^2) + \frac{N_c}{8\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) (\omega' \omega + \omega^2) \int_0^1 dx \alpha' \left[\frac{(\omega' - \omega)}{\omega} x + 1 \right].$$

No limite em que $q^2 \rightarrow 0$, temos

$$\Pi_{AA}^{\mu a, \nu b}(q^2) = \frac{N_c}{8\pi^2} \delta_{ab} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) (\omega' \omega + \omega^2) I(0, \omega, \omega'),$$

$$\text{com } I(0, \omega, \omega') = \int_0^1 dx \left\{ \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log \left(\frac{4\pi}{\omega^2 + (\omega'^2 - \omega^2)x} \right) \right] \left(\frac{\omega' - \omega}{\omega} x + 1 \right) \right\}.$$

Devido à quebra espontânea da simetria quiral, temos um pólo na função de correlação axial-axial com o resíduo proporcional ao quadrado da constante de decaimento fraco do káon, resultando em

$$f_K^2 = \frac{N_c}{8\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) (\omega' \omega + \omega^2) I(0, \omega, \omega').$$

Resolvendo a integral $I(0, \omega, \omega')$, teremos

$$f_K^2 = \frac{-N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{(4\omega'^3 \omega + 2\omega'^4) \log(\omega'^2) - (4\omega^3 \omega' + 2\omega^4) \log(\omega^2)}{8(\omega'^2 - \omega^2)} - \frac{(\omega'^2 + 4\omega' \omega + \omega^2)}{8} + \frac{(\omega' + \omega)^2 (\epsilon \gamma_E - \epsilon \log(4\pi) - 2)}{4\epsilon} \right\}. \quad (5.76)$$

A finitude do valor para f_K^2 exige as seguintes condições espectrais:

$$\left\{ \rho_{u,1} = \rho_{\bar{s},1} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega' = \int d\omega \rho_{\bar{s}}(\omega) \omega = 0, \right. \quad (5.77)$$

$$\left. \rho_{u,2} = \rho_{\bar{s},2} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega'^2 = \int d\omega \rho_{\bar{s}}(\omega) \omega^2 = 0. \right. \quad (5.78)$$

Logo,

$$f_K^2 = \frac{-N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{1}{4} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{1}{2} \frac{[\omega'^3 \omega \log(\omega'^2) - \omega^3 \omega' \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}.$$

Definindo novos momentos espectrais como:

$$\bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{40} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}, \quad (5.79)$$

$$\bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{31} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^3 \omega \log(\omega'^2) - \omega' \omega^3 \log(\omega^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}, \quad (5.80)$$

teremos

$$f_K^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \left[\frac{1}{4} \bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{40} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{31} \right]. \quad (5.81)$$

O valor da constante de decaimento do káon pode ser usado para determinar a relação entre $\bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{40}$ e $\bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{31}$,

$$\left[\frac{1}{4} \bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{40} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{31} \right] < 0. \quad (5.82)$$

Tomando o limite do modelo original (para apenas uma distribuição espectral) na Eq.(5.81), encontramos

$$f_\pi^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 \log(\omega^2) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_2, \quad (5.83)$$

que coincide com o resultado apresentado por [12] para o decaimento fraco do pión. Entretanto, no limite de sabores iguais, $\rho_u(\omega') = \rho_s(\omega)$, obtemos uma nova expressão para o decaimento fraco do pión:

$$f_\pi^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{u}}(\omega) \left\{ \frac{1}{4} \frac{[\omega'^4 \log(\omega'^2) - \omega^4 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{1}{2} \frac{[\omega \omega'^3 \log(\omega'^2) - \omega' \omega^3 \log(\omega^2)]}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\} \\ = -\frac{N_c}{4\pi^2} \left[\frac{1}{4} \bar{\sigma}'_{u\bar{u}}{}^{40} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}'_{u\bar{u}}{}^{31} \right]. \quad (5.84)$$

5.9 Função de correlação pseudoescalar

Vimos na seção 5.6.2 que o acoplamento $K \rightarrow q\bar{q}$ pode ser obtido a partir do vértice axial não amputado, avaliado próximo ao pólo do káon:

$$\begin{aligned}\Lambda_A^{\mu a}(p', p)\Big|_{q \rightarrow 0} &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \left(-\frac{(\omega' + \omega)q^\mu}{q^2} \right) \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \\ &= -2f_K \frac{q^\mu}{q^2} \Lambda_K^a(p', p),\end{aligned}\quad (5.85)$$

resultando em

$$\Lambda_K^a(p', p) = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega'} \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \quad (5.86)$$

onde $p' = p + q$ e f_K é a constante de decaimento fraco do káon. Para construir a função de correlação pseudoescalar, conforme apresentada em [21], precisamos fechar uma linha de quark no vértice do káon, $\Lambda_K^a(p', p)$:

$$\begin{aligned}\Pi_{PS}(q^2) &= \text{Diagrama: Um círculo com um quark (ponto) no topo e um antiquark (ponto) no fundo. Uma linha de quark entra do lado esquerdo com momento q, e outra linha de quark sai do lado direito com momento q. Uma linha de antiquark entra do lado inferior com momento p, e outra linha de antiquark sai do lado superior com momento p+q.} \\ &= \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} + q - \omega'} \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} \gamma^5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \\ &= - \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{(\not{p} + q + \omega')}{(p+q)^2 - \omega'^2} \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{(\not{p} + \omega)}{(p^2 - \omega^2)} \gamma^5 \frac{\lambda_b}{2} \right].\end{aligned}\quad (5.87)$$

Tomando o traço em (5.87) (ver apêndice C.5), obtemos:

$$\Pi_{PS}(q^2) = -\frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{N_{PS}}{[(p+q)^2 - \omega'^2](p^2 - \omega^2)}, \quad (5.88)$$

onde $N_{PS} = -4(p^2 + p \cdot q - \omega' \omega)$. Aplicando a mesma parametrização utilizada no cálculo do tensor de polarização do vácuo, podemos reescrever (5.88) como

$$\Pi_{PS}(q^2) = \frac{\delta_{ab}}{2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4(p^2 + p \cdot q - \omega' \omega)}{[(p+qx)^2 - \Xi'^2]^2} \quad (5.89)$$

com $\Xi'^2 \equiv \omega^2 - (\omega^2 - \omega'^2)x - q^2 x(1-x)$.

Realizando uma mudança de variáveis: $p + qx \rightarrow p'$, teremos

$$\begin{aligned}\Pi_{PS}(q^2) &= 2\delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{2f_K} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{(p' - qx)^2 + (p' - qx) \cdot q - \omega' \omega}{(p'^2 - \Xi'^2)^2} \\ &= \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{(p'^2 + p' \cdot (q - 2qx) + q^2 x^2 - q^2 x - \omega' \omega)}{(p'^2 - \Xi'^2)^2}.\end{aligned}$$

Por paridade, verificamos que os termos lineares em p' são zero:

$$\int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{p' \cdot (q - 2qx)}{(p'^2 - \Xi'^2)^2} = 0. \quad (5.90)$$

Assim, ficamos com

$$\Pi_{PS}(q^2) = \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{(p'^2 + q^2 x^2 - q^2 x - \omega' \omega)}{(p'^2 - \Xi'^2)^2}. \quad (5.91)$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(q^2) &= \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \int_0^1 dx \left\{ \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(p'^2 - \Xi'^2)} + \frac{\Xi'^2}{(p'^2 - \Xi'^2)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 x^2 - q^2 x - \omega' \omega)}{(p'^2 - \Xi'^2)^2} \right\} \\ &= \delta_{ab} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \int_0^1 dx \left\{ I_{\text{quad}} + [\Xi'^2 + q^2 x(x-1) - \omega' \omega] I_{\text{log}} \right\}, \quad (5.92) \end{aligned}$$

e resolvendo as integrais no momento interno p' , a partir da regularização dimensional (consulte apêndice C.6), obtemos

$$\Pi_{PS}(q^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega' + \omega)}{f_K} \underbrace{\int_0^1 dx \left\{ \Xi'^2 (2\alpha' + 1) + [q^2 x(x-1) - \omega' \omega] \alpha' \right\}}_{I_{PS}(q)}, \quad (5.93)$$

$$\text{onde } \alpha' = \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi}{\Xi'^2} \right) + O(\epsilon) \right].$$

Após resolvermos a integral $I_{PS}(q)$, por meio de uma expansão para pequenos momentos, encontramos

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(q^2) &= \frac{i}{8\pi^2 f_K} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{(\omega'^3 + \omega^3)(\epsilon - \epsilon\gamma_E + \epsilon \log(4\pi) + 2)}{2\epsilon} - \frac{\omega'^3 \log(\omega'^2)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega^3 \log(\omega^2)}{2} + \frac{q^2 [(2\omega'^3 \omega + \omega'^4) \log(\omega'^2) - (2\omega^3 \omega' + \omega^4) \log(\omega^2)]}{4(\omega'^2 - \omega^2)(\omega' + \omega)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^2 (\omega'^3 + 3\omega'^2 \omega - 3\omega' \omega^2 - \omega^3)}{8(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{q^2 (\omega' + \omega)(\epsilon\gamma_E - \epsilon \log(4\pi) - 2)}{4\epsilon} + O(q^4) \right\}. \quad (5.94) \end{aligned}$$

Aplicando as condições espectrais:

$$\rho_{u,n} = \rho_{\bar{s},n} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega'^n = \int d\omega \rho_{\bar{s}}(\omega) \omega^n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.95)$$

podemos tomar o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, com segurança. Assim, $\Pi_{PS}(q)$ se torna

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(q^2) = & \frac{i}{8\pi^2 f_K} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ -\frac{\omega'^3 \log(\omega'^2)}{2} - \frac{\omega^3 \log(\omega^2)}{2} - \frac{q^2 (\omega'^2 \omega - \omega' \omega^2)}{4(\omega'^2 - \omega^2)} + \right. \\ & + \frac{q^2 [\omega'^3 \log(\omega'^2) - \omega^3 \log(\omega^2)]}{4(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{q^2 [\omega'^4 \omega \log(\omega'^2) + \omega^4 \omega' \log(\omega^2)]}{4(\omega'^2 - \omega^2)^2} - \\ & \left. - \frac{q^2 [\omega'^3 \omega^2 \log(\omega'^2) + \omega^3 \omega'^2 \log(\omega^2)]}{4(\omega'^2 - \omega^2)^2} + O(q^4) \right\}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Com a introdução de novos momentos espectrais definidos por:

$$\bar{\sigma}_{u\bar{s}}^{21} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^2 \omega - \omega' \omega^2}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}, \quad (5.97)$$

$$\bar{\sigma}_{u\bar{s}}^{30} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^3 \log(\omega'^2) - \omega^3 \log(\omega^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)} \right\}, \quad (5.98)$$

$$\chi_{u\bar{s}}^{32} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^3 \omega^2 \log(\omega'^2) + \omega^3 \omega'^2 \log(\omega^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right\}, \quad (5.99)$$

$$\chi_{u\bar{s}}^{41} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^4 \omega \log(\omega'^2) + \omega^4 \omega' \log(\omega^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right\}, \quad (5.100)$$

⋮

o resultado (5.96) pode ser reescrito como

$$\Pi_{PS}(q^2) = \frac{i}{8\pi^2 f_K} \left\{ -\frac{1}{2} \rho'_{u,3} - \frac{1}{2} \rho'_{\bar{s},3} + \frac{q^2}{4} \left(\bar{\sigma}_{u\bar{s}}^{30} - \bar{\sigma}_{u\bar{s}}^{21} + \chi_{u\bar{s}}^{41} - \chi_{u\bar{s}}^{32} \right) + O(q^4) \right\}, \quad (5.101)$$

que no limite de sabores iguais, $\rho_{\bar{s}}(\omega) = \rho_{\bar{u}}(\omega)$, fornece a função de correlação para o pión:

$$\bar{\Pi}_{PS}(q^2) = \frac{i}{8\pi^2 f_\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \rho'_{u,3} - \frac{1}{2} \rho'_{\bar{u},3} + \frac{q^2}{4} \left(\bar{\sigma}_{u\bar{u}}^{30} - \bar{\sigma}_{u\bar{u}}^{21} + \chi_{u\bar{u}}^{41} - \chi_{u\bar{u}}^{32} \right) + O(q^4) \right\}. \quad (5.102)$$

Podemos também usar $\rho_{\bar{s}}(\omega) = \delta(\omega' - \omega)$ em (5.96), o que resulta em uma expressão para função de correlação pseudoescalar com apenas uma distribuição espectral:

$$\bar{\Pi}_{PS}(q^2) = \frac{i}{8\pi^2 f_\pi} \left\{ -\rho'_3 + \frac{q^2}{2} \rho'_1 - \frac{q^4}{12} \rho_{-1} + O(q^6) \right\}. \quad (5.103)$$

A função $\Pi_{PS}(q^2)$, avaliada em $q^2 = m_{PS}^2$, pode ser empregada na obtenção de uma expressão para a massa do méson pseudo-escalar como faremos a seguir.

5.9.1 Massa do káon

A partir da aproximação de fase aleatória (RPA - Random Phase Approximation) é possível verificar que o propagador do káon corrigido, na ordem de um loop, é dado por

$$\begin{aligned} \text{---} \longrightarrow \text{---} \circlearrowleft \text{---} \longrightarrow \text{---} &= \frac{i}{q^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{i\Pi_{PS}(q^2)}{q^2}} \right) = \frac{i}{q^2 - i\Pi_{PS}(q^2)}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

O pólo do propagador, identificado como a massa do káon, é portanto:

$$m_K^2 - i\Pi_{PS}(m_K^2) = 0. \quad (5.105)$$

Realizando as devidas substituições, encontramos que

$$m_K^2 = \frac{2(\rho'_{u,3} + \rho'_{\bar{s},3})}{32\pi^2 f_K + (\bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{30} - \bar{\sigma}'_{u\bar{s}}{}^{21} + \chi'_{u\bar{s}}{}^{41} - \chi'_{u\bar{s}}{}^{32})}, \quad (5.106)$$

onde consideramos Π_{PS} até ordem q^2 . No caso de quarks com massas iguais teremos, para a determinação da massa do pión,

- com duas distribuições espectrais:

$$m_\pi^2 = \frac{2(\rho'_{u,3} + \rho'_{\bar{u},3})}{32\pi^2 f_\pi + (\bar{\sigma}'_{u\bar{u}}{}^{30} - \bar{\sigma}'_{u\bar{u}}{}^{21} + \chi'_{u\bar{u}}{}^{41} - \chi'_{u\bar{u}}{}^{32})}, \quad (5.107)$$

- e no limite de apenas uma distribuição espectral:

$$m_\pi^2 = \frac{2\rho'_3}{16\pi^2 f_\pi + \rho'_1}. \quad (5.108)$$

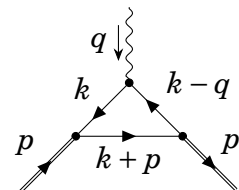
5.10 Fator de Forma Eletromagnético do Káon

O fator de forma eletromagnético desempenha um papel importante na nossa compreensão da estrutura hadrônica. Ele pode fornecer informações sobre a distribuição de carga e magnetização dos hádrons em termos de graus de liberdade de quarks (e glúons).

Para o káon carregado positivamente, $K^+ = u\bar{s}$, o fator de forma eletromagnético é definido como:

$$\begin{aligned} \langle K^+(p') | J_\mu^{em} | K^+(p) \rangle &= e\Gamma_\mu^{em}(p', p) \\ &= (p'_\mu + p_\mu) eF_{K^+}^{em}(q^2), \end{aligned} \quad (5.109)$$

com $q = p' - p$. O vértice eletromagnético pode ser construído fechando a linha fermiônica na amplitude de espalhamento não amputada, $Kq \rightarrow Kq$, e conectando com o vértice eletromagnético:

$$\Gamma_\mu^{em}(p', p) = \text{Diagrama} + [b \leftrightarrow a] = N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Lambda_{KK}^{ba}(k-q, p'; k, p) \hat{Q} \gamma_\mu \right], \quad (5.110)$$


onde $\hat{Q} = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ é a matriz de carga eletromagnética dos quarks e, na representação diagramática, $[b \leftrightarrow a]$ denota o termo cruzado. Logo, inserindo o resultado (5.57) em (5.110) e

tomando o limite quiral, encontramos que

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^{em}(p', p) &= \frac{N_c}{2} \int d\omega' d\omega \left[\frac{1}{3} \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) + \frac{2}{3} \rho_u(\omega) \rho_{\bar{s}}(\omega') \right] \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \omega} \times \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_5 \frac{i}{\not{k} + \not{p} - \omega'} \gamma_5 \frac{i}{\not{k} - \not{q} - \omega} \right] \\ &= -iN_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{k} + \omega) \gamma_5 (\not{k} + \not{p} + \omega') \gamma_5 (\not{k} - \not{q} + \omega)]}{(k^2 - \omega^2) [(k + p)^2 - \omega'^2] [(k - q)^2 - \omega^2]},\end{aligned}$$

onde usamos a notação $\rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) + \frac{2}{3} \rho_u(\omega) \rho_{\bar{s}}(\omega') \right]$. Em função de sua complexidade, e considerando-se a originalidade do resultado ora apresentado, vamos desenvolver em detalhes a obtenção deste fator de forma eletromagnético do káon. Realizando o traço no espaço de Dirac (ver apêndice C.5), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^{em}(p', p) &= -iN_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ &\quad \times \frac{N_\mu}{(k^2 - \omega^2) [(k + p)^2 - \omega'^2] [(k - q)^2 - \omega^2]},\end{aligned}\tag{5.111}$$

onde $N_\mu = 4[-k_\mu k^2 + k^2(p_\mu + q_\mu) - k \cdot (p_\mu q - q_\mu p) + k_\mu(p \cdot q - 2k \cdot p - \omega^2 + 2\omega\omega') - p_\mu \omega^2 - q_\mu \omega\omega']$.

O denominador de (5.111) pode ser simplificado usando a parametrização de Feynman, cuja expressão geral é dada por:

$$\frac{1}{ABC} = 2! \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)}{[\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C]^3},\tag{5.112}$$

realizando as seguintes mudanças de variáveis em (5.112): $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = 1 - x - y$, temos

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(A - C)x + (B - C)y + C]^3}.\tag{5.113}$$

Assim, o denominador de (5.111) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(p^2 + 2p \cdot k - \omega'^2 + \omega^2)x + (q^2 - 2q \cdot k)y + (k^2 - \omega^2)]^3},$$

onde escolhemos: $A = (k + p)^2 - \omega'^2$, $B = (k - q)^2 - \omega^2$ e $C = k^2 - \omega^2$. Completando quadrados, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(k + px - qy)^2 - p^2 x^2 + 2p \cdot qxy - q^2 y^2 + p^2 x + q^2 y + (\omega^2 - \omega'^2)x - \omega^2]^3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(k + px - qy)^2 - \Xi^2]^3}\end{aligned}\tag{5.114}$$

com $\Xi^2 \equiv \omega^2 - (\omega^2 - \omega'^2)x + (px - qy)^2 - p^2x - q^2y$.

Logo,

$$\Gamma_\mu^{em}(p', p) = -i2N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_\mu}{[(k + px - qy)^2 - \Xi^2]^3}.$$

Podemos fazer uma translação e introduzir uma nova variável, $k' = k + px - qy$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{em}(p', p) = & -i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \times \\ & \times \left[-(k' - px + qy)_\mu (k' - px + qy)^2 + (k' - px + qy)^2 (p + q)_\mu - (k' - px + qy) \cdot (p_\mu q - q_\mu p) + \right. \\ & \left. + (k' - px + qy)_\mu (p \cdot q - \omega^2 + 2\omega\omega') - 2p \cdot (k' - px + qy) (k' - px + qy)_\mu - p_\mu \omega^2 - q_\mu \omega\omega' \right]. \end{aligned}$$

Como o denominador da expressão acima é uma função par, podemos ignorar os termos no numerador que são lineares ou cúbicos em k' . Dessa forma, ficamos com

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{em}(p', p) = & -i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \times \\ & \times \left\{ -k'_\mu [2k'(-px + qy)] - (-px + qy)_\mu [k'^2 + (px - qy)^2] + [k'^2 + (px - qy)^2] \times \right. \\ & \times (p + q)_\mu - (-px + qy) \cdot (p_\mu q - q_\mu p) + (-px + qy)_\mu (p \cdot q - \omega^2 + 2\omega\omega') - 2k'_\mu k' \cdot p - \\ & \left. - 2p \cdot (-px + qy) (-px + qy)_\mu - p_\mu \omega^2 - q_\mu \omega\omega' \right\}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Rearranjando o numerador:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{em}(p', p) = & -i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \times \\ & \times \left\{ -2k'_\mu k'_\nu (p - px + qy)^\nu + k'^2 [p(1+x) + q(1-y)]_\mu + (p + q)_\mu (px - qy)^2 - \right. \\ & - (-px + qy)_\mu [(px - qy)^2 - p \cdot q + \omega^2 - 2\omega\omega' + 2p \cdot (-px + qy)] - \\ & \left. - p_\mu (-p \cdot qx + q^2y + \omega^2) + q_\mu (-p^2x + p \cdot qy - \omega\omega') \right\} \\ = & i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \times \\ & \times \left\{ 2k'_\mu k'_\nu (p - px + qy)^\nu - k'^2 [p(1+x) + q(1-y)]_\mu + \Delta_\mu \right\}, \end{aligned} \quad (5.116)$$

onde: $\Delta_\mu \equiv (-px + qy)_\mu [(px - qy)^2 - p \cdot q + \omega^2 - 2\omega\omega' + 2p \cdot (-px + qy)] - (p + q)_\mu (px - qy)^2 + p_\mu (-p \cdot qx + q^2y + \omega^2) - q_\mu (-p^2x + p \cdot qy - \omega\omega')$.

Assim, temos as seguintes integrais em k' para serem resolvidas:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{em}(p', p) &= i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \Delta_\mu \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \right. \\
&\quad \left. - [p(1+x) + q(1-y)]_\mu \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'^2}{[k'^2 - \Xi^2]^3} + 2(p - px + qy)^\nu \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'_\mu k'_\nu}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \right\} \\
&= i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \Delta_\mu \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \right. \\
&\quad \left. - [p(1+x) + q(1-y)]_\mu \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^2} + \frac{\Xi^2}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \right) + 2(p - px + qy)^\nu \times \right. \\
&\quad \left. \times \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'_\mu k'_\nu}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \right\} \\
&= i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \Delta_\mu I_{\text{conv}} + 2(p - px + qy)^\nu I_{\mu\nu, 3} \right. \\
&\quad \left. - [p(1+x) + q(1-y)]_\mu (I_{\log} + \Xi^2 I_{\text{conv}}) \right\}. \tag{5.117}
\end{aligned}$$

Usando a regularização dimensional para resolver as integrais I_{\log} , I_{conv} e $I_{\mu\nu}$ (ver apêndice C.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{em}(p', p) &= i8N_c \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{\Delta_\mu}{2\Xi^2} + 2(p - px + qy)^\nu \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{i\alpha}{(4\pi)^2} \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} - [p(1+x) + q(1-y)]_\mu \left(\frac{i\alpha}{(4\pi)^2} - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \right) + O(\epsilon) \right\} \\
&= -\frac{8N_c}{(4\pi)^2} \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ -\frac{\Delta_\mu}{2\Xi^2} + (p - px + qy)^\nu \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\eta_{\mu\nu}\alpha}{2} - [p(1+x) + q(1-y)]_\mu \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{5.118}
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon) \right]$.

Por outro lado, de (5.109) temos que

$$e\Gamma_\mu^{em}(p', p) = (p' + p)_\mu eF_{K^+}^{em}(q^2);$$

multiplicando ambos os lados por $(p' + p)^\mu$, encontramos

$$(p' + p)^\mu \Gamma_\mu^{em}(p', p) = (p' + p)^2 F_{K^+}^{em}(q^2).$$

Agora, basta isolarmos $F_{K^+}^{em}(q^2)$, obtendo

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= \frac{(p' + p)^\mu \Gamma_\mu^{em}(p', p)}{(p' + p)^2} \\ &= \frac{(p' + p)^\mu \Gamma_\mu^{em}(p', p)}{(p'^2 + p^2 + 2p' \cdot p)}. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Ressalva-se, porém, que o fator de forma é calculado *on-shell* (na camada de massa), e assim temos que $p'^2 = p^2 = m_K^2$, ou seja,

$$F_{K^+}^{em}(q^2) = \frac{(p' + p)^\mu \Gamma_\mu^{em}(p', p)}{(4m_K^2 - q^2)}, \quad (5.120)$$

onde usamos que $q^2 = (p' - p)^2 = 2m_K^2 - 2p' \cdot p \Rightarrow 2p' \cdot p = 2m_K^2 - q^2$. Por simplicidade, é conveniente reescrevermos o quadrivector $(p' + p)^\mu$ como $(2p + q)^\mu$. Com isso, inserindo (5.118) em (5.120) e realizando as devidas simplificações, encontramos

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= -\frac{1}{(4m_K^2 - q^2)} \frac{8N_c}{(4\pi)^2} \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega' + \omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ -(2p + q)^\mu \frac{\Delta_\mu}{2\Xi^2} + \right. \\ &\quad \left. + (2p + q)^\mu (p - px + qy)_\mu \frac{\alpha}{2} - (2p + q)^\mu [p(1+x) + q(1-y)]_\mu \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Realizemos as seguintes operações separadamente:

\rightsquigarrow primeira parcela:

$$\begin{aligned} (2p + q)^\mu \Delta_\mu &= (2p + q)^\mu (-px + qy)_\mu [(px - qy)^2 - p \cdot q + \omega^2 - 2\omega\omega' - 2p \cdot (px - qy)] + (2p + q)^\mu p_\mu \times \\ &\quad \times (-p \cdot qx + q^2y + \omega^2) - (2p + q)^\mu (p + q)_\mu (px - qy)^2 - (2p + q)^\mu q_\mu (p \cdot qy - p^2x - \omega\omega') \\ &= \left[-(2m_K^2 + \underbrace{q \cdot p}_{-\frac{q^2}{2}})x + \underbrace{(2p \cdot q + q^2)}_0 y \right] [(px - qy)^2 - p \cdot q + \omega^2 - 2\omega\omega' - 2p \cdot (px - qy)] + \\ &\quad + \underbrace{(2p^2 + q \cdot p)}_{2m_K^2 - \frac{q^2}{2}} (-p \cdot qx + q^2y + \omega^2) - \underbrace{(2p^2 + q \cdot p)}_{2m_K^2 - \frac{q^2}{2}} (px - qy)^2 - \underbrace{(2p \cdot q + q^2)}_0 (\dots)^2 - \\ &\quad - \underbrace{(2p \cdot q + q^2)}_0 (-p^2x + p \cdot qy - \omega\omega') \\ &= \frac{1}{2} (4m_K^2 - q^2) \left\{ -x [(px - qy)^2 - p \cdot q + \omega^2 - 2\omega\omega' - 2p \cdot (px - qy)] - (px - qy)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (-p \cdot qx + q^2y + \omega^2) \right\}; \end{aligned} \quad (5.122)$$

↪ segunda e terceira parcelas, respectivamente:

$$\begin{aligned} (2p+q)^\mu (p-px+qy)_\mu &= (2p^2+q\cdot p) - (2p^2+q\cdot p)x + \underbrace{(2p\cdot q+q^2)}_0 y \\ &= \frac{1}{2}(4m_K^2 - q^2)(1-x), \end{aligned} \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned} (2p+q)^\mu [p(1+x)+q(1-y)]_\mu &= (2p^2+q\cdot p)(1+x) + \underbrace{(2p\cdot q+q^2)}_0 (1-y) \\ &= \frac{1}{2}(4m_K^2 - q^2)(1+x). \end{aligned} \quad (5.124)$$

Inserindo esses resultados em (5.121) e fatorando o termo $\frac{1}{2}(4m_K^2 - q^2)$, teremos

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= -\frac{4N_c}{(4\pi)^2} \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega'+\omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{(px-qy)^2 - (q^2y+\omega^2)}{2\Xi^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x[(px-qy)^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' - 2p\cdot(px-qy)]}{2\Xi^2} + \underbrace{\frac{\alpha(1-x)}{2} - (1+x)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}[-\alpha(1+3x)+1+x]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Usando $(px-qy)^2 = p^2x^2 + q^2y^2 - 2p\cdot qxy = m_K^2x^2 + q^2y(x+y)$, obtemos

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= -\frac{2N_c}{(4\pi)^2} \int d\omega' d\omega \rho_{u\bar{s}}^+(\omega, \omega') \frac{(\omega'+\omega)^2}{f_K^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{m_K^2x^2 + q^2y(x+y) - q^2y - \omega^2}{\Xi^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x[m_K^2x^2 + q^2y(x+y) + \omega^2 - 2\omega\omega' - 2m_K^2x - q^2y]}{\Xi^2} - \alpha(1+3x) + 1+x \right\} \end{aligned} \quad (5.126)$$

com $\Xi^2 = \omega^2 - (\omega^2 - \omega'^2)x + (px-qy)^2 - p^2x - q^2y = \omega^2 - (\omega^2 - \omega'^2)x - m_K^2x(1-x) + q^2y(x+y) - q^2y$.

Após resolvermos as integrais nos parâmetros de Feynman, por meio de uma expansão para pequenos momentos, encontramos

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= -\frac{N_c}{4\pi^2 f_K^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \frac{(\omega'+\omega)^2}{2} I_K(q^2, \omega', \omega) \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2 f_K^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ -\frac{(2\omega'^3\omega + \omega'^4) \log(\omega'^2) - (2\omega^3\omega' + \omega^4) \log(\omega^2)}{4(\omega'^2 - \omega^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega'^2 + 4\omega'\omega + \omega^2)}{8} - \frac{(\omega'+\omega)^2(\epsilon\gamma_E - \epsilon \log(4\pi) - 2)}{4\epsilon} + \frac{q^2}{72} - \frac{q^2[\omega'^3\omega + 5\omega'\omega^3]}{24(\omega'^2 - \omega^2)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^2[\omega'^2\omega^2 + \omega^4]}{24(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \frac{q^2[\omega'^6 + 3\omega'^5\omega + 6\omega'\omega^5 + 2\omega^6]}{36(\omega'^2 - \omega^2)^3} [\log(\omega'^2) - \log(\omega^2)] + O(q^4) \right\}. \end{aligned}$$

Para garantir a finitude de $F_{K^+}^{em}(q^2)$, aplicamos as condições espectrais:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{u,1} = \rho_{\bar{s},1} &= \int d\omega' \rho_u(\omega')\omega' = \int d\omega \rho_{\bar{s}}(\omega)\omega = 0, \end{aligned} \right. \quad (5.127)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{u,2} = \rho_{\bar{s},2} &= \int d\omega' \rho_u(\omega')\omega'^2 = \int d\omega \rho_{\bar{s}}(\omega)\omega^2 = 0, \end{aligned} \right. \quad (5.128)$$

resultando em

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= \frac{N_c}{4\pi^2 f_K^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ -\frac{(2\omega'^3\omega + \omega'^4) \log(\omega'^2) - (2\omega^3\omega' + \omega^4) \log(\omega^2)}{4(\omega'^2 - \omega^2)} + \right. \\ &+ \frac{q^2}{72} - \frac{q^2 [\omega'^3\omega + 5\omega'\omega^3]}{24(\omega'^2 - \omega^2)^2} - \frac{q^2 [\omega'^2\omega^2 + \omega^4]}{24(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \frac{q^2 [\omega'^6 + 3\omega'^5\omega + 6\omega'\omega^5 + 2\omega^6]}{36(\omega'^2 - \omega^2)^3} \times \\ &\left. \times [\log(\omega'^2) - \log(\omega^2)] + O(q^4) \right\}. \end{aligned}$$

Definindo novos momentos espectrais como:

$$\sigma_{u\bar{s}}^{ij} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^i \omega^j}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} \right\}, \quad i, j \geq 0 \quad (5.129)$$

$$\sigma_{u\bar{s}}'^{ij} = \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{\omega'^i \omega^j}{(\omega'^2 - \omega^2)^3} [\log(\omega'^2) - \log(\omega^2)] \right\}, \quad i, j \geq 0 \quad (5.130)$$

⋮

teremos

$$\begin{aligned} F_{K^+}^{em}(q^2) &= 1 + \frac{N_c}{4\pi^2 f_K^2} \left\{ \frac{q^2}{3} \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{8} (\sigma_{u\bar{s}}^{31} + 5\sigma_{u\bar{s}}^{13} + \sigma_{u\bar{s}}^{22} + \sigma_{u\bar{s}}^{04}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{12} (\sigma_{u\bar{s}}'^{60} + 3\sigma_{u\bar{s}}'^{51} + 6\sigma_{u\bar{s}}'^{15} + 2\sigma_{u\bar{s}}'^{06}) \right] + O(q^4) \right\}, \end{aligned} \quad (5.131)$$

onde $f_K^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \left[\frac{1}{4} \bar{\sigma}_{u\bar{s}}'^{40} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{u\bar{s}}'^{31} \right]$. Observe que para $q^2 = 0$, temos $F_{K^+}^{em}(0) = 1$ (como esperado, se a transferência de quadri-momento ao quadrado for zero, nenhuma subestrutura será “detectada” pelo fóton, e portanto, o fator de forma será igual à carga total do méson). A partir do resultado (5.131), podemos determinar o raio quadrático médio para o káon:

$$\begin{aligned} \langle r_K^2 \rangle &= 6 \frac{dF_{K^+}^{em}}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = \frac{N_c}{4\pi^2 f_K^2} \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_{\bar{s}}(\omega) \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \frac{[\omega'^3\omega + 5\omega'\omega^3 + \omega'^2\omega^2 + \omega^4]}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{6} \frac{[\omega'^6 + 3\omega'^5\omega + 6\omega'\omega^5 + 2\omega^6]}{(\omega'^2 - \omega^2)^3} [\log(\omega'^2) - \log(\omega^2)] \left. \right\} \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2 f_K^2} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{4} (\sigma_{u\bar{s}}^{31} + 5\sigma_{u\bar{s}}^{13} + \sigma_{u\bar{s}}^{22} + \sigma_{u\bar{s}}^{04}) + \frac{1}{6} (\sigma_{u\bar{s}}'^{60} + 3\sigma_{u\bar{s}}'^{51} + 6\sigma_{u\bar{s}}'^{15} + 2\sigma_{u\bar{s}}'^{06}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Tomando $\rho_{\bar{s}}(\omega) = \delta(\omega' - \omega)$ nas expressões (5.131) e (5.132), reproduzimos exatamente os resultados para o fator de forma e o raio quadrático médio do pión apresentados no modelo para apenas uma distribuição espectral [12]:

$$F_{\pi^+}^{em}(q^2) = 1 + \frac{N_c}{4\pi^2 f_\pi^2} \left[\frac{q^2}{6} \rho_0 + \frac{q^4}{60} \rho_{-2} + \frac{q^6}{420} \rho_{-4} + O(q^8) \right] \quad (5.133)$$

e

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \frac{N_c}{4\pi^2 f_\pi^2},$$

com $f_\pi^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_2$. No limite de sabores iguais, isto é, fazendo $\rho_{\bar{s}}(\omega) = \rho_{\bar{u}}(\omega)$ em (5.131), encontramos uma nova expressão para o fator de forma do pión:

$$F_{\pi^+}^{em}(q^2) = 1 + \frac{N_c}{4\pi^2 f_\pi^2} \left\{ \frac{q^2}{3} \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{8} (\sigma_{u\bar{u}}^{31} + 5\sigma_{u\bar{u}}^{13} + \sigma_{u\bar{u}}^{22} + \sigma_{u\bar{u}}^{04}) + \frac{1}{12} (\sigma'_{u\bar{u}}{}^{60} + 3\sigma'_{u\bar{u}}{}^{51} + 6\sigma'_{u\bar{u}}{}^{15} + 2\sigma'_{u\bar{u}}{}^{06}) \right] + O(q^4) \right\}, \quad (5.134)$$

onde $f_\pi^2 = -\frac{N_c}{4\pi^2} \left[\frac{1}{4} \bar{\sigma}'_{u\bar{u}}{}^{40} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}'_{u\bar{u}}{}^{31} \right]$. Do mesmo modo, temos uma nova expressão para o raio quadrático médio:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \frac{N_c}{4\pi^2 f_\pi^2} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{4} (\sigma_{u\bar{u}}^{31} + 5\sigma_{u\bar{u}}^{13} + \sigma_{u\bar{u}}^{22} + \sigma_{u\bar{u}}^{04}) + \frac{1}{6} (\sigma'_{u\bar{u}}{}^{60} + 3\sigma'_{u\bar{u}}{}^{51} + 6\sigma'_{u\bar{u}}{}^{15} + 2\sigma'_{u\bar{u}}{}^{06}) \right\}. \quad (5.135)$$

De posse das expressões analíticas para diversos observáveis dos mésons pión e káon, podemos proceder à determinação, por algum processo, dos momentos espectrais relacionados, com o objetivo de verificar o poder preditivo do modelo espectral de quarks $SU(3)_f$. Este será nosso objetivo no próximo capítulo.

Capítulo 6

Resultados

Propomos, neste capítulo, uma implementação para a distribuição espectral, que permita a determinação de valores numéricos para os observáveis obtidos no capítulo anterior. Inicialmente, aplicamos a proposta para o SQM com apenas um sabor e , posteriormente, estendemos para o caso de dois sabores distintos.

6.1 Aproximação para o caso de apenas um sabor

Com o objetivo de encontrar resultados numéricos para as expressões obtidas para os observáveis mesônicos, necessitamos trabalhar com alguma implementação explícita da distribuição espectral $\rho_q(\omega)$. É relevante registrar que o número de momentos espectrais relacionados nas expressões é superior ao número de observáveis, não sendo possível utilizá-los como parâmetros na determinação dos resultados do modelo.

Uma implementação para $\rho(\omega)$, com um único sabor, foi apresentada em [12], baseada no modelo de dominância dos mésons vetoriais. Aqui, apresentamos uma proposta diferente, que permite a implementação para diferentes sabores de quarks e , como iremos mostrar, apresenta bom poder preditivo.

Nossa proposta de implementação consiste em escrever a distribuição espectral em termos de uma combinação linear de “funções” δ de Dirac, na forma

$$\rho(\omega) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta(\omega - k\bar{m}), \quad (6.1)$$

que satisfaz às condições espectrais:

$$\rho_0: \quad \int d\omega \rho(\omega) = \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1, \quad (6.2)$$

$$\rho_n: \quad \int d\omega \rho(\omega) \omega^n = \sum_{k=1}^N k \alpha_k \bar{m}^n = 0. \quad (6.3)$$

O valor de N é fixado de acordo com o número de condições espectrais necessárias para garantir a unitariedade e a finitude dos observáveis calculados no modelo, mais especificamente, $N = \hat{n} + 1$,

onde \dot{n} é o número de condições espectrais exigidas para garantir a finitude dos observáveis + a condição para normalização, expressão (6.2). Dessa forma, além do parâmetro \bar{m} , teremos também um coeficiente α livre, que será determinado a partir de um observável físico.

Para exemplificar a obtenção dos coeficientes, iniciemos com $N = 3$, ou seja, exigindo a satisfação de ρ_0 e ρ_1 :

$$\rho(\omega) = \alpha_1 \delta(\omega - \bar{m}) + \alpha_2 \delta(\omega - 2\bar{m}) + \alpha_3 \delta(\omega - 3\bar{m}). \quad (6.4)$$

Das condições (6.2) e (6.3), verificamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \implies \alpha_1 = 1 - \alpha_2 - \alpha_3, \\ \bar{m}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0 \implies \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

$$\quad (6.6)$$

Inserindo (6.5) em (6.6), obtemos

$$1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \implies \alpha_2 = -(1 + 2\alpha_3), \quad (6.7)$$

e substituindo este resultado em (6.5), teremos

$$\alpha_1 = 2 + \alpha_3. \quad (6.8)$$

Logo,

$$\rho(\omega) = (2 + \alpha_3) \delta(\omega - \bar{m}) - (1 + 2\alpha_3) \delta(\omega - 2\bar{m}) + \alpha_3 \delta(\omega - 3\bar{m}). \quad (6.9)$$

Encontramos, portanto, uma solução com dois parâmetros livres, \bar{m} e α_3 . O parâmetro \bar{m} pode ser associado às estimativas para as massas constituintes e α_3 pode ser determinado fixando a constante de decaimento fraco do pión, por exemplo. Note, entretanto, que esta solução não satisfaz a ρ_2 , ρ_3 e ρ_4 , necessárias (e utilizadas) nos cálculos dos observáveis determinados no capítulo anterior. Dessa forma, precisamos truncar a série, apresentada na expressão (6.1), em um valor que garanta a satisfação de um número maior de condições espectrais e não comprometa nossa amostragem.

Verificamos que $N = 7$ cumpre com as exigências supracitadas. Assim,

$$\rho(\omega) = \alpha_1 \delta(\omega - \bar{m}) + \alpha_2 \delta(\omega - 2\bar{m}) + \alpha_3 \delta(\omega - 3\bar{m}) + \alpha_4 \delta(\omega - 4\bar{m}) + \alpha_5 \delta(\omega - 5\bar{m}) + \alpha_6 \delta(\omega - 6\bar{m}) + \alpha_7 \delta(\omega - 7\bar{m}), \quad (6.10)$$

que, satisfazendo as seguintes condições espectrais,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 1, \end{array} \right. \quad (6.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m} (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 + 7\alpha_7) = 0, \end{array} \right. \quad (6.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}^2 (\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + 3^2\alpha_3 + 4^2\alpha_4 + 5^2\alpha_5 + 6^2\alpha_6 + 7^2\alpha_7) = 0, \end{array} \right. \quad (6.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}^3 (\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3 + 4^3\alpha_4 + 5^3\alpha_5 + 6^3\alpha_6 + 7^3\alpha_7) = 0, \end{array} \right. \quad (6.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}^4 (\alpha_1 + 2^4\alpha_2 + 3^4\alpha_3 + 4^4\alpha_4 + 5^4\alpha_5 + 6^4\alpha_6 + 7^4\alpha_7) = 0, \end{array} \right. \quad (6.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}^5 (\alpha_1 + 2^5\alpha_2 + 3^5\alpha_3 + 4^5\alpha_4 + 5^5\alpha_5 + 6^5\alpha_6 + 7^5\alpha_7) = 0, \end{array} \right. \quad (6.16)$$

resulta em

$$\alpha_1 = 6 + \alpha_7, \quad (6.17)$$

$$\alpha_2 = -3(5 + 2\alpha_7), \quad (6.18)$$

$$\alpha_3 = 5(4 + 3\alpha_7), \quad (6.19)$$

$$\alpha_4 = -5(3 + 4\alpha_7), \quad (6.20)$$

$$\alpha_5 = 3(2 + 5\alpha_7), \quad (6.21)$$

$$\alpha_6 = -1 - 6\alpha_7. \quad (6.22)$$

Inserindo esses coeficientes na expressão (6.10), obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\omega) = & (6 + \alpha_7) \delta(\omega - \bar{m}) - 3(5 + 2\alpha_7) \delta(\omega - 2\bar{m}) + 5(4 + 3\alpha_7) \delta(\omega - 3\bar{m}) - 5(3 + 4\alpha_7) \delta(\omega - 4\bar{m}) + \\ & + 3(2 + 5\alpha_7) \delta(\omega - 5\bar{m}) - (1 + 6\alpha_7) \delta(\omega - 6\bar{m}) + \alpha_7 \delta(\omega - 7\bar{m}). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Apesar da solução (6.23) satisfazer às condições necessárias para garantir a finitude de todos os observáveis calculados no capítulo anterior, verificamos que o sinal dos momentos $\log \rho'_{q,4}$ e $\rho'_{q,5}$ não são reproduzidos corretamente, impossibilitando a determinação de valores numéricos para a virtualidade média (que depende de $\rho'_{q,5}$) e a densidade de energia do vácuo (proporcional a $\rho'_{q,4}$).

A determinação do parâmetro α_7 foi realizada utilizando a estimativa experimental para a constante de decaimento fraco do pión, retirada de [49]. Do resultado (5.83), sabemos que:

$$\begin{aligned} f_\pi^2 &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_2 \\ (92,21 \text{ MeV})^2 &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \beta(\alpha_7) \bar{m}_u^2, \end{aligned} \quad (6.24)$$

usando o seguinte valor experimental para a massa constituinte: $\bar{m}_u = 308,05 \text{ MeV}$ [50], encontramos

$$\alpha_7 = 13,95. \quad (6.25)$$

Com estes parâmetros fixados, obtivemos os resultados numéricos para os observáveis físicos mostrados na tabela 6.1 e para o fator de forma do pión carregado positivamente, apresentados na figura 6.1 (onde são comparados com os valores experimentais retirados de [51]). Lembremos que o cálculo de alguns observáveis, como a massa e o fator de forma do pión, envolveu expansão para pequenos momentos; nesses casos, estamos considerando os resultados apenas até ordem q^2 . Para comparar a predição do SQM com outro modelo efetivo bem estabelecido, incluímos como referência os resultados de um modelo de Nambu-Jona-Lasínio (NJL) regularizado por meio do método Pauli-Villars, retirados de [10, 52].

Tabela 6.1: Resultados para o SQM com apenas uma distribuição espectral.

| Observáveis | Modelo Espectral de Quarks | Experimental | Modelo de NJL ⁽¹⁾ |
|--|----------------------------|-------------------|------------------------------|
| \bar{m}_u [MeV] | 308,05* | 308,05* | 350 |
| f_π [MeV] | 92,21* | 92,21* | 93.30* |
| $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ [MeV] | -224 | -243 [†] | -210 |
| m_π [MeV] | 142,65 | 139,57* | 139* |
| $\langle r_\pi^2 \rangle$ [fm ²] | 0,35 | 0,43 [‡] | 0.24 |

* indica os parâmetros fixados,
[†] valor retirado de [42],

* valor retirado de [49],
[‡] valor retirado de [51].

⁽¹⁾ valores retirados de [10, 52],

Analisando os resultados apresentados na tabela 6.1, percebe-se que há uma boa concordância com o valores experimentais. O resultado do condensado de quarks $\langle \bar{u}u \rangle$, no entanto, ficou um pouco abaixo da estimativa experimental. Isto pode ser atribuído ao fato da constante de decaimento fraco do pión ter sido calculada no limite quiral. Uma possibilidade para se obter melhores resultados é realizar os cálculos sobre a camada de massa (*on-shell*). Assim, estaremos considerando outros termos que fornecem correções para f_π . Também devemos considerar que o valor do condensado de quarks possui uma barra de erro relativamente grande, o que caracteriza outra margem de flexibilidade para o resultado obtido.

O resultado para o raio eletromagnético do pión ficou bem abaixo do valor experimental, o que era esperado, uma vez que o nosso cálculo do fator de forma não inclui os modos mesônicos vetoriais, que fornecem um aprimoramento considerável para $\langle r_\pi^2 \rangle$ [41, 53]. Note que o modelo de NJL regularizado também apresenta um valor pequeno para o raio eletromagnético do pión, que inclusive, é ainda menor do que o encontrado em nossa abordagem.

Para o fator de forma do pión, verificamos que os resultados obtidos ajustam-se muito bem com as estimativas experimentais, principalmente, na região de pequenos momentos. Claramente, a concordância para o modelo de NJL (linha tracejada) não é tão boa quanto no modelo SQM (linha sólida).

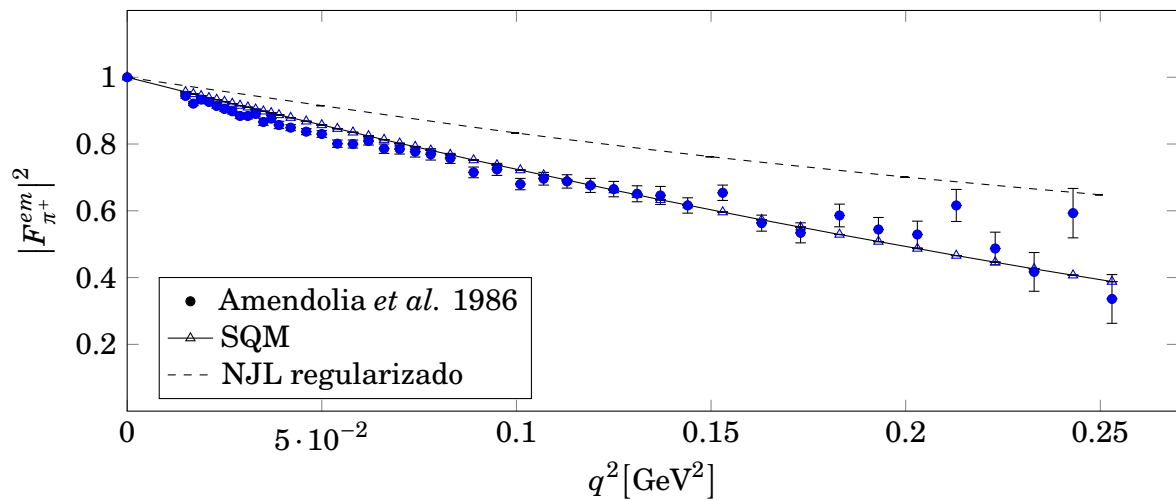


Figura 6.1: Fator de forma eletromagnético para o pión na região tipo-espaço.

A implementação proposta pode ser utilizada para calcular a massa do férmion *on-shell* - isto é, na camada de massa ($p^2 = \bar{m}^2$) - a partir da expressão (4.10):

$$M(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow \bar{m}^2} = \frac{B(p^2)}{A(p^2)}, \quad (6.26)$$

com

$$\begin{cases} A(p^2) = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \\ B(p^2) = \int d\omega \frac{\rho(\omega) \omega}{p^2 - \omega^2}. \end{cases}$$

Inserindo a implementação para $\rho(\omega)$ em (6.26), e usando os valores para \bar{m} e α_7 , fixados anteriormente, encontramos $M_u(\bar{m}^2) = 292,35$ MeV. Isso mostra que o parâmetro \bar{m} , utilizado em nossa aproximação, é de fato a massa constituinte do quark up.

De maneira geral, constatamos que nossa proposta de implementação para o caso do pión fornece melhores resultados do que a versão regularizada do modelo de NJL, introduzida em [10, 52]. Além disso, o SQM tem a grande vantagem de ser um modelo finito, isto é, não possuir nenhum parâmetro adicional dependente do esquema de regularização que possa levar ao surgimento de divergências, como é o caso da presença de um *cut-off* no modelo de NJL (adotado como referência).

6.2 Aproximação para o caso de dois sabores distintos

Para realizar a implementação no cenário do SQM $SU(3)_f$, definimos uma distribuição não separável, que acomode dois sabores de quarks:

$$\rho_{us}(\omega', \omega) = \sum_{k=1}^7 \alpha_k \delta(\omega' - k\bar{m}_u) \delta(\omega - k\bar{m}_s), \quad (6.27)$$

e que, no limite de apenas um sabor, reproduza exatamente a expressão para $\rho(\omega)$, Eq.(6.23). Exigindo a satisfação das condições espectrais, encontramos a seguinte solução:

$$\begin{aligned} \rho_{us}(\omega', \omega) = & (6 + \alpha_7) \delta(\omega' - \bar{m}_u) \delta(\omega - \bar{m}_s) - 3(5 + 2\alpha_7) \delta(\omega' - 2\bar{m}_u) \delta(\omega - 2\bar{m}_s) + 5(4 + 3\alpha_7) \times \\ & \times \delta(\omega' - 3\bar{m}_u) \delta(\omega - 3\bar{m}_s) - 5(3 + 4\alpha_7) \delta(\omega' - 4\bar{m}_u) \delta(\omega - 4\bar{m}_s) + 3(2 + 5\alpha_7) \times \\ & \times \delta(\omega' - 5\bar{m}_u) \delta(\omega - 5\bar{m}_s) - (1 + 6\alpha_7) \delta(\omega' - 6\bar{m}_u) \delta(\omega - 6\bar{m}_s) + \alpha_7 \delta(\omega' - 7\bar{m}_u) \delta(\omega - 7\bar{m}_s). \end{aligned}$$

Uma vez que queremos reproduzir os resultados para o pión no limite de apenas um sabor, devemos utilizar os mesmos parâmetros fixados na seção anterior, ou seja, $\bar{m}_u = 308,05$ MeV e $\alpha_7 = 13,95$ (determinado a partir da constante de decaimento fraco do pión). Além disso, devido a introdução de um novo sabor, precisamos fixar um parâmetro adicional: a massa constituinte do quark strange. Neste caso, usaremos o valor de $\bar{m}_s = 484,91$ MeV (também retirado de [50]).

Na tabela 6.2, mostramos os resultados numéricos para alguns observáveis físicos determinados a partir da nossa abordagem. Esses resultados são comparados com os de um modelo de NJL generalizado com três sabores de quarks, introduzido em [54]¹.

Tabela 6.2: Resultados para a versão $SU(3)_f$ do Modelo Espectral de Quarks.

| Observáveis | Modelo Espectral de Quarks | Experimental | Modelo de NJL ⁽¹⁾ |
|---|----------------------------|-------------------|------------------------------|
| \bar{m}_u [MeV] | 308,05* | 308,05* | 363,90 |
| f_π [MeV] | 92,21* | 92,21* | 93,3* |
| \bar{m}_s [MeV] | 484,91* | 484,91* | 522,20 |
| f_K [MeV] | 118,70 | 110,45* | 96,3 |
| $\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}/1,08$ [MeV] | -327 | -243 [†] | -239 |
| m_K [MeV] | 196,81 | 493,68* | 498* |
| $\langle r_K^2 \rangle$ [fm ²] | 0,23 | 0,34 [‡] | - |

* indica os parâmetros fixados,
[†] valor retirado de [43],

* valores retirados de [49],
[‡] valor retirado de [55].

⁽¹⁾ valores retirados de [54],

Observamos que no caso de dois sabores diferentes, nossa implementação forneceu um resultado muito abaixo do valor experimental para a massa do káon, enquanto o condensado de quarks $\langle \bar{s}s \rangle$ ficou cerca de 35% maior que sua estimativa experimental. Como foi apontado na seção anterior, há contribuições provenientes do cálculo *on-shell* que não estamos contabilizando aqui, e que podem melhorar consideravelmente estes resultados. Além disso, para obtenção correta da massa do káon, os termos de ordem superiores na expansão para função de correlação pseudoescalar, expressão (5.101), não devem ser negligenciados; entretanto, para simplificar nossa implementação, optamos por aproximar as expressões para os observáveis até os termos de ordem q^2 . Acreditamos que a ausência dos termos de ordens mais altas (como q^4 e q^6) no cálculo da massa do káon (subseção 5.9.1) pode ser uns dos principais fatores que justifique o valor encontrado.

Nosso resultado para o raio eletromagnético do káon, assim como no caso do pión, ficou bem abaixo do valor experimental, e uma maneira de se obter melhores resultados para este observável é incluir os modos mesônicos vetoriais no cálculo do fator de forma.

O valor obtido para a constante de decaimento fraco do káon encontra-se um pouco acima da estimativa experimental. Ainda assim, podemos considerá-lo um bom resultado visto que, comparado ao valor fornecido pelo modelo de NJL regularizado [54], apresenta um melhor ajuste.

Na figura 6.2, os resultados obtidos para o fator de forma do káon carregado positivamente são comparados com os valores experimentais retirados de [51]. Vemos que, apesar da nossa proposta de implementação fornecer uma massa para o káon subestimada, o ajuste obtido para o fator de forma é realmente muito bom.

¹A referência [54] não fornece resultados específicos para o fator de forma do káon na região tipo-espaço. Por isso, a Figura 6.2 não inclui valores para este observável referentes ao modelo de NJL. O mesmo vale para o raio eletromagnético do káon, cujo valor não se encontra listado na Tabela 6.2 para o respectivo modelo.

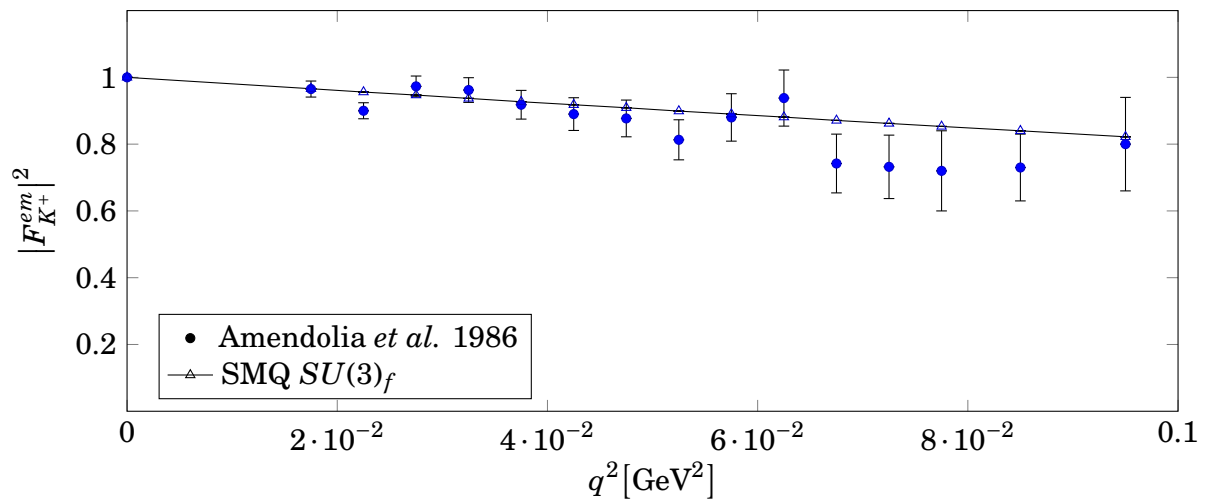


Figura 6.2: Fator de forma eletromagnético para o káon na região tipo-espaço.

Conclusões

Neste trabalho realizamos a extensão do modelo espectral de quarks $SU(3)_f$, introduzido em [22, 23], visando a descrição analítica e numérica de vários observáveis físicos. No setor de vácuo, calculamos o condensado não-local de quarks e a virtualidade média, e no setor mesônico, determinamos a função de correlação pseudoescalar, o fator de forma e o raio eletromagnético do káon. Também revisitamos o cálculo do tensor de polarização do vácuo, e verificamos que, assim como na versão do modelo com apenas uma distribuição espectral, a invariância de calibre para a polarização permanece satisfeita.

Além dos observáveis supracitados, também determinamos, a partir do cálculo da função de correlação pseudoescalar e da aproximação de fase aleatória (RPA - Random Phase Approximation), expressões algébricas para as massas dos mésons pión e káon. A expressão que encontramos para massa do pión pode também ser usada, no contexto do modelo original [12], para estabelecer novas condições sobre os momentos inversos.

Outro resultado relevante da nossa abordagem consistiu em estender a identidade de Ward-Takahashi axial-axial para incluir vértices envolvendo dois sabores distintos de quarks. Tal extensão permitiu, via técnica de calibre, a determinação da função de vértice não-amputada correspondente, que posteriormente, foi utilizada para construir o acoplamento eletromagnético no cálculo do fator de forma do káon.

Finalmente, verificamos que os cálculos dos observáveis do káon forneceram novos momentos espectrais, cuja estrutura algébrica, em geral, consiste na combinação de momentos logarítmicos e inversos. A presença desses novos momentos espectrais se deve a introdução da distribuição adicional, necessária para incluir o quark strange no modelo. Notamos também que esses novos momentos são simétricos na troca das massas espectrais, a única exceção encontra-se no cálculo do fator de forma do káon, onde a “simetrização” é quebrada devido a presença da matriz de carga eletromagnética, originando assim, estruturas mais complexas.

É importante destacar que todos os resultados algébricos obtidos neste trabalho podem ser utilizados para cálculos no limite de sabores iguais, reproduzindo os observáveis do pión, e no limite de apenas uma distribuição espectral (modelo original), permitindo a comparação dos

nossos resultados com os apresentados anteriormente na literatura [12].

Uma desvantagem da regularização espectral é que o problema de encontrar a distribuição a partir dos momentos conhecidos nem sempre tem uma solução explícita fácil ou talvez não tenha solução alguma. Por esse motivo, optamos por introduzir uma implementação explícita para a distribuição espectral. Apesar de não reproduzir corretamente o sinal dos momentos $\log \rho'_{q,4}$ e $\rho'_{q,5}$, nossa proposta de implementação forneceu bons resultados numéricos para os observáveis do pión. Por outro lado, sua extensão para o caso de dois sabores não se mostrou tão eficaz na obtenção de valores para o condensado de quarks $\langle \bar{s}s \rangle$ e a massa do káon, embora os resultados para a constante de decaimento fraco e o fator de forma do káon ficaram próximos dos dados experimentais.

Em conclusão, nosso trabalho forneceu contribuições relevantes para descrição fenomenológica do méson káon no contexto do SQM. Mostrou também que, mesmo utilizando uma implementação relativamente simples, o modelo apresenta resultados consistentes com os dados experimentais.

Sugerimos, como possibilidade de continuação do presente trabalho, a verificação de outras implementações para a distribuição espectral, que reproduzam corretamente o sinal dos momentos logarítmicos de ordem mais alta (permitindo a obtenção de resultados numéricos para a virtualidade média e a densidade de energia do vácuo) e que forneçam melhores ajustes para os observáveis do káon. Acreditamos que uma boa proposta talvez seja construir uma aproximação em termos de funções gaussianas, por exemplo. Finalmente, sugerimos também a verificação das Regras de Soma de Weinberg no cenário do SQM $SU(3)_f$ - isto pode ser alcançado utilizando as funções de correlação vetorial e axial, obtidas em nossa abordagem (mais especificamente, nos cálculos do tensor de polarização do vácuo e da constante de decaimento fraco do káon). A extensão do SQM $SU(3)_f$ para descrição fenomenológica de mésons constituídos por quarks pesados - incluindo o efeito de mésons vetoriais - também é uma perspectiva promissora, em especial devido à finitude do modelo, o que elimina as dificuldades da relação entre as escalas de energias envolvidas e os valores dos cortes (*cut-off*) empregados em outros processos de regularização.

Apêndice A

Convenções e Notações

Neste apêndice, apresentaremos algumas definições e convenções, que foram adotadas em nossos cálculos ao longo deste trabalho. A primeira delas diz respeito ao sistema de unidades naturais,

$$\hbar = c = 1,$$

onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e c é a velocidade da luz no vácuo. Nestas unidades é possível mostrar que massa e momento possuem dimensão de energia e a carga elementar é adimensional.

A métrica do espaço-tempo é a métrica de Minkowski, com a seguinte assinatura:

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As coordenadas do espaço-tempo são denotadas por um quadrivetor contravariante

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}), \quad (\text{A.1})$$

e o quadrivetor covariante pode ser obtido através da utilização da métrica, isto é,

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}). \quad (\text{A.2})$$

Usamos a notação “slash”, de Feynman, para designar a multiplicação de uma matriz γ por um quadrivetor: $\not{a} = a^\mu \gamma_\mu = a_\mu \gamma^\mu$. As matrizes γ são definidas pela álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A.3})$$

onde $\mathbb{1}_4$ é a matriz identidade 4×4 . Na base de Dirac, as matrizes γ assumem a forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0_2 \\ 0_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0_2 & \tau^j \\ -\tau^j & 0_2 \end{pmatrix},$$

sendo $\mathbb{1}_2$ a matriz identidade 2×2 e τ^i as matrizes de Pauli, dadas por:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

É possível mostrar que as matrizes de Pauli obedecem as regras de comutação do grupo $SU(2)$:

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k \quad (\text{A.4})$$

e a relação de anti-comutação:

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}_2, \quad (\text{A.5})$$

onde ϵ_{ijk} é tensor de Levi-Civita¹ e δ_{ij} é o delta de Kronecker. Outras propriedades das matrizes de Pauli, são:

$$\tau_i^2 = \tau_j^2 = \tau_k^2 = \mathbb{1}_2, \quad \det(\tau_i) = -1, \quad \text{Tr}[\tau_i] = 0. \quad (\text{A.6})$$

Usamos também a matriz auxiliar γ_5 , definida a partir das matrizes γ :

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \quad (\text{A.7})$$

que possui propriedades importantes, como:

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5, \quad (\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4 \quad (\text{A.8})$$

e anti-comuta com as outras quatro matrizes γ :

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = \gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0. \quad (\text{A.9})$$

Algumas identidades de traço úteis são:

$$\text{Tr}[\gamma_5] = \text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma] = \text{Tr}[\text{número ímpar de matrizes } \gamma] = 0, \quad (\text{A.10})$$

e

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}), \quad (\text{A.12})$$








$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.13})$$

A notação que adotamos para vários símbolos que aparecem nas representações diagramáticas é mostrada na tabela A.1.

¹Definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ for uma permutação par de } \{1, 2, 3\}; \\ -1, & \text{se } \{i, j, k\} \text{ for uma permutação ímpar de } \{1, 2, 3\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tabela A.1: Símbolos usados nas representações diagramáticas.

| Símbolo | Representação |
|---|--------------------------------|
|  | fóton |
|  | glúon |
|  | férmion |
|  | méson pseudoescalar |
|  | corrente axial |
|  | inserção de uma corrente axial |
|  | amplitude genérica |

Por fim, também fazemos uso das matrizes de Gell-Mann, que constituem uma representação dos geradores do grupo $SU(3)_c$, dadas por

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes são Hermitianas ($\lambda_a^\dagger = \lambda_a$) e possuem as seguintes propriedades:

$$\text{Tr}[\lambda_a] = 0, \quad \text{Tr}[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab}, \quad \text{com } a, b = 1, \dots, 8. \quad (\text{A.14})$$

Além disso, satisfazem as relações de comutação e anti-comutação:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad (\text{A.15})$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}_3 + d_{abc}\lambda_c, \quad (\text{A.16})$$

onde f_{abc} as são constantes de estrutura, totalmente anti-simétricas sob a troca de seus índices e d_{abc} são coeficientes simétricos do grupo $SU(3)$. Tanto f_{abc} como d_{abc} são reais.

Apêndice *B*

Simetrias e Leis de Conservação

Para suplementar os assuntos relacionados às simetrias tratadas no trabalho, dedicamos este apêndice a uma revisão do Teorema de Noether.

B.1 Teorema de Noether

O Teorema de Noether [56] estabelece uma relação entre propriedades de simetria de uma dada teoria e leis de conservação. Esse teorema afirma que para cada simetria contínua da Lagrangeana, existe uma corrente associada, que é conservada quando as equações de movimento são satisfeitas. Para uma prova simples desta afirmação, considere a seguinte variação infinitesimal na configuração do campo ϕ :

$$\phi \longmapsto \phi' = \phi + \underbrace{i\alpha^a X^a \phi}_{\delta\phi}, \quad (\text{B.1})$$

onde X^a são os geradores da transformação e α^a são parâmetros contínuos. Se a Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ for invariante sob a variação (B.1), dizemos que essa variação é uma transformação de simetria. A invariância da Lagrangiana pode ser expressa como

$$0 = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta(\partial_\mu\phi)) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \delta\mathcal{L}. \quad (\text{B.2})$$

Uma vez que a variação é infinitesimal, podemos expandir $\delta\mathcal{L}$ em primeira ordem de $\delta\phi$:

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \quad (\text{B.3})$$

$$= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right); \quad (\text{B.4})$$

no segundo termo de (B.3), usamos a seguinte relação:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu \underbrace{(\phi + \delta\phi)}_{\phi'} - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi), \quad (\text{B.5})$$

ou seja, a variação δ comuta com ∂_μ . Note que os termos entre colchetes em (B.4) correspondem à equação de Euler-Lagrange. Esses termos serão nulos, uma vez que ϕ satisfazer as equações de movimento. Dessa forma, a Eq.(B.4) se reduz a uma equação de continuidade:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad (\text{B.6})$$

com

$$J^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi, \quad (\text{B.7})$$

definida como a **corrente de Noether**. Como sabemos, a equação de continuidade é a forma de se expressar uma lei de conservação em termos de uma equação diferencial. Isso se torna mais claro ao integrarmos (B.6) em um espaço tridimensional e usarmos o teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x \partial_\mu J^\mu(x) = \int_V d^3x \partial_0 J^0(x) + \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) \\ &= \frac{d}{dx_0} \int_V d^3x J^0(x) + \oint_{\partial V} \vec{J}(x) \cdot d\vec{s}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde ∂V é a superfície fechada que delimita o volume V e $d\vec{s}$ o elemento de superfície orientado para fora do volume. O valor da integral sob a superfície ∂V se anula, pois assumimos que os campos e suas derivadas tendem à zero quando $x \rightarrow \infty$. Assim,

$$\frac{dQ}{dx_0} = 0, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$Q := \int_V d^3x J^0(x) \quad (\text{B.10})$$

é a carga conservada no tempo.

Se a simetria for quebrada classicamente e a Lagrangiana não ser invariante, ou se os campos não obedecerem às equações de movimento, ainda podemos definir correntes e cargas correspondentes, mas elas não serão conservadas.

Apêndice C

Resultados úteis

Neste apêndice explicitaremos a obtenção de alguns resultados utilizados durante nosso trabalho.

C.1 Identidades usadas na seção 4.3

C.1.1 Prova da identidade (4.13)

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{p - \omega} = p^n S(p) - p^{n-1}$$
$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{p - \omega} - p^n S(p) = -p^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.1})$$

Inserindo a expressão para o propagador do quark, Eq.(4.1), em (C.1), teremos:

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{p - \omega} - p^n \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p - \omega} = -p^{n-1}$$
$$- \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p - \omega} (p^n - \omega^n) = -p^{n-1}. \quad (\text{C.2})$$

Podemos reescrever o primeiro membro de (C.2) utilizando a seguinte relação (provada por indução):

$$p^n - \omega^n = (p - \omega) \sum_{i=n-1}^0 \sum_{j=0}^{n-1} p^i \omega^j \delta_{i+j}^{n-1}. \quad (\text{C.3})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& - \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p-\omega} (p-\omega) \sum_{i=n-1}^0 \sum_{j=0}^{n-1} p^i \omega^j \delta_{i+j}^{n-1} = -p^{n-1} \\
& - \int d\omega \rho(\omega) (p^{n-1} + p^{n-2}\omega + \dots + p\omega^{n-2} + \omega^{n-1}) = -p^{n-1} \\
& -p^{n-1} \int d\omega \rho(\omega) - \dots - \int d\omega \rho(\omega) \omega^{n-1} = -p^{n-1}.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Usando as condições espectrais (4.2) e (4.3):

$$\begin{aligned}
& \int d\omega \rho(\omega) = 1, \\
& \int d\omega \rho(\omega) \omega^{n-j} = 0, \quad n > j
\end{aligned}$$

obtemos

$$-p^{n-1} = -p^{n-1}. \tag{C.5}$$

C.1.2 Prova da identidade (4.19)

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = p^2 \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}, \quad n > 2.$$

Substituindo $p \mapsto (p^2 - \omega^2) + \omega^2$ no lado direito da expressão acima, teremos

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{\cancel{p^2} - \omega^2}{\cancel{p^2} - \omega^2} + \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}; \quad n > 2 \tag{C.6}$$

entretanto, sabemos da condição espectral (4.12) que

$$\int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) = 0, \quad n > 2.$$

Portanto,

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \tag{C.7}$$

C.2 Cálculo das integrais I_1 , I_2 e I_3

C.2.1 Integral I_1

A integral I_1 é dada por:

$$I_1 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2}.$$

Para simplificar a resolução da integral acima passemos do espaço de Minkowsky para o Euclidiano. Para isso, utilizaremos um método chamado rotação de Wick, que consiste em uma rotação do eixo temporal para o plano complexo, mudando assim, o contorno de integração:

$$\begin{aligned} p_0 &\longmapsto ip_4, \\ p_0^2 &\longmapsto -p_4^2 \implies p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \\ &= -p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = -p_E^2; \end{aligned} \tag{C.8}$$

\Rightarrow Elemento diferencial: $d^4 p = dp_0 dp_1 dp_2 dp_3 = idk_4 dp_1 dk_2 dp_3 = id^4 p_E$.

Logo,

$$\begin{aligned} I_1 &= i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p_E^2 - \omega^2} \\ &= -i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + \omega^2}. \end{aligned} \tag{C.9}$$

Passando para coordenadas hipersféricas, $d^4 p_E = p_E^3 dp_E \sin^2(\psi) d\psi \sin(\theta) d\theta d\phi$,

$$I_1 = -i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^\pi \sin^2(\psi) d\psi \int \frac{dp_E}{(2\pi)^4} p_E^3 \frac{1}{p_E^2 + \omega^2}, \tag{C.10}$$

e resolvendo as integrais nas coordenadas angulares ϕ , θ e ψ :

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta}_2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^2(\psi) d\psi}_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2, \tag{C.11}$$

obtemos

$$I_1 = \frac{-i}{8\pi^2} \int dp_E \frac{p_E^3}{p_E^2 + \omega^2}. \tag{C.12}$$

A integral em p_E pode ser resolvida empregando o esquema de regularização *sharp cut-off*, que consiste basicamente em aplicar um corte Λ para grandes momentos:

$$\int^\infty dp_E \longrightarrow \int^\Lambda dp_E.$$

Adicionalmente, podemos simplificar a integração realizando uma divisão de polinômios no integrando de (C.12):

$$\frac{p_E^3}{p_E^2 + \omega^2} = p_E - \frac{p_E \omega^2}{p_E^2 + \omega^2}. \tag{C.13}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \left[p_E - \frac{p_E \omega^2}{p_E^2 + \omega^2} \right] \\ &= \frac{-i}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{C.14}$$

C.2.2 Integral I_2

A integral I_2 pode ser reescrita na forma:

$$I_2 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \omega^2} e^{ip \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \vec{p} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0 x_0}}{p_0^2 - \bar{\omega}^2}, \quad (\text{C.15})$$

onde $\bar{\omega}^2 = \vec{p}^2 + \omega^2$. Note que temos dois pólos no caminho de integração:

$$p_0 = \pm \bar{\omega}; \quad (\text{C.16})$$

para contorná-los, usaremos a “prescrição $i\epsilon$ ” (que, basicamente, consiste em uma continuação analítica para p_0):

$$p_0^2 - \bar{\omega}^2 + i\epsilon = 0 \Rightarrow p_0 \cong \pm \bar{\omega} \mp \underbrace{\frac{i\epsilon}{2\bar{\omega}}}_{i\delta} = \pm \bar{\omega} \mp i\delta. \quad (\text{C.17})$$

A partir do Teorema dos Resíduos¹ podemos avaliar a integral em p_0 . Iniciemos reescrevendo-a como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0 x_0}}{p_0^2 - \bar{\omega}^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - i\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 e^{ip_0 x_0} \left\{ \frac{-1}{p_0 + \alpha} + \frac{1}{p_0 - \alpha} \right\}, \quad (\text{C.19})$$

onde $\alpha = \sqrt{\omega^2 - i\epsilon}$.

Escolhendo adequadamente dois contornos de integração, C_1 e C_2 , teremos:

1) No contorno superior (figura C.1):

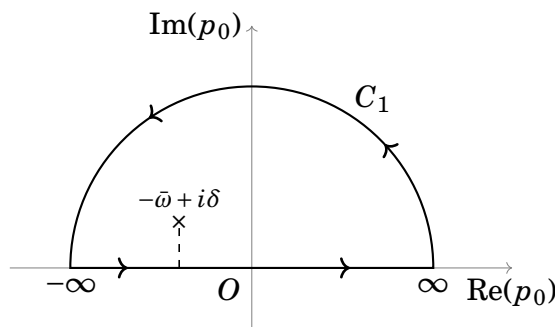


Figura C.1: Contorno superior C_1 que contém o pólo $p_0 = -\bar{\omega} + i\delta$.

$$\oint_{C_1} dz f(z) \xrightarrow{\alpha_1 = -\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0 x_0}}{p_0 + \alpha} + \underbrace{\int_0^{i\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0 x_0}}{p_0 + \alpha}}_{0, \text{ para } x_0 > 0} = 2\pi i e^{-i\alpha x_0}. \quad (\text{C.20})$$

O integrando do segundo termo de (C.20) desaparecerá assintoticamente para $x_0 > 0$, pois, no semicírculo superior, $p_0 \rightarrow i\infty$.

¹De acordo com o Teorema dos Resíduos, se $f(z)$ é uma função analítica dentro de um contorno de integração C no plano complexo, então

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_k \text{Res}[f(z = a_k)], \quad (\text{C.18})$$

onde, para o caso de um pólo simples em a_1 , $\text{Res}[f(z)] \Big|_{z=a_1} = \lim_{z \rightarrow a_1} [(z - a_1)f(z)]$ é o “resíduo” de $f(z)$ em $z = a_1$.

Logo,

$$\Theta(x_0) \oint_{C_1} dp_0 \frac{e^{ip_0x_0}}{p_0 + \alpha} = \Theta(x_0) 2\pi i e^{-i\alpha x_0}, \quad (\text{C.21})$$

onde usamos a função de Heaviside², $\Theta(x_0)$, para assegurar que a segunda integral em (C.20) seja nula.

2) No contorno inferior (figura C.2):

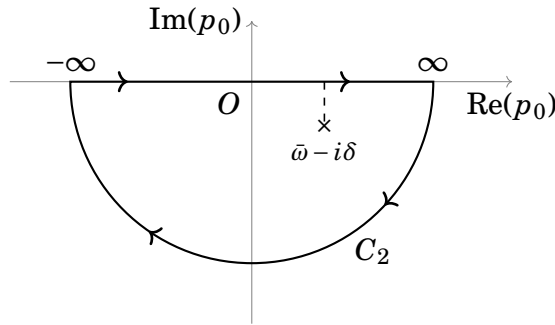


Figura C.2: Contorno inferior C_2 que contém o pólo $p_0 = \bar{\omega} - i\delta$.

$$\oint_{C_2} dz f(z) \xrightarrow{a_2=\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0x_0}}{p_0 - \alpha} + \underbrace{\int_{-\infty}^0 dp_0 \frac{e^{ip_0x_0}}{p_0 - \alpha}}_{0, \text{ para } x_0 < 0} = -2\pi i e^{i\alpha x_0}. \quad (\text{C.22})$$

Assim,

$$\Theta(-x_0) \oint_{C_2} dp_0 \frac{e^{ip_0x_0}}{p_0 - \alpha} = -\Theta(-x_0) 2\pi i e^{i\alpha x_0}. \quad (\text{C.23})$$

Note que, por convenção, o sinal negativo do lado direito da expressão (C.23) é devido à orientação horária do contorno C_2 . Inserindo (C.21) e (C.23) em (C.19), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0x_0}}{p_0^2 - \bar{\omega}^2 + i\epsilon} = \frac{-2i\pi}{2\bar{\omega}} \left[\Theta(-x_0) e^{i\bar{\omega}x_0} + \Theta(x_0) e^{-i\bar{\omega}x_0} \right]. \quad (\text{C.24})$$

Agora, substituimos a expressão (C.24) em (C.15):

$$I_2 = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\bar{\omega}} \left[\Theta(-x_0) e^{i\bar{\omega}x_0} + \Theta(x_0) e^{-i\bar{\omega}x_0} \right]. \quad (\text{C.25})$$

Usando coordenadas esféricas no espaço de momento, $d^3 \vec{p} = |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| \sin(\theta) d\theta d\phi$:

$$I_2 = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \int_0^{\infty} d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2}{\bar{\omega}} \left[\Theta(-x_0) e^{i\bar{\omega}x_0} + \Theta(x_0) e^{-i\bar{\omega}x_0} \right] \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) e^{-i|\vec{p}||\vec{x}|\cos(\theta)} \quad (\text{C.26})$$

²Definida como:

$$\Theta(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{quando o argumento for positivo, neste caso, } x_0 > 0; \\ 0, & \text{se o argumento for negativo, isto é, } x_0 < 0. \end{cases}$$

e resolvendo a integração em $d\theta$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{-i|\vec{p}||\vec{x}|\cos(\theta)} &= \frac{1}{i|\vec{p}||\vec{x}|} \int_0^\pi e^{-i|\vec{p}||\vec{x}|\cos(\theta)} i|\vec{p}||\vec{x}| \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{i|\vec{p}||\vec{x}|} \left[e^{i|\vec{p}||\vec{x}|} - e^{-i|\vec{p}||\vec{x}|} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

ficamos com

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-1}{2|\vec{x}|(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} \left\{ \Theta(-x_0) \left[e^{i(\bar{\omega}x_0+|\vec{p}||\vec{x}|)} - e^{i(\bar{\omega}x_0-|\vec{p}||\vec{x}|)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \Theta(x_0) \left[e^{-i(\bar{\omega}x_0-|\vec{p}||\vec{x}|)} - e^{-i(\bar{\omega}x_0+|\vec{p}||\vec{x}|)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Trocando $|\vec{p}| \rightarrow -|\vec{p}|$ na primeira e na terceira integral de (C.28), teremos:

$$1^a \Rightarrow \int_0^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} e^{i(\bar{\omega}x_0+|\vec{p}||\vec{x}|)} \rightarrow - \int_{-\infty}^0 d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} e^{i(\bar{\omega}x_0-|\vec{p}||\vec{x}|)}, \quad (\text{C.29})$$

$$3^a \Rightarrow \int_0^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} e^{-i(\bar{\omega}x_0-|\vec{p}||\vec{x}|)} \rightarrow - \int_{-\infty}^0 d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} e^{-i(\bar{\omega}x_0+|\vec{p}||\vec{x}|)}. \quad (\text{C.30})$$

Inserindo (C.29) e (C.30) em (C.28), obtemos

$$I_2 = \frac{1}{8|\vec{x}|\pi^2} \left\{ \Theta(-x_0) \int_{-\infty}^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} e^{i(\bar{\omega}x_0-|\vec{p}||\vec{x}|)} + \Theta(x_0) \int_{-\infty}^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|}{\bar{\omega}} e^{-i(\bar{\omega}x_0+|\vec{p}||\vec{x}|)} \right\}. \quad (\text{C.31})$$

Podemos substituir $|\vec{p}| \rightarrow i \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|}$ em (C.31), resultando em

$$I_2 = \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \left\{ \Theta(-x_0) \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\vec{p}| \frac{e^{i(\bar{\omega}x_0-|\vec{p}||\vec{x}|)}}{\bar{\omega}} + \Theta(x_0) \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\vec{p}| \frac{e^{-i(\bar{\omega}x_0+|\vec{p}||\vec{x}|)}}{\bar{\omega}} \right\}. \quad (\text{C.32})$$

As integrais em (C.32) podem ser colocadas em uma forma mais conveniente. Para isso, realizemos outra substituição do tipo:

$$\bar{\omega} = \omega \cosh(\eta) \quad \text{e} \quad |\vec{p}| = \omega \sinh(\eta) \Rightarrow d|\vec{p}| = \omega \cosh(\eta) d\eta. \quad (\text{C.33})$$

Obs.: como é de se esperar, tal substituição satisfaz a seguinte relação relativística:

$$\bar{\omega}^2 - |\vec{p}|^2 = \omega^2 \cosh^2(\eta) - \omega^2 \sinh^2(\eta) = \omega^2 \underbrace{[\cosh^2(\eta) - \sinh^2(\eta)]}_1 = \omega^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \left\{ \Theta(-x_0) \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty d\eta e^{i\omega[x_0 \cosh(\eta) - |\vec{x}| \sinh(\eta)]} + \right. \\ &\quad \left. + \Theta(x_0) \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty d\eta e^{-i\omega[x_0 \cosh(\eta) + |\vec{x}| \sinh(\eta)]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

O resultado das integrais na Eq.(C.34) irá depender do tipo de intervalo espaço-temporal que estamos considerando. No nosso caso, tratamos de partículas com virtualidade diferente de

zero, ou seja, fora da camada de massa. Então, adotaremos o intervalo tipo-espaço, $x^2 < 0$, que corresponde a Função de Heaviside com argumento negativo, $x_0 < |\vec{x}|$. Dessa forma, a segunda integral irá desaparecer e para resolvermos a primeira realizemos as seguintes substituições:

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \sinh(\xi), \\ |\vec{x}| = \sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \cosh(\xi). \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

$$\quad \quad \quad (\text{C.36})$$

Com isso,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{i\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} [\sinh(\xi)\cosh(\eta) - \cosh(\xi)\sinh(\eta)]} \\ &= \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \sinh(\eta - \xi)}, \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

onde usamos a identidade trigonométrica: $\sinh(\xi)\cosh(\eta) - \cosh(\xi)\sinh(\eta) = -\sinh(\eta - \xi)$. A partir da relação de Euler podemos expressar a exponencial em termos de seno e cosseno:

$$I_2 = \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left\{ \cos\left(\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \sinh(\eta - \xi)\right) - i \sin\left(\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \sinh(\eta - \xi)\right) \right\}.$$

Porém, o segundo termo não contribui para a integral, pois trata-se de uma função ímpar em η integrada num intervalo simétrico. Dessa forma, ficamos com

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \cos\left(\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \sinh(\eta - \xi)\right) \\ &= \frac{i}{8|\vec{x}|\pi^2} \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} 2 \int_0^{\infty} d\eta \cos\left(\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \sinh(\eta)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

A integral em (C.38) trata-se da representação integral da função de Bessel modificada (também conhecida como função de McDonald):

$$\int_0^{\infty} d\eta \cos(z \sinh(\eta)) = K_0(z). \quad (\text{C.39})$$

Logo,

$$I_2 = \frac{2i}{8|\vec{x}|\pi^2} \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \left[\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2} \right] \frac{\partial}{\partial |\vec{x}|} \left[K_0\left(\omega\sqrt{|\vec{x}|^2 - x_0^2}\right) \right]. \quad (\text{C.40})$$

Usando $\frac{\partial K_0(z)}{\partial z} = -K_1(z)$, obtemos

$$I_2 = \frac{-i}{4\pi^2} \frac{\omega^2}{\sqrt{-\omega^2 x^2}} K_1\left(\sqrt{-\omega^2 x^2}\right), \quad (\text{C.41})$$

onde $x^2 = x_0^2 - |\vec{x}|^2$.

C.2.3 Integral I_3

Para a integral I_3 , temos

$$I_3 = (-1)^n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2)^n}{p^2 - \omega^2}.$$

Realizemos uma rotação de Wick:

$$\begin{aligned} I_3 &= (-1)^n i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{(-p_E^2)^n}{-p_E^2 - \omega^2} \\ &= (-1)^{2n-1} i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^{2n}}{p_E^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Passando para coordenadas hiperesféricas, $d^4 p_E = p_E^3 dp_E d\phi \sin(\theta) d\theta \sin^2(\psi) d\psi$, e utilizando um *cut-off* Λ , teremos

$$\begin{aligned} I_3 &= (-1)^{2n-1} i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^\pi \sin^2(\psi) d\psi \int_0^\Lambda \frac{dp_E}{(2\pi)^4} p_E^3 \frac{p_E^{2n}}{p_E^2 + \omega^2} \\ &= (-1)^{2n-1} 2\pi^2 i \int_0^\Lambda \frac{dp_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^{2n+3}}{p_E^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Podemos resolver a integral em p_E por método de indução:

$n = 0$:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \frac{p_E^3}{p_E^2 + \omega^2} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \frac{p_E^5}{p_E^2 + \omega^2} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} \left[\Lambda^4 - 2\Lambda^2 \omega^2 - 2\omega^4 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \frac{p_E^7}{p_E^2 + \omega^2} \\ &= \frac{-i}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{12} \left[2\Lambda^6 - 3\Lambda^4 \omega^2 + 6\Lambda^2 \omega^4 - 2\Lambda^2 \omega^2 + 6\omega^6 \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

[...]

Assim, verificamos que

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{-i}{8\pi^2} \left\{ \frac{(-1)^n}{2(n+1)!} \left[(-1)^n n! \Lambda^{2n+2} + (n+1)! \omega^{2n+2} \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) + O(\Lambda^2) \right] \right\} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} i}{16\pi^2} \left[\frac{(-1)^n n! \Lambda^{2n+2}}{2(n+1)!} + \omega^{2n+2} \log \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) + O(\Lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

C.3 Verificação da solução para o vértice axial (com 2 distribuições espectrais)

Multiplicando a solução (5.48) por q_μ , teremos

$$\begin{aligned}
 -q_\mu \Lambda_A^{\mu,a}(p', p) &= - \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \left[\frac{i}{p' - \omega'} \left(q - \frac{(\omega' + \omega) q_\mu q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \right] \\
 &= - \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \left[i \left(\frac{(p' - \omega') - p - \omega}{p' - \omega'} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{p - \omega} \right] \\
 &= - \int d\omega' d\omega \rho_u(\omega') \rho_s(\omega) \left[-\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p' - \omega'} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{p - \omega}{p - \omega} \right], \tag{C.48}
 \end{aligned}$$

onde usamos $q_\mu = (p' - p)_\mu$. Agora, apliquemos a seguinte condição espectral:

$$\rho_{u,0} = \rho_{s,0} = \int d\omega' \rho_u(\omega') = \int d\omega \rho_s(\omega) = 1, \tag{C.49}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
 -q_\mu \Lambda_A^{\mu,a}(p', p) &= \int d\omega \rho_s(\omega) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{1}{p - \omega} + \int d\omega' \rho_u(\omega') \frac{1}{p' - \omega'} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \\
 &= S_u(p') \frac{\lambda_a}{2} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} S_s(p). \tag{C.50}
 \end{aligned}$$

Verificamos que, de fato, a solução (5.48) satisfaz a identidade de WT axial (5.41).

C.4 Obtenção da solução para o vértice axial-axial (com duas distribuições espectrais)

Nesta seção, mostramos como a solução (5.55) é construída a partir da técnica de calibre. Inicialmente, escrevemos uma solução tentativa de acordo com a definição da função de vértice axial-axial não amputada, expressão (5.53):

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{AA}^{\mu,a;\nu,b}(p', q'; p, q) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\
 &= iS(p') \Gamma_A^{\nu,b} iS(p+q) \Gamma_A^{\mu,a} iS(p) + iS(p') \Gamma_A^{\mu,a} iS(p'-q) \Gamma_A^{\nu,b} iS(p), \tag{C.51}
 \end{aligned}$$

onde $\Gamma_A^{\mu,a}$ e $\Gamma_A^{\nu,b}$ são funções de vértice axial amputadas.

Simetrizando a expressão (C.51), temos

$$\begin{aligned} \Lambda_{AA}^{\mu,a;\nu,b}(p', q'; p, q) &= \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \left\{ \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left[\left(\gamma^\nu - \frac{(\omega' + \omega) q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \times \right. \right. \\ &\quad \times \frac{i}{\not{p} + \not{q} - \omega'} \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' + \omega) q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega'} \times \\ &\quad \left. \left. \times \left(\gamma^\nu - \frac{(\omega' + \omega) q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right] \frac{i}{\not{p} - \omega} \right\}, \end{aligned} \quad (C.52)$$

com $[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega')]$ contabilizando a contribuição da troca do quark u pelo s . Multiplicando essa solução tentativa por $-iq_\mu$, ficamos com

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu,a;\nu,b}(p', q'; p, q) &= \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left\{ \Gamma_A^{\nu,b} \frac{1}{\not{p} + \not{q} - \omega'} \times \right. \\ &\quad \times \left(\not{q} - \frac{(\omega' + \omega) q_\mu q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \left(\not{q} - \frac{(\omega' + \omega) q_\mu q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega'} \times \\ &\quad \left. \times \Gamma_A^{\nu,b} \right\} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \end{aligned} \quad (C.53)$$

Uma vez que $q = \not{p}' - \not{p}$, podemos reescrever a expressão anterior como

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu,a;\nu,b}(p', q'; p, q) &= \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \left\{ \frac{i}{\not{p}' - \omega} \Gamma_A^{\nu,b} \left[\frac{(\not{p}' - \omega') - \not{p} - \omega}{\not{p} + \not{q} - \omega'} \right] \times \right. \\ &\quad \times \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} + \left[\frac{(\not{p}' - \omega) - \not{p} - \omega'}{\not{p}' - \omega} \right] \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega'} \Gamma_A^{\nu,b} \frac{i}{\not{p} - \omega} \left. \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \left\{ \frac{i}{\not{p}' - \omega} \Gamma_A^{\nu,b} \left[\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{i}{\not{p} + \not{q} - \omega'} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \right] + \left[\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p}' - \not{q} - \omega'} + \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \right] \Gamma_A^{\nu,b} \frac{i}{\not{p} - \omega} \right\}. \end{aligned} \quad (C.54)$$

Identificando a segunda e terceira parcela como vértices axiais não amputados, $\Lambda_A^{\nu,b}(p', p+q)$ e $\Lambda_A^{\nu,b}(p'-q, p)$ respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu,a;\nu,b}(p', q'; p, q) &= \Lambda_A^{\nu,b}(p', p+q) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \times \\ &\quad \times \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left\{ \left(\gamma^\nu - \frac{(\omega' + \omega) q'^\nu}{q'^2} \right) \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \left(\gamma^\nu - \frac{(\omega' + \omega) q'^\nu}{q'^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_5 \frac{\lambda_b}{2} \right\} \frac{i}{\not{p} - \omega} + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \Lambda_A^{\nu,b}(p'-q, p). \end{aligned} \quad (C.55)$$

Recorrendo às propriedades das matrizes γ (ver apêndice A): $\gamma_v \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_v$ e $\gamma_5 \gamma_5 = \mathbb{1}$, podemos reescrever (C.55) como

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu, a; v, b}(p', q'; p, q) &= \Lambda_A^{v, b}(p', p+q) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \frac{1}{2} \int d\omega' d\omega \left[\rho_u(\omega') \rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \rho_s(\omega') \right] \times \\ &\times \frac{i}{p' - \omega} \left\{ \left(\gamma^v - \frac{(\omega' + \omega) q'^v}{q'^2} \right) \frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} - \left(\gamma^v + \frac{(\omega' + \omega) q'^v}{q'^2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right\} \frac{i}{p' - \omega} + \\ &+ \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \Lambda_A^{v, b}(p' - q, p). \end{aligned}$$

Aplicando as seguintes condições espectrais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{u,0} = \rho_{s,0} = \int d\omega' \rho_u(\omega') = \int d\omega' \rho_s(\omega') = 1, \\ \rho_{u,1} = \rho_{s,1} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega' = \int d\omega' \rho_s(\omega') \omega' = 0, \end{array} \right. \quad (C.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{u,0} = \rho_{s,0} = \int d\omega' \rho_u(\omega') = \int d\omega' \rho_s(\omega') = 1, \\ \rho_{u,1} = \rho_{s,1} = \int d\omega' \rho_u(\omega') \omega' = \int d\omega' \rho_s(\omega') \omega' = 0, \end{array} \right. \quad (C.57)$$

obtemos

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu, a; v, b}(p', q'; p, q) &= \Lambda_A^{v, b}(p', p+q) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \Lambda_A^{v, b}(p' - q, p) + \frac{1}{2} \int d\omega \left[\rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \right] \times \\ &\times \frac{i}{p' - \omega} \left\{ \left(\gamma^v - \frac{\omega q'^v}{q'^2} \right) \frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} - \left(\gamma^v + \frac{\omega q'^v}{q'^2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right\} \frac{i}{p' - \omega}. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos e usando a propriedade de comutação das matrizes de Gell-Man, $\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$, encontramos que

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu, a; v, b}(p', q'; p, q) &= \Lambda_A^{v, b}(p', p+q) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \Lambda_A^{v, b}(p' - q, p) + \frac{1}{2} \int d\omega \left[\rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \right] \times \\ &\times \frac{i}{p' - \omega} \left[\underbrace{\gamma^v \left(\frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right)}_{-if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}} - \frac{\omega q'^v}{q'^2} \left(\frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} + \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right) \right] \frac{i}{p' - \omega}. \quad (C.58) \end{aligned}$$

Note que a primeira parcela da integral corresponde à função de vértice vetorial não amputada, $\Lambda_V^{v, c}(p', p)$. Com isso,

$$\begin{aligned} -iq_\mu \Lambda_{AA}^{\mu, a; v, b}(p', q'; p, q) &= -if_{abc} \Lambda_V^{v, c}(p', p) + \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \Lambda_A^{v, b}(p' - q, p) + \Lambda_A^{v, b}(p', p+q) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \int d\omega \left[\rho_s(\omega) + \rho_u(\omega) \right] \frac{i}{p' - \omega} \left[\frac{\omega q'^v}{q'^2} \left(\frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} + \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right) \right] \frac{i}{p' - \omega}. \quad (C.59) \end{aligned}$$

Utilizando a última parcela de (C.59) para corrigir a solução tentativa (C.51), encontraremos exatamente a solução apresentada em (5.55).

C.5 Operações de traço

⇒ **Traço utilizado no cálculo da função de correlação pseudoescalar:**

$$\begin{aligned} N_{PS} &= \text{Tr}[(\not{p} + \not{q} + \omega')\gamma_5(\not{p} + \omega)\gamma_5] \\ &= \text{Tr}[\not{p}\gamma_5\not{p}\gamma_5 + \not{q}\gamma_5\not{p}\gamma_5 + \not{p}\gamma_5\omega\gamma_5 + \not{q}\gamma_5\omega\gamma_5 + \omega'\gamma_5\not{p}\gamma_5 + \omega'\gamma_5\omega\gamma_5]. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Usando a propriedade do traço, $\text{Tr}[A + B - C] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B] - \text{Tr}[C]$, e recorrendo à álgebra de matrizes γ , expressões (A.10)-(A.13), teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Tr}[\not{p}\gamma_5\not{p}\gamma_5] &= \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5]p^\mu p^\nu = -\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu]p^\mu p^\nu = -4\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu, & (\text{C.61}) \\ \text{Tr}[\not{q}\gamma_5\not{p}\gamma_5] &= \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5]q^\mu p^\nu = -\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu]q^\mu p^\nu = -4\eta_{\mu\nu}q^\mu p^\nu, & (\text{C.62}) \\ \text{Tr}[\not{p}\gamma_5\omega\gamma_5] &= \text{Tr}[\not{q}\gamma_5\omega\gamma_5] = \text{Tr}[\omega'\gamma_5\not{p}\gamma_5] = 0, & (\text{C.63}) \\ \text{Tr}[\gamma_5\gamma_5]\omega'\omega &= \text{Tr}[\mathbb{1}_4]\omega'\omega = 4\omega'\omega. & (\text{C.64}) \end{aligned} \right.$$

Inserindo esses resultados em (C.60), obtemos

$$N_{PS} = -4(p^2 + p \cdot q - \omega'\omega). \quad (\text{C.65})$$

⇒ **Para o cálculo do tensor de polarização do vácuo, temos o seguinte traço:**

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= \text{Tr}\left[(\not{p} + \not{q} + \omega')\left(\gamma^\mu - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2}\right)(\not{p} + \omega)\gamma^\nu\right] \\ &= \text{Tr}\left[\not{p}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu + \not{q}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu + \omega'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2}(\not{p}\omega\gamma^\nu + \not{q}\omega\gamma^\nu + \omega'\not{p}\gamma^\nu)\right] \\ &= \text{Tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu] + \text{Tr}[\not{q}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu] + \text{Tr}[\omega'\gamma^\mu\omega\gamma^\nu] - \frac{(\omega' - \omega)q^\mu}{q^2}\left\{\text{Tr}[\not{p}\omega\gamma^\nu] + \text{Tr}[\not{q}\omega\gamma^\nu] + \text{Tr}[\omega'\not{p}\gamma^\nu]\right\}. \end{aligned}$$

Nas passagens anteriores, consideramos a propriedade (A.10) para eliminar os termos com número ímpar de matrizes γ . Resolvendo os traços separadamente, encontramos

$$N^{\mu\nu} = 4\left[2p^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu - \frac{q^\mu p^\nu}{q^2}(\omega'^2 - \omega^2) - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}(\omega\omega' - \omega^2) - \eta^{\mu\nu}(p^2 + p \cdot q - \omega\omega')\right].$$

⇒ **No caso do fator de forma do káon, o traço a ser resolvido é dado por:**

$$N_\mu = \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + \omega)\gamma_5(\not{p} + \not{k} + \omega')\gamma_5(\not{k} - \not{q} + \omega)].$$

Expandindo os termos e aplicando a propriedade de linearidade do traço:

$$\begin{aligned} N_\mu &= \text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{p}\gamma_5\not{k} - \gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{p}\gamma_5\not{q} + \gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{k}\gamma_5\not{k} - \gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{k}\gamma_5\not{q} + \gamma_\mu\not{k}\gamma_5\omega'\gamma_5\omega + \gamma_\mu\omega\gamma_5\not{p}\gamma_5\omega + \\ &\quad + \gamma_\mu\omega\gamma_5\not{k}\gamma_5\omega + \gamma_\mu\omega\gamma_5\omega'\gamma_5\not{k} - \gamma_\mu\omega\gamma_5\omega'\gamma_5\not{q}] \\ &= \text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{p}\gamma_5\not{k}] - \text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{p}\gamma_5\not{q}] + \text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{k}\gamma_5\not{k}] - \text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_5\not{k}\gamma_5\not{q}] + \text{Tr}[\gamma_\mu\not{k}\gamma_5\omega'\gamma_5\omega] + \\ &\quad + \text{Tr}[\gamma_\mu\omega\gamma_5\not{p}\gamma_5\omega] + \text{Tr}[\gamma_\mu\omega\gamma_5\not{k}\gamma_5\omega] + \text{Tr}[\gamma_\mu\omega\gamma_5\omega'\gamma_5\not{k}] - \text{Tr}[\gamma_\mu\omega\gamma_5\omega'\gamma_5\not{q}]. \end{aligned}$$

Usando as seguintes propriedades: $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ e $\gamma_5 \gamma_5 = \mathbb{1}_4$, obtemos

$$\begin{aligned}
 N_\mu &= -\text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \not{p} \not{k}] + \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \not{p} \not{q}] - \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \not{k} \not{k}] + \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \not{k} \not{q}] + \text{Tr}[\gamma_\mu \not{k} \omega' \omega] - \text{Tr}[\gamma_\mu \omega \not{p} \omega] - \\
 &\quad - \text{Tr}[\gamma_\mu \omega \not{k} \omega] + \text{Tr}[\gamma_\mu \omega \omega' \not{k}] - \text{Tr}[\gamma_\mu \omega \omega' \not{q}] \\
 &= 4[-(k_\mu p \cdot k - p_\mu k \cdot k + k_\mu k \cdot p) + (k_\mu p \cdot q - p_\mu k \cdot q + q_\mu k \cdot p) - (\cancel{k_\mu k \cdot k} - \cancel{k_\mu k \cdot k} + k_\mu k \cdot k) + \\
 &\quad + (\cancel{k_\mu k \cdot q} - \cancel{k_\mu k \cdot q} + q_\mu k \cdot k) + k_\mu \omega' \omega - p_\mu \omega^2 - k_\mu \omega^2 + k_\mu \omega \omega' - q_\mu \omega \omega'] \\
 &= 4[-k_\mu k^2 + k^2(p_\mu + q_\mu) - k \cdot (p_\mu q - q_\mu p) + k_\mu(p \cdot q - 2k \cdot p - \omega^2 + 2\omega' \omega) - p_\mu \omega^2 - q_\mu \omega' \omega].
 \end{aligned}$$

C.6 Resultado das integrais usadas no cálculo de $\Pi_{VV}^{\mu a, \nu b}(q^2)$, $\Pi_{PS}(q^2)$ e do fator de forma do Káon

Nesta seção, apresentamos o resultado das integrais avaliadas a partir do método de regularização dimensional³.

⇒ Para a integral I_{quad} , temos

$$I_{\text{quad}} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]} \quad (\text{C.66})$$

Usando a seguinte relação [35]

$$\int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{C.67})$$

e considerando $d = 4 - \epsilon$, encontramos

$$\begin{aligned}
 I_{\text{quad}} &= \int \frac{d^{4-\epsilon} k'}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]} \\
 &= \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{4-\epsilon}{2})}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{1 - \frac{4-\epsilon}{2}} \\
 &= \frac{-i}{(4\pi)^{2 - \frac{\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2} - 1}.
 \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

Desenvolvendo cada termo separadamente, teremos

$$\begin{aligned}
 (4\pi)^{-(2 - \frac{\epsilon}{2})} &= \frac{1}{(4\pi)^2} e^{\ln[(4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}}]} = \frac{1}{(4\pi)^2} e^{\frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + O(\epsilon^2)\right],
 \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

$$\left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = e^{\frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{1}{\Xi^2}\right)} = \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{1}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon^2)\right], \quad (\text{C.70})$$

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = -\left[1 + \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)\right], \quad (\text{C.71})$$

³Para aplicar a regularização dimensional utilizamos as expressões resultantes da integração em d-dimensões no espaço de Minkowski, retiradas do apêndice A.4 da referência [35].

onde γ_E é a constante de Euler-Mascheroni $\Rightarrow \gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \approx 0.5772$.

Inserindo (C.69), (C.70) e (C.71) em (C.68), obtemos

$$I_{\text{quad}} = \frac{i\Xi^2}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon) \right] = \frac{i\Xi^2}{(4\pi)^2} (\alpha + 1), \quad (\text{C.72})$$

sendo $\alpha \equiv \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon) \right]$.

\Rightarrow A integral I_{\log} é dada por

$$I_{\log} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^2}. \quad (\text{C.73})$$

Novamente, usaremos (C.67):

$$\begin{aligned} I_{\log} &= \int \frac{d^{4-\epsilon} k'}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^2} \\ &= \frac{(-1)^2 i}{(4\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{4-\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Xi^2} \right)^{2 - \frac{4-\epsilon}{2}} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{2 - \frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Xi^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

A partir dos resultados (C.69), (C.70) e da seguinte expansão:

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon) \right], \quad (\text{C.75})$$

encontramos que

$$I_{\log} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon) \right] = \frac{i\alpha}{(4\pi)^2}. \quad (\text{C.76})$$

\Rightarrow A integral I_{conv} também pode ser obtida usando (C.67):

$$\begin{aligned} I_{\text{conv}} &= \int \frac{d^{4-\epsilon} k'}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^{2 - \frac{\epsilon}{2}}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Xi^2} \right)^{1 + \frac{\epsilon}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

onde a expansão para $\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)$ é dada por:

$$\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \gamma_E + O(\epsilon^2) \right]. \quad (\text{C.78})$$

Considerando este resultado e as expressões (C.69) e (C.70), verificamos que

$$I_{\text{conv}} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Xi^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \gamma_E + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon^2) \right] = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Xi^2} + O(\epsilon). \quad (\text{C.79})$$

\Rightarrow Para a integral $I_2^{\mu\nu}$, usaremos [35]

$$\int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \frac{k'^\mu k'^\nu}{[k'^2 - \Xi^2]^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \quad (\text{C.80})$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu} &= \int \frac{d^{4-\epsilon} k'}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{k'^\mu k'^\nu}{[k'^2 - \Xi^2]^2} \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{4-\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{1 - \frac{4-\epsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

Recorrendo aos resultados (C.69), (C.70) e (C.71), obtemos

$$I_2^{\mu\nu} = \frac{i\Xi^2}{(4\pi)^2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \left[1 + \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon) \right] = \frac{i\Xi^2}{(4\pi)^2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} (\alpha + 1). \quad (\text{C.82})$$

\Rightarrow Por fim, temos a integral $I_{\mu\nu, 3}$, que também pode ser resolvida usando (C.80):

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu, 3} &= \int \frac{d^{4-\epsilon} k'}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{k'_\mu k'_\nu}{[k'^2 - \Xi^2]^3} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{4-\epsilon}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Xi^2}\right)^{2 - \frac{4-\epsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

Inserindo os resultados (C.69), (C.70) e (C.75) em (C.83), encontramos

$$I_{\mu\nu, 3} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln\left(\frac{4\pi}{\Xi^2}\right) + O(\epsilon) \right] = \frac{i\alpha}{(4\pi)^2} \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}. \quad (\text{C.84})$$

Referências Bibliográficas

- [1] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona-Lasinio model: Its implications for Hadrons and Nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 27:195 – 272, 1991.
- [2] S. P. Klevansky. The Nambu Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, Jul 1992.
- [3] M. K. Volkov. Effective chiral Lagrangians and the Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys. Part. Nucl.*, 24:35–58, 1993.
- [4] T. Hatsuda and T. Kunihiro. QCD Phenomenology based on a Chiral Effective Lagrangian. *Phys. Rep.*, 247(5-6):221–367, 1994.
- [5] Chr. V. Christov, A. Blotz, H.-C. Kim et al. Baryons as non-topological chiral solitons. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 37:91–191, 1996.
- [6] R. Alkofer, H. Reinhardt and H. Weigel. Baryons as Chiral Solitons in the Nambu–Jona-Lasinio Model. *Phys. Rep.*, 265:139–252, 1996.
- [7] G. Ripka. *Quarks Bound by Chiral Fields: The quark structure of the vacuum and of light mesons and baryons*. Oxford University Press, 1997.
- [8] E. Ruiz Arriola. Pion structure at high-energies and low-energies in chiral quark models. *Acta Phys. Polon.*, 33(hep-ph/0210007):4443–4479, 2002.
- [9] M. Gell-Mann and M. Lévy. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 16(4):705–726, 1960.
- [10] A. L. Mota, M. C. Nemes, B. Hiller and H. Walliser. Meson properties in a renormalizable version of the NJL model. *Nucl. Phys. A*, 652:73, 1999.
- [11] K. Langfeld, C. Kettner and H. Reinhardt. A renormalizable extension of the NJL-model. *Nuclear Physics A*, 608(3):331–355, 1996.

- [12] E. Ruiz Arriola and W. Broniowski. Spectral quark model and low-energy hadron phenomenology. *Physical Review D*, 67(7):074021, 2003.
- [13] E. Megias, E. Ruiz Arriola, L. L. Salcedo and W. Broniowski. Low-energy chiral Lagrangian from the spectral quark model. *Physical Review D*, 70(3):034031, 2004.
- [14] R. Jackiw. When radiative corrections are finite, but undetermined. *International Journal of Modern Physics B*, 14(19n20):2011–2021, 2000.
- [15] A. P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes and B. Hiller. Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework. *Physical Review D*, 64(4):046013, 2001.
- [16] R. Delbourgo and P. West. A gauge covariant approximation to quantum electrodynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 10(6):1049, 1977.
- [17] R. Delbourgo. The gauge technique. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 49(4):484–496, 1979.
- [18] W. Broniowski and E. Ruiz Arriola. Pion–photon transition distribution amplitudes in the spectral quark model. *Physics Letters B*, 649(1):49–56, 2007.
- [19] E. Ruiz Arriola, W. Broniowski and B. Golli. Chiral solitons in the spectral quark model. *Physical Review D*, 76(1):014008, 2007.
- [20] E. Megias, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo. Chiral lagrangian at finite temperature from the polyakov-chiral quark model. *Physical Review D*, 74(11):114014, 2006.
- [21] L. C. Ferreira and A. L. Mota. Axial-vector coupling and chiral anomaly in the spectral quark model. *Physical Review D*, 79(8):085002, 2009.
- [22] Eduardo Antonio dos Reis. Modelo Espectral de Quarks $SU(3)_f$. 2015. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física associação ampla UNIFAL/UFLA/UFSJ - Universidade Federal de São João Del-Rei, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Orientador: André Luiz Mota, Co-orientador: Edson Wander Dias.
- [23] E. A. Reis, A. L. Mota and E. W. Dias. Ward identities and the analogous Goldberger-Treiman relation in a three-flavor Spectral Quark Model. *Journal of Physics: Conference Series*, 706(5):052012, 2016.
- [24] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. In *Murray Gell-Mann: Selected Papers*, pages 151–152. World Scientific, 2010.
- [25] G. Zweig. An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking. Technical report, CM-P00042884, 1964.

- [26] Chen-Ning Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical review*, 96(1):191, 1954.
- [27] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories Third Edition*, volume 78. World Scientific Publishing Company, 2009.
- [28] M. Lavelle and D. McMullan. Constituent quarks from QCD. *Physics Reports*, 279(1):1–65, 1997.
- [29] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. In *Fifty Years of Mathematical Physics: Selected Works of Ludwig Faddeev*, pages 157–158. World Scientific, 2016.
- [30] Matthias Neubert. Les Houches Lectures on Renormalization Theory and Effective Field Theories. *arXiv preprint arXiv:1901.06573*, 2019.
- [31] D. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [32] A. Zee. Study of the Renormalization Group for Small Coupling Constants. *Phys. Rev. D*, 7:3630–3636, Jun 1973.
- [33] J. Goldstone. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 19(1):154–164, 1961.
- [34] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, Aug 1962.
- [35] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [36] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [37] Y. Takahashi. On the generalized ward identity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 6(2):371–375, Aug 1957.
- [38] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [39] Volker Koch. Aspects of Chiral Symmetry. *International Journal of Modern Physics E*, 6(02):203–249, 1997.
- [40] M. L. Goldberger and S. B. Treiman. Decay of the Pi Meson. *Phys. Rev.*, 110:1178–1184, Jun 1958.
- [41] A. H. Blin, B. Hiller and M. Schaden. Electromagnetic form factors in the nambu-jona-lasinio model. *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, 331(1):75–82, 1988.

- [42] S. P. Klevansky and R. H. Lemmer. Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory. *arXiv hep-ph/9707206*, 1997.
- [43] C. McNeile, A. Bazavov, C. T. H. Davies et al. Direct determination of the strange and light quark condensates from full lattice QCD. *Phys. Rev. D*, 87:034503, Feb 2013.
- [44] V. M. Belyaev and B. L. Ioffe. Determination of Baryon and Baryonic Resonance Masses from QCD Sum Rules. Nonstrange Baryons. *Sov. Phys. JETP*, 56:493–501, 1982.
- [45] B. L. Ioffe. Condensates in quantum chromodynamics. *Phys. Atom. Nucl.*, 66:30–43, 2003.
- [46] B. L. Ioffe and K. N. Zyablyuk. Gluon condensate in charmonium sum rules with three-loop corrections. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 27(2):229–241, 2003.
- [47] T. Okabayashi. The Goldberger-Treiman Relation and Its Kaon Analogue as a Non-Group-Theoretical Kinematics Generating an SU(3) Symmetry. *Progress of Theoretical Physics*, 41(6):1566–1577, 1969.
- [48] H. Pagels and S. Stokar. Pion decay constant, electromagnetic form factor, and quark electromagnetic self-energy in quantum chromodynamics. *Physical Review D*, 20(11):2947, 1979.
- [49] K. A. Olive et al. Review of particle physics. *Chinese Physics C*, 38(9):090001, 2014.
- [50] V. B. Jovanović, S. R. Ignjatović, D. Borika and P. Jovanović. Constituent quark masses obtained from hadron masses with contributions of fermi-breit and glozman-riska hyperfine interactions. *Physical Review D*, 82(11):117501, 2010.
- [51] S. R. Amendolia et al. A measurement of the space-like pion electromagnetic form factor. *Nuclear Physics B*, 277:168–196, 1986.
- [52] André Luiz Mota. O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio como uma Teoria Quântica de Campos. 1999. Tese de doutorado. Pós-Graduação em Física - Universidade Federal de Minas Gerais. Orientadora: Maria Carolina Nemes.
- [53] N. Zovko. Pion and kaon form factors and heavy vector mesons. *Physics Letters B*, 51(1):54–56, 1974.
- [54] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl and W. Weise. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model: (I). Mesonic modes. *Nuclear Physics A*, 516(3-4):429–468, 1990.
- [55] S. R. Amendolia et al. A measurement of the kaon charge radius. *Physics Letters B*, 178(4):435–440, 1986.
- [56] E. Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3):186–207, 1971.