

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS

Thiago Bissiatte Monteiro

DIFUSÃO ANÔMALA DE UM FLUIDO EM CONDUTO COM
SUPERFÍCIES PLANAS VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

Ouro Branco
2021

Thiago Bissiatte Monteiro

DIFUSÃO ANÔMALA DE UM FLUIDO EM CONDUTO COM
SUPERFÍCIES PLANAS VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de pós-graduação em física - UFSJ-UNIFAL – Campus Alto Paraopeba como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Sistemas não lineares
Orientador: Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira
Coorientador: Alexandre C.L. Almeida

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno e orientada pelo Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MULTICÊNTRICO EM QUÍMICA

NOMEAÇÃO DE BANCA EXAMINADORA Nº 6 / 2021 - PPGMQ (13.31)

Nº do Protocolo: 23122.006607/2021-55

São João Del-rei-MG, 08 de março de 2021.

São João del-Rei, 03 de março de 2021.

A dissertação "**Difusão Anômala de um Fluido em Conduto com Superfícies Planas via Cálculo Fracionário**" elaborada por **Thiago Bissiatte Monteiro** e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

BANCA EXAMINADORA:

Assinado digitalmente

Prof. Dr. Adécio Carlos de Oliveira

Orientador

"Assinado por concordância de acordo com ata de defesa realizada por videoconferência"

Prof. Dr. Antônio Francisco Neto - UFOP

Assinado digitalmente

Profa. Dra. Letícia Ribeiro Paiva - UFSJ

(Assinado digitalmente em 08/03/2021 16:06)
ADELCIO CARLOS DE OLIVEIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1673516

(Assinado digitalmente em 09/03/2021 08:42)
LETICIA RIBEIRO DE PAIVA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1848861

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **6**, ano: **2021**, tipo: **NOMEAÇÃO DE BANCA EXAMINADORA**, data de emissão: **08/03/2021** e o código de verificação: **e6e701d33a**

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M775d Monteiro, Thiago Bissiatte .
DIFUSÃO ANÔMALA DE UM FLUIDO EM CONDUTO COM
SUPERFÍCIES PLANAS VIA CALCULO FRACIONÁRIO / Thiago
Bissiatte Monteiro ; orientador Prof. Dr. Adélcio
Carlos de Oliveira; coorientador Alexandre C.L.
Almeida. -- Ouro Branco, 2021.
107 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2021.

1. Difusão anômala. 2. Superfícies planas. 3.
Cálculo fracionário. 4. Camada limite térmica. 5.
Placa plana. I. Oliveira, Prof. Dr. Adélcio Carlos
de, orient. II. Almeida, Alexandre C.L. , co-orient.
III. Título.

"É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota."

Theodore Roosevelt

À minha mãe, Palmira.

Agradecimentos

Aos meus familiares e minha esposa Lidiana pela compreensão devido aos momentos de ausência.

Ao Prof. Dr. Adécio Carlos de Oliveira, pela grande dedicação, paciência e empenho ao longo dessa caminhada.

Ao Prof. Dr. Alexandre C.L. Almeida, pela ajuda na implementação dos códigos.

Ao Prof. Dr. José Eloy Ottoni, que me alicerçou quanto ao Cálculo Fracionário.

À UFSJ - Campus Alto Paraopeba e ao PPGF, pela oportunidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Lista de Símbolos

x componente cartesiana na direção "x"

y componente cartesiana na direção "y"

u velocidade do fluido na direção de "x"

v velocidade do fluido na direção de "y"

η variável similar

h coeficiente de transferência de calor por convecção

Gr número de Grashof

Re número de Reynolds

Pr número de Prandtl

Pe número de Peclet (RePr)

Sc número de Schmidt

g aceleração da gravidade

u_∞ valor limite para a corrente livre, regime fora da camada limite.

c_p calor específico a pressão constante

c_v calor específico a volume constante

C_{fx} coeficiente de arraste ou de atrito

τ tensões de cisalhamento

δ espessura da camada limite

δ_t espessura da camada limite térmica

ρ densidade do fluido

μ viscosidade dinâmica

ν viscosidade cinemática

k constante de difusão

g aceleração da gravidade

t tempo, s

g_c constante gravitacional, $1 \text{ kg} \cdot \text{m}/(\text{N} \cdot \text{s}^2)$

\dot{M}_i taxa de transferência de massa da espécie i , kg/s

\dot{m} vazão mássica, kg/s

σ_{ii} tensão normal, N/m^2

τ_{ij} tensão de cisalhamento, N/m^2

L comprimento da placa

T temperatura, k

T_s temperatura na superfície da placa

T_∞ valor limite para a temperatura, regime fora da camada limite.

V_∞ valor limite para velocidade, regime fora da camada limite / Velocidade do escoamento de aproximação

\dot{q} taxa de geração de energia por unidade de volume, W/m^3

\dot{q}' taxa de transferência de calor por unidade de comprimento, W/m

q''_s Fluxo térmico na superfície, W/m^2

Θ diferença de temperaturas, k

ψ função de corrente

* média molar; grandeza adimensional

$\frac{\partial f}{\partial x}$ derivada parcial de uma função em relação a variável x

$\frac{\partial f}{\partial y}$ derivada parcial de uma função em relação a variável y

\iint_{SC} integral dupla na superfície de controle

\iiint_{VC} integral tripla no volume de controle

\dot{E} taxa de transferência de energia

\dot{W} taxa na qual o trabalho é realizado

Γ função gamma

Sumário

1	Introdução	1
2	Escoamento da Camada Limite	4
2.1	A Camada Limite Térmica	5
2.2	As Equações de Camada Limite	7
2.2.1	Equação Diferencial da Continuidade	7
2.2.2	Segunda Lei do Movimento de Newton	9
2.2.3	Conservação da Energia	15
2.2.4	Parâmetros da Camada Limite	18
2.3	Placa plana infinita: Solução de Blasius	22
2.3.1	Camada Limite de Velocidade	28
3	Equações Fracionárias	32
3.0.1	Conceitos Iniciais	36
3.0.2	A integral de Riemann-Liouville de ordem fracionária	43
3.0.3	Formulação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov	44
3.0.4	Formulação da derivada fracionária de Riemann-Liouville	45
3.0.5	Formulação da derivada fracionária de Caputo	46
3.0.6	Aplicações do Cálculo Fracionário	47
3.1	Método de Otimização	59
3.2	Abordagem Numérica	60
4	Aplicando o Cálculo Fracionário na camada limite e os efeitos da difusão anômala	64
5	Considerações Finais	73
	Apêndice A O método de Runge-Kutta	82

Apêndice B	Cinemática de um fluido newtoniano	85
Apêndice C	Soluções de equações diferenciais por meio de Otimização	89
Apêndice D	Algoritmo usado no MATLAB para obtenção dos valores no Método de Otimização de Parâmetros	96
Apêndice E	FC - Função	104
Apêndice F	PSI - Função	105
Apêndice G	Função Mittag-Leffer	107

Lista de Figuras

2.1	Perfil de velocidade na camada limite, onde sua espessura (δ) cresce ao longo da componente x da velocidade do fluido u . Figura retirada [3]	4
2.2	Perfil da camada limite térmica sobre uma placa plana isotérmica, a medida que sua espessura δ_t cresce ao longo dos gradientes de temperatura. Figura retirada [3]	6
2.3	Tensões cisalhantes (τ_{xy}) e normais (σ_{xx}) viscosas dado um volume de controle diferencial de um escoamento bidimensional.	9
2.4	Representação dos índices refere-se às Tensões Normais (σ_{xx}) e à Tensão de Cisalhamento τ_{xy} na superfície de um fluido.	10
2.5	Tipos de movimento em um fluido.	10
2.6	Fluxos de momento para um volume de controle diferencial em um escoamento bidimensional de um fluxo viscoso.	12
2.7	Deformações de um elemento de fluido devido a tensões viscosas. (a) Deformação linear devida à tensão normal (σ). (b) Deformação angular devida a tensões de cisalhamento (τ).	13
2.8	Volume de controle diferencial para a conservação da energia em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso com transferência de calor.	15
2.9	As duas linhas de corrente, Ψ_2 e Ψ_0 , demonstrada em um elemento de volume onde não há velocidade perpendicular para linhas de corrente constantes.	24
3.1	Função Gama e seu inverso.	37
3.2	Área de integração de tipo 1.	43
3.3	Área de integração de tipo 2.	44
3.4	Oscilador harmônico fracionário, Ottoni (2018) [44].	51
3.5	Plano de fase para α variando de 1 a 2, Ottoni (2018) [44].	53
4.1	Obj x z, Oliveira (2018) [37].	67

4.2	Obj x z, Monteiro et al. (2018) [55].	67
4.3	Perfis de Velocidade, $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$	69
4.4	Diferença entre os perfis de velocidade	70
4.5	Curvas de temperatura $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$	71
4.6	Diferenças ente as curvas de Temperatura	71
C.1	Função objetivo $O_f(\Omega)$ da frequência natural	95

Resumo

Diante de um escoamento sobre qualquer superfície, existirá sempre uma camada limite de velocidade e, portanto, atrito na superfície. Da mesma forma, uma camada limite térmica e, assim, transferência de calor por convecção estarão sempre presentes se houver diferença entre as temperaturas na superfície e na corrente livre. Nesta dissertação, é estudada a Equação de Blasius por meio de soluções numéricas. Ao combinar o procedimento de otimização e o método do chute, há de se notar que aquele mostrou-se eficaz na solução da equação de Blasius. Tal equação foi sistematizada, formando, assim, um eficiente método para resolver sistemas não-lineares de equações diferenciais, ou seja, transformando um problema de contorno em um problema de valor inicial. Tal metodologia aplicada à equação de Blasius, percebeu-se uma grande suscetibilidade às condições iniciais perante aos resultados apresentados. Mediante tais soluções, a camada limite exige uma solução altamente precisa dos valores iniciais. Por fim, análise dos resultados obtidos no MATLAB na equação térmica da camada limite, por meio de uma função objetivo, na qual sua solução representa difusão anômala, por meio do Cálculo Fracionário, obteve uma solução significativa do mesmo modo que a realização de uma análise fenomenológica dos eventos transcorridos.

Capítulo 1

Introdução

A descrição do fluxo de convecção livre, cujo estado é estacionário em torno de uma placa plana, consiste em um problema que há muito tempo vem sendo abordado em livros de ensino superior e pela sociedade acadêmica, Incropera et al. (2011), Schlichting (2000) [3, 4]. A convecção inclui transferência de energia pelo movimento global do fluido (advecção) e pelo movimento aleatório das moléculas do fluido (condução ou difusão) [3, 4]. Diante dos trabalhos publicados por Blasius [5] e por Ostrach [6], observa-se que essa proposição vem sendo exaustivamente estudada pela comunidade científica, tanto numericamente por Fazio (1992), Fazio (2009), Rubel (1955), Eftekhari e Jafari (2014) [7, 8, 9, 10], quanto analiticamente Beong (2014), Liao (1998), Bougoffa e Wazwaz (2015) [11, 12, 13, 14]. Os métodos utilizados por Ostrach e Blasius foram baseados no artigo de Prandtl [15], onde foi admitido que o gradiente da velocidade é maior em toda a camada do que ao longo dela, tendo como decorrência a redução das equações de fluxo viscoso, obtendo, assim, uma equação mais simples. Blasius assume um fluxo constante de um fluido newtoniano com forças corporais desprezíveis à pressão constante no qual pode-se verificar que a espessura da camada limite não depende da temperatura, mas a temperatura é uma função dela. Já para Ostrach, suas equações diferenciais são alicerçadas na hipótese de um gradiente constante de pressão e expansão térmica linear, obtendo, assim, mutualidade entre as funções da camada limite e da temperatura.

A exposição proposta por Ostrach carrega consigo um rigor matemático mais complexo quando comparada a de Blasius, o que gera uma consequência nas aproximações dos resultados, tendo um comportamento mais rico e mais sensível à precisão numérica, Oliveira e Almeida (2019) [31].

Yiqin (2018) [20] apresentou resultados sobre um fluxo flutuante em um ca-

nal vertical diferencialmente aquecido localizado dentro de uma cavidade de água. Eiyad-Abu (2010) [21] fez uso da dinâmica de partículas dissipativas com a conservação de energia (eDPD) para investigar a convecção natural via problema de Reyleigh-Bérnard. Georges et al. (1999) [22] propuseram um modelo que justifica a viscosidade da superfície já introduzida como parâmetro fenomenológico, cujo foco foi a dinâmica da superfície de cristais líquidos nemáticos.

Juntamente a esses estudos, devemos associar o estudo da difusão no problema da camada limite, no qual se percebe anomalias nos fenômenos de transporte, como variação das propriedades físicas no meio onde ocorre a difusão.

Vieira e Oliveira (2017), Oliveira et al. (2016), Vieira e Oliveira (2014), Moura et al. (2014) [51, 52, 53, 69], investigaram a solução para o estado estacionário da equação da difusão fracionária aplicada à eletrodiálise, tanto para um modelo em uma dimensão quanto para coordenadas cilíndricas. A partir desses modelos propostos, foi possível obter uma solução analítica generalizada, em que os parâmetros de difusão anômala na presença de um campo externo podem ser incluídos. Tal solução pode ser realizada por meio das ferramentas do Cálculo Fracionário em termos da função de Mittag-Leffler, Vieira e Oliveira (2017) [69].

Algumas ferramentas estatísticas podem mostrar-se presentes no estudo da camada limite e, ao analisá-las, observa-se uma correlação do campo de velocidade do fluido turbulento, que, naturalmente, pode ser obtido da própria dinâmica do sistema. Seguindo essa linha, de modo geral, Almeida e Oliveira (2018) [50], na teoria padrão da lubrificação, que leva a uma equação parabólica não linear de quarta ordem do modelo descrito por Myers (1998) e Myers (1996) [70, 71], ressaltaram que o processo de retenção-difusão é na verdade o conhecido processo de difusão com “retenção” ou difusão com “hesitação”, e esse tipo de passeio aleatório não leva a difusão anômala, o que acarreta como um caso particular do modelo de Meyer (1908) [54] para o estudo de tensões em superfícies de filmes finos. Esse tipo de modelo, conforme apontado por Tehseen e Broadbridge (2012) [72], tem sido usado para estudar difusão anômala.

Existem diversos modelos de otimização, por exemplo o Algoritmo Genético. Entretanto, tal modelo possui um *overhead* computacional mediante seu controle incessante dos parâmetros do algoritmo para obter uma rápida convergência. Dentro dessa ótica, o Método de Otimização de Parâmetros Sequenciais (INVASO) vem se destacando como solução para equações dife-

rencias de 4^a ordem ou superior, como pode-se notar nos seguintes trabalhos já publicados Almeida e Oliveira (2019), Oliveira (2019), Oliveira (2018), Xavier e Oliveira (2018), Oliveira e Almeida (2018) [31, 32, 37, 39, 50]. Perante tais citações, fica evidente que o problema da difusão ainda permanece em aberto dentre diversas óticas.

O objetivo geral desta dissertação é abordar por meio do Método de Otimização de Parâmetros junto ao Cálculo Fracionário o problema da camada limite. Aqui podemos destacar em linhas gerais uma breve sequência para este trabalho: apresentação do Método de Otimização de Parâmetros; desenvolvimento de um algoritmo no MATLAB para simulações; demonstração da Equação de Blasius; e solução de problemas clássicos na literatura. Cabe ressaltar que a construção do algoritmo foi realizada com o apoio da orientação e coorientação.

Esta dissertação tem por objetivo específico apresentar um método de otimização com intuito de buscar soluções numéricas dos sistemas de equações diferenciais não-lineares, que possuem resultados analíticos árduos ou até mesmo impossíveis com condições de contorno no infinito via Aproximação do Problema de Valor Inicial pelo Método de Otimização de Parâmetros Sequenciais (IVASO). Um outro objetivo específico será analisar a solução da equação de Blasius por meio do Cálculo Fracionário com o qual levantamos hipóteses dos resultados apresentados frente aos fenômenos físicos envolvidos.

Esta dissertação possui a seguinte estrutura: No capítulo 2, são apresentados o Método de Otimização de Parâmetros bem como a escolha da função objetivo. Em uma subseção, apresentamos a demonstração da Equação de Blasius. No Capítulo 3, uma contextualização sobre o Cálculo Fracionário concatenado à apresentação de soluções de problemas conforme literatura. Os capítulos 4 e 5 apresentam as soluções de equações diferenciais não-lineares via Aproximação do Problema de Valor Inicial em conjunto com suas soluções fracionárias por meio do programa MATLAB. As conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

Escoamento da Camada Limite

A definição de camadas limite é fundamental para o entendimento do estudo em transferências de calor e massa por convecção, onde há um movimento relativo entre o escoamento de um fluido quando entra em contato com uma superfície.

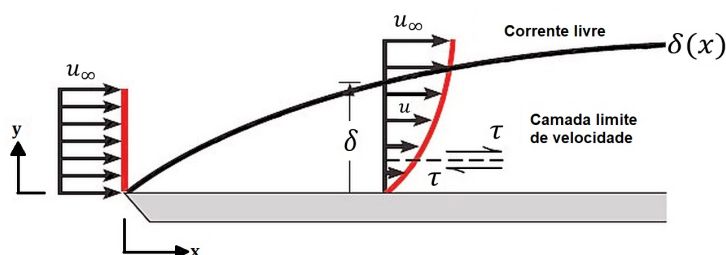


Figura 2.1: Perfil de velocidade na camada limite, onde sua espessura (δ) cresce ao longo da componente x da velocidade do fluido u . Figura retirada [3]

Um dos grandes avanços na mecânica dos fluidos ocorreu em 1904 e foi realizado a partir dos trabalhos do físico alemão Ludwig Prandtl (1875-1953). Ele concebeu a ideia da camada limite, região muito fina e adjacente à superfície do corpo onde os efeitos viscosos são muito importantes. Fora da camada limite, o fluxo se comporta como se fosse um fluido sem viscosidade. É claro que a viscosidade dinâmica é a mesma em todo o escoamento. Assim, somente a importância relativa de seus conceitos (devido aos gradientes de velocidade) é diferente dentro ou fora da camada limite, Munson (2004) [41]. Essa teoria é fundamentada no pressuposto de um elevado valor do número de

Reynolds, assim os efeitos viscosos só serão importantes na região da camada limite (e na região da placa plana).

Analisando as partículas do fluido ao entrarem em contato com a superfície, elas passam a ter velocidade igual a zero. Essas partículas atuam, então, no retardamento do movimento das partículas na camada de fluido adjacente, que atuam no retardamento do movimento das partículas da próxima camada e assim, sucessivamente, até que, a uma distância $y = \delta$ da superfície, o efeito se torna desprezível. Esse retardamento do movimento do fluido está associado às tensões de cisalhamento (τ) que atuam em planos que são paralelos à velocidade do fluido. Com o aumento da distância y da superfície, o componente x da velocidade do fluido, u , deve, então, aumentar até atingir o valor na corrente livre, u_∞ . O subscrito ∞ é usado para designar condições na *corrente livre*, fora da camada limite conforme a figura 2.1.

A grandeza δ é chamada de espessura da camada limite e é, tipicamente, definida como o valor de y para o qual $u = 0,99u_\infty$. O perfil de velocidades na camada limite se refere à maneira como u varia com y através da camada limite. Com o aumento da distância da aresta frontal da placa, os efeitos da viscosidade penetram cada vez mais na corrente livre e a camada limite aumenta (δ aumenta com x).

Como está relacionada à velocidade do fluido, a camada limite descrita anteriormente pode ser chamada de camada limite de velocidade. Ela se desenvolve sempre que há escoamento de um fluido sobre uma superfície, que aqui abordaremos como superfície plana Incropera et al. (2011) [3]. O termo "corrente livre" trata-se de uma função de corrente, cujo importante significado físico será explicado nas subseções seguintes. Adicionado a isso, vamos considerar o caso de um escoamento bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido isotérmico e de propriedades viscosas (μ) e densidade (ρ) constantes.

2.1 A Camada Limite Térmica

Analogamente à formação da camada limite de velocidade, quando há escoamento de um fluido sobre uma superfície, uma camada limite térmica deve ocorrer caso haja uma diferença entre as temperaturas do fluido na corrente livre e da superfície. Consideremos uma placa plana isotérmica conforme Figura 2.2. Na borda frontal, o perfil de temperaturas é uniforme, com $T(y) = T_\infty$. Entretanto, as partículas do fluido que entram em contato com a placa atingem o equilíbrio térmico na temperatura da superfície da mesma. Por sua vez, essas partículas trocam energia com as da camada de fluido ad-

jacente e há o desenvolvimento de gradientes de temperatura no fluido. A região do fluido na qual há esses gradientes de temperatura é a camada limite térmica e a sua espessura δ_t é definida como a distância a partir da superfície na qual a diferença de temperatura entre a parede e o fluido atinge 99% do valor do fluxo livre. Com o aumento da distância da aresta frontal, os efeitos da transferência de calor penetram cada vez mais na corrente livre e a camada limite térmica cresce.

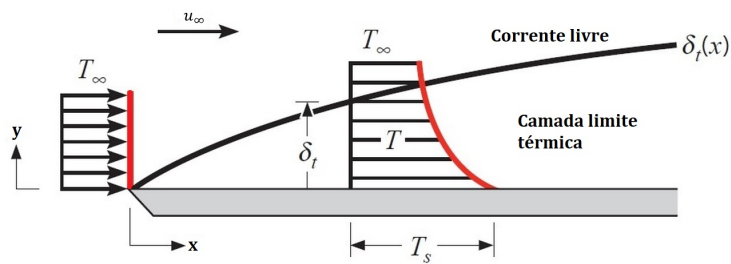


Figura 2.2: Perfil da camada limite térmica sobre uma placa plana isotérmica, a medida que sua espessura δ_t cresce ao longo dos gradientes de temperatura. Figura retirada [3]

Tais relações entre as condições para esta camada limite e o coeficiente de transferência de calor por convecção podem ser facilmente demonstráveis. Dada uma distância x da aresta frontal, em que T_s representa a temperatura na superfície da placa, o fluxo térmico na superfície pode ser obtido utilizando a Lei de Fourier em $y = 0$, onde k_f é uma propriedade de transporte conhecida como condutividade térmica, que é uma característica do material. Dessa forma, temos:

$$q_s'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.1)$$

Como na superfície não há movimento de fluido e a transferência de energia se dá unicamente por condução, podemos recorrer à Lei de resfriamento de Newton:

$$q_s'' = h(T_s - T_\infty) \quad (2.2)$$

onde h representa o coeficiente de transferência de calor por convecção e combinando essa equação (2.2) com a equação (2.1), teremos:

$$h = \frac{-k_f \partial T / \partial y|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (2.3)$$

Assim, as condições no interior da camada limite térmica, que afeta o gradiente de temperatura na superfície $\partial T / \partial y|_{y=0}$, determina a taxa de transferência de calor pela superfície. Analisando a constante $(T_s - T_\infty)$, visto sua independência em relação ao eixo x , enquanto δ_t cresce com o aumento de x os gradientes de temperatura devem diminuir com o aumento de x . Podemos então concluir que o valor $\partial T / \partial y|_{y=0}$ diminui com o aumento de x e tem-se que q_s'' bem como h , diminuem com o aumento de x , Incropera et al. (2011) [3].

2.2 As Equações de Camada Limite

Com o intuito de melhorar nossa percepção do estudo da camada limite, podemos demonstrar sua importância para o transporte convectivo ao analisar as equações que governam suas condições na camada limite, como aquelas representadas nas Figuras 2.1 e 2.2. Nas próximas subseções, vamos dedicar ao estudo das equações diferenciais da conservação da massa, de quantidade de movimento e de energia no escoamento de um fluido.

2.2.1 Equação Diferencial da Continuidade

A lei de conservação de massa, onde ρ é a densidade de massa (massa por unidade de volume) e \vec{V} é a velocidade do fluido, pode ser expressa pela seguinte equação

$$\iint_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA = \iiint_{VC} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv \quad (2.4)$$

A equação integral da continuidade (2.4) afirma que, um fluxo líquido de massa ao atravessar a superfície de controle (SC) de um volume de controle (VC) é instantaneamente coincidente com o sistema em causa igual à taxa de variação de massa no interior do referido volume de controle, Lopes e Oliveira (2016) [40]. A parcela à esquerda da equação (2.4) se refere ao produto da densidade do fluido (ρ) pelo produto escalar do vetor campo de velocidade (\vec{V}) com o vetor normal unitário (\hat{n}), cuja curva bidimensional é um vetor que tem módulo igual a 1 e é perpendicular à superfície do campo de velocidade pelo produto elemento de área (dA). Já a parcela da direita, representa uma

integral tripla da derivada da densidade do fluido em relação ao tempo pelo elemento de volume.

A integral da superfície do primeiro membro pode ser convertida em integral de volume por utilização do teorema de Gauss.

$$\iiint_{VC} (\nabla \cdot \rho \vec{V}) dv = \iiint_{VC} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv \quad (2.5)$$

Os limites de integração são, agora, idênticos em ambos os membros da igualdade. Assim, dada a identificação das expressões contidas nos sinais de integração, temos:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.6)$$

As equações descritas anteriormente possuem dimensões de massa por unidade de volume e de tempo. Contudo, nessa situação, referi-se à unidade de volume de um volume elementar do fluido de escoamento.

Desenvolvendo a equação (2.6), o divergente pode ser reescrito da seguinte forma para a equação diferencial da continuidade e como a densidade ρ não varia no espaço, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (2.7)$$

Assumindo que o fluido seja incompressível, característica esta que sua densidade permanece constante com o tempo, bem como possui a capacidade de se opor a compressão, isso permite dizer que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Dividindo ambos os lados por ρ , o divergente do campo de velocidade fica igual a zero, cuja interpretação geométrica indica o quanto ele se "espalha" (diverge) a partir da borda de ataque da placa plana.

$$\rho = cte \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.8)$$

Adotando um sistema de coordenadas cartesianas, essa igualdade se torna como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

onde u é a componente em x , e v é a componente em y , ambas se referindo à velocidade do fluido.

2.2.2 Segunda Lei do Movimento de Newton

Considere um volume de controle diferencial no fluido, 2.3. Observa-se que a soma de todas as forças que atuam sobre o volume de controle deve ser igual à taxa líquida à qual o momento deixa o volume de controle (saída - entrada), Incropera et al. (2011) [3].

Há dois tipos de forças que podem atuar sobre o fluido: forças de corpo, que são proporcionais ao volume, e forças de superfície, que são proporcionais à área. Campos gravitacionais, magnéticos e/ou elétricos podem contribuir para a força de corpo total, e designamos por X e Y os componentes nas direções x e y , respectivamente, dessa força por unidade de volume do fluido. As forças de superfície F são devidas à pressão estática do fluido, assim como às tensões viscosas. Em qualquer ponto no interior do fluido, a tensão viscosa (uma força por unidade de área) pode ser decomposta em duas componentes perpendiculares, os quais incluem uma tensão normal (σ_{xx}) e uma tensão de cisalhamento (τ_{xy}), conforme podemos observar na Figura 2.3.

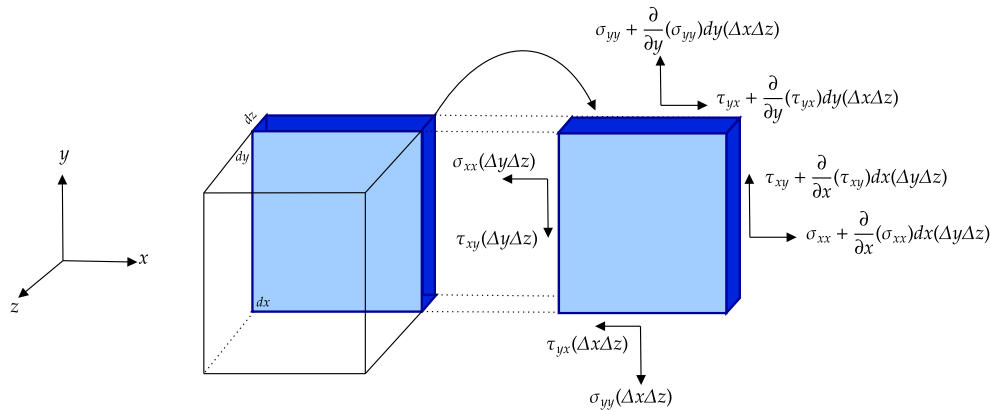


Figura 2.3: Tensões cisalhantes (τ_{xy}) e normais (σ_{xx}) viscosas dado um volume de controle diferencial de um escoamento bidimensional.

Os índices duplos referem-se às componentes de tensão, como podemos ver na figura 2.4:

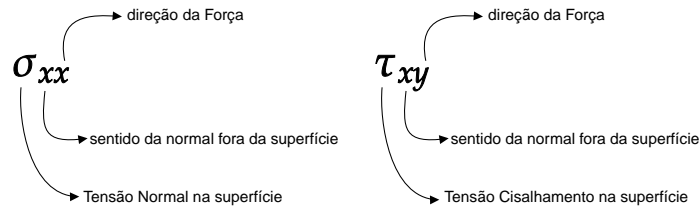


Figura 2.4: Representação dos índices refere-se às Tensões Normais (σ_{xx}) e à Tensão de Cisalhamento τ_{xy} na superfície de um fluido.

Um elemento de fluido está sujeito a diferentes tipos de movimentos, translação, rotação, deformação linear e deformação de cisalhamento, representados na figura 2.5:

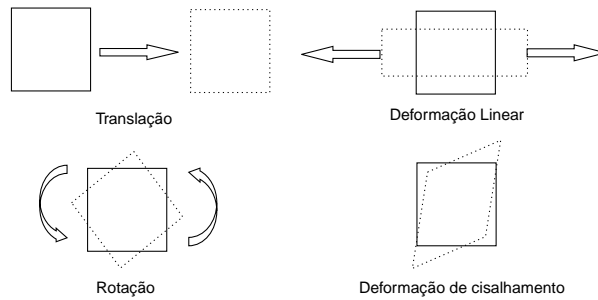


Figura 2.5: Tipos de movimento em um fluido.

Na Figura 2.3, juntamente com a Figura 2.5, percebe-se que todos os componentes de tensão, tanto a normal quanto a força, estão no mesmo sentido, sejam elas no positivo ou negativo de suas respectivas coordenadas. Isso nos leva a concluir que as tensões viscosas normais são tensões de tração. Por outro lado, temos que a pressão estática é originada pela força que atua externamente sobre um elemento de fluido volumétrico que representa, assim, uma tensão de compressão.

É importante descrever um pouco a tensão viscosa, que associada a uma força adjacente decorrente do próprio movimento do fluido e de sua viscosidade. Consideramos que as forças de superfície mostradas na Figura 2.3 atuam sobre o fluido adjacente. Essas tensões devem desaparecer se a velocidade do fluido,

ou o gradiente da velocidade, tender a zero. Nesse sentido, as tensões viscosas normais (σ_{xx} e σ_{yy}) não podem ser confundidas com a pressão estática, que não se reduz a zero na ausência de velocidade.

Cada uma dessas tensões pode variar continuamente em cada uma das direções coordenadas. Usando uma expansão em série de Taylor, podemos representar a força de superfície líquida para cada uma das duas direções por:

$$F_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.10)$$

$$F_{s,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.11)$$

Aplicando a segunda lei de Newton, devemos avaliar os fluxos de momento no fluido para o volume de controle. Se direcionarmos nossa atenção à direção x , os fluxos relevantes são mostrados na Figura 2.6. Uma contribuição para o fluxo de momento total à direção x é dada pelo escoamento de massa em cada uma das duas direções. Por exemplo, o fluxo de massa através da superfície x (no plano $y - z$) é (ρu) , e o fluxo de momento na direção x devido ao escoamento de massa através da superfície y (no plano $x - z$) é $(\rho v)u$. Esses fluxos podem variar em cada uma das direções coordenadas e a taxa líquida com que o momento na direção de x sai do volume de controle é:

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x} dx (dy) + \frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y} dy (dx)$$

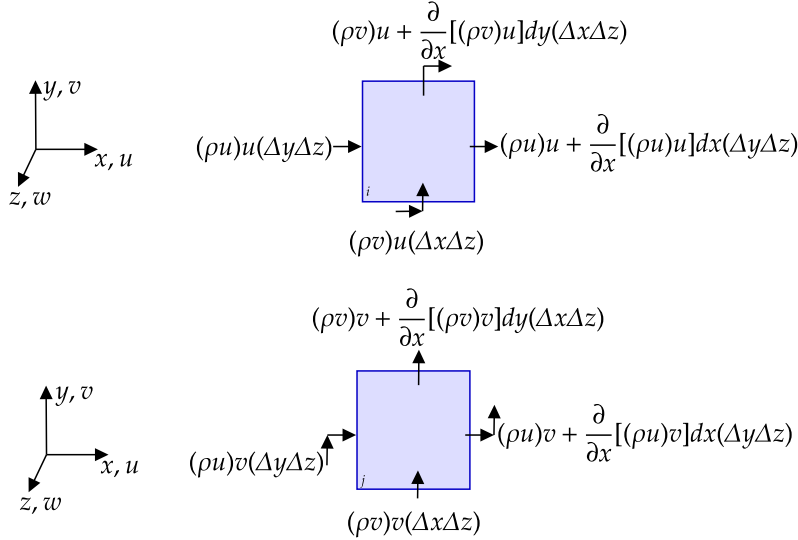


Figura 2.6: Fluxos de momento para um volume de controle diferencial em um escoamento bidimensional de um fluxo viscoso.

Igualando a taxa de variação do componente do momento do fluido na direção x à soma das forças que atuam nessa mesma direção, obtemos

$$\frac{\partial[\rho u]u}{\partial x} + \frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X \quad (2.12)$$

Pode-se reescrever essa equação (2.12) em uma forma mais conveniente ao efetuar as derivadas no lado esquerdo e substituir na equação da continuidade (2.9), obtendo,

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} - p) + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X \quad (2.13)$$

Para a direção y , temos:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy} - p) + Y \quad (2.14)$$

Retornando a camada-limite por meio das equações (2.13) e (2.14), as duas parcelas no lado esquerdo de cada equação representam a taxa líquida de saída de momento do volume de controle. As parcelas no lado direito levam em consideração as forças líquidas viscosas e de pressão, assim como as forças

de corpo. Essas equações devem ser satisfeitas em cada ponto do fluido e, em conjunto com a equação (2.7), podem ser resolvidas para fornecer o campo de velocidades.

Antes que uma solução para as equações anteriores possa ser obtida, é necessário relacionar as tensões viscosas às outras variáveis do escoamento. Essas tensões estão associadas à deformação do fluido e são funções de sua viscosidade e dos gradientes de velocidade. Na Figura 2.7 (a) fica evidente que uma tensão normal deve produzir uma deformação linear no fluido, enquanto na figura 2.7 (b), uma tensão de cisalhamento produz uma deformação angular. Além disso, a magnitude de uma tensão é proporcional à taxa com que a deformação ocorre. A taxa de deformação está relacionada à viscosidade do fluido e aos gradientes de velocidade existentes no escoamento. Para um ¹fluido newtoniano, as tensões são proporcionais aos gradientes de velocidade, e a componente de proporcionalidade é a viscosidade do fluido. Entretanto, devido à sua complexidade, o desenvolvimento dessas relações específicas não será apresentado nesta dissertação e nos limitamos à sua apresentação. Contudo, tais demonstrações podem ser encontradas em Schlichting (2000) [73].

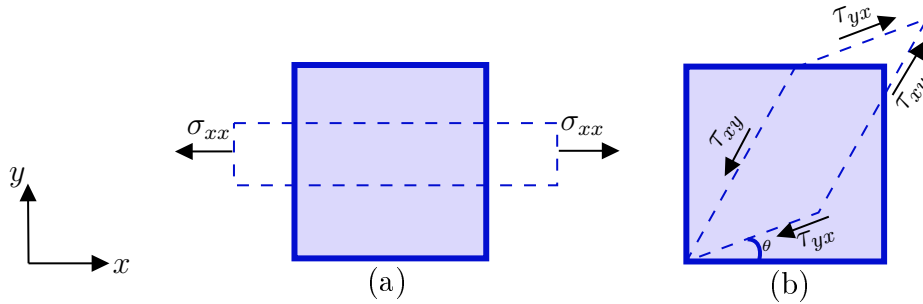


Figura 2.7: Deformações de um elemento de fluido devido a tensões viscosas. (a) Deformação linear devida à tensão normal (σ). (b) Deformação angular devida a tensões de cisalhamento (τ).

As equações que se seguem são as representações da tensão linear devida à tensão normal (σ_{xx}) e a deformação angular devida às tensões de cisalhamento (τ_{xy}). Já a variável μ é chamada de viscosidade de cisalhamento ou viscosidade, no qual suas respectivas demonstrações contidas no apêndice B carecem de algumas considerações. Diante disso temos que:

¹Um fluido newtoniano é aquele no qual a tensão cisalhante é proporcional de forma linear à taxa de deformação angular.

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.17) pelas equações (2.13) e (2.14), as equações para os componentes do momento nas direções x e y tornam-se:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + X \quad (2.18)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + Y \quad (2.19)$$

As equações (2.9), (2.18) e (2.19) fornecem uma representação completa das condições em um escoamento viscoso bidimensional e o campo de velocidades correspondente pode ser determinado pela resolução dessas equações. Uma vez conhecida o gradiente de velocidade por unidade de área em cada direção do fluxo livre, é possível obter a tensão de cisalhamento do fluido τ_s por meio da seguinte equação:

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.20)$$

As equações (2.18) e (2.19) podem ser simplificadas para um fluido incompressível com viscosidade constante. Substituindo o lado direito de cada equação na equação (2.20), as equações do momento nas direções x e y tornam-se:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + X \quad (2.21)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Y \quad (2.22)$$

2.2.3 Conservação da Energia

Para aplicar a conservação da energia em um volume de controle diferencial em um fluido viscoso com transferência de calor, vide Figura 2.8, é necessário, em primeiro lugar, verificar os processos físicos importantes aqui envolvidos, Incropera et al. (2011) [42]. Se os efeitos da energia potencial forem tratados como trabalho efetuado pelas forças de corpo, a energia por unidade de massa do fluido inclui a energia interna térmica (e) a energia cinética $V^2/2$, onde $V^2 \equiv u^2 + v^2$.

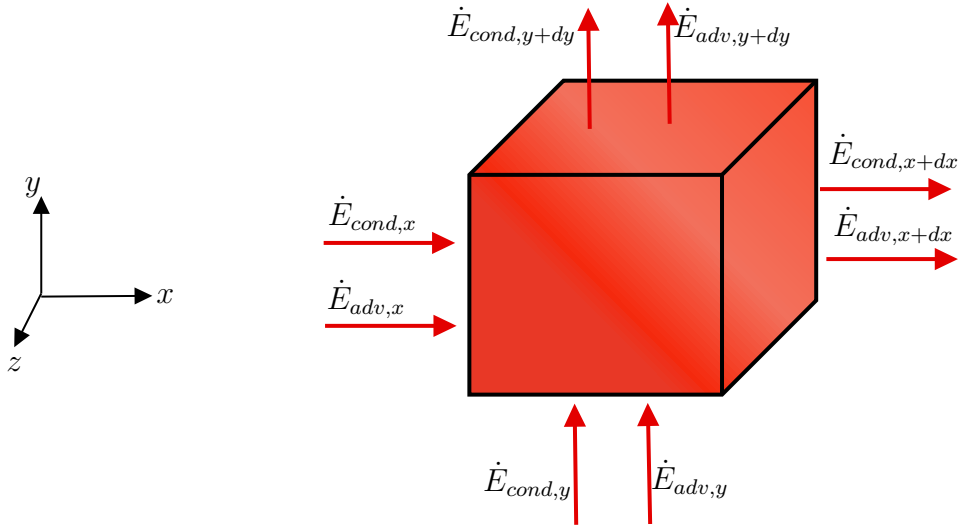


Figura 2.8: Volume de controle diferencial para a conservação da energia em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso com transferência de calor.

Assim, as energias térmica e cinética são transportadas pelo deslocamento de massa (advecção) do fluido através das superfícies de controle. A variação de energia que entra nesse volume de controle infinitesimal ao longo da coordenada x é dada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{adv,x} - \dot{E}_{adv,x+dx} &\equiv \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dy \\
 - \left\{ \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx \right\} dy & \quad (2.23) \\
 &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx dy
 \end{aligned}$$

Energia também é transferida através da superfície de controle por processos moleculares. Podem existir duas contribuições: por condução e por transferência de energia em função das espécies. Entretanto, somente em escoamentos quimicamente reativos é que a difusão mássica das espécies influencia fortemente as condições térmicas. Por isso, esse efeito é desprezado no presente desenvolvimento. Para o processo de condução, a transferência líquida de energia para o interior do volume de controle é:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} &= - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy \\ &- \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (2.24)$$

Energia também pode ser transferida para e a partir do fluido no interior do volume de controle por interações de trabalho, envolvendo forças de corpo e de superfície. A taxa líquida com a qual trabalho é efetuado sobre o fluido pelas forças na direção x pode ser representada por:

$$\dot{W}_{lq,x} = (Xu) dx dy + \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma_{xx} - p)u] dx dy + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}u) dx dy \quad (2.25)$$

A primeira parcela no lado direito da equação (2.25) representa o trabalho efetuado pela força de corpo e as parcelas restantes levam em consideração o trabalho líquido efetuado pelas forças de pressão e viscosas.

Usando as equações (2.23) a (2.25), assim como as equações análogas para a direção y , a exigência de conservação da energia pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} &- \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (Xu + Yv) - \frac{\partial}{\partial x} (pu) - \frac{\partial}{\partial y} (pv) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}u + \tau_{xy}v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}u + \sigma_{yy}v) + \dot{q} = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde \dot{q} é a taxa com a qual energia térmica é gerada por unidade de volume. Essa expressão fornece uma forma geral da exigência de conservação

de energia para o escoamento de um fluido viscoso com transferência de calor, Incropera et al. (2011) [42].

Como a equação (2.26) representa a conservação das energias cinética e interna térmica, ela é raramente usada na resolução de problemas de transferência de calor. Em seu lugar, uma forma mais conveniente, que é conhecida por equação da energia térmica, é obtida pela multiplicação das equações (2.13) e (2.14) por u e v , respectivamente, e pela subtração dos resultados da equação (2.26). Após uma manipulação algébrica que pode ser encontrada em Bird (1966) [74], tem-se que:

$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (2.27)$$

onde a parcela $-p(\partial u)/(\partial x) + (\partial v)(\partial y)$ representa uma conversão reversível entre o trabalho mecânico e a energia térmica, e $\mu \Phi$, a dissipação viscosa, é definida como:

$$\mu \Phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (2.28)$$

A primeira parcela no lado direito da equação (2.28) tem sua origem nas tensões de cisalhamento viscosas e as parcelas restantes aparecem em função das tensões normais viscosas. Em conjunto, as parcelas levam em consideração a taxa do trabalho mecânico, sendo este irreversivelmente convertido em energia térmica devido aos efeitos viscosos no fluido, Incropera et al. (2008) [42].

Se o fluido for incompressível, as equações (2.27) e (2.28) podem ser simplificadas pela substituição da equação (2.9). Além disto, com $de = c_v dT$ e $c_v = c_p$ para um fluido incompressível, a equação da energia térmica (2.27) pode então ser descrita na forma:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (2.29)$$

onde

$$\mu \Phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.30)$$

A equação da energia térmica pode também ser escrita em termos da entalpia do fluido i , em vez de se usar termos de sua energia interna e . Introduzindo a definição de entalpia,

$$i = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.31)$$

e utilizando a equação (2.9) para substituir a terceira parcela no lado direito da equação (2.27) por derivadas espaciais de p e (p/ρ) , podemos escrever a equação da energia na forma:

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (2.32)$$

O fato das tensões de cisalhamento em um fluido em equilíbrio estático ser zero já é familiar quando se discute a hidrostática, e é uma consequência do fato de que um fluido em equilíbrio estático não está sendo esticado por cisalhamento ou sofrendo deformações dilatacionais. Além disso, em equilíbrio estático, a tensão normal em uma superfície é igual à pressão "termodinâmica" ($-p_{th}$). O sinal de "menos" indica que a pressão é compressiva na superfície. A pressão termodinâmica é aquela que é encontrada a partir de uma equação de estado. Logo se o fluido puder ser aproximado como um gás perfeito, $d_i = c_p dT$, a equação (2.32) torna-se:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (2.33)$$

Ao observar as equações (2.21), (2.22) e (2.33) notamos uma certa similaridade. Na realidade, se o gradiente de pressão que aparece em (2.21) e o termo de dissipação viscosa na equação (2.33) forem desprezíveis, as três equações têm a mesma forma. Cada equação é caracterizada por termos relacionados à advecção no lado esquerdo e um termo difusivo no lado direito. Essa situação descreve escoamentos de convecção forçada a baixas velocidades, Incropera et al. (2011) [42].

2.2.4 Parâmetros da Camada Limite

Uma análise da ordem de grandeza dos diferentes termos destas equações requer uma adimensionalização prévia. Isso pode ser feito definindo o quociente $\eta^* = \eta/\eta_{ref}$, de uma variável genérica, η , pelo correspondente valor

tomado como referência, η_{ref} , que deverá ter uma ordem de grandeza unitária ($\eta^* = O(1)$), ou, o que é o mesmo, $-1 \leq \eta^* \leq 1$. Na descrição dos parâmetros, adotamos para referência das dimensões lineares, o comprimento característico da placa, L . Quanto às velocidades, a Figura 2.1 mostra que, para qualquer valor da coordenada local x , a componente x da velocidade, u , varia entre 0 (em $y = 0$) e V_∞ (para $y \geq \delta$). Seguindo essa lógica, essa verificação nos leva à aproximação da velocidade do escoamento de aproximação, V_∞ . As constantes, ρ e μ , não serão adimensionalizadas, mas podem intervir no processo de adimensionalização. Com base na massa volumétrica e na velocidade de referência, é agora possível construir um produto que tem as dimensões de uma pressão e que pode, portanto, ser usado como referência para a adimensionalização das pressões: ρV_∞^2 . Assim,

$$x^* = \frac{x}{L}; y^* = \frac{y}{L}; u^* = \frac{u}{V_\infty}; v^* = \frac{v}{V_\infty}; p^* = \frac{p}{V_\infty^2} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial(u/V_\infty)}{\partial(x/L)} = \frac{L}{V_\infty} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = \frac{L}{V_\infty} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= \frac{L}{V_\infty} \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{L}{V_\infty} \frac{\partial v}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) = \frac{L^2}{V_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} = \frac{L^2}{V_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} &= \frac{L^2}{V_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} = \frac{L^2}{V_\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

As expressões adimensionais procuradas resultam diretamente da substituição de (2.34), (2.35), (2.36) em (2.9) e (2.21):

$$\underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial x^*}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial v^*}{\partial y^*}}_{(1)} = 0 \quad (2.37)$$

$$\underbrace{u^*}_{(1)} \underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial x^*}}_{(1)} + \underbrace{v^*}_{(\delta^*)} \underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial y^*}}_{(1/\delta^*)} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\frac{1}{Re}}_{(\delta^{*2})} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}}_{(1/\delta^{*2})} \right) \quad (2.38)$$

$$\underbrace{u^*}_{(1)} \underbrace{\frac{\partial v^*}{\partial x^*}}_{(\delta^*)} + \underbrace{v^*}_{(\delta^*)} \underbrace{\frac{\partial v^*}{\partial y^*}}_{(1)} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \underbrace{\frac{1}{Re}}_{(\delta^{*2})} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}}_{(\delta^*)} + \underbrace{\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}}_{(1/\delta^*)} \right) \quad (2.39)$$

em que $Re = V_\infty L/v$ designa o número de Reynolds do escoamento. Podemos destacar que a estimativa de ordens de grandeza dos diferentes termos das equações (2.37), (2.38), (2.39): $\delta^* \ll 1$ (o que apenas será garantido se $Re \gg 1$), tendo sido L definido de modo a assegurar que o valor da derivada $\partial u^*/\partial x^*$ seja, quando muito, igual à unidade. De fato, onde a grandeza de uma derivada decorre, pela própria definição de derivada, do quociente da ordem de grandeza do numerador pela do denominador, vem: $O(\partial u^*/\partial x^*) \approx O(u^*)/O(x^*) = 1$. Nessas condições, a equação da continuidade (2.9) indica, desde logo, que o termo $\partial v^*/\partial y^*$ e $\partial u^*/\partial x^*$, é, também, da ordem de 1. Assim, uma vez que a velocidade se anula na parede e que, na camada limite, y^* varia entre zero e δ^* , também se deduz que v^* é da ordem de δ^* , u^* da ordem 1 e, ainda, que as derivadas $\partial v^*/\partial x^*$ e $\partial^2 v^*/\partial x^{*2}$ são ambas da ordem de δ^* . De maneira semelhante podemos concluir que $\partial u^*/\partial y^* = O(1/\delta^*)$, $\partial^2 u^*/\partial x^{*2} = O(1)$, $\partial^2 u^*/\partial y^{*2} = O(1/\delta^{*2})$ e $\partial^2 v^*/\partial y^{*2} = O(1/\delta^*)$, conforme encontra-se explicitado sobre cada um dos termos das equações, Lopes e Oliveira (2016) [40].

As expressões (2.21) e (2.22) refletem um equilíbrio entre forças de inércia, de viscosidade e de pressão. No interior da camada limite, o equilíbrio é essencialmente ditado pelo balanço entre os efeitos viscosos e de inércia: na região de escoamento potencial, é a pressão que estabelece o equilíbrio com a inércia (traduzido pela equação de Bernoulli), já que o efeito da viscosidade é, aí, irrelevante. Dito em outras palavras, a ordem de grandeza dos termos viscoso e de pressão, nas expressões (2.21) e (2.22), não poderá exceder a dos correspondentes termos de inércia, que são $O(1)$ em (2.38) e $O(\delta^*)$ em (2.39). Isso só será garantido se a viscosidade, o inverso do número de Reynolds, for da ordem de δ^{*2} . No que se refere à pressão, o mesmo argumento permite concluir que $\partial p^*/\partial x^* = O(1)$ e que $\partial p^*/\partial y^* = O(\delta^*)$, Lopes e Oliveira (2016) [40].

Diante disso, a camada limite, as equações (2.38) e (2.39) são, respectivamente, de ordem 1 e da ordem de δ^* , podendo, assim, ser esta última desprezada ao comparar as equações. Juntamente a isso, podemos ressaltar que o parâmetro mais importante são as variações de velocidade segundo a direção perpendicular à superfície da placa do que segundo a que lhe é paralela, pelo

que o único termo viscoso realmente significativo em (2.38) é o que envolve a derivada $\partial^2 u^*/\partial y^{*2}$. Por fim, a relação $\partial p^*/\partial y^* \ll \partial p^*/\partial x^*$ significa, em termos práticos, que a pressão não varia com a coordenada y , no interior da camada limite. Podemos dizer que o campo de pressão do escoamento potencial é "impresso", através da própria camada limite, até a superfície sólida.

Diante dessa análise, podemos simplificar de forma significativa as equações (2.21) e (2.22), o que nos conduz a uma única equação da camada limite ou equação de Prandtl:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.40)$$

Quanto à conservação da massa, a sua expressão (2.9) permanece inalterada. O campo de pressão é o de escoamento potencial, que depende somente da coordenada x no estudo da camada-limite. A análise do escoamento se reduz, assim, à determinação de duas incógnitas (u e v), no que converge a um número igual de equações: (2.9) e (2.40). O problema matemático fica completamente escrito por meio da especificação das correspondentes condições-limites que definimos:

- Aderência parcial

$$y = 0 \Rightarrow u = v = 0$$

- Limite da camada limite

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow V_\infty, v \rightarrow 0 \quad (2.41)$$

De acordo com essa condição (2.41), é necessário estabelecer um valor "elevado" para y , ou, simbolicamente, $y \rightarrow \infty$, uma vez que a espessura da camada limite não é conhecida.

A teoria da camada limite não é aplicável à sua vizinhança imediatamente na borda da placa ($x \approx 0$), uma vez que não se verifica aí a hipótese $|\partial^2 u/\partial x^2| \ll |\partial^2 u/\partial y^2|$. Assim, a análise teórica do escoamento, naquela localização particular, deverá passar pela resolução das equações completas de Navier-Stokes. Por fim, deve-se utilizar as coordenadas corretas para cada modelo de superfície.

Uma vez que estabelecidos esses conceitos de camada limite e a transição entre a superfície da placa e a zona de escoamento de um fluido invíscido é

assegurado que, para valores elevados de y , a equação de Prandtl se transforme na de Bernoulli. De fato, fazendo $y \rightarrow \infty$ em (2.40), teremos:

$$V_\infty \frac{dV_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (V_\infty^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(p + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \right) = 0 \quad (2.42)$$

o que significa manter constante a soma das energias cinética e de pressão. Dentro dessa perspectiva é que foi desprezada a influência do termo gravitacional. Assim, a equação de Prandtl pode assumir a forma alternativa:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = V_\infty \frac{dV_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

A estimativa de ordem de grandeza permite a formulação de condições sobre a variação da espessura de camada limite, δ , em que:

$$\delta^{*2} \propto \frac{1}{Re} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \propto \sqrt{\frac{\nu}{V_\infty L}} \Rightarrow \delta \propto \sqrt{\frac{\nu L}{V_\infty}} \quad (2.44)$$

A espessura a que se refere é a que atinge o nível da borda de saída da placa ($x = L$). Para qualquer outro valor de x , temos:

$$\delta(x) \propto \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}} \quad (2.45)$$

Com essa expressão (2.45), podemos concluir que a camada limite se torna mais espessa para fluidos mais viscosos e mais fina para maiores velocidades do escoamento. Note que a forma de variação apresentada na expressão (2.45) é aplicável somente em regime laminar. Na verdade, em regime turbulento, o efeito da viscosidade é reforçado pela presença das tensões de Reynolds, deixando, portanto, a viscosidade ν de ser suficiente para representar a permeabilidade à troca de quantidade de movimento dentro da camada limite.

2.3 Placa plana infinita: Solução de Blasius

Consideramos o escoamento da camada-limite sobre a face superior da placa plana, que admitiremos ser semi-infinita ($0 \leq x < \infty$), representada na Figura 2.1. Para essas condições, mantêm-se as hipóteses simplificadoras, descritas na seção anterior, em que o gradiente de pressão do escoamento potencial é nulo ($dp/dx = 0$) bem como o de velocidade ($dV_\infty/dx = 0$).

Blasius designa os perfis da camada limite por hipótese de semelhança, desenvolvendo equações matemáticas de grande importância. Nelas, variáveis dependentes e independentes do problema da camada limite foram adimensionalizadas através de fatores de escala convenientemente escolhidos. Para esse autor, as derivadas parciais (2.9) e (2.40) cedem lugar a uma única equação diferencial ordinária, válida para qualquer localização x .

Ainda que as características do sólido nos levem a velocidades variáveis ao longo de x (o que não se verifica neste caso), existem formas de variação de $V_\infty(x)$ que continuam a viabilizar a hipótese de semelhança de perfis (apenas válida, neste caso, até a cota x onde eventualmente ocorra separação). Considerando, então, dois fatores distintos x_1 e x_2 para a coordenada x , e designando por $h(x)$ e $g(x)$ os fatores de escala selecionados para u e y , respectivamente, a hipótese de semelhança pode ser formulada nos seguintes termos:

$$\frac{u \{x_1, [y/g(x_1)]\}}{h(x_1)} = \frac{u \{x_2, [y/g(x_2)]\}}{h(x_2)} \quad (2.46)$$

Neste caso, em que os fatores de escala são $h(x) \equiv V_\infty$ (aqui suposto constante) e $g(x) \equiv \delta(x)$, e se y_1 e y_2 representarem dois valores distintos da coordenada y , tais que se verifique $y_1/\delta(x_1) = y_2/\delta(x_2) = a$, a equação (2.43) tem a seguinte forma:

$$\frac{u(x_1, a)}{V_\infty} = \frac{u(x_2, a)}{V_\infty} . \quad (2.47)$$

Vemos que a variável u/V_∞ depende unicamente de a . Assim:

$$\frac{u}{V_\infty} = \phi \left(\frac{y}{\delta} \right) , \quad (2.48)$$

em que ϕ designa uma função a determinar.

Conforme sugere a expressão (2.45), será definida, para o efeito, uma nova variável independente, η , sem dimensões e proporcional a y/δ . Tomando em consideração a proporcionalidade que é traduzida na equação (2.45), para condições de regime laminar, η se torna:

$$\eta = y \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \quad (2.49)$$

Quanto à nova variável dependente, tomemos uma função $\Psi(x, y)$, em que:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.50)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.51)$$

Trata-se de uma função de corrente. Cabe aqui neste momento abrir um tópico para definir esse conceito, Lopes e Oliveira (2016) [40].

- **Função de Corrente**

No caso particular de deslocamento bidimensional, a equação da continuidade (2.9), para um fluido incompressível e adotando um sistema de coordenadas cartesianas, é condição necessária e suficiente para que $d\Psi = udy - vdx$ seja uma diferencial exata, que exista uma função $\Psi(x, y)$, a designar por função de corrente, tal que as equações (2.50) e (2.51) tratam-se na realidade de uma representação alternativa do campo de velocidade. Diante disso, as duas variáveis (u e v) cedem lugar, sem qualquer perda de informação, a uma única (Ψ), embora de ordem superior. Através da introdução de Ψ , a equação da continuidade (2.9) resulta, assim, identicamente satisfeita, $\partial^2 \Psi / \partial x \partial y - \partial^2 \Psi / \partial y \partial x = 0$.

Paralelo a isso, a função Ψ detém ainda um significado físico relevante, cujo comportamento podemos verificar com o gráfico a seguir:

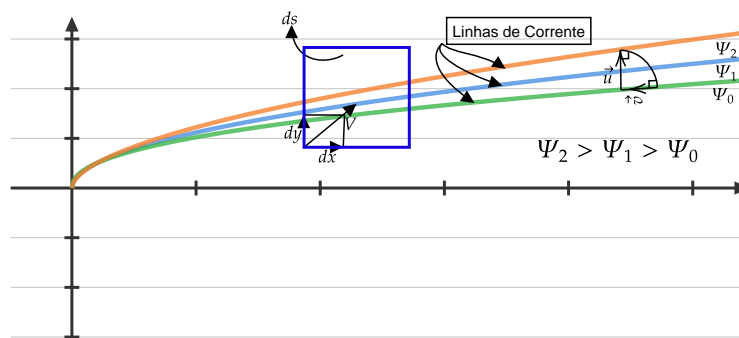


Figura 2.9: As duas linhas de corrente, Ψ_2 e Ψ_0 , demonstrada em um elemento de volume onde não há velocidade perpendicular para linhas de corrente constantes.

De fato, em qualquer ponto de uma linha de corrente, de acordo com sua definição, a relação local de paralelismo:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (2.52)$$

atende às equações (2.50) e (2.51):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0 \Rightarrow \Psi = cte. \quad (2.53)$$

Conclui-se desse modo que o valor de Ψ se mantém constante ao longo de uma linha de corrente.

Para finalizar a formulação da hipótese de similaridade, efetuaremos a seguinte mudança de variável:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, \eta) = \sqrt{\nu x V_\infty} f(\eta) \quad (2.54)$$

em que $f(\eta)$ representa uma função de corrente adimensional. De acordo com a equação (2.54), a dependência de Ψ em relação a x foi separada da que envolve diretamente a variável, y , ou seja, passa a ser dependente de η .

Todas as variáveis, dependentes ou independentes, da equação de Prandtl podem ser expressas em termos das novas variáveis, agora definidas. Assim temos:

$$u = \frac{\partial [\Psi(x, \eta)]}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + \sqrt{\nu x V_\infty} f' \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} = V_\infty f' \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial [\Psi(x, \eta)]}{\partial x} = -\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ &= -\left[\sqrt{\nu V_\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} f + \sqrt{\nu x V_\infty} f' y \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu}} \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} f + \frac{1}{2} \sqrt{\nu x V_\infty} f' y \underbrace{\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}}_{=\eta} x^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} f + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} \eta f' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} (\eta f' - f) \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que f' é a derivada de f em ordem a: $\eta : f' = df/d\eta$.

De forma análoga à equação de Prandtl (2.43) e às equações (2.55) e (2.56), aplicando as mudanças de variáveis às equações (2.49) e (2.54), em que se admite aqui nulo o gradiente de pressão - o que equivale a tomar V_∞ como sendo constante - e atendendo a (2.50) e a (2.51), podemos definir que:

$$u = V_\infty f' \quad (2.57)$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} (\eta f' - f) \quad (2.58)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (V_\infty f') = V_\infty f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = f'' V_\infty y \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu}} \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} V_\infty f'' y \underbrace{\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}}_{=\eta} x^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{V_\infty}{x} \eta f'' \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (V_\infty f') = V_\infty f'' \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_\infty f'' \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \right) = V_\infty f''' \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} = \frac{V_\infty^2}{\nu x} f''' \quad (2.61)$$

Substituindo as equações (2.57), (2.61) em (2.40) obtemos:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \overset{0}{\cancel{\frac{dp}{dx}}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Leftrightarrow \\ V_\infty f' \left(-\frac{1}{2} \frac{V_\infty}{x} \eta f'' \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_\infty \nu}{x}} (\eta f' - f) V_\infty f'' \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} &= \cancel{\nu} \frac{V_\infty^2}{\cancel{\nu} x} f''' \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{x} \eta f' f'' + \frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{x} f'' (\eta f' - f) &= \frac{V_\infty^2}{x} f''' \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{x} \eta f' f'' + \frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{x} \eta f' f'' - \frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{x} f f'' &= \frac{V_\infty^2}{x} f''' \Leftrightarrow \\ f f'' + 2f''' &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

A equação (2.62) é conhecida por equação de Blasius, em homenagem ao discípulo de Prandtl. Tais transformações nos permitiram a redução de duas equações de derivadas parciais a uma única, mesmo não sendo linear e de ordem superior. É uma equação diferencial ordinária, portanto facilmente integrável. As condições de contorno para equação (2.62) são:

$$\eta = 0 \Rightarrow f = 0, f' = 0 \quad (2.63)$$

$$\eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' = 1 \quad (2.64)$$

Visto que a equação de Blasius é de terceira ordem, seriam necessárias três condições de contorno em $\eta = 0$. Uma vez que (2.63) oferece apenas duas, a solução, então, consiste em arbitrar o valor de $f''(0)$, efetuar a integração através da camada limite até se atingir um valor elevado de η , corrigir em sequência o valor arbitrário para $f''(0)$ e repetir o processo iterativo (frequentemente designado por tentativa e erro) até sua convergência. Para solução numérica da equação (2.62), utilizamos o Método de Runge-Kutta de quarta ordem que pode ser encontrado no apêndice A desta dissertação.

Integração da equação de Blasius

A equação (2.62) é uma equação diferencial não linear de terceira ordem, sujeita às condições de contorno escritas por (2.63) e (2.64). Para a sua resolução, esta equação é transformada num sistema de equações de primeira ordem, da seguinte forma:

$$u_1 = f(\eta) \quad (2.65)$$

$$u_1' = f'(\eta) = u_2 \quad (2.66)$$

$$u_2' = f''(\eta) = u_3 \quad (2.67)$$

$$u_3' = f'''(\eta) = -\frac{1}{2}u_1u_2 \quad (2.68)$$

Na última expressão, observamos atentamente que, por (2.62)

$$f'''(\eta) = -\frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) \quad (2.69)$$

De acordo com (2.63) e (2.64), as condições de contorno do problema são:

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 0 \\ u_2(\infty) = 1 \end{cases} \quad (2.70)$$

A solução da equação de Blasius tem caráter universal: uma vez calculada, é válida para qualquer valor da coordenada x . Do ponto de vista matemático, esse fato traduz a natureza diferencial ordinária da equação; fisicamente, reflete a semelhança dos perfis de velocidade na camada limite, Lopes e Oliveira (2016) [40]. Pode-se encontrar no apêndice A deste trabalho a solução numérica da equação, onde foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

2.3.1 Camada Limite de Velocidade

Partindo da equação do momento (2.40), agora considerando $F_g = -\rho g$, onde g é a aceleração da gravidade e ρ é a densidade do fluido, temos:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.71)$$

onde u e v são a velocidade do fluido nas direções x e y , respectivamente. Supondo que as forças na direção y e o gradiente de pressão são contantes na camada limite, teremos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g \quad (2.72)$$

onde ρ_∞ é a densidade fora da camada limite. Substituindo (2.72) em (2.71) obtemos:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\rho} (\rho_\infty - \rho) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.73)$$

Sob uma aproximação da expansão térmica linear, onde T_∞ é a temperatura fora da camada limite, temos:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T} \quad (2.74)$$

Aplicando (2.74) em (2.73), é:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.75)$$

Diante das preposições, reescrevemos a equação (2.33) da seguinte forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{\rho} (\rho_\infty - \rho) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)^2 \quad (2.76)$$

Desprezando a dissipação viscosa, o último termo da (2.76), definimos aqui uma nova variável η a fim de tratarmos a equação da energia em função da sua temperatura:

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \quad (2.77)$$

onde Gr_x é o número de Grashof, que é $\rho_\infty^2 f_x l^3 \epsilon / \mu_\infty^2$, onde ρ_∞^2 é a densidade do fluido ao longo da placa, f_x , é a componente na coordenada x negativa das forças do corpo por unidade de massa, l caracteriza um comprimento, ϵ é a diferença de temperatura relativa ($\beta(T_0 - T_\infty)$), e μ é a viscosidade absoluta. Utilizamos os mesmos métodos na seção anterior, onde definimos Ψ :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.78)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.79)$$

tal que:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, \eta) = \left[4\nu \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \right] f(\eta) \quad (2.80)$$

Fazendo uma nova mudança de variável em termos de Θ que representa a distribuição de temperatura adimensionalizada:

$$\Theta = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \quad (2.81)$$

com as respectivas condições de contorno:

- $y = 0$ em $T = T_s$
- $x = 0$ em $T = T_\infty$
- $y = \infty$ $T = T_\infty$ $y = \delta_T \Rightarrow T = T_\infty$

podemos agora reescrever a equação (2.76) em relação à distribuição de temperatura Θ :

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\nu}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \quad (2.82)$$

Note que:

- essa equação é análoga à equação que vimos de conservação de quantidade de movimento linear para a camada limite para u/U_∞ ;
- condições de contorno são as mesmas que para u/U_∞ ;
- equação diferencial é idêntica se $\mathbf{Pr} = 1$, isso implica que o arraste (ν) e a transferência de calor (α) sejam diretamente relacionados.

Analisando a equação da energia para camada limite em detalhes, devemos recordar que:

- $u/U_\infty = f'$
- $\frac{v}{U_\infty} / \sqrt{\mathbf{Re}} = \frac{1}{2} [\eta f' - f]$
- $\eta = y \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}$

Aplicando as derivadas necessárias na equação (2.82):

- $\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\sqrt{\mathbf{Re}}}{x}$;
- $\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \left(-\frac{\eta}{2x}\right)$
- $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\sqrt{\mathbf{Re}}}{x}\right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \frac{\sqrt{\mathbf{Re}}}{x^2}$

podemos reescrever a equação (2.82) como:

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\nu}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}$$

$$\underbrace{f'U_\infty}_u \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \left(-\frac{\eta}{2x} \right) + \underbrace{\frac{U_\infty/\sqrt{Re}}{2} [\eta f' - f]}_v \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\sqrt{Re}}{x} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \frac{\sqrt{Re}}{x^2}$$

$$\underbrace{-f'U_\infty \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\eta}{2x} + f'U_\infty \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\eta}{2x}}_{zero} - fU_\infty \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{1}{2x} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \frac{Re}{x^2}$$

multiplicando por $\frac{Pr}{\nu} \frac{x^2}{Re} \implies -fU_\infty \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{1}{2x} \frac{Prx^2}{\nu U_\infty x} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}$

obtemos

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0 \quad (2.83)$$

com as condições de contorno em que:

- $\eta = 0$ em $\Theta = 0$
- $\eta = \infty$ em $\Theta = 1$

A equação (2.83) pode ser resolvida por integração, onde devemos reescrevê-la usando $\Theta' = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}$. Assim, teremos:

$$\frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{Pr}{2} f \Theta' = 0 \implies \frac{d\Theta'}{\Theta'} = -\frac{Pr}{2} f d\eta \quad (2.84)$$

e integrada, resultando na seguinte solução:

$$\Theta'(\eta) = \Theta'(0) \mathbf{exp} \left(\int_0^\eta -\frac{Pr}{2} f d\eta \right). \quad (2.85)$$

Integrando novamente, obtemos:

$$\Theta(\eta) - \underbrace{\Theta(0)}_{zero} = \Theta'(0) \int_0^\eta \mathbf{exp} \left(\int_0^\eta -\frac{Pr}{2} f d\eta \right) d\eta \quad (2.86)$$

Para a solução de (2.86), podemos utilizar do mesmo método de solução numérica aplicado à equação de Blasius, que se encontra no apêndice A desta dissertação.

Capítulo 3

Equações Fracionárias

O cálculo de ordem inteira ou simplesmente "*O cálculo*" é um ramo da matemática cujo objetivo é o estudo dos fenômenos que envolvem movimento e variação, que estão associados aos conceitos de área sob a curva e tangente. O cálculo ocupa-se essencialmente da formulação e da resolução de dois problemas geométricos particulares: o problema das áreas e o problema das tangentes. Esses dois problemas originaram os dois principais ramos do cálculo: o cálculo integral, que trata do problema das áreas, e o cálculo diferencial, que trata do problema das tangentes, Camargo et al. (2015) [43].

De acordo com o cálculo de ordem inteira, o símbolo $D \equiv D_x \equiv d/dx$, sendo x subscrito à variável independente, representa um operador diferencial, que isoladamente não tem significado prático; seguido de uma expressão à direita, entretanto, denota uma derivada e diz-se que D ou D_x ou d/dx opera sobre a expressão imediatamente colocada à direita do símbolo.

Assim, para a função de uma variável $f(x)$, sua derivada, chamada derivada ordinária, é denotada da seguinte maneira, segundo a notação de Leibniz,

$$Df(x) \equiv \frac{df}{dx}$$

é definida por meio do seguinte limite;

$$Df(x) \equiv \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e pode ser interpretada como a taxa de variação da variável dependente, f , em relação à variável independente, x . Esse conceito pode ser estendido para derivadas de ordens $n = 2, 3, 4, \dots$

As integrais e derivadas no sentido ordinário são operações inversas e estão relacionadas através das equações:

$$\int^x [Df(\xi)] d\xi = f(x) + c$$

onde C é uma constante arbitrária, e:

$$D_x \left[\int^x f(\xi) d\xi \right] = f(x)$$

Para as funções de mais de uma variável independente, introduzem-se as chamadas derivadas parciais, isto é, deriva-se em relação a uma variável particular independente. Ressalte-se que a definição é similar à derivada ordinária no sentido de que, ao se derivar em relação a uma variável particular, mantêm-se as demais interpretadas como constantes. Ainda mais, pode-se entender a notação para as derivadas parciais de ordens superiores. Por outro lado, visto que as integrais múltiplas vão desempenhar um papel importante quando da introdução do conceito de integral fracionária, mencionam-se as correspondentes integrais múltiplas, através da notação:

$$J^n f(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \cdots \int_0^{\tau_{n-2}} \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n d\tau_{n-1} d\tau_{n-2} \cdots d\tau_1.$$

O conceito de cálculo fracionário tem origem a partir de uma pergunta formulada numa troca de correspondências entre Leibniz e l'Hôpital, Camargo et al. (2015) e Cajori (1925) [43, 75].

Em uma dessas correspondências, Leibniz formulou uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem, em princípio, arbitrária. Prontamente, l'Hôpital devolveu a pergunta para Leibniz, questionando-o no caso em que a ordem da derivada fosse meio, ou seja, qual deveria ser a interpretação, na notação de Leibniz $d^{1/2}y/dx^{1/2}$, para a derivada de ordem $n = 1/2$, que equivale a derivar a função $y(x)$ meia vez, ou seja,

$$D^{1/2}y(x) = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}y(x),$$

uma raiz quadrada ou ainda uma potência fracionária.

Leibniz, em sua resposta audaciosa e profética, muito antes de existirem as ferramentas tecnológicas que existem hoje, assegurava que, para $y(x) = x$, a igualdade:

$$d^{1/2}x = x\sqrt{dx} : x \quad (3.1)$$

aparentemente um paradoxo, "algum dia gerará muitas consequências frutíferas". Esse é considerado efetivamente o primeiro registro do cálculo fracionário. A resposta afirmativa levou ao assim chamado cálculo fracionário. O termo "fracionário" tinha o significado de ordem de uma equação diferencial, uma confusão de significado que se perpetua até os dias de hoje.

Os autores Oldham e Spanier (1974) [58] e Ross (1974) [59] representam de forma cronológica a origem do cálculo de ordem arbitrária em meados de 1695, quando se teve o conceito inicialmente proposto por Leibniz na literatura de Oldham e Spanier (1974) [58]. Sua proposta é embasada de forma análoga à soma de potências e diferenciais de produtos. Dessa forma, temos que:

Temos que $p^e x = x^e$ com $e \in \mathbb{R}$. Para as somas de potência, temos:

$$\begin{array}{l} p^0(x+y) \\ p^1(x+y) \\ p^2(x+y) \\ p^3(x+y) \end{array} \left| \begin{array}{l} p^0 x p^0 y \\ 1 p^0 x p^1 y + 1 p^1 x p^0 y \\ 1 p^0 x \cdot p^2 y + 2 p^1 x p^1 y + 1 p^2 x p^0 y \\ 1 p^0 x p^3 y + 3 p^1 x p^2 y + 3 p^2 x p^1 y + 1 p^3 x p^0 y^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 1y + 1x \\ 1y^2 + 2xy + 1x^2 \\ 1y^3 + 3y^2x + 3yx^2 + x^3 \end{array}$$

e

$$p^{-1}(x+y) = \frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} + \dots$$

ou, de uma forma mais geral,

$$\begin{aligned} & p^e(x+y) \\ = & x^e + \binom{e}{1} x^{(e-1)} y^1 + \frac{[e(e-1)]}{1.2} x^{(e-2)} y^2 + \frac{[e(e-1)(e-2)]}{1.2.3} x^{(e-3)} y^3 + \dots \\ = & p^e x p^0 y + \binom{e}{1} p^{(e-1)} x p^1 y + \frac{[e(e-1)]}{1.2} p^{(e-2)} p^2 y + \frac{[e(e-1)(e-2)]}{1.2.3} p^{(e-3)} x p^3 y \dots \end{aligned}$$

em analogia às diferenciais de produtos

$$\begin{array}{l|l|l}
d^0(xy) & d^0xd^0y & xy \\
d^1(xy) & 1d^0xd^1y + 1d^1xd^0y & 1xdy + 1ydx \\
d^2(xy) & 1d^0xd^2y + 2d^1xd^1y + 1d^2xd^0y & 1xd^2y + 2dxdy + 1d^2xy \\
p^3(xy) & 1d^0xd^3y + 3d^1xd^2y + 3d^2xd^1y + 1d^3xd^0y & 1xd^3y + 3dxd^2y + 3d^2xdy + 1d^3xy
\end{array}$$

e

$$d^{-1}xy = d^{-1}xd^0y - d^{-2}xd^1y + d^{-3}xd^2y + \dots$$

ou, de uma forma mais geral,

$$d^e(xy) = d^e xd^0y + \binom{e}{1} d^{(e-1)}xd^1y + \frac{[e(e-1)]}{1.2} d^{(e-2)}xd^2y + \frac{[e(e-1)(e-2)]}{1.2.3} d^{(e-3)}xd^3y + \dots$$

Adicionando aqui o exemplo tratado por Leibniz, como caso específico tomamos, $dx = x d\beta$ com $d\beta$ uma constante. Assim, $d^2x = dx(d\beta)^2$ ou, de forma mais geral, $d^e x = dx(d\beta)^e = dx(dx/x)^e$. Se $e = 1/2$ obtemos a equação (3.1).

Em acordo com a analogia proposta anteriormente, o expoente e pode ser Real, logo $e = 1/2$. Isso é considerado por muitos a primeira indicação do uso do cálculo fracionário.

Existe mais de uma formulação possível para o cálculo fracionário, sendo cada uma dessas mais adequada a um certo contexto físico do que outro. As definições mais comuns são as de Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Liouville, Weyl e Riesz-Feller. No entanto, algumas outras, como a de Hilfer e a de Hadamard, aparecem na literatura Hilfer et al. (2000) e Hadamard(1892) [66, 67]. Na modelagem de processos estatísticos de memória longa via equações diferenciais fracionárias, há que decidir qual o tipo de definição de derivada fracionária usar. Por exemplo, a definição de Riesz-Feller é a mais adequada para uma interpretação estocástica em termos de processos conhecidos como de Lévy, e a abordagem proposta por Caputo parece ser mais apropriada para problemas onde se deseja incluir condições iniciais ou de contorno, fisicamente interpretáveis. No entanto, também é possível, em alguns casos, dar um significado físico para as condições iniciais em termos da formulação proposta por Riemann-Liouville. A definição de Jumarie parece se mostrar mais adequada para sistemas em que há uma certa rugosidade do meio e as funções tratadas são não diferenciáveis, e assim por diante, Camargo et al. (2015), Jumarie (2005), Jumarie (2005), Jumarie (2006), Jumarie (2006) e Jumarie (2009) [43, 60, 61, 62, 63, 64].

3.0.1 Conceitos Iniciais

Antes de iniciar as operações de derivação e/ou integração de ordem não inteira, faz-se necessária a apresentação das ferramentas utilizadas neste procedimento. Três dessas ferramentas são indispensáveis do Cálculo Fracionário (CF) - a Função Gama, a Função Beta e a Função de Mittag-Leffler.

Função Gama

A Função Gama ou função de Euler de segunda espécie foi desenvolvida com o intuito de generalizar o conceito de fatorial de um número natural. Especificamente, a Função Gama é uma das poucas funções da física-matemática que não satisfaz a equação diferencial hipergeométrica ou a equação hipergeométrica confluyente. Como a maioria das teorias físicas que envolve grandezas governadas por equações diferenciais, Função Gama (por si só) não costuma descrever uma quantidade física de interesse, mas tende a aparecer como um fator em expansões de quantidades fisicamente relevantes. A definição mais comum da Função Gama é sua forma integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Podemos definir também a Função Gama, nomeada de limite de Euler:

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (3.3)$$

Podemos também ter uma terceira definição, na qual as duas formas de Weierstrass são amplamente encontradas na literatura, Camargo et al. (2015), Ottoni (2018) e Arfken (2012) [43, 44, 45]:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z)_n} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \quad (3.5)$$

sendo (γ) o símbolo de Pochhammer, que será explicado posteriormente na Função Mittag-Leffler de três parâmetros.

A Função Gama é de muita relevância na definição da integral fracionária. A fim de compreender melhor seu comportamento gráfico, plotamos sua função conforme a figura 3.1:

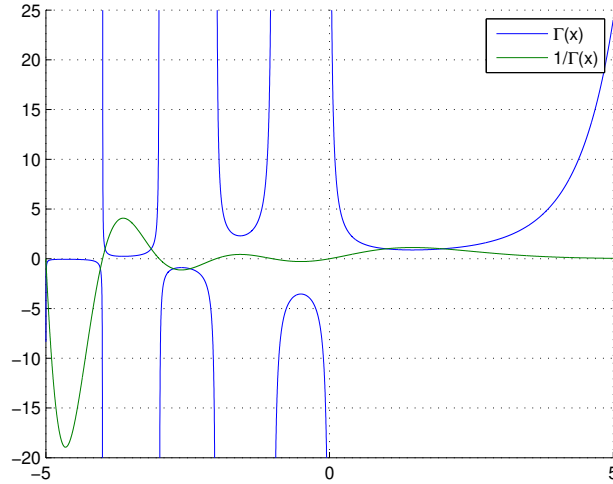


Figura 3.1: Função Gama e seu inverso.

Em uma análise rápida, percebemos um crescimento abrupto da Função Gama, como é de se esperar, afinal ela generaliza um fatorial. Uma das principais propriedades dessa função é sua relação de recorrência, onde substituindo na equação (3.3), z por $z + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z + 1) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z + 1)(z + 2)(z + 3) \cdots (z + n + 1)} n^{z+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{z + n + 1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z + 1)(z + 2) \cdots (z + n)} n^z \\
 &= z\Gamma(z).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

A equação (3.6) provavelmente é uma das mais importantes de todas as propriedades, que pode ser facilmente demonstrada por meio da integração por partes da integral (3.2). Essa integração nos permite conhecer a Função Gama de valores que diferem de z por algum inteiro, assim "fugindo" de integrais impróprias. Vale ressaltar que essa propriedade não pode ser utilizada para inteiros negativos e para o zero, Ottoni (2018) [44].

Vejam outras propriedades que são pouco utilizadas e necessitam de um rigor matemático mais apropriado para sua demonstração:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (3.8)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\pi} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (3.9)$$

Um resultado interessante é quando se refere ao valor da $\Gamma(\frac{1}{2})$. Com isso podemos determinar o fatorial de outros números que diferem por algum inteiro desse. O seu resultado está expresso abaixo:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\pi} \quad (3.10)$$

Uma forma de demonstrar esse resultado é aplicando a propriedade (3.8). Substituindo o parâmetro z por $1/2$, obtém-se:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi \quad (3.11)$$

assim:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (3.12)$$

Outra importante propriedade da Função Gama é que ela tem polos simples em suas extremidades, de acordo com Podlubny (1998) [68], em que $z = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Para demonstrar isso, vamos reescrever a equação (3.2) da seguinte forma:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.13)$$

Essa primeira integral (3.13) pode ser avaliada usando uma expansão em série da função exponencial. Se $\Re(z) = x > 0$, logo, $\Re(z+k) = x+n > 0$ e $t^{z+k}|_{t=0} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

A segunda integral define uma função inteira da variável complexa z , o que podemos escrever da forma:

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^{\infty} e^{(z-1)\log(t)-t} dt \quad (3.15)$$

A função $e^{(z-1)\log(t)-t}$ é uma função contínua em z e t para valores arbitrários z e $t \geq 1$. Além disso, se $t \geq 1$, e tão logo $\log(t) \geq 0$, então é uma função inteira de z . Considerando um domínio limitado fechado, arbitrário D no plano complexo ($z = x + iy$) e denotar $x_0 = \max_{z \in D} \Re(z)$, temos que:

$$\begin{aligned} |e^{-t} t^{z-1}| &= |e^{(z-1)\log(t)-t}| = |e^{(x-1)\log(t)-t}| \cdot |e^{iy\log(t)}| \\ &= |e^{(x-1)\log(t)}| \leq e^{(x_0-1)\log(t)-t} = e^t t^{x_0-1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Isso significa que a integral (3.15), possui uma convergência uniforme em D , portanto, a função φ é regular em D e a diferenciação da integral (3.15) é permitida. Como o domínio foi definido de forma arbitrária, podemos concluir que a função $\varphi(z)$ carrega consigo todas as propriedades contidas no plano do complexo. Portanto, $\varphi(z)$ é uma função inteira que permite a diferenciação sob a integral.

Juntando as considerações feitas anteriormente, podemos notar que:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \text{a função inteira} \end{aligned} \quad (3.17)$$

e de fato podemos constatar que a função $\Gamma(z)$ tem polos simples em suas extremidades $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Função Beta

A Função Beta ou função de Euler de primeira espécie também apresenta significativa relevância no cálculo fracionário. Sua definição na forma integral é:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0 \quad (3.18)$$

Sua forma trigonométrica pode ser determinada ao substituir a variável de integração t por $\cos^2 \theta$ na equação (3.18), que se apresenta de forma útil

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \quad (3.19)$$

$$\Re(p) > 0, \Re(q) > 0$$

Sua forma racional pode ser obtida ao substituir a variável de integração t por $\frac{u}{1+u}$ na equação (3.18):

$$\beta(p, q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0 \quad (3.20)$$

Uma generalização da Função Beta, em que o limite superior se torna um número arbitrário a , pode ser obtida a partir da substituição da variável de integração t por $\frac{y}{a}$:

$$\beta(p, q) = \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a y^{p-1} (a-y)^{q-1} dy, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0 \quad (3.21)$$

A Função Beta possui relação com a Função Gama, que pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (3.22)$$

Função de Mittag-Leffler

Assim como a resolução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes tem sua solução dada em termos de uma função exponencial, uma equação diferencial de ordem não inteira tem, em muitos casos, sua solução dada em termos das chamadas funções de Mittag-Leffler.

A função de Mittag-Leffler, $E_\alpha(z)$, é a generalização da função exponencial, pois em alguns casos, uma equação diferencial de ordem não inteira pode fornecer uma descrição mais fina de um fenômeno do que a respectiva equação diferencial de ordem inteira. Essa função possui uma dependência de um parâmetro complexo α , como se define na série a seguir:

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots + \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha+1)} + \dots \quad (3.23)$$

Para o caso particular onde $\alpha = 1$, recupera-se a função exponencial, isto é:

$$E_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} = e^x \quad (3.24)$$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros tem um papel importante no desenvolvimento do cálculo fracionário, onde em 1905, Wiman [56] apresentou uma proposta da generalização da função Mittag-Leffler de dois parâmetros:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0. \quad (3.25)$$

Pode-se observar que, ao fazer $\beta = 1$ na equação (3.25), retornamos a (3.24). As chamadas funções seno e cosseno fracionárias podem ser escritas em termos da função com dois parâmetros:

$$E_{2,1}(x^2) = \cosh(x) \quad (3.26)$$

$$E_{2,2}(x^2) = \frac{\sinh(x)}{x} \quad (3.27)$$

Em meados de 1971, Prabhakar (1971) [57] inseriu mais um parâmetro à Função de Mittag-Leffler, sendo definida por três parâmetros, como é apontado na sua definição.

Sejam α, β e $\gamma \in \mathbb{C}$ tais que $\Re(\beta) > 0, \Re(\alpha) > 0$ e $\Re(\gamma) > 0$, assim

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n x^n}{\Gamma((\alpha n + \beta)n!)} \quad (3.28)$$

sendo $(\gamma)_n$ o símbolo de Pochhammer.

O símbolo de Pochhammer é definido por:

$$(\gamma)_n = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0; \\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1), & \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Note que podemos reescrever o símbolo de Pochhammer em termos da função Gama, (3.3):

$$(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1) = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}$$

Podemos observar que, ao fazer $\gamma = 1$ na função Mittag-Leffler de três parâmetros, teremos como resultado a de dois parâmetros, sendo também considerada como uma generalização da função de um parâmetro.

No apêndice E, está o algoritmo utilizado no MATLAB para Função Mittag-Leffler de três parâmetros.

Formulações do Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário possui diversas formulações, entretanto, com o tempo, aparentemente várias delas entravam em contradição, demonstrando resultados diferentes para uma mesma aplicação, o que gerava uma certa controvérsia, Camargo et al. (2015) [43]. Existe uma variedade de definições distintas e com propriedades diferentes.

Serão apresentadas as características das três definições principais: Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov. Contudo, no presente trabalho, utilizaremos apenas a definição de Caputo, em sua grande parte, devido à presença de valores iniciais com interpretação física, pois, as derivadas destes são de ordem inteira, conforme será visto.

As derivadas e integrais, de ordem arbitrária terão uma notação muito simples: para a derivada de ordem α de uma função $f(x)$, a representação será $D^\alpha f(x)$, e para integrais de ordem arbitrária utilizar-se-á $J^\alpha f(x)$.

Uma observação que na maioria das vezes não é notada no Cálculo de ordem inteira, contudo evidente no Cálculo Fracionário, é que derivar a função e depois integrar, assim como integrar e depois derivar a mesma função, nem sempre devolve-se o mesmo resultado, como o Teorema Fundamental do Cálculo explicita:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u) du = f(x), \quad (3.30)$$

$$\int_a^x \frac{d}{du} f(u) du = f(x) - f(a) \quad (3.31)$$

Isso é importante na escolha da formulação adequada cujas condições físicas sejam interpretáveis.

3.0.2 A integral de Riemann-Liouville de ordem fracionária

Para definir a integral de ordem fracionária, deve-se generalizar a ideia de integral iterada, de modo que se consiga fazer cálculos desta através de uma única integral. Primeiramente, considera-se a integral de ordem 1 de uma função $f(x)$:

$$J^1 f(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (3.32)$$

De maneira análoga, defini-se a integral dupla:

$$J^2 f(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} f(t) dt dt_1 \quad (3.33)$$

Neste caso, está se fazendo uma integral de tipo 1 com a seguinte área de integração conforme figura:

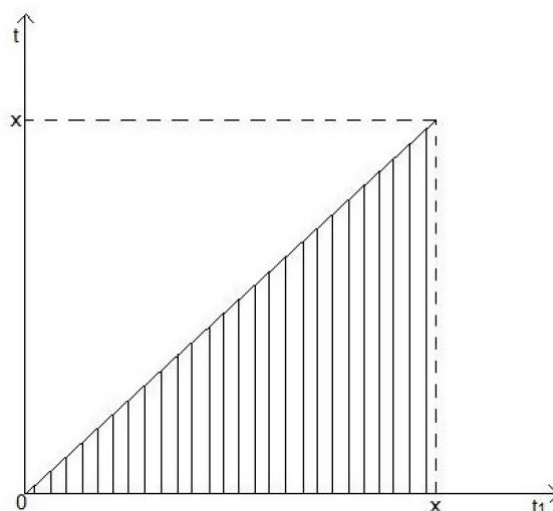


Figura 3.2: Área de integração de tipo 1.

Mudando o modo de integração para o tipo 2, tem-se que:

$$J^2 f(x) = \int_0^x \int_t^x f(t) dt_1 dt \quad (3.34)$$

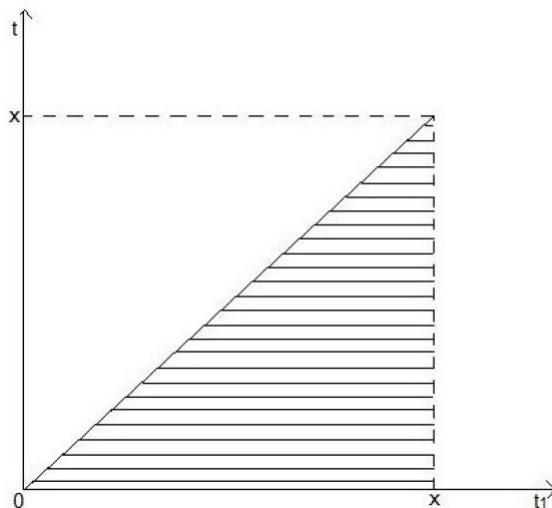


Figura 3.3: Área de integração de tipo 2.

Logo, a integração (3.34) pode ser feita como uma integral simples:

$$J^2 f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt \quad (3.35)$$

Por indução, fica simples a demonstração:

$$J^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t)dt \quad (3.36)$$

Fazendo o uso de J^α como notação da integral de uma ordem positiva real arbitrária, e já que com a Função Gama pode-se "calcular" o fatorial de α , podemos definir:

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0 \quad (3.37)$$

3.0.3 Formulação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov

A formulação da derivada de Grünwald-Letnikov fracionária parte da definição do Cálculo Diferencial clássico, onde sua definição de derivada é:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (3.38)$$

e da derivada segunda:

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Logo, fazendo (3.38) e (3.39), obtemos a terceira derivada:

$$f'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{3.40}$$

Generalizando esse resultado para derivadas de ordens n-ésimas, temos o seguinte somatório:

$$f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \tag{3.41}$$

Na equação (3.41) acima, tem-se que $f^n(x)$ representa a n-ésima derivada. Conhecendo as propriedades dos coeficientes binominais, sabe-se que:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r-1)}{r!} \tag{3.42}$$

Generalizando o resultado obtido em (3.41), onde α é um número arbitrário, com $\alpha \in \mathfrak{R}$ e o coeficiente binominal expresso em termos da Função Gama, obtém-se a formulação geral de Grünwald-Letnikov:

$$\frac{d^\alpha}{[d(x-a)]^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+1)}{r! \Gamma(\alpha-r+1)} f(x-rh) \tag{3.43}$$

em que, $\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor$ significa a função maior inteiro ou função piso, cujo valor em qualquer número é o maior inteiro menor.

3.0.4 Formulação da derivada fracionária de Riemann-Liouville

Dada a definição da integral de ordem arbitrária, fica simples obter a derivação fracionária. Na formulação de Riemann-Liouville para a derivada,

inicialmente faz-se uma integração de ordem arbitrária e posteriormente uma derivação de ordem inteira, como na equação a seguir:

$$D^\alpha f(x) = D^m [J^v f(x)], m = \lceil \alpha \rceil, v = m - \alpha \quad (3.44)$$

em que $\lceil \alpha \rceil$ significa a função menor inteiro ou função teto, cujo valor em qualquer número é o menor inteiro maior.

O grande entrave dessa formulação é que, ao utilizá-la para resolver equações diferenciais por transformação de Laplace, não se obtêm valores iniciais com derivada inteira, o que não é fisicamente interpretável, Ottoni (2018) [44]. Um ponto de suma importância é que a derivada de uma constante, na formulação de Riemann-Liouville, nem sempre é nula.

3.0.5 Formulação da derivada fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Caputo é, de certa forma, muito semelhante a de Riemann-Liouville, somente diferindo pela ordem das operações, o que pode parecer de antemão um detalhe simples, porém possui consequências relevantes, levando a utilizar preferencialmente uma no lugar da outra.

Na formulação de Caputo, faz-se em primeiro lugar uma derivação de ordem inteira e posteriormente uma integração de ordem fracionária, Ottoni (2018) e Camargo et al. (2015) [44, 43], como podemos expor na equação a seguir:

$$D_*^\alpha f(x) = J^v [D^m f(x)], m = \lceil \alpha \rceil, v = m - \alpha \quad (3.45)$$

Na equação (3.45), é possível observar a presença do asterisco no subíndice da notação de derivada, que é a notação usual para diferenciar a derivada fracionária de Caputo para a de Riemann-Liouville.

A formulação de Caputo apresenta uma vantagem em aplicações que envolvam Equações Diferenciais Fracionárias, que é a presença de valores iniciais fisicamente interpretáveis, e por isso, sua preferência neste trabalho. Outro fator nessa formulação é que a derivada qualquer de uma constante é sempre nula, o que faz com que ganhe crédito em relação à formulação de Riemann-Liouville - isso é relevante quando se procura interpretar as derivadas como taxas de variação e se quer calcular a taxa de uma constante, de modo que seja nula, Ottoni (2018) e Camargo et al. (2015) [44, 43].

A derivação fracionária adiciona um parâmetro extra, neste caso α , que permite na prática um ajuste mais fácil aos dados experimentais. Mas do ponto de vista físico, o que isso representa? As derivadas fracionárias de Caputo,

à esquerda, no semieixo \Re^+ e no eixo \Re , são dadas por Capelas em [76], respectivamente, por:

$$({}^C D_{0+}^\alpha y(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{[y(\zeta)]^{(n)} d\zeta}{(x-\zeta)^{(\alpha-n+1)}}, \quad (3.46)$$

$$({}^C D_{0-}^\alpha y(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{[y(\zeta)]^{(n)} d\zeta}{(x-\zeta)^{(\alpha-n+1)}}, \quad (3.47)$$

onde $[y(\zeta)]^{(n)} = \frac{d^n y}{d\zeta^n}$ e $n = \lceil \operatorname{Re}(\alpha) \rceil$.

É claro a partir das equações (3.46) e (3.47), que o valor da derivada fracionária de y calculada no ponto x depende dos valores de y em muitos pontos, então pode ser dito que a derivada fracionária é não local. Por ser não local, possui efeitos de memória espacial, podendo ser associado a efeitos de borda.

3.0.6 Aplicações do Cálculo Fracionário

Oscilador Harmônico

O Oscilador Harmônico Fracionário trata-se de uma formulação mais geral do problema clássico do sistema massa-mola, com auxílio das poderosas ferramentas desenvolvidas no cálculo fracionário. Esse é modelado por uma equação diferencial que envolve a massa (m), o fator de atrito (b) e a constante da mola (k), onde a solução desse sistema é a equação que representa a posição da massa, aqui representada por $x(t)$, com o passar do tempo. Para esse sistema, é importante que sejam mencionadas a posição inicial da massa $x(0)$ e a velocidade inicial $x'(0)$, assim obtendo uma única solução, conforme Ottoni (2018) [44]:

A equação que descreve esse sistema é escrita na seguinte forma:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0 \quad (3.48)$$

Considerando que a resistência do meio é nula ($b = 0$), logo a (3.48) fica:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0 \quad (3.49)$$

A versão fracionária desse sistema é:

$$m \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + kx(t) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (3.50)$$

recuperando a equação (3.49) quando $\alpha = 2$. O símbolo $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ representa a alfa-ésima derivada em uma formulação qualquer. A partir daqui, utilizaremos a formulação de Caputo.

Dividindo ambos os membros da equação (3.50) por m , temos:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (3.51)$$

Definimos agora a grandeza ω , que representa a frequência da mola, definindo $\omega^\alpha = \frac{k}{m}$. Aqui devemos ter uma atenção especial quanto a dimensão da frequência, que possui uma dimensão dependente de α da seguinte forma:

$$[\omega^\alpha] = \frac{kg}{s^\alpha} \quad (3.52)$$

Logo,

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega^\alpha x(t) = 0 \quad (3.53)$$

Para a resolução de (3.53), utiliza-se a Transformada de Laplace de $x(t)$. E para mais aplicações da Transformada de Laplace no contexto fracionário, veja Podlubny (1998) [68]. Aplicando a transformada em ambos os lados da equação temos:

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) - s^{\alpha-2}x'(0) + \omega^\alpha X(s) = 0 \quad (3.54)$$

$X(s)$ nesta equação representa a Transformada de Laplace.

- **Transformada de Laplace da derivada, formulação de Caputo**

Para a Transformada de Laplace da derivada de ordem α de uma função genérica $f(t)$ pela formulação de Caputo, temos a seguinte igualdade:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{J^{n-\alpha} [D^n f(t)]\} \quad (3.55)$$

Aqui, faz-se necessária a introdução de uma função auxiliar, designada por $\Phi_\alpha(t)$, que terá as seguintes propriedades:

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ se } t > 0 \quad (3.56)$$

$$\Phi_\alpha(t) = 0, \text{ se } t \leq 0 \quad (3.57)$$

Escrevendo o termo referente à integral no segundo membro da equação (3.37), temos

$$J^{n-\alpha} [D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau, \alpha > 0 \quad (3.58)$$

Nota-se que isso pode ser escrito como uma integral de convolução, logo:

$$D_*^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} [D^n f(t)] = \Phi_{n-\alpha}(t) * f^n(t) \quad (3.59)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados de (3.59):

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_{n-\alpha}(t) * f^n(t)\} \quad (3.60)$$

Aplicando a propriedade do produto da convolução, obtemos:

$$\mathcal{L}\{\Phi_{n-\alpha}(t) * f^n(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_{n-\alpha}(t)\} \mathcal{L}\{f^n(t)\} \quad (3.61)$$

E como $\mathcal{L}\{t^\nu\} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$ e pela regra da Transformada de Laplace da n-ésima derivada de uma função, temos:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^{\alpha-n} \left\{ s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^k(0) s^{n-k-1} \right\} \quad (3.62)$$

Simplificando:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^k(0) s^{\alpha-k-1} \quad (3.63)$$

Dada a transformada, onde $X(s)$ representa a transformada da função $x(t)$ e isolando $X(s)$ tem-se:

$$X(s) = \frac{x(0)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} + \frac{x'(0)s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \omega^\alpha} \quad (3.64)$$

Sem perda de generalidades por questão de modelamento do sistema, escolhemos que a mola se encontra na posição inicial x_0 e possui velocidade inicial nula ($x'(0) = 0$). Assim, a equação (3.64) assume a forma:

$$X(s) = \frac{x_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} \quad (3.65)$$

A fim de encontrar a Transformada inversa de Laplace dessa função (3.65), utilizamos a seguinte demonstração:

- **Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler**

Considerando a função $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^\alpha)$, será útil o conhecimento da Transformada de Laplace desta para que se obtenha um caso geral aplicado no desenvolvimento das Equações Diferenciais Fracionárias. Utilizando a definição por séries da função Mittag-Leffler,

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^\alpha)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n t^{n\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n\alpha + \beta)}\right\} \quad (3.66)$$

Utilizando (de maneira não rigorosa) o resultado que a transformada da série é a série das transformadas, e recordando que $\mathcal{L}\{t^\nu\} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(bt^\alpha)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \mathcal{L}\{t^{n\alpha+\beta-1}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{s^{n\alpha+\beta}} \quad (3.67)$$

A série obtida é geométrica, possuindo o intervalo de convergência $|\frac{1}{s^\alpha}| < 1$. Simbolizando por a_0 o primeiro termo e por r a razão da série, tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{s^{n\alpha+\beta}} = \frac{a_0}{1-r} = \frac{\frac{1}{s^\beta}}{1-\frac{b}{s^\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - b} \quad (3.68)$$

Logo:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - b} \quad (3.69)$$

De maneira análoga:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b} \quad (3.70)$$

Ao encontrar a transformada de Laplace inversa, conforme demonstrado, obtemos:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b} \quad (3.71)$$

Com o auxílio dessa equação, obtemos a solução para o problema do oscilador harmônico fracionário proposto:

$$x(t) = x(0)E_{\alpha,1}(-\omega^\alpha t^\alpha) \quad (3.72)$$

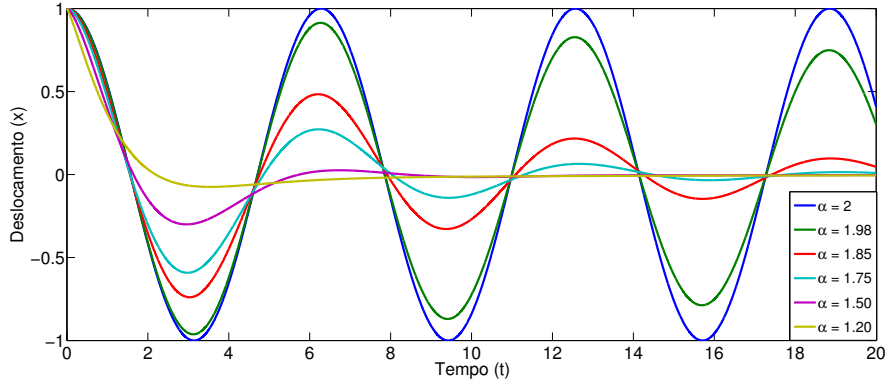


Figura 3.4: Oscilador harmônico fracionário, Ottoni (2018) [44].

Os gráficos da posição ao longo do tempo para diferentes valores de α podem ser visto nas figuras seguintes. Nota-se que, para valores menores de α , o sistema tem um comportamento muito similar ao sistema amortecido, com perda de energia mecânica devido ao amortecimento, embora a equação do Oscilador Fracionário não contenha o termo de fricção, Ottoni (2018) [44].

Para construção do plano de fase do oscilador harmônico (gráfico velocidade por tempo), faz-se necessário desenvolver uma equação que represente a velocidade do sistema com o passar do tempo. Para isso será útil a equação da posição na sua forma de série de potências, que por sua vez é obtida a partir da equação anterior e aplicando a definição da função de Mittag-Leffler:

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{\alpha n} t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (3.73)$$

Sabendo que a velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo, temos:

$$x'(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{\alpha n} t^{n\alpha-1} n\alpha}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (3.74)$$

Fazendo $n = n + 1$

$$x'(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \omega^{\alpha(n+1)} t^{\alpha(n+1)-1} (n+1)\alpha}{\Gamma(\alpha(n+1) + 1)} \quad (3.75)$$

Pela propriedade da função Gama:

$$\frac{(n+1)\alpha}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \quad (3.76)$$

Substituindo (3.76) em (3.75) temos:

$$x'(t) = -x_0\omega^\alpha t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{\alpha n} t^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \quad (3.77)$$

Escrevendo em termos da Mittag-Leffler:

$$x'(t) = -x_0\omega^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha) \quad (3.78)$$

Somando as energias potencial e cinética do sistema, temos a energia total do sistema oscilatório, que é conservada no sistema massa-mola simples, formando uma curva elíptica no plano de fase. No movimento amortecido, não há conservação dessa energia total, que vai sendo dissipada pelas forças de contato. Ao passar do tempo temos transformação em energia térmica, o que forma no plano de fase uma espiral.

Tal plano pode ser modelado pelo seguinte par ordenado:

$$(x, x') = (x_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha), -x_0 \omega^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)) \quad (3.79)$$

Se $\alpha = 2$

$$(x, x') = (x_0 \cos(\omega t), -x_0 \sin(\omega t)) \quad (3.80)$$

A forma é apresentada para o plano de fase do OHF. Podemos notar as curvas formadas 3.5.

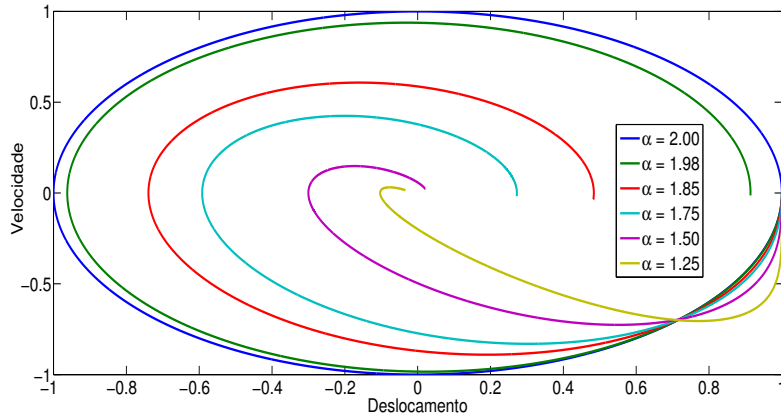


Figura 3.5: Plano de fase para α variando de 1 a 2, Ottoni (2018) [44].

A Equação da Difusão

Dadas algumas condições iniciais, podemos modelar um processo natural que tende a ir para seu estado de equilíbrio o qual denominamos de difusão. Neste processo difusivo, dado um aglomerado de elementos que se movimentam, cada elemento percorre uma trajetória aleatória, que ao decorrer do tempo, vai se difundindo até alcançar seu equilíbrio. Esses elementos são modelados por derivadas de primeira ordem em relação ao tempo. O comportamento anômalo é descrito pelo expoente da derivada temporal. Quando o expoente da derivada em relação ao tempo é maior que um, temos um processo superdifusivo. Já quando o expoente é menor que um, apresenta-se um processo subdifusivo e por fim quando vale um, temos uma difusão normal.

Dentro de uma visão fenomenológica, o termo difusão, também conhecido como fenômeno de transporte, foi inicialmente abordado por Adolf Fick, que descreveu matematicamente tal transiente por meio de leis. Dessa forma, o fluxo mássico difusivo de duas espécies, A e B, ocorrerá a uma determinada quantidade por unidade de tempo e por unidade de área, sendo perpendicular à direção de transferência de meio ao outro em casos de diferença de concentração entre os meios. O fluxo J_s de corrente é proporcional ao gradiente de concentração $\frac{\partial C}{\partial x}$ e D o coeficiente difusivo,

$$J_s(x, t) = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.81)$$

O coeficiente de difusão D ou difusividade mássica descrita por Incropera et

al. (2011) e Ottoni (2018) [3, 44], é um termo que dependerá das propriedades do meio onde ocorre a mistura. De acordo com a Lei de Fick, o sinal negativo da equação (3.81) mostra o sentido do fluxo onde ocorre a transferência da região mais concentrada para região menos concentrada.

Dada a primeira lei de Fick, pode-se observar uma linearidade no fluxo em relação ao gradiente de concentração, assim permanece sua proporcionalidade independentemente de quão grande seja a diferença de concentração entre os meios. Dentro dessa mesma lei, temos ainda que um soluto não afeta o outro mediante seu fluxo ao longo se sua mistura.

Partindo do princípio da conservação da matéria, podemos determinar a equação da continuidade (2.9), relacionando o fluxo e sua concentração:

$$\frac{\partial J_s(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} \quad (3.82)$$

Com duas equações diferenciais parciais (3.81) e (3.82) que tratam do fluxo e da concentração, podemos juntar as duas, tendo como resultado a equação da difusão. Tal modelamento matemático do fenômeno envolve uma equação diferencial parcial de concentração de segunda ordem que carrega o termo difusivo implícito nesta relação,

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.83)$$

A Equação da Difusão fracionária unidimensional

A fim de representar a equação (3.83) em sua forma fracionária temos:

$$\frac{\partial^\alpha C(x, t)}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.84)$$

De acordo com as abordagens em relação às equações diferenciais unidimensionais, de maneira geral, precisa-se de duas condições de contorno e uma inicial. Conforme o título do problema anuncia, iremos abordar a equação da difusão de maneira unidimensional, onde a função irá variar somente ao longo do eixo x e com o tempo, tal como terá como comprimento igual a L , onde temos uma distribuição contínua uniforme de sua constituição por meio de uma função genérica $c(x)$ no tempo inicial igual a 0.

Apresentamos a seguir as seguintes condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial(C(x, t))}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial(C(x, t))}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.85)$$

Tais condições nos informam que o meio onde estamos tratando o problema é isolado, não permitindo fluxo das extremidades.

Essa equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, teremos pelo produto de duas funções nossa função desejada, onde uma dependerá somente de x e a outra apenas de t .

$$C(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.86)$$

Trocando tal separação na equação de difusão fracionária (3.84), têm-se:

$$X(x)T^\alpha(t) = DX''(x)T(t) \quad (3.87)$$

De acordo com o resultado obtido, o método aplicado funciona adequadamente, assim conseguimos isolar as variáveis dependentes x e t em lados opostos, igualando-as a uma constante. Vide que é uma única possibilidade de resultado para dois entes com variáveis independentes, temos:

$$\frac{T^\alpha(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (3.88)$$

Diante dessa modificação, simplificamos nosso estudo para duas EDO's, ao invés de uma EDP. Ao analisar as possibilidades para $-\lambda$, essas podem ser: positiva, negativa ou nula. Avaliando o caso em que λ seja zero,

$$X''(x) = 0 \quad (3.89)$$

teremos como solução geral para $X(x)$,

$$X(x) = Bx + C, \quad (3.90)$$

sendo B e C constantes arbitrárias quaisquer.

Fazendo uso da primeira condição de contorno, (3.85)

$$X'(0)T(t) = 0 \quad (3.91)$$

Ao avaliar esse resultado como possível solução, $X'(0)$ tem que ser igual a 0. No entanto, caso $T(t)$ seja 0, a equação será nula, e teremos uma solução para o caso particular onde $c(x) = 0$, o que não nos interessa, afinal buscamos uma solução geral.

Usando $X'(0) = 0$ em $X(x)$, temos que:

$$X'(0) = B = 0 \quad (3.92)$$

Então

$$X(x) = C \quad (3.93)$$

Aplicando a segunda condição, temos que

$$X'(L)T(t) = 0 \quad (3.94)$$

Conforme dito, só seria solução se $X'(L)$ assumir 0, o que nos conduz a

$$X(L) = C \quad (3.95)$$

Mediante esses resultados, podemos concluir que a concentração não varia com a posição.

Avaliando os outros casos, $-\lambda > 0$ e $-\lambda < 0$, temos:

$$T^\alpha(t) = -\lambda DT(t) \quad (3.96)$$

$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad (3.97)$$

Para a equação relacionada a x , podemos resolver por meio de um palpite inicial, que será assumir uma exponencial em razão do aparecimento das constantes nas resoluções de EDO's. Assim, tomamos $X(x)$ do tipo de^{rx} , onde d e r são constantes. Para determinar o valor de r , substituímos o palpite na equação (3.97), obtendo:

$$r^2 de^{rx} = -\lambda \cdot d \cdot e^{rx}, \text{ em que } d \in \Re - (0) \quad (3.98)$$

Dividindo ambos os lados por de^{rx} :

$$r^2 = -\lambda \quad (3.99)$$

Logo

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad (3.100)$$

Considerando que $-\lambda > 0$, temos que:

$$X(x) = d_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + d_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (3.101)$$

Utilizando a primeira condição, $X'(0) = 0$ utilizada anteriormente, percebe-se que só é verdade caso $d_1 = d_2$. Então:

$$X(x) = d_1 \left[e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x} \right] \quad (3.102)$$

Com a outra condição de contorno, $X'(L) = 0$, obtemos uma solução somente se d_1 for 0, o que não nos interessa, pois não representa fenômeno físico descritível.

Por fim nos sobra o caso em que $-\lambda < 0$. Partindo da equação (3.101), onde utilizamos números complexos:

$$X(x) = d_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + d_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \quad (3.103)$$

Reescrevendo (3.103) em forma de senos e cossenos:

$$X(x) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + d_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (3.104)$$

Fazendo uso da primeira condição de contorno $X'(0) = 0$, encontramos que d_2 é igual a 0. Logo:

$$X(x) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (3.105)$$

Ao empregar a segunda condição $X'(L) = 0$, encontramos que $\sqrt{\lambda}L$ deve ser múltiplo inteiro de π

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \quad (3.106)$$

Verificando a condição de n como solução, podemos assumir que esse problema possui infinitas soluções, onde cada uma associa a uma nova constante. Ao substituir λ em (3.103), onde estamos considerando n como um número natural qualquer, a função $X(x)$ é um somatório de cossenos em sua forma mais generalizada, pois uma combinação linear de soluções também é solução.

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.107)$$

Ao encontrar a função relacionada a x , retornaremos aos cálculos para encontrar t iniciando em (3.96). Para a solução relacionada ao tempo, aplicamos a Transformada de Laplace em ambos os membros. Em razão de λ e D serem constantes, estes não sofrem transformação.

$$\mathcal{L}\{T^\alpha(t)\} = -\lambda D \mathcal{L}\{T(t)\} \quad (3.108)$$

Analisando os processos anômalos envolvidos, uma distinção julga-se necessária: os superdifusivos e os subdifusivos. Os subdifusivos são aqueles com ordem de derivação entre 0 e 1, enquanto os superdifusivos são aqueles em que a ordem da derivação fica compreendida entre 1 e 2, sendo que tais alterações podem ser encontradas em Ottoni (2018) [44].

Ao aplicar no lado esquerdo a Transformada de Laplace em (3.96) de um processo subdifusivo, deve-se utilizar a demonstração (3.0.6) desta dissertação, onde a regra da Transformada de Laplace da derivada foi generalizada pela formulação de Caputo. Em particular, temos:

$$\mathcal{L}\{T^\alpha(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{T(t)\} - s^{\alpha-1}T(0) \quad (3.109)$$

Ao substituir (3.108) e isolando a transformada de $T(t)$:

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}T(0)}{s^\alpha + D\lambda} \quad (3.110)$$

Ao aplicar a inversa da Transformada de Laplace na equação (3.110), para a qual é importante a utilização da demonstração (3.0.6), obtemos:

$$T(t) = f_n E_{\alpha,1} \left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2} \right) \quad (3.111)$$

Assim teremos a solução geral do problema ao unir as soluções $X(x)$ e $T(t)$:

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) E_{\alpha,1} \left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2} \right) \quad (3.112)$$

Ao aplicar a Transformada de Laplace no lado esquerdo de (3.108) em um processo superdifusivo, teremos:

$$\mathcal{L}\{T^{\alpha(t)}\} = s^\alpha \mathcal{L}\{T(t)\} - s^{\alpha-1}T(0) - s^{\alpha-2}T'(0) \quad (3.113)$$

Ao substituir em (3.108) e deixando em relação a $T(t)$ temos:

$$\mathcal{L}\{T^{\alpha(t)}\} = \frac{s^{\alpha-2}T'(0)}{s^\alpha + D\lambda} + \frac{T(0)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + D\lambda} \quad (3.114)$$

Utilizando a Transformada de Laplace inversa e usando a demonstração (3.0.6), obtemos:

$$T(t) = f_n T(0) E_{\alpha,1} \left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2} \right) + f_n T'(0) t E_{\alpha,2} \left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2} \right) \quad (3.115)$$

Diante dos resultados, podemos definir a solução geral para a concentração:

$$\begin{aligned}
C(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) E_{\alpha,1}\left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2}\right) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) t E_{\alpha,2}\left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Ao usar a condição inicial do problema, $C(x, 0) = c(x)$, podemos encontrar os valores para g_n por meio da série de Fourier,

$$c(x) = C(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.117}$$

Dessa maneira podemos obter a solução mais generalizada para a equação de difusão,

$$g_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L c(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_{-L}^L c(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3.118}$$

e seus gráficos podem ser encontrados em Ottoni (2018) [44].

3.1 Método de Otimização

De acordo com Saramago (2003) [33], otimizar é aperfeiçoar algo que já existe, delinear de forma eficiente e ter o menor gasto. A otimização busca um melhor método sem ter que avaliar todas as possibilidades envolvidas. Tais problemas de otimização são estratificados por cenários em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica com muitas variáveis em um meio em que podem haver restrições. Suas aplicabilidades abrangem várias áreas, tomando como exemplo, no projeto de sistemas ou componentes, planejamento e análise de operações, problemas de otimização de estruturas, otimização de forma e controle de sistemas dinâmicos, Saramago (2003) [33].

Em 2019, Almeida e Oliveira [31, 32] apresentaram um caminho para solução de sistemas de equações diferenciais não lineares com condições de contorno no infinito. Tal método foi chamado de Aproximação do Problema de Valor

Inicial por Otimização de Parâmetros Sequenciais (IVASIO). Esse procedimento é apresentado e um algoritmo pode ser aplicado a uma gama de sistemas de equações não lineares, como pode ser visto no Apêndice C e descrito na seção seguinte. E com isso, pode-se estender a um sistema de equações mais complexas que podem ser encontradas em [48, 49, 50, 51, 52, 53].

Tal método consiste em uma combinação do método do chute e otimização sob uma sequência divergente, controlada com o intuito de transformar o problema de contorno em um problema de valor inicial.

3.2 Abordagem Numérica

Considere a seguinte equação diferencial fracionária:

$$\frac{d^\alpha}{d\eta^\alpha}\Theta + \lambda f(\eta)\frac{d}{d\eta}\Theta = 0 \quad (3.119)$$

onde $\lambda = \frac{Pr}{2}$, e fazendo $\Psi = \frac{d}{d\eta}\Theta$, logo

$$\frac{d^\varepsilon}{d\eta^\varepsilon}\Psi + \lambda f(\eta)\Psi = 0 \quad (3.120)$$

onde $\varepsilon = \alpha - 1$.

Como f é uma função monotônica crescente, vamos assumir um intervalo de integração $[\eta_i, \eta_{i+1}]$, onde f é aproximadamente constante e nesse intervalo podemos dizer que $f(\eta) \approx \frac{f(\eta_i) + f(\eta_{i+1})}{2} = F_i$. Com isso temos que

$$\frac{d^\varepsilon}{d\eta^\varepsilon}\Psi_i + \lambda F_i \Psi_i \approx 0 \text{ para } \eta \in [\eta_i, \eta_{i+1}], \quad (3.121)$$

para Ψ_i é a solução aproximada da equação (3.120) no intervalo $[\eta_i, \eta_{i+1}]$.

Seja a equação fracionária

$$\frac{d^\varepsilon}{dt^\varepsilon}T + kT = 0 \quad (3.122)$$

ela tem como solução

$$T(t) = T(0)E_{\varepsilon,1}(-kt^\varepsilon) \quad (3.123)$$

Na função Mittag-Leffler iremos variar o parâmetro α no intervalo $1 \leq \alpha < 2$, pois, assim, iremos garantir o estudo dos efeitos na camada limite. Comparando (3.121) e (3.122), vemos que Ψ_i é dado por

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} E_{\varepsilon,1}(-\lambda F_i \eta_i^\varepsilon) \quad (3.124)$$

ou

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_i \eta_i^\varepsilon \right) \quad (3.125)$$

onde $i \geq 1$. Podemos escolher $\Psi_0 = -z$, considerado essa constante como um fator de escala. Assim $\Psi_1 = E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_1 \eta_1^\varepsilon \right)$, $\Psi_2 = \Psi_1 E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_2 \eta_2^\varepsilon \right)$,

$$\Psi_1 = -z E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_1 \eta_1^\varepsilon \right)$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_2 \eta_2^\varepsilon \right)$$

$$\Psi_3 = \Psi_2 E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_3 \eta_3^\varepsilon \right)$$

...

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} E_{\varepsilon,1} \left(-\frac{Pr}{2} F_i \eta_i^\varepsilon \right)$$

...

Se o intervalo desejado para calcular Θ é de $[0, s]$ e sabendo que $\eta_i - \eta_{i-1} = \Delta\eta$, que é nosso passo de integração, i irá variar de 1 até o maior inteiro que é menor que a razão entre $\frac{s}{\Delta\eta}$, ou seja $i = 1, 2, 3, \dots, \lfloor \frac{s}{\Delta\eta} \rfloor$. A escolha de s sendo um número natural e $\Delta\eta$ um inteiro multiplicado por uma potência de 10, elimina-se a necessidade de usar $\lfloor \frac{s}{\Delta\eta} \rfloor = i_{max}$. Por exemplo, se escolhermos $s = 200$ e $\Delta\eta = 10^{-4}$ teremos $\lfloor \frac{s}{\Delta\eta} \rfloor = 2 \times 10^4$, logo $i = 1, 2, 3, \dots, 2 \times 10^4$. Para cada valor de i teremos um valor de Ψ , e podemos construir uma tabela na seguinte forma;

i	η	Ψ
0	0	$-z$
1	$\Delta\eta$	Ψ_1
2	$2\Delta\eta$	Ψ_2
3	$3\Delta\eta$	Ψ_3
\vdots	\vdots	\vdots
i_{max}	$i_{max}\Delta\eta = s$	$\Psi_{i_{max}}$

Para determinar Θ podemos usar que $\Psi = \frac{d}{d\eta}\Theta$, logo;

$$\Theta(\eta) = \Theta(0) + \int_0^\eta \Psi(\eta) d\eta \quad (3.126)$$

$$\Theta(\eta) = \int_0^\eta \Psi(\eta) d\eta \quad (3.127)$$

Como só conhecemos $\Psi(\eta)$ aproximadamente nos intervalos $[\eta_i, \eta_{i+1}]$ podemos achar a integral nesses intervalos, considerando $\Psi(\eta_i)$ como constante no intervalo. Logo, temos que

$$\Theta(\eta_i) \approx \Theta(\eta_{i-1}) + \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \Psi(\eta_i) d\eta$$

$$\Theta(\eta_i) \approx \Theta(\eta_{i-1}) + \Psi(\eta_i) \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} d\eta$$

$$\Theta(\eta_i) = \Theta(\eta_{i-1}) + \Psi(\eta_i)(\eta_i - \eta_{i-1})$$

$$\Theta(\eta_i) = \Theta(\eta_{i-1}) + \Psi(\eta_i)\Delta\eta$$

Assim podemos completar a tabela na forma

i	η	Ψ	Θ
0	0	$-z$	1
1	$\Delta\eta$	Ψ_1	$\Psi_1\Delta\eta$
2	$2\Delta\eta$	Ψ_2	$\Psi_1\Delta\eta + \Psi_2\Delta\eta$
3	$3\Delta\eta$	Ψ_3	$\Psi_1\Delta\eta + \Psi_2\Delta\eta + \Psi_3\Delta\eta$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i_{max}	$i_{max}\Delta\eta = s$	$\Psi_{i_{max}}$	$1 + \sum_i^s \Psi_i\Delta\eta = 1 + \Delta\eta \sum_i^s \Psi_i$

Capítulo 4

Aplicando o Cálculo Fracionário na camada limite e os efeitos da difusão anômala

Consideramos aqui um fluxo de convecção natural da camada limite laminar bidimensional e a transferência de calor sobre a placa, onde o eixo das abscissas x representa a coordenada ao longo da placa e o eixo das ordenadas y é perpendicular a placa, conforme descrito no Capítulo 2 desta dissertação.

Para a solução do sistema de equações diferenciais não-lineares ordinárias na forma fracionária com condições de contorno no infinito, foi utilizada uma junção dos métodos de disparo direto e a otimização de parâmetros sequenciais sob um controle sequencial divergente, o que nos permitiu converter um problema de contorno em um problema de valor inicial.

A equação de Blasius (2.62), que é uma equação diferencial de terceira ordem, foi reescrita em um sistema como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, onde foi definido novas variáveis como $dy_1 = F(x), dy_2 = F'(x)$ e $dy_3 = F''(x)$, temos:

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ -0.5Y_1Y_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Usando as condições iniciais no vetor:

$$\begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde z_1 é o termo que não sabemos inicialmente e a condição de contorno para $Y_2(\infty) = 1$ é condicionada. Podemos obter a função objetivo, da seguinte forma:

$$Obj(z_1) = (Y_2(\infty, z_1) - 1)^2 \quad (4.3)$$

onde para obter a primeira solução em $Y_2(\infty, z_1)$ no problema 4.2, é necessário realizar a primeira interação. À medida que $\eta \rightarrow \infty$ obtemos o valor de z_1 e omitimos a condição do contorno $Y_2(\infty, z_1)$.

$$z_1^* = \arg \min_{z_1} Obj(z_1) \quad (4.4)$$

em que a equação (4.4) se refere ao argumento mínimo encontrado para cada variação do $Y_2(\infty)$ quando tende ao infinito na qual pode-se obter uma "possível" convergência, mediante ao fato do parâmetro z_1^* já não mudar seus valores obtidos.

Sabe-se que integrar numericamente não pode ser feito até o infinito, então para obter uma solução numérica para equação 4.4, uma sub-rotina foi elaborada para uma sequência de otimização, que pode ser definida como:

$$z_{1,n}^* = \arg \min_{z_1} Obj_n(z_1) \quad (4.5)$$

onde

$$Obj_n(z_1) = (Y_2(X_n, z_1) - 1)^2 \quad (4.6)$$

e que X_n é uma sequência real onde o $\lim_{\eta \rightarrow \infty} X_n = \infty$, e $Y_2(X_n, z_1)$ representa agora a solução do nosso problema de valor inicial (4.3) de X_n e $Y_2 X_n$. A solução numérica de (4.6) é implementada para o maior valor possível de X_n , com intuito de atingir um boa precisão numérica. O método de otimização utilizado nesta dissertação foi o ¹método do gradiente, mas qualquer outro método pode ser utilizado.

Podemos notar na tabela 4.1 a seguir que os resultados encontrados pelo Método de Otimização de Parâmetros e os resultados encontrados por Fazio (2009) [8] convergem perfeitamente. Entretanto, os resultados encontrados via otimização apresentam uma pequena melhoria em sua precisão ao comparado a Fazio (2009) [8] em uma casa decimal a mais. Contudo, a função

¹O método do gradiente é um método numérico para encontrar um mínimo (local) de uma função por meio de iterações.

objetivo é bem menor, está no limite da precisão do método aqui usado. Entretanto, os resultados apresentados já demonstram a eficácia do método e podem ser ainda alterados para melhorar os resultados caso seja usado um passo menor na integração, no nosso caso, $\Delta(x) = 10^{-5}$. Dessa forma, não foi utilizado, visto que obtemos um resultado melhor do que existia até então, como apresentado a seguir.

α	Otimização		Fazio (2009)	
	$F'''(0)$	Obj_n	$F'''(0)$	Obj_n
1/2	0.3320573362156	$\ll 1E-20$	0.332057336215	8,79E-13
1	0,4695999883613	$\ll 1E-20$	0,469599988361	3,09E-13

Tabela 4.1: Comparação entre os resultados encontrados via otimização de parâmetros e os resultados encontrados por Fazio (2009) [8].

Nos gráficos abaixo, podemos comparar os resultados encontrados por Oliveira (2018) [37] e Monteiro et al. (2018) [55].

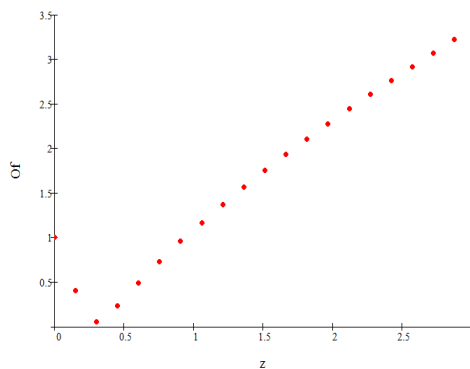


Figura 4.1: Obj x z, Oliveira (2018) [37].

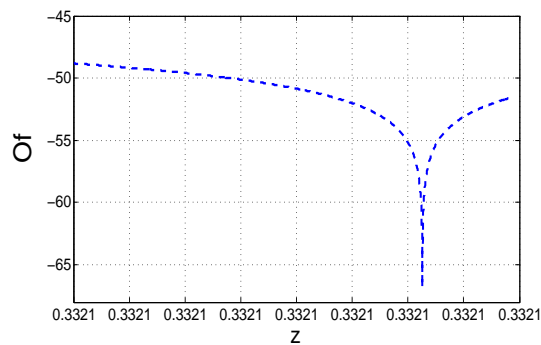


Figura 4.2: Obj x z, Monteiro et al. (2018) [55].

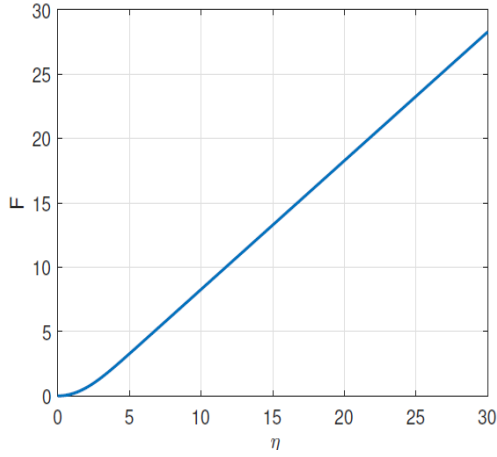
É importante ressaltar que o gráfico 4.2 possui a mesma convergência que o gráfico 4.1, visto que sua diferença está na diferença entre escalas e número de pontos utilizado no método.

Os seguintes gráficos também representam soluções para equação de Blasius via Otimização de Parâmetros.

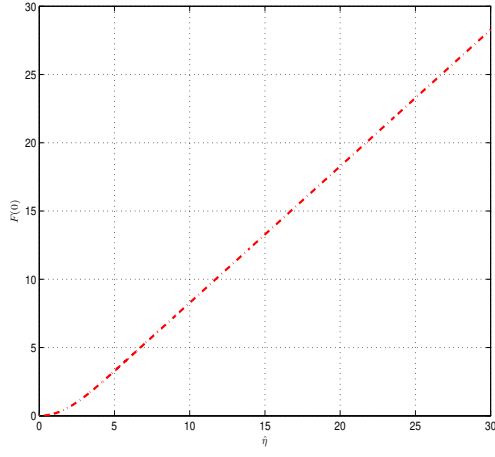
Isso nos mostra uma eficácia ao utilizar o Método de Otimização de Parâmetros. A sua implementação é simples, podendo ser visualizada no apêndice D.

Relevante destacar que tal método aqui utilizado demanda um baixo custo computacional e um nível básico de programação.

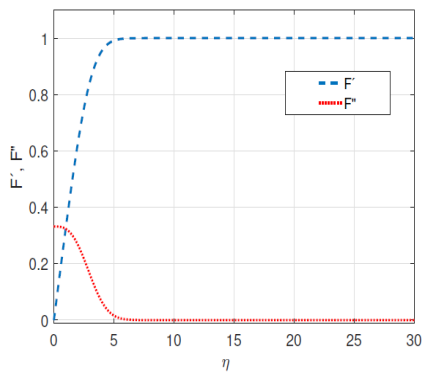
Para não perder de vista o fenômeno aqui estudado, os perfis de velocidade



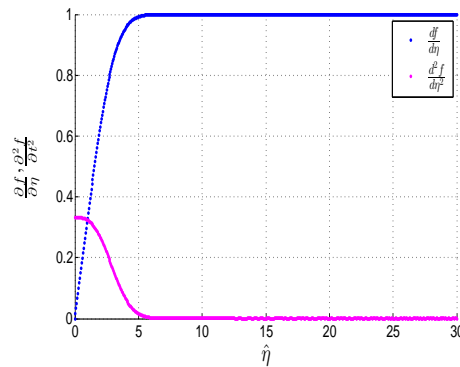
(a) $F \times \eta$, Oliveira (2018) [37]



(b) $F \times \eta$, Monteiro et al. (2018) [55]



(c) $F' F'' \times \eta$, Oliveira (2018) [37]



(d) $F' F'' \times \eta$, Monteiro et al. (2018) [55]

na camada limite laminar em uma placa plana são plotados na forma adimensional, como a ordenada é a velocidade local na direção de x . O que podemos observar é que uma única curva é suficiente para correlacionar as distribuições de velocidade em todas as posições ao longo da placa.

A aplicação na ordem fracionária pode nos conduzir a construir teorias por meio de hipóteses do modelo e analisando os resultados, assim, verificando o quanto as variáveis podem afetar o sistema.

A partir da seção 2.3.1, foi deduzida a equação de conservação de energia para uma camada-limite laminar, em que os efeitos de dissipação viscosa foram desconsiderados. Tais efeitos podem ser significantes se o fluido for

muito viscoso, como em mancais de rolamentos, ou se a taxa de cisalhamento viscosa for extremamente alta.

Nas observações descritas na equação (2.82), onde as velocidades na equação de conservação de energia, u e v , apresentam os mesmos valores em qualquer ponto x, y como na equação dinâmica (2.21) e (2.22), podemos usar as velocidades calculadas previamente para obter a solução do problema de transferência de calor. As equações são similares: $u(x, y)$ também é solução para distribuição de temperatura $T(x, y)$ se $\nu = \alpha$, onde temos a temperatura na superfície da placa sendo constante.

Diante disso, uma interpretação em termos de processos físicos é que transferência de calor é análoga a de momento.

De acordo com o capítulo anterior descrito, isso nos permitiu analisar os efeitos da difusão anômala na camada limite em uma placa plana, onde já na primeira interação do programa, podemos obter a constante de integração para ser aplicada na variação do parâmetro α e assim realizar novas interações. Isso nos possibilitou plotar cada novo perfil de velocidade, bem como de temperatura para 4 variações do parâmetro α , em que para Ψ_1 é o valor da função original, para Ψ_2 , tem como derivada 1.7, já em Ψ_3 , assume derivada de 1.3 e por fim, Ψ_4 possui derivada de 1.1. Cada variação de α , juntamente com suas respectivas diferenças, se faz entender o porquê da modelagem fracionária poder oferecer uma descrição mais fina de eventos naturais.

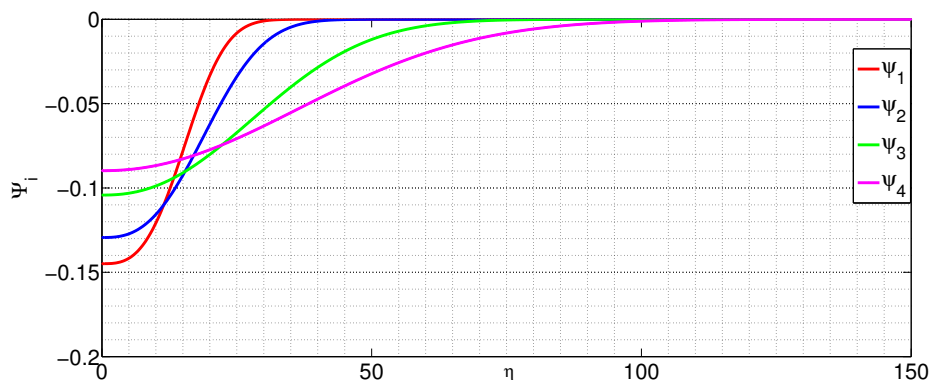


Figura 4.3: Perfis de Velocidade, $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$.

Podemos perceber, na Figura 4.3, que ao variar o parâmetro α pode nos levar a uma interpretação sobre a troca dos efeitos difusivos substanciais entre cada perfil de velocidade.

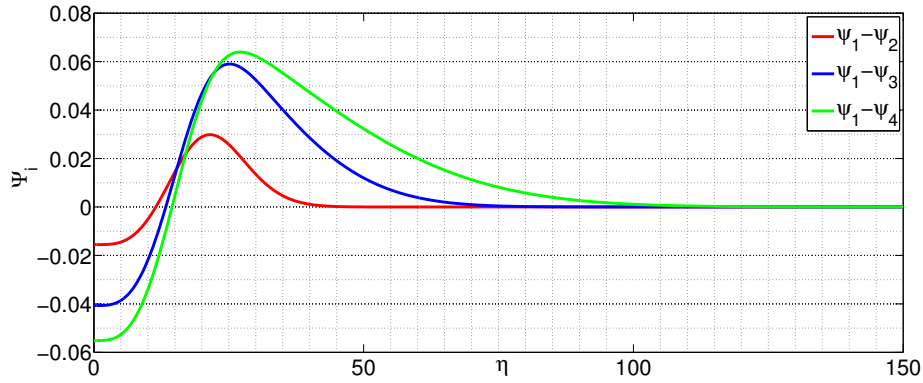


Figura 4.4: Diferença entre os perfis de velocidade

Avaliando a Figura 4.4, temos um ponto de máximo global, o que corrobora com o Método de Otimização de Parâmetros para solução numérica do problema da camada limite, visto que a primeira derivada da função, no intervalo de $0 \leq \eta \leq 150$ nos permite obter um máximo local.

Contraopondo as Figuras 4.3 e 4.4, pode-se observar no eixo das ordenadas uma redução em sua amplitude de escala, onde as diferenças entre as funções para cada perfil de velocidade estão em consonância com a literatura Incropera et al. (2011) [3]. Calor e momento em regime laminar são realizados somente por difusão. Diante dessa configuração, faz-se necessário um estudo tanto quantitativo quanto qualitativo na variação da função Mittag-Leffler, adicionando mais parâmetros à função, bem como uma análise de efeito temporal.

Para o próximo gráfico, temos a representação das curvas de temperatura, em que para Θ_1 é o valor da função original, para Θ_2 , tem como derivada 1.7, já em Θ_3 , assume derivada de 1.3 e por fim, Θ_4 possui derivada de 1.1.

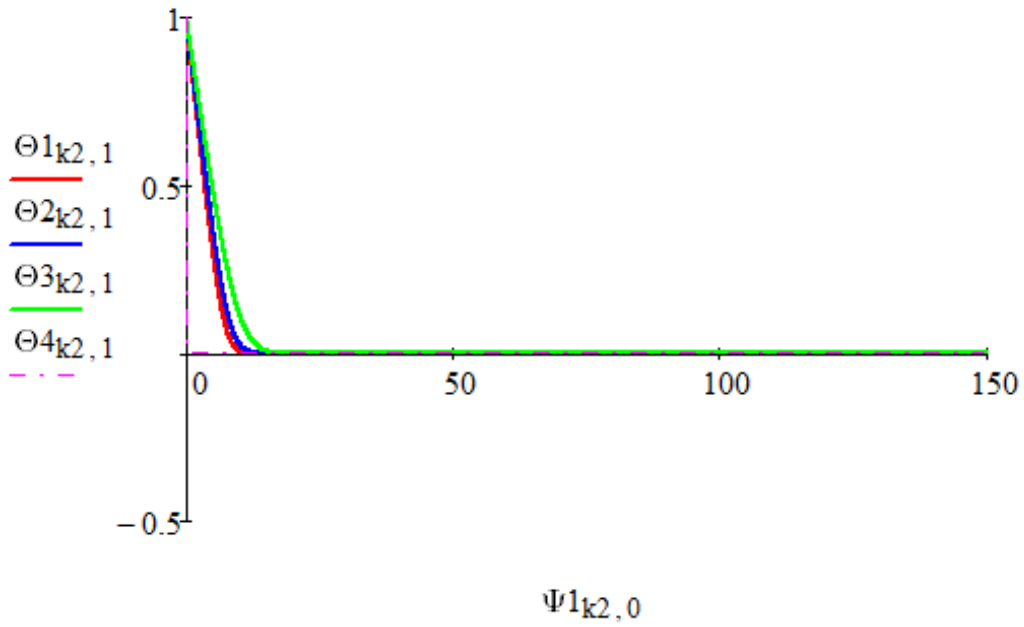


Figura 4.5: Curvas de temperatura $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$

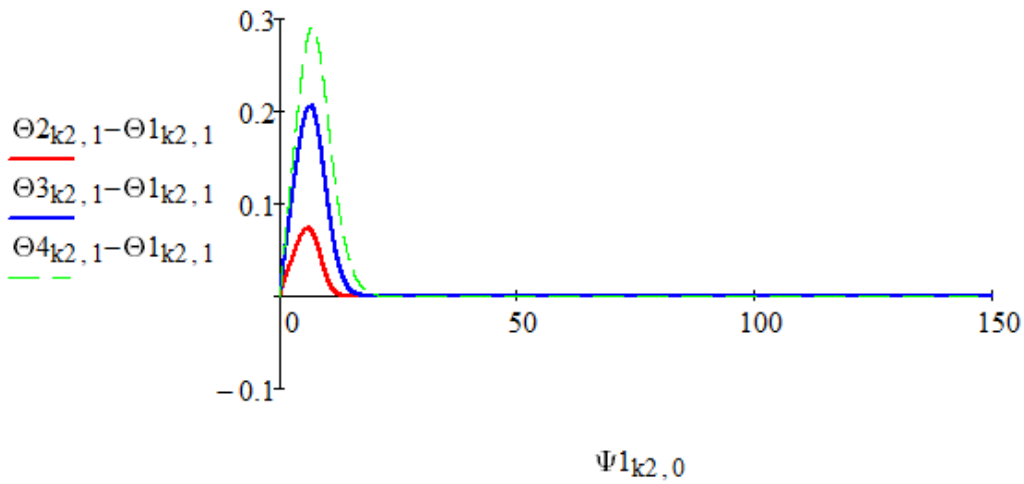


Figura 4.6: Diferenças entre as curvas de Temperatura

Dentre os resultados obtidos para a camada limite térmica, Θ_4 se assemelha ao crescimento da camada limite em regime turbulento, onde seu desenvolvimento é fortemente influenciado por flutuações aleatórias no fluido e não pela

difusão molecular, o que condiz com o fato da não dependência do número de Prandtl e de Schmidt.

Na medida com que o parâmetro α se aproxima de um, percebemos na camada limite térmica, Θ^α , um aumento no seu perfil de temperatura (δ_t), onde α está compreendido entre $1 \leq \alpha < 2$, o que pode significar uma forte interação no processo de transferência de energia. Isso representa um aumento na espessura da camada limite de velocidade e temperatura. Um fato interessante é que as curvas para seus respectivos gradientes de temperatura são semelhantes, mesmo que em um curto intervalo de η , suas diferenças apresentam crescimentos assintóticos distintos, isso nos leva a um ponto de máximo local igual para as curvas obtidas no gráfico 4.6. Todos seus decrescimentos tendem a zero de modo abrupto, o que significa uma rápida estabilização do sistema.

Tal variação na parte fracionária mostra que a camada limite térmica é maior que a camada limite hidrodinâmica para fluidos que apresentam Pr inferior à unidade. De forma contrária, quando Pr é maior que 1, a camada limite térmica é menor que a hidrodinâmica.

Uma forma generalizada para análise das Figuras 4.4 e 4.6, em que a escala temporal tende a zero, a função densidade, contida na função de corrente, sofre uma determinada perturbação por suas respectivas partículas e suas adjacentes. Contudo, isso também pode não ocorrer dependendo das características em que os coeficientes de difusividade térmica e viscosidade cinemática são definidos no momento de sua modelagem.

Capítulo 5

Considerações Finais

Partindo de conceitos formais, a transferência de calor por convecção envolve dois mecanismos que podem ocorrer de forma simultânea - difusão ou condução - junto por um fluxo macroscópico de calor para (ou de) um fluido em movimento.

Dada a respectiva adimensionalização dos parâmetros, e por meio da definição da função de corrente, podemos descrever a camada limite por meio de Equações Diferenciais cujas condições de contorno são dadas no infinito. Isso implica em uma difícil solução numérica e para tal, uniu-se o Método de Otimização de Parâmetros, via método do chute, junto ao Cálculo Fracionário, para obter numericamente, resultados mais refinados dos perfis dos velocidade e temperatura.

Todo esse ferramental demonstra um ganho em sua formalidade descrita dos processos difusivos concomitantemente às outras soluções existentes. Aqui, ele foi aplicado a um fenômeno real cujos efeitos em uma placa plana vem sendo estudados há vários anos. Nele, o processo fracionário é anômalo, em que, ao variar o parâmetro alfa, altera a difusividade da camada limite energética, dado à não abordagem de sua dependência temporal.

O valor da derivada fracionária calculada para cada perfil de velocidade no ponto η depende dos valores obtidos em muitos pontos, diante disso podemos dizer que a derivada fracionária é não local. Por ser não local, possui efeitos de memória espacial, podendo ser associado a efeitos de borda.

Ao adicionar o termo de menor valor fracionário à equação do gradiente de temperatura, nota-se um significativo aumento em seu perfil de temperatura da camada limite, para Θ_2 , sua função original e a menor derivada possível para Θ_4 , o que leva a um aumento na espessura da camada-limite de temperatura e hidrodinâmica. Isso também pode ser interpretado como um limiar da

mudança de regime, laminar para turbulento, onde a função densidade, considerando intervalos minúsculos de tempo, pode ser atingida por suas próprias partículas no aumento do perfil camada limite térmica.

E nessa trajetória utilizando o Método de Otimização de Parâmetros, juntamente com o termo fracionário nas iterações pode-se constatar que, mesmo para um sistema não linear e com condições de contorno no infinito temos uma boa solução ao utilizarmos o menor valor possível da função objetivo satisfazendo as restrições especificadas.

Mesmo que nesta dissertação, não trabalhamos diretamente com uma comparação direta entre a solução da equação de difusão e a Blasius, acredita-se que o trabalho tenha sua devida importância, visto que as soluções aproximadas das equações não lineares de Blasius tangenciam os difusão anômala entre diferentes mecanismos que geram sua anomalia.

Diante da gama de aplicações que o tema estudado pode contribuir, adicionar o termo da derivada fracionária nos possibilita uma ampliação a outras equações que permeiam o estudo da difusão anômala e com isso, um melhor entrelaçamento entre o experimento e o modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] MALTE, Henkel.; HAYE, Hinrichsen.; SVEN, Lübeck. *Non-equilibrium phase transitions*, Springer Science & Business Media B.V, vol.1, (2008).
- [2] HAYE, Hinrichsen, *Non-equilibrium phase transitions*, Physica A, 369, p. 1-28, (2006).
- [3] BERGMAN, TL.; INCROPERA, FP.; DEWIIT, DP.; LAVINE, AS. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer: 7th Edition*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.
- [4] SCHLICHTING, H. and Gersten, K. *Boundary-Layer Theory*. 8th Edition (2000), Springer-Verlag, Berlin.
- [5] BLASIUS, H. Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 56:1-37; 60: 397-398 (1908). Engl. transl. in NACA TM 1256.
- [6] OSTRACH, S. *An Analysis of Laminar Free-Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the generating Body Force*. NACA Report 1111 (1953).
- [7] FAZIO, R. *The Blasius problem formulated as a free boundary value problem*. Acta Mechanica 95, 1-7 (1992).
- [8] FAZIO, R. *Numerical transformation methods: Blasius problem and its variants*. Applied Mathematics and Computation 215 (2009) 1513–1521.
- [9] RUBEL, L. A. *A estimate of the error due to the truncated boundary in the numerical solution of the Blasius Equation*. Quarterly of Applied Mathematics Vol. 13, No. 2, pp. 203-206 (1955).

- [10] EFTEKHARI, S.A.; JAFARI, A.A. *Numerical solution of general boundary layer problems by the method of differential quadrature Scientia Iranica*. Volume 20, Issue 4, Pages 1278-1301 (2014).
- [11] BEONG, In Yun. *Constructing Uniform Approximate Analytical Solutions for the Blasius Problem,” Abstract and Applied Analysis*. vol. 2014, Article ID 495734, 6 pages, 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/495734>.
- [12] LIAO, S.J. *An approximate solution technique not depending on small parameters (Part2): an application in fluid mechanics Int. J. Non-Linear Mechanics*, 32 (5) (1997), pp. 815-822.
- [13] LIAO, S.J. *An explicit, totally analytic solution of laminar viscous flow over a semi-infinite flat plate. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* Volume 3, Issue 2, Pages 53-57 (1998).
- [14] BOUGOFFA, L.; Wazwaz, A.M. *New approximate solutions of the Blasius equation. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 25(7), pp. 1590-1599 (2015).
- [15] PRANDTL, L. *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904*, 484-491
- [16] NA, T. Y.; Habib, I. S. *Solution of the natural convection problem by parameter differentiation. Int. J. Heat Mass Transfer*, 17, 457-459, 1974.
- [17] M. I. A. Othman, A. M. S. Mahdy. *Numerical Studies for Solving a Free Convection Boundary-Layer Flow Over a Vertical Plate. Mechanics and Mechanical Engineering* Vol. 22, No. 1, 41-48 (2018).
- [18] NOMAN Ashraf.; Jawed Mustafa and M. Altamush Siddiqui. *Experimental and Numerical Analysis of Natural Convection over a Constant Heat Flux Vertical Plate. 2nd National Conference on Advances in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, March 23-24, (2013).
- [19] KUO, B. L. *Application of the differential transformation method to the solutions of the free convection problem. Appl. Math. and Comp.*, 165, 63-79, (2005).
- [20] YIGIN, Lia.; Hervé Pabioua.; Christophe MénézobYiqin Lia.; Christophe Ménézob. *Unsteady heated vertical channel flow in a cavity. International Journal of Thermal Sciences* 125, 293-304, (2018).

- [21] NADA, E. A. *Natural convection heat transfer simulation using energy conservative dissipative particle dynamics*. Phys. Rev. E, Vol.81(5 Pt 2), pp.056704 (2010)
- [22] GEORGES E.; Durand and Epifanio G. Virga. *Phys. Rev. E* 59, 4137 (1999).
- [23] SULEM, C.; SULEM, P. *The Nonlinear Schrodinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse* (Springer, 1999)
- [24] LANDAU, L. Levich, B. *Dragging of a Liquid by a Moving Plate*. Acta Physicochimica URSS, Vol. 17, No. 42, pp. 42-54 (1942).
- [25] KARDAR, Mehran.; PARISI, Giorgio.; ZHANG, Yi-Cheng. *Dynamic Scaling of Growing Interfaces*. Phys. Rev. Lett. 56 (9): 889–892. Mar-1986.
- [26] HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. *Practical Genetic Algorithms*. Second edition. INC.: John Wiley e Sons, 2004.
- [27] WH; Teukolsky, SA; Vetterling, WT; Flannery, BP (2007). *Section 18.1. The Shooting Method*. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). New York: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-88068-8.
- [28] SHINBRIT, T.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A.; OTT, E. *Nature* volume 363, pages 411–417. 1993.
- [29] RILEY, N. *Laminar Boundary Layers*. SIAM Review, Vol. 17, No. 2, pp. 274-297. 1975.
- [30] STEWARTSON, K. *The Theory of Unsteady Laminar Boundary Layers*. Advances in Applied Mechanics Volume 6, Pages 1-37. 1960.
- [31] OLIVEIRA, Adélcio C; ALMEIDA, Alexandre C. L. *Numerical solution of Boundary Layer Equations based on optimization*. International Journal of Non-Linear Mechanics, v. 113, p. 103-111, 2019.
- [32] OLIVEIRA, Adélcio C.. *Using the Parameter Optimization Method for Solving Differential Equations with Contour Conditions: The nonlinear Euler-Bernoulli beam*. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, v. 8, p. 447-458, 2019.

- [33] SARAMAGO, Sezimária F. Pereira. *Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e 'simulated annealing'*. Notas em Matemática Aplicada, Volume 6, SBMAC: São Carlos - São Paulo, 2003.
- [34] LOBATO, Fran Sérgio. *Otimização Multi-objetivo para o projeto de Sistemas de Engenharia*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia. Minas Gerais. 2008.
- [35] EDGAR, Thomas F.; HIMMELBLAU, David M.; LASDON, Leon S. *Optimization of chemical processes*: 2.ed. New York: The MacGraw-Hill Companies, 2001.
- [36] VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*.: 3.ed. Colorado Springs: Vanderplaats Research e Development Inc, 1999.
- [37] OLIVEIRA, Adélcio C. *Using the Parameter Optimization Method for Solving Differential Equations with Contour Conditions: The nonlinear Euler-Bernoulli beam*. L e H Scientific Publishing. Discontinuit, Nonlinearity and Complexity. Páginas 55-66, 2018.
- [38] WH, Teukolsky, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. *The Shooting Method*. The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge University. 3.ed. 2007. ISBN 978-0-521-88068-8
- [39] OLIVEIRA, Adélcio C.; XAVIER, Jacqueline J.; COELHO, J.O.P. *Uso do método de otimização de parâmetros para resolver equações diferenciais com condições de contorno*. XXI Encontro Nacional de Modelagem Computacional e IX Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais. ISBN 978-85-54077-00-6. 2018.
- [40] LOPES, António G.; OLIVEIRA, Luis A. *Mecânica dos Fluidos*: 5. ed. Lisboa: Editora Lidel, 2016
- [41] MUNSON, Bruce R. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*: 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2004.
- [42] BERGMAN, TL.; INCROPERA, FP.; DEWIIT, DP.; LAVINE, AS. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer materiais suplementares*. Rio de Janeiro: LTC, 2008. CD-ROM.

- [43] CAMARGO, R. Figueiredo.; E. Capelas de Oliveira. *Cálculo fracionário*: 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- [44] OTTONI, José Eloy.; CARVALHO, Matheus Dias de. *Introdução ao Cálculo Fracionário com aplicações*. Revista de Matemática de Ouro Preto v.1 pp:50-77 2018 : 2237-8103
- [45] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.; HARRIS, Frank E. *Mathematical Methods for Physicists*: 7. ed. 2012. Oxford: Editora Elsevier, ISBN: 978-0-12-384654-9.
- [46] KIRBY, Brian J. *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transporte in Microfluidic Devices* 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [47] SALINAS, Sílvio RA. *Introdução a física estatística* vol. 09. Edusp, 1997.
- [48] OLIVEIRA, A. C. , Amado, F. D. R., Moura, R. C. A. *Theoretical Analysis of Ionic Transport Through Homopolar Ion-Exchange Membranes*, IV Encontro Ciência e Tecnologia de Materiais, 2013.
- [49] VIEIRA, I.P., Oliveira, A.C. *Study of diffusion applied to electrodialysis: three-dimensional model in cylindrical coordinates*. J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 39, 1429–1439 (2017). <https://doi.org/10.1007/s40430-016-0624-5>
- [50] ALMEIDA, A. C. L. ; Oliveira, Adélcio C. *Diffusion Processes Modeled with Higher Order Differential Terms*. *Far East Journal Of Applied Mathematics*, v. 100, p. 1-10, 2018.
- [51] OLIVEIRA, A.C., Amado, F.D.R. e Moura, R.C.A. *Steady state of ion transport in homopolar ion-exchange membrane: a theoretical study*. J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 38, 1165–1170 (2016). <https://doi.org/10.1007/s40430-015-0357-x>
- [52] VIEIRA, Igor Pereira; OLIVEIRA, Adélcio C. *Estudo da Difusão Aplicada a Eletrodialise: Modelo Tridimensional em Coordenadas Cilíndricas*. In: XVII Encontro de Modelagem Computacional, V Encontro Ciência e Tecnologia de Materiais, 2014, Petrópolis. Anais do XVII Encontro de Modelagem Computacional, V Encontro Ciência e Tecnologia de Materiais, 2014.

- [53] MOURA, Ruan CA et al. *Estudo da Resistência Ôhmica em Membrana de Troca Catiônica no Processo de Eletrodialise*. Revista Iberoamericana de Polímeros, v. 15, n. 1, p. 1-6, 2014.
- [54] E. Meyer, "Untersuchungen über Härteprüfung und Härte Brinell Methoden," Z. Ver. deut. Ing., 52 (1908).
- [55] MONTEIRO, T. B.; ALMEIDA, A. C. L.; OLIVEIRA, A. C. *Solução Numérica da Equação de Blasius*. XXI Encontro Nacional de Modelagem Computacional e IX Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, 2018, Búzios-RJ.
- [56] WIMAN, A. *Über den fundamental satz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$* , Acta Math., 29, 191- 201, (1905).
- [57] PRABHAKAR, T. R. *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel*, Yokohama Math. J., 19, 7-15, (1971).
- [58] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus*, Academic Press, New York - London, (1974).
- [59] B. Ross. *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*, Lecture Notes in Mathematics, 457, 1-36, (1975)
- [60] JUMARIE G. *On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^\alpha$* . Appl Math Lett 2005; 18(7):739–48.
- [61] JUMARIE G. *On the solution of the stochastic differential equation of exponential growth driven by fractional Brownian motion*. Appl Math Lett 2005; 18(7):817–26.
- [62] JUMARIE G. *New stochastic fractional models for malthusian growth, the poissonian birth process and optimal management of populations*. Math comput modell 2006; 44(3):231–54.
- [63] JUMARIE G. *Modified Riemann–Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results*. Comput Math Appl 2006; 51(9):1367–76.
- [64] JUMARIE G. *Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann–Liouville derivative for non-differentiable functions*. Appl Math Lett 2009; 22(3):378–85.

- [65] HILFER, R.; BUTZER, P. L.; WESTPHAL, U. *An introduction to fractional calculus*. Appl. Fract. Calc. Phys., World Scientific, p. 1-85, 2010.
- [66] R. Hilfer (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing, New York, 2000.
- [67] J. Hadamard, J. Math. Pures Appl. 8, 101 (1892).
- [68] PODLUBNY, Igor. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [69] VIEIRA, Igor P.; OLIVEIRA, Adélcio C. *Study of diffusion applied to electro dialysis: three-dimensional model in cylindrical coordinates*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 39, n. 4, p. 1429-1439, 2017.
- [70] MYERS. T. G, SIAM Rev. 40(3) (1998), 441.
- [71] MYERS. T. G, *The Mechanics of Thin Film Coatings*. World Scientific, 1996, pp. 259-268.
- [72] N. Tehseen and P. Broadbridge, Entropy 14(7) (2012), 1127.
- [73] SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*, 7^a ed. McGrawHill, New York, 1979.
- [74] BIRD, R.B., W. E. STEWART, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, New York, 1966.
- [75] CAJORI, Florian. *Leibniz, the master-builder of mathematical notations*. Isis, v. 7, n. 3, p. 412-429, 1925.
- [76] DE OLIVEIRA, Edmundo Capelas; TENREIRO MACHADO, José António. *A review of definitions for fractional derivatives and integral*. Mathematical Problems in Engineering, v. 2014, 2014.

Apêndice A

O método de Runge-Kutta

A aplicação do método de Runge-Kutta pressupõe a existência de condições iniciais para as incógnitas, o que não acontece no caso da função u_3 . O valor de $u_3(0)$ necessita, portanto, de ser estimado. Partindo de um valor inicial estimado, a correção durante o processo iterativo é feita de forma a satisfazer a condição expressa em A.17, sendo aplicada, na interação i , a equação de correção seguinte:

$$[u_3(0)]_{i+1} = [u_3(0)]_i - 0.1 [u_2(10) - 1]_i \quad (\text{A.1})$$

sendo o fator de sub-relaxação 0.1 destinado a assegurar a estabilidade do processo iterativo.

A aplicação do método de Runge-Kutta a este problema resulta em:

$$(u_1)_{n+1} = (u_1)_n + \frac{h}{6} (k_a + 2k_b + 2k_c + k_d)_1 \quad (\text{A.2})$$

$$(u_2)_{n+1} = (u_2)_n + \frac{h}{6} (k_a + 2k_b + 2k_c + k_d)_2 \quad (\text{A.3})$$

$$(u_3)_{n+1} = (u_3)_n + \frac{h}{6} (k_a + 2k_b + 2k_c + k_d)_3 \quad (\text{A.4})$$

com:

$$(k_a)_1 = u_2 \quad (\text{A.5})$$

$$(k_a)_2 = u_3 \quad (\text{A.6})$$

$$(k_a)_3 = -\frac{1}{2}u_1u_2 \quad (\text{A.7})$$

$$(k_b)_1 = u_2 + \frac{h}{2}(k_a)_2 \quad (\text{A.8})$$

$$(k_b)_2 = u_3 + \frac{h}{2}(k_a)_3 \quad (\text{A.9})$$

$$(k_b)_3 = -\frac{1}{2} \left[u_1 + \frac{h}{2}(k_a)_1 \right] \left[u_3 + \frac{h}{2}(k_a)_3 \right] \quad (\text{A.10})$$

$$(k_c)_1 = u_2 + \frac{h}{2}(k_b)_2 \quad (\text{A.11})$$

$$(k_c)_2 = u_3 + \frac{h}{2}(k_b)_3 \quad (\text{A.12})$$

$$(k_c)_3 = -\frac{1}{2} \left[u_1 + \frac{h}{2}(k_b)_1 \right] \left[u_3 + \frac{h}{2}(k_b)_3 \right] \quad (\text{A.13})$$

$$(k_d)_1 = u_2h(k_c)_2 \quad (\text{A.14})$$

$$(k_d)_2 = u_3 + \frac{h}{2}(k_c)_3 \quad (\text{A.15})$$

$$(k_d)_3 = -\frac{1}{2} [u_1 + h(k_c)_1] [u_3 + h(k_c)_3] \quad (\text{A.16})$$

Na implementação do método, a condição de fronteira para $u_2(\infty)$ é aproximada por:

$$u_2(10) = 1 \quad (\text{A.17})$$

Considere a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$y' = f(t, y) \quad (\text{A.18})$$

sujeita a condição inicial:

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{A.19})$$

A obtenção de valores y_n correspondentes a diferentes valores de t_n ($n = 1, 2, \dots$) é feita através da seguinte expressão:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_a + 2k_b + 2k_c + k_d) \quad (\text{A.20})$$

onde:

$$k_a = f(t_n, y_n) \quad (\text{A.21})$$

$$k_b = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_a\right) \quad (\text{A.22})$$

$$k_c = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_b\right) \quad (\text{A.23})$$

$$k_d = f(t_n + h, y_n + hk_c) \quad (\text{A.24})$$

sendo h o incremento da variável independente t . As expressões [A.20](#) e [A.21](#) a [A.24](#) traduzem o conceito de que o próximo valor y_{n+1} é obtido a partir do valor interior y_n somado do produto do tamanho do intervalo de h por um declive estimado, o qual é obtido através de uma média ponderada dos declives seguintes:

- k_a : declive no início do intervalo;
- k_b : declive estimado a meio do intervalo, com base no valor de y calculado a partir do declive k_a ;
- k_c : declive estimado a meio do intervalo, com base no valor de y a partir do declive k_b ;
- k_d : declive no fim do intervalo, estimado com base no valor de y calculado a partir do declive k_c .

Apêndice B

Cinemática de um fluido newtoniano

Para os fluidos newtonianos devemos considerar os seguintes critérios:

- As tensões viscosas estão linearmente relacionados com as taxas de tensão decorrentes de cisalhamento e dilatação;
- As tensões viscosas terminam quando essas taxas de tensão deixam de existir;
- A estrutura do fluido é isotrópica, de modo que o estado de tensão não depende de como o corpo do fluido é orientado em relação à direção da deformação.

Dentre esses itens aqui apresentados podemos adicionar o tensor de tensão que deve ser simétrico, de modo que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. No livro [46] fica demonstrado que para um fluido newtoniano uma relação geral entre as tensões σ_{ij} e as taxas de tensão segue a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\nabla \cdot V)\delta_{ij} + c\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij}) \quad (\text{B.1})$$

Na equação B.1, λ, μ, c são parâmetros escalares que são dependentes das taxas de deformação, mas podem depender da temperatura, pressão, densidade do fluido etc. μ é chamado de viscosidade de cisalhamento ou, simplesmente de viscosidade. λ é chamado de segundo coeficiente de viscosidade. Será demonstrado que c pode ser identificado como pressão. δ é o delta de Kronecker. Em notação cartesiana, a "taxa de tensão tensora", e_{ij} , é definida como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.2})$$

Expressões como a equação anterior B.2, que relaciona as taxas de tensão às tensões de cisalhamento e dilatação com base no comportamento de um material são geralmente chamadas de "relações constitutivas" ou "equações de estado". Para considerar em mais detalhes, começamos parametrizando o fluido como um caso em que se encontra em equilíbrio estático. Então todas as taxas de deformação ($\nabla \cdot V$ e e_{ij}) desaparecem, e :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = c \quad (\text{tensão normal}) \quad (\text{B.3})$$

e

$$\sigma_{11} = \sigma_{11} = \sigma_{11} = \sigma_{11} = \sigma_{11} = \sigma_{11} = 0 \quad (\text{tensão de cisalhamento}) \quad (\text{B.4})$$

O fato das tensões de cisalhamento em um fluido em equilíbrio estático ser zero já é familiar quando se discute a hidrostática, e é uma consequência do fato de que um fluido em equilíbrio estático não está sendo esticado por cisalhamento ou sofrendo deformações dilatacionais. Além disso, em equilíbrio estático, a tensão normal em uma superfície é igual a pressão "termodinâmica" ($-p_{th}$). O sinal de menos indica que a pressão é compressiva na superfície. A pressão termodinâmica é aquela que é encontrada a partir de uma equação de estado (por exemplo, para um gás ideal, $p_{th} = \frac{nRT}{V}$, com n sendo o número de moles, R a constante do gás, T a temperatura absoluta e V o volume ocupado pelo gás). Tais equações são apresentadas com mais rigor a partir da consulta ao livro do Salinas [47]. Essas considerações permitem que c na equação B.1 seja identificado como o negativo da pressão termodinâmica.

$$c = -p_{th} \quad (\text{B.5})$$

Em geral um fluido estará em movimento e sofrerá deformação. Uma vez que o parâmetro c não depende de tais deformações (isto é, taxas de deformação), ele retém a sua igualdade à pressão termodinâmica. Para um fluido newtoniano que está sofrendo deformação, a (B.1) afirma que as tensões normais se

tornam;

$$\sigma_{11} = \lambda(\nabla \cdot V) - p_{th} + 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \quad (\text{B.6a})$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\nabla \cdot V) - p_{th} + 2\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \quad (\text{tensão normal}) \quad (\text{B.6b})$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\nabla \cdot V) - p_{th} + 2\mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \quad (\text{B.6c})$$

Portanto, para um fluido newtoniano que está sendo deformado (esticado), as tensões normais são uma soma de três contribuições: a pressão termodinâmica, e dois termos devido as taxas dilatacionais de deformação. O primeiro dos termos é proporcional ao segundo coeficiente de viscosidade λ e o outro é proporcional à viscosidade μ . Na mecânica dos fluidos, é comum chamar de "pressão mecânica" (p) como a média negativa das tensões normais.

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (\text{B.7}) \\ &= -\frac{1}{3} \left[3\lambda(\nabla \cdot V) - 3p_{th} + 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{3}[3\lambda(\nabla \cdot V) - 3p_{th} + 2\mu(\nabla \cdot V)] \end{aligned}$$

$$p = p_{th} - (\lambda + \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot V) \quad (\text{B.8})$$

A pressão mecânica (p) é rotineiramente chamada de "pressão" em equações e cálculos de mecânica dos fluidos. A pressão "verdadeira" agrupa por si só mais de uma contribuição (por convenção) onde se resulta das taxas de tensão de dilatação, representando assim a tensão normal média.

Na equação anterior (B.8), para um fluido que se expande, a pressão mecânica será menor que a pressão termodinâmica. Para fluxos incompressíveis (isto é, líquidos) o $\nabla \cdot V$ é essencialmente zero e a distinção entre p e p_{th} é insignificante. No entanto, a distinção pode ser importante quando o fluxo é compressível e uma dilatação muito pronunciada do fluido está ocorrendo como, por exemplo, em uma onda de choque ou explosão. Para um gás monatômico ideal, também pode ser mostrado que $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$ é igual a zero [47]. Usando p como definido na última equação (B.8), as tensões normais para um fluido newtoniano pode

ser reescritas como:

$$\sigma_{11} = -p - \left(\frac{2}{3}\right) \mu(\nabla \cdot V) + 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) \quad (\text{B.9a})$$

$$\sigma_{22} = -p - \left(\frac{2}{3}\right) \mu(\nabla \cdot V) + 2\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \quad (\text{tensão normal}) \quad (\text{B.9b})$$

$$\sigma_{33} = -p - \left(\frac{2}{3}\right) \mu(\nabla \cdot V) + 2\mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \quad (\text{B.9c})$$

De acordo com a equação anterior (B.9a), as tensões normais em um fluido newtoniano podem ser vistas como decorrentes de uma contribuição de pressão mecânica, bem como de tensões viscosas devido às taxas de dilatação da deformação.

As tensões de cisalhamento σ_{ij} , para $i \neq j$, em um fluido newtoniano serão:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \quad (\text{B.10a})$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \quad (\text{tensão de cisalhamento}) \quad (\text{B.10b})$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} = \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \quad (\text{B.10c})$$

Nota-se que as tensões de cisalhamento surgem apenas de uma contribuição viscosa devido às taxas de cisalhamento e deformação. O parâmetro de proporcionalidade entre a taxa de cisalhamento da deformação e a tensão de cisalhamento resultante é a viscosidade μ . Em resumo, a equação (B.1) pode ser reescrita:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot V)\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij}) \quad (\text{B.11})$$

Note que as contribuições viscosas, tanto para as tensões normais quanto para as de cisalhamento, desaparecem se as taxas de deformação (cisalhamento e dilatacional) desaparecem. Além disso, a relação entre as contribuições viscosas às taxas de tensões é linear (isto é, depende linearmente da deformação). Finalmente, não está implícita nenhuma orientação específica do corpo de fluido em relação à direção na qual ele é deformado (se comportando isotropicamente). Conforme declarado no início dessa seção, essas qualidades são as marcas dos fluidos newtonianos.

Apêndice C

Soluções de equações diferenciais por meio de Otimização

Inicialmente exemplificaremos com alguns modelos de equações que têm soluções analíticas.

○ Exemplo 1

Uma equação homogênea de segunda ordem com coeficientes conhecidos. Vamos considerar a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2}W + \lambda^2 W = 0 \quad (\text{C.1})$$

onde as condições de contorno $W(0) = a, W(1) = b$. A solução é dada por:

$$W(x) = a \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (\text{C.2})$$

onde A e B , para $\lambda \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são dadas por:

$$B = b \csc(\lambda) - a \cot(\lambda) \quad (\text{C.3})$$

usando o método de otimização, existe uma solução geral dada por:

$$W(x) = a \cos(\lambda x) + z \sin(\lambda x) \quad (\text{C.4})$$

então a função objetivo é:

$$O_f(z) = (W(1) - b)^2 \quad (\text{C.5})$$

isto é

$$O_f(z) = (a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b)^2 \quad (\text{C.6})$$

temos de encontrar uma raiz para $O_f(z)$ e a raiz é o mínimo da função, cuja condição necessária para o extremo (max ou min) de $O_f(z)$ é que $\frac{dO_z}{dz} = 0$, então:

$$\frac{d}{dz}O_f = 2(a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b) \sin(\lambda) \quad (\text{C.7})$$

portanto

$$(a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b) = 0 \quad (\text{C.8})$$

logo

$$z = b \csc(\lambda) - a \cot(\lambda) \quad (\text{C.9})$$

como está demonstrado. Considerando as condições de contorno $W(0) = a$, $W'(1) = b$, agora a função objetivo é dada por:

$$O_f(z) = (W'(1) - b)^2 \quad (\text{C.10})$$

isso é;

$$O_f(z) = (-a \sin(\lambda) + z \cos(\lambda) - b)^2 \quad (\text{C.11})$$

novamente para encontrar uma raiz de $O_f(z)$ é encontrar o mínimo da função objetivo, então;

$$\frac{d}{dz}O_f(z) = 2(-a \sin(\lambda) + z \cos(\lambda) - b) \cos(\lambda) \quad (\text{C.12})$$

assim;

$$(-a \sin(\lambda) + z \cos(\lambda) - b) = 0 \quad (\text{C.13})$$

então isolando z a solução é dada por:

$$z = b \sec(\lambda) + a \tan(\lambda) \quad (\text{C.14})$$

onde $\lambda \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partiremos para um segundo exemplo no qual abordaremos uma equação homogênea de segunda ordem com coeficientes desconhecidos.

○ Exemplo 2

Consideremos a equação diferencial dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2}W + \lambda^2 W = 0 \quad (\text{C.15})$$

Mas agora o parâmetro λ chamada de constante de separação, é desconhecido e é sabido que $\frac{d}{dx}W(0) = c$, em vez disso, a solução para $\lambda \neq 0$ é dada por:

$$W(x) = a \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (\text{C.16})$$

e

$$B = c/\lambda$$

$$(b \csc(\lambda) - a \cot(\lambda))\lambda - c = 0 \quad (\text{C.17})$$

As raízes da equação 2.17 determina as soluções de contorno do problema. Agora que foi resolvido usando o método de otimização, então há uma solução geral dada por;

$$W(x) = a \cos(\lambda x) + z \sin(\lambda x) \quad (\text{C.18})$$

a função objetivo é;

$$O_f(z, \lambda) = (W(1) - b)^2 + (W'(0) - c)^2 \quad (\text{C.19})$$

isso é

$$O_f(z) = (a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b)^2 + (\lambda z - c)^2 \quad (\text{C.20})$$

tomando as respectivas derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial z} O_f(z) = 2(a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b) \sin(\lambda) + 2\lambda(\lambda z - c) \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} O_f(z) = 2(a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b)(-a \sin(\lambda) + z \cos(\lambda)) + 2z(\lambda z - c) \quad (\text{C.22})$$

e o sistema é;

$$2(a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b) \sin(\lambda) + 2\lambda(\lambda z - c) = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$2(a \cos(\lambda) + z \sin(\lambda) - b)(-a \sin(\lambda) + z \cos(\lambda)) + 2z(\lambda z - c) = 0 \quad (\text{C.24})$$

então, após alguma manipulação algébrica encontramos;

$$z = c/\lambda$$

e de novo nós temos;

$$(b \csc(\lambda) - a \cot(\lambda))\lambda - c = 0 \quad (\text{C.25})$$

Diante de tais demonstrações, partiremos para o último exemplo com o qual aplicaremos a otimização e, problemas na área da engenharia, onde dado por modelamento em equações diferenciais, sejam eles problemas de valores iniciais (PVI) ou problemas de valores de contorno.

○ Exemplo 3

Diante da equação de 4 ordem especial efetiva de uma viga de Euler-Bernoulli em fundações visco-elásticas não-lineares [39].

$$\frac{d^4 \nu(x)}{dx^4} - \Omega^4 \nu(x) = 0 \quad (\text{C.26})$$

Onde Ω é a frequência natural do sistema e $\nu(x)$ é a deformação da linha neutra. Dadas as condições:

$$\nu(0) = 0; \frac{d\nu(0)}{dx}; \nu(1) = 0; \frac{d\nu(1)}{dx} = 0 \quad (\text{C.27})$$

A solução geral pode ser encontrada supondo que $\nu = e^{rx}$. Isto implica na equação auxiliar $r^4 - \Omega^4 = 0$ que possui as seguintes raízes:

$$r_1 = \Omega; r_2 = \Omega i; r_3 = -\Omega; r_4 = -\Omega i \quad (\text{C.28})$$

Assim a solução da equação 2.26 é:

$$\nu(x) = c_1 e^{\Omega x} + c_2 e^{\Omega x i} + c_3 e^{-\Omega x} + c_4 e^{-\Omega x i} \quad (\text{C.29})$$

Logo a solução geral do problema é dado por:

$$\nu(x) = c_1 \cosh(\Omega x) + c_2 \sinh(\Omega x) + c_3 \cos(\Omega x) + c_4 \sin(\Omega x) \quad (\text{C.30})$$

Ao utilizar de métodos tradicionais para encontrar a solução do problema de valor inicial seria um processo árduo e duradouro, assim utilizaremos o método da otimização de parâmetros afim de demonstrar sua eficácia.

Considerando a equação diferencial ordinária de variável x , Eq(2.30), com as condições de contorno (2.27), afim de encontrar as condições iniciais desejáveis e os parâmetros z , os quais são denominados de *parâmetros desconhecidos*. A partir destes formulamos a função objetivo (O_f). Dadas as condições de contorno em $x = 0$ é possível encontrar os coeficientes desconhecidos, isto é, z_1 e z_2 :

$$\nu(0) = 0 \rightarrow c_1 = -c_3 \rightarrow c_1 = z_1 \quad (\text{C.31})$$

$$\nu'(0) = 0 \rightarrow c_2 = -c_4 \rightarrow c_2 = z_2 \quad (\text{C.32})$$

Aplicando as condições de contorno em $x = 1$ obtem-se:

$$\nu(1) = 0 \rightarrow z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2(\sinh(\Omega) - \sin(\Omega)) = 0 \quad (\text{C.33})$$

$$\nu'(1) = 0 \rightarrow [z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega)) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))] \Omega = 0 \quad (\text{C.34})$$

Utilizando o método com funções multi-objetivos que no caso nos permite minimizar as funções do problema de condição inicial tendo como resultado os parâmetros desejados.

A função multi-objetivo fica definida como:

$$O_{f1}(z_1, z_2, \Omega) = (\nu(1) - 0)^2 = [z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) + z_2(\sinh(\Omega) - \sin(\Omega))]^2 \quad (C.35)$$

$$O_{f2}(z_1, z_2, \Omega) = (\nu'(1) - 0)^2 = ((z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega)) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)))\Omega)^2 \quad (C.36)$$

A partir destas, pode-se encontrar o mínimo da função por meio das seguintes equações:

$$\frac{\partial O_{f1}}{\partial \Omega} = 2[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega) + z_2(\sinh(\Omega) - \sin(\Omega)))] \cdot [z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega)) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))] \quad (C.37)$$

$$\frac{\partial O_{f1}}{\partial z_1} = 2[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega) + z_2(\sinh(\Omega) - \sin(\Omega)))] \cdot (\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) \quad (C.38)$$

$$\frac{\partial O_{f1}}{\partial z_2} = 2[z_1(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega) + z_2(\sinh(\Omega) - \sin(\Omega)))] \cdot (\sinh(\Omega) - \sin(\Omega)) \quad (C.39)$$

$$\frac{\partial O_{f2}}{\partial z_\Omega} = [z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)))]\Omega \cdot [(z_1(\cosh(\Omega) + \cos(\Omega))) + z_2(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega))] + z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega)) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)) \quad (C.40)$$

$$\frac{\partial O_{f2}}{\partial z_1} = 2[z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)))]\Omega \cdot (\sinh(\Omega) + \sin(\Omega))\Omega \quad (C.41)$$

$$\frac{\partial O_{f2}}{\partial z_2} = 2[z_1(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega) + z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega)))]\Omega \cdot (\cosh(\Omega) + \cos(\Omega))\Omega \quad (C.42)$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$z_1 = \frac{-z_2(\sinh(\Omega) - \sin(\Omega))}{(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))}; \quad (C.43)$$

$$z_1 = \frac{-z_2(\cosh(\Omega) - \cos(\Omega))}{(\sinh(\Omega) + \sin(\Omega))}$$

Portanto as frequências naturais do sistema são dadas por:

$$\cosh(\Omega) \cos(\Omega) - 1 = 0 \quad (\text{C.44})$$

Para facilitar a visualização gráfica, foi definido a função objetivo como:

$$O_f(\Omega) = \frac{(\cosh(\Omega) \cos(\Omega) - 1)^2}{(\cosh^2 \Omega)} \quad (\text{C.45})$$

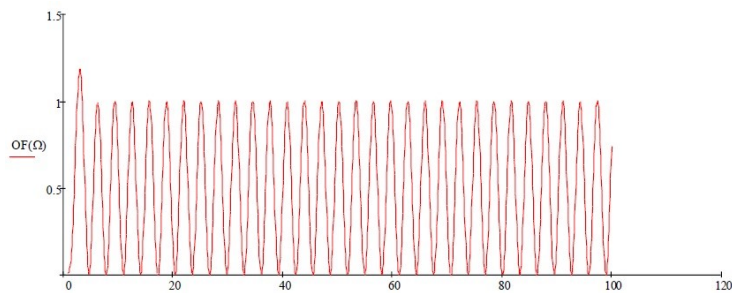


Figura C.1: Função objetivo $O_f(\Omega)$ da frequência natural

Diante dos exemplos propostos, o método de otimização de parâmetros demonstrou eficiência em resolver equações diferenciais transformando um problema de condições de contorno em problemas de valores iniciais, o que leva a uma compreensão mais tácita bem como no que se refere ao uso de ferramentas computacionais. Ressalta que a escolha do método influencia diretamente na precisão numérica concatenado a isso, em termos práticos, a convergência depende da equação diferencial.

Apêndice D

Algoritmo usado no MATLAB para obtenção dos valores no Método de Otimização de Parâmetros

```
1  
2 %% Funcao que retorna a equacao de Blasius  
3  
4 function dy = retomafun(t,y)  
5  
6 dy = zeros(3,1);  
7  
8 dy(1)=y(2);  
9 dy(2)=y(3);  
10 dy(3)=-0.5*y(1)*y(3);  
11  
12 end
```

```
1
2 %% Funcao para parametrizar a solucao da equacao de
   Blasius via Runge-Kutta de quarta ordem
3
4 function [T,Y] = resultado(z)
5 etai = 0;
6 etaf = 200;
7 numero_pontos= 4000;
8 eta = linspace(etai,etaf,numero_pontos);
9 options = odeset('RelTol', 1e-10, 'AbsTol', 1e-12);
10 [T,Y] = ode45(@retomafun,eta,[0 0 z],options);
11
12 end
```

```

1
2 %% Sub-Rotina para fun    o Objetivo
3
4 clear ;  clc;  close all;
5 zmax=4000;
6 format long;
7 % Valores iniciais para o Shooting Method
8
9 a=0.3320573362156; b=0.3320573362;
10
11 % Looping de convergencia para funcao objetivo
12
13 for z = 1:zmax
14 u=a+(b-a)*(z-1)/(zmax-1);
15 [times,Y] = resultado(u);
16 DF(z,1)= u;
17 DF(z,2)=log((Y(end,2)-1)^2);
18 end
19
20
21 %% FC Function
22
23 x1 =  0.1:0.1:150;
24 for xxx =  0.1:0.1:150
25 Fcc = Fc(x1);
26 end
27
28
29 %% Psi function
30
31 psi1 = Psi_func(1, -1/6.9014755438984215);
32 psi2 = Psi_func(0.7, -1/7.729700667713731);
33 psi3 = Psi_func(0.3, -1/9.5960120781587845);
34 psi4 = Psi_func(0.1, -1/11.1394644270784565);
35
36
37 %% Theta function
38

```



```

39 theta_1_0 = psi1(:,1);
40 theta_2_0 = psi2(:,1);
41 theta_3_0 = psi3(:,1);
42 theta_4_0 = psi4(:,1);
43
44 theta_0 = 1;
45
46 theta_1_1 = theta_0;
47 theta_2_1 = theta_0;
48 theta_3_1 = theta_0;
49 theta_4_1 = theta_0;
50
51 for cv = 2:1:1500
52 theta_1_1(cv) = max(psi1(cv-1,2)*( psi1(cv,1) -
    psi1(cv-1,1) ) + theta_1_1(cv-1),0);
53 theta_2_1(cv) = max(psi2(cv-1,2)*( psi2(cv,1) -
    psi2(cv-1,1) ) + theta_2_1(cv-1),0);
54 theta_3_1(cv) = max(psi3(cv-1,2)*( psi3(cv,1) -
    psi3(cv-1,1) ) + theta_3_1(cv-1),0);
55 theta_4_1(cv) = max(psi4(cv-1,2)*( psi4(cv,1) -
    psi4(cv-1,1) ) + theta_4_1(cv-1),0);
56
57 end
58
59 %% Graficos
60
61 figure
62 plot(DF(:,1),DF(:,2), 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--');
63 xlabel('z')
64 ylabel('Of')
65 grid on;
66 print -depsc obj.eps
67
68 figure
69 plot(times,Y(:,1), 'LineWidth',2, 'LineStyle', '-.', '
    Color', 'r');
70 grid on;
71 xlabel('$\hat{\eta}$', 'Interpreter', 'latex')

```

```

72 ylabel('$F(0)$', 'Interpreter', 'latex')
73 print -depsc fdzero.eps
74
75 figure
76 hold on
77 plot(times, Y(:,2), 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '.', '
    Color', 'blue');
78 plot(times, Y(:,3), 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '.', '
    Color', 'magenta');
79 grid on
80 xlabel('$\hat{\eta}$', 'Interpreter', 'latex')
81 ylabel('$\frac{\partial f}{\partial \eta}$' '$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$', 'Interpreter', '
    latex')
82 leg1 = legend('${\frac{df}{d \eta}}$', '${\frac{d^2}{
    f}{d \eta^2}}$');
83 set(leg1, 'Interpreter', 'latex');
84 set(leg1, 'FontSize', 17);
85 hold off
86 print -depsc flinhadzeroefddzero.eps
87
88 figure
89 plot(times, Y(:,3), 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '.', '
    Color', 'magenta');
90 xlabel('$\hat{\eta}$', 'Interpreter', 'latex')
91 ylabel('$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$', '
    Interpreter', 'latex')
92 grid on;
93 print -depsc fddlinhazero.eps
94
95 % Testes para Funcao Mittag-Leffler
96
97 xx = 1:1:11 ;
98 figure
99 hold on
100 plot(xx', ML_1')
101 grid minor
102 plot(xx', ML_08')

```

```

103 plot(xx',ML_12')
104 xlim([0 10]);
105 hold off
106 xlabel('x')
107 legend('MLN(1,x,10^-3)', 'MLN(0.8,x,10^-3)', 'MLN(1.2,
      x,10^-3)');
108 saveas(gcf, 'MLN.png')
109
110 figure
111 plot(xx',ML_1_')
112 grid minor
113 hold on
114 plot(xx',ML_08_')
115 plot(xx',ML_12_')
116 hold off
117 xlabel('x')
118 legend('MLN(1,-x,10^-3)', 'MLN(0.8,-x,10^-3)', 'MLN
      (1.2,-x,10^-3)');
119 saveas(gcf, 'MLN_-.png')
120
121 %% Graficos de Velocidade e Temperatura
122
123 figure
124 plot(psi1(:,1),psi1(:,2), 'LineWidth',2, 'LineStyle','.
      ', 'Color', 'red')
125 hold on
126 plot(psi2(:,1),psi2(:,2), 'LineWidth',2, 'LineStyle','.
      ', 'Color', 'blue')
127 plot(psi3(:,1),psi3(:,2), 'LineWidth',2, 'LineStyle','.
      ', 'Color', 'green')
128 plot(psi4(:,1),psi4(:,2), 'LineWidth',2, 'LineStyle','.
      ', 'Color', 'magenta')
129 grid minor
130 hold off
131 title('Gradiente de Temperatura 4.7')
132 xlabel('\eta')
133 legend('\psi_1', '\psi_2', '\psi_3', '\psi_4');
134

```

```

135
136 figure
137 plot(psi1(:,1),psi1(:,2)-psi2(:,2),'LineWidth',2,'
     LineStyle','.','Color','red')
138 hold on
139 plot(psi1(:,1),psi1(:,2)-psi3(:,2),'LineWidth',2,'
     LineStyle','.','Color','blue')
140 plot(psi1(:,1),psi1(:,2)-psi4(:,2),'LineWidth',2,'
     LineStyle','.','Color','green')
141 grid minor
142 hold off
143 title('Diferenca entre os gradientes de temperatura')
144 xlabel('\eta')
145 legend('\psi_1-\psi_2','\psi_1-\psi_3','\psi_1-\psi_4
      ');
146
147
148 figure
149 plot(theta_1_0,theta_1_1,'LineWidth',2,'LineStyle','.
      ','Color','red')
150 hold on
151 plot(theta_2_0,theta_2_1,'LineWidth',2,'LineStyle','.
      ','Color','blue')
152 plot(theta_3_0,theta_3_1,'LineWidth',2,'LineStyle','.
      ','Color','green')
153 plot(theta_4_0,theta_4_1,'LineWidth',2,'LineStyle','.
      ','Color','magenta')
154 grid minor
155 hold off
156 title('Temperatura')
157 xlabel('\eta')
158 legend('\Theta_1','\Theta_2','\Theta_3','\Theta_4','
      Interpreter','latex')
159
160 figure
161 plot(theta_1_0,theta_2_1-theta_1_1,'LineWidth',2,'
     LineStyle','.','Color','red')
162 hold on

```

```
163 plot(theta_1_0, theta_3_1 - theta_1_1, 'LineWidth', 2, '  
     LineStyle', '.', 'Color', 'blue')  
164 plot(theta_1_0, theta_4_1 - theta_1_1, 'LineWidth', 2, '  
     LineStyle', '.', 'Color', 'green')  
165 grid minor  
166 hold off  
167 title('Diferen a entre as Temperatura')  
168 xlabel('\eta')  
169 legend('\Theta_2 - \Theta_1', '\Theta_3 - \Theta_1', '  
      \Theta_4 - \Theta_1', 'Interpreter', 'latex');
```

Apêndice E

FC - Função

```
1  
2 % Fc Function  
3 function F = Fc(x)  
4 % k = floor(x*10^4/150);  
5 F = 0.111*x;  
6 end
```

Apêndice F

PSI - Função

```
1
2     function psi= Psi_funct(alpha,v)
3     eta_f      = 150;
4     delta_eta = 1e-1;
5     % delta_M  = 1e-17;
6     NF = eta_f / delta_eta; % NF = 1.5e5
7     Pdr = 1e-3;
8     Kmx = NF-1;
9
10    NF      = Kmx +1    ;
11
12    delta_M = 1e-3;
13    k      = 2    ;
14    psi_0 = zeros;
15    psi_1 = v;
16    psi_2 = zeros;
17    while k<=NF
18
19    X = psi_0(k-1)^alpha*Fc(psi_0(k-1))*Pdr/2;
20
21    psi_1(k) = psi_1(k-1) * MLN(alpha,-X,delta_M)
22    ;
23    psi_0(k) = k*delta_eta;
24
```

```
25     psi_2(k) = X ;
26     if X>10
27         delta_M = X/200;
28     end
29     k = k+1;
30     end
31     psi = [psi_0;psi_1;psi_2]';
32     end
```


Apêndice G

Função Mittag-Leffer

```
1
2
3 function ML = MLN(alpha, x , epsilon)
4 ML = 0 ;
5 k = 0 ;
6 delta_L = 10e10;
7
8 while delta_L >= epsilon
9 delta_ML = x^k / (gamma(1+alpha*k));
10 delta_L = abs(delta_ML) ;
11 k = k +1 ;
12 ML = ML + delta_ML;
13 end
14 ML;
15 end
```