

Maria Luiza Guimarães Dias dos Santos

Dinâmica Quântica com Reinício: Jaynes - Cummings

Ouro Branco  
2023

Universidade Federal de São João del-Rei  
Departamento de Física e Matemática

Maria Luiza Guimarães Dias dos Santos

## Dinâmica Quântica com Reinício: Jaynes - Cummings

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pela aluna e orientada pelo Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira

---

Ouro Branco  
2023

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

d722d dos Santos, Maria Luiza Guimarães Dias .  
Dinâmica Quântica com Reinício: Jaynes - Cummings /  
Maria Luiza Guimarães Dias dos Santos ; orientador  
Adélcio Carlos de Oliveira. -- Ouro Branco, 2023.  
71 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,  
2023.

1. Dinâmica Quântica. 2. Modelo de Jaynes -  
Cummings. 3. Reinício estocástico. I. Oliveira,  
Adélcio Carlos de , orient. II. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - UNIFAL/MG-UFSJ

**HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 11 / 2023 - PPGF (13.29)**

**Nº do Protocolo: 23122.025242/2023-20**

**São João del-Rei-MG, 04 de julho de 2023.**

A dissertação de mestrado "**Dinâmica Quântica com Reinício: Jaynes-Cummings**" elaborada por **Maria Luiza Guimarães Dias dos Santos** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

*(Assinado digitalmente em 05/07/2023 18:01 )*

ADELICIO CARLOS DE OLIVEIRA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
PPGF (13.29)  
Matrícula: 1673516

*(Assinado digitalmente em 04/07/2023 15:52 )*

HUMBERTO CESAR FERNANDES LEMOS  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DEFIM (12.30)  
Matrícula: 1671316

*(Assinado digitalmente em 04/07/2023 23:02 )*

JOSÉ GERALDO GONÇALVES DE OLIVEIRA JÚNIOR  
ASSINANTE EXTERNO  
CPF: 932.833.935-91

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **11**, ano: **2023**, tipo: **HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**, data de emissão: **04/07/2023** e o código de verificação: **4d47746e0a**

# Agradecimentos

Agradeço à Deus, por me guiar e colocar as pessoas certas no meu caminho.

Aos meus pais, Maria Aparecida e José Carlos, pelo apoio desde o nascimento, em especial a minha mãe que sempre me ofereceu o ombro e os ouvidos em momentos difíceis.

Ao meu vovô Jarbas por me ensinar a importância do pensamento crítico.

Ao professor Adécio, pela orientação, e por ser um exemplo de ser humano. É, com certeza, um professor que dignifica a profissão.

Agradeço a todos os professores cujo os esforços contribuíram para que eu pudesse chegar aqui. Em especial, as professoras Vivienne e Gisélia que sempre me incentivaram a fazer pesquisa.

Agradeço as amigas que tornam a caminhada mais leve: Ana, minha irmã, minha companheira desde que nasci, Selma, por me ajudar a olhar a vida com maior leveza.

A música, por me ajudar a enfrentar os obstáculos diários. Eu não existiria sem ela!

A Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Agradeço a todos professores e equipe do programa de pós-graduação em física (ppgf-UFSJ), e a todas as pessoas que contribuíram para que este trabalho fosse concluído, inclusive aos funcionários da portaria, jardinagem, limpeza e demais funcionários que compõe o campus alto Paraopeba da UFSJ.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Oscilador Harmônico</b>	<b>5</b>
2.1	Oscilador Harmônico Quântico . . . . .	6
2.2	Estados Coerentes do Oscilador Harmônico . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Dinâmica com Reinício - Oscilador Harmônico Quântico</b>	<b>11</b>
3.1	Dinâmica com reinício . . . . .	12
3.2	Discussão . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>19</b>
4.1	Dinâmica Dispersiva e Dinâmica Dissipativa . . . . .	24
4.2	Evolução temporal . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Dinâmica com reinício para o Modelo de Jaynes-Cummings</b>	<b>32</b>
5.1	Dinâmica com Reinício: caso com dissipação . . . . .	32
5.1.1	Discussão . . . . .	34
5.2	Dinâmica com Reinício - átomo projetado em g . . . . .	37
5.2.1	Discussão . . . . .	41
5.2.2	Realização experimental . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>48</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>50</b>
<b>7</b>	<b>Apêndice</b>	<b>56</b>
7.0.1	Resultado auxiliar . . . . .	56
7.0.2	Rugosidade de um Estado de Fock, Resultados analíticos	58
7.0.3	Integrais de $\Pi_{n,m}$ e $\Psi_{n,m}$ . . . . .	61

# Lista de Figuras

3.1	Parte Real de $\alpha$ sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ . . . .	16
3.2	Parte Imaginária de $\alpha$ sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$	17
3.3	Média temporal da posição sendo: vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,1$ , verde $r = 0,2$ , Rosa $r = 0,3$ , Azul claro $r = 0,4$ , Marron $r = 0,5$ . . . . .	18
4.1	Valor esperado de $\hat{\sigma}_z$ . . . . .	24
4.2	Valor esperado de $\hat{\sigma}_z$ Vermelho: $\kappa = 0$ , Azul escuro: $\kappa = 0,05$ , Verde: $\kappa = 0,09$ . . . . .	31
5.1	Parte Real de $\alpha$ sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ . . . .	35
5.2	Parte Imaginária de $\alpha$ sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ . . . . .	36
5.3	Energia do sistema sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ .	38
5.4	Parte Real de $\alpha$ sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ . . . .	42
5.5	Parte imaginária de $\alpha$ sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ . . . . .	43
5.6	Energia do sistema sendo: Vermelho $r = 0$ , Azul escuro $r = 0,005$ , Verde $r = 0,01$ , Rosa $r = 0,015$ , Azul claro $r = 0,02$ .	44
5.7	Valor médio da rugosidade para tempos longos. Eixo x: Dissipação - ( $\kappa$ ); Eixo y: Reset - ( $r$ ) . . . . .	45

*LISTA DE FIGURAS*

---

5.8 Valor médio da rugosidade para tempos longos. Eixo x: Dissi-  
pação - ( $\kappa$ ); Eixo y: Reset - ( $r$ ) . . . . . 46

# Resumo

O estudo da dinâmica quântica e a investigação eficaz de formas para manter as propriedades quânticas são completamente necessários tendo em vista tornar possível novas aplicações em Mecânica Quântica. Através deste trabalho, a dinâmica quântica com reinício estocástico foi estudada para o Oscilador Harmônico Quântico bem como para o modelo de Jaynes-Cummings, a fim de compreender possíveis formas de reduzir a decoerência causada pela interação inevitável entre o sistema e o ambiente. O principal objetivo foi analisar se o reinício estocástico contribui para manter as propriedades quânticas do sistema. A intenção foi investigar formas de manter as propriedades quânticas no sentido de permitir dinâmicas que, em princípio, não poderiam ser aplicadas em tecnologias quânticas devido à decoerência, passassem a ser aplicáveis. Para atingir este objetivo, através deste trabalho a Dinâmica Quântica com reinício foi estudada para o Oscilador Harmônico Quântico e para o Modelo de Jaynes-Cummings considerando o sistema com e sem dissipação. Foi feita uma análise da pureza dos sistemas físicos estudados considerando a matriz de densidade e as suas propriedades, principalmente no que diz respeito ao traço, à entropia linear, e à não-classicalidade da dinâmica de estado do modelo Jaynes-Cummings sob reinício estocástico, tendo em conta a rugosidade de um estado quântico como uma medida de quão quântico é este.

# Abstract

Studying Quantum dynamics and effectively investigating forms to keep quantum properties are completely necessary to turn possible new applications in Quantum Mechanics. Through this work, quantum dynamics with stochastic reset was studied for Quantum Harmonic Oscillator and the Jaynes-Cummings model in order to understand possible ways to reduce decoherence caused by the interaction between the system and environment. The main goal was to analyze if stochastic reset contributes to maintaining the quantum properties of the system. The intention was to research ways to keep quantum properties in the direction of enabling dynamics that, in principle, could not be applied in quantum technologies due to decoherence, becoming applicable. To achieve this goal, through this work we studied Quantum Dynamics with reset for Quantum Harmonic Oscillator and, also the Jaynes-Cummings Model with and without dispersity. An analysis of the purity of the studied physical systems was made considering the density matrix and its properties, mainly, regarding the trace, the linear entropy, and the nonclassicality of the state dynamics of the Jaynes-Cummings model under stochastic reset was made considering the roughness of a quantum state as a measure of the quantumness.

# Capítulo 1

## Introdução

Historicamente, a ciência é marcada pelo constante aprimoramento de ideias, seja pela melhoria ou reformulação de uma teoria vigente, ou pela proposta de uma nova teoria. À medida que novos posicionamentos, perspectivas e observações são feitas por aqueles que estudam um determinado assunto, o desdobramento de novas abordagens se faz necessário para que a compreensão de um tema seja cada vez mais efetiva, além de facilitar e/ou ampliar a aplicação destas ou até mesmo gerar uma mudança de paradigma conforme descreve o autor Thomas Khun no livro “Estrutura das revoluções científicas”(1962)[1].

A Física, bem como as demais ciências, é marcada por suas várias revoluções. A origem das ciências é filosófica. As primeiras indagações do que hoje se estuda em Física, foram feitas pelo filósofo Aristóteles de Estagira, com os questionamentos iniciais sobre movimento, queda dos corpos dentre outros temas [2]. Desde então, vem sendo contruída e aprimorada pelos vários pesquisadores que se debruçaram e/ou se debruçam sobre os vários temas que, hoje, estão abarcados por essa área do conhecimento.

Dentre as várias revoluções científicas no contexto da Física, o surgimento da Mecânica Quântica no final do século XIX e início do século XX é, com certeza, um dos mais marcantes. Em face a alguns problemas não solucionados pela Mecânica clássica surge uma teoria capaz de fazê-lo, e a ideia por trás dessa nova teoria é a de discretização de energia, o que deu origem ao termo quântico[3]. A Mecânica quântica também foi aprimorada ao longo dos anos.

Essa transição Mecânica Clássica (MC) - Mecânica Quântica (MQ) vem sendo amplamente debatida na literatura desde o seu surgimento [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Dentre os debates que fomentam essa discussão torna-se relevante dar notoriedade para o chamado limite clássico, que consiste em

---

buscar resultados semelhantes entre MC e MQ. O limite clássico, portanto, busca resultados em MQ que sejam condizentes com o que a MC prevê [12, 13, 14]. A literatura aponta que compreender o controle de decoerência do estado quântico induzida pelo ambiente é fundamental para a entender o Limite clássico [15, 16]. Para reproduzir os resultados clássicos dentro do formalismo quântico, é necessário que existam três fatores atuando combinadamente: a interação com um ambiente externo, existências de limitações na resolução experimental e o monitoramento contínuo [5, 6, 17]

Decoerência quântica é um fenômeno atrelado ao fato de que é praticamente impossível isolar completamente um sistema físico, já que este está constantemente sujeito a interagir com o ambiente. Diferente do caso de um sistema clássico, a interação de um sistema quântico com o ambiente gera a perda das características quânticas [16].

A inevitável perda de coerência e de propriedades quânticas do sistema atrapalha efetivar aplicações tecnológicas no que concerne ao processamento de informações. Isso ocorre já que, se a informação de um sistema quântico for perdida devido a interação deste com o ambiente, seja por meio de decoerência ou de outros fatores, como por exemplo a dissipação, sua aplicabilidade deixa de ser superior a de um sistema clássico[18].

Levando em consideração as observações supracitadas, está claro que quanto mais o sistema quântico interage com o ambiente externo maior é a perda de “pureza” deste. Posto isto, fica evidente a relevância de estudar sistemas quânticos, principalmente, no que tange a melhor compreensão das perdas sofridas devido a decoerência, dissipação de propriedades quânticas tendo em vista desenvolver formas de manter essas características.

Uma das formas que vem sendo estudadas para preservar memória quântica é o estudo de dinâmica quântica por meio de processos estocásticos. Um processo estocástico permite fazer uma sequência de observações cronológicas de um determinado estado e a descrição destas observações são feitas em termos de distribuição de probabilidade, havendo reinício nesta dinâmica o estado retorna ao seu estado inicial [19, 20, 21]. Seria uma possível forma de fazer a recoerência do sistema.

No século passado, a maior preocupação nessa área era de como modelar corretamente um sistema quântico de forma a obter resultados que fossem compatíveis aos observados no mundo macroscópico e microscópico simultaneamente [15, 16, 5, 6, 17]. Atualmente a temática está voltada a como obter vantagem das características quânticas do sistema, o que chamamos de recursos quânticos [22, 23, 24].

Afinal, quais são as características não clássicas que podem ser entendidas como recursos quânticos? O espectro de energia é um observável que não tem contrapartida clássica [25] com inúmeras aplicações, desde caracterização de materiais ao maior entendimento da composição da matéria no espaço [26]. Um estado quântico por outro lado, pode apresentar várias características não clássicas, por exemplo um campo eletromagnético pode apresentar uma distribuição sub-Poissoniana que não tem contraparte clássica, o que é indicado pelo parâmetro  $Q$  de Mandel [27], esses estados são promissores para aplicações em metrologia [28]. Não menos importante é o fato que a função de Wigner pode ser negativa, conseqüentemente, ela não pode ser considerada uma distribuição de probabilidade no sentido usual, entretanto essa é uma importante característica não clássica muito comum em auto estados dos Hamiltonianos [29]. Estados de muitas partículas podem possuir correlações não clássicas, conhecidas como emaranhamento. Para estados bipartidos, usa-se a concorrência [30] para medir o grau de emaranhamento e essa característica quântica é a que mais possui aplicações conhecidas [31].

Em um trabalho recente, Lemos e colaboradores [32] propuseram uma nova medida de não classicalidade, a rugosidade. É uma medida de distância entre a função de Wigner e a função de Husimi, e como mostrado no referido trabalho, essa medida captura tantos aspectos da negatividade da função de Wigner como efeitos de distribuição sub ou super-Poissoniana. Além dessas características, também foi mostrado que a rugosidade tem uma correlação com a concorrência [33, 34], representando uma relação de complementaridade entre rugosidade, concorrência e parâmetro  $Q$  de Mandel [35].

Nesse trabalho estudamos o modelo Jaynes-Cummings[36] na aproximação de onda girante [37] incluindo efeitos dissipativos via modelo de sistemas quânticos abertos por álgebra de Lie [12, 38], e em uma dinâmica com reinício [39]. Conforme já demonstrado [40], efeitos dissipativos podem ser usados para Engenharia de estados quânticos. Aqui investigamos como a combinação com a dinâmica de reinício pode ajudar a definir diferentes estados estacionários, abrindo uma maior gama de possibilidade em aplicações em computação Quântica. A intenção é buscar meios de preservar características quânticas de modo a possibilitar que dinâmicas que, a princípio, não poderiam ser utilizadas em tecnologias quânticas devido a perda de coerência passem a ser utilizadas.

Para tanto, o texto desta dissertação apresenta a seguinte divisão:

Cap I - Neste capítulo o Oscilador Harmônico Quântico é introduzido por se tratar de uma das formas mais simples de formular sistemas Físicos.

---

Cap II - Aborda a dinâmica com Reinício para o Oscilador Harmônico. Para isto, foi dividido em duas seções uma que trata dos estados coerentes do Oscilador Harmônico e outra que trata da dinâmica com reinício considerando uma evolução temporal a partir do estado coerente.

Cap III - Destinado a introduzir o Modelo de Jaynes-Cummings. Trata-se do estudo do Modelo de Jaynes-Cummings em duas seções uma destinada a aproximação disperssiva e a outra ao caso dissipativo.

Cap IV - Neste capítulo é feito o estudo da dinâmica com Reinício para o Modelo de Jaynes-Cummings. Além de investigar se o estado se torna mais ou menos quântico por meio de estudos da rugosidade.

## Capítulo 2

# Oscilador Harmônico

Qualquer sistema físico na proximidade de um ponto de equilíbrio estável pode ser considerado um Oscilador Harmônico. Tendo por base o oscilador harmônico simples, cuja massa  $m$ , sempre que se desvia da posição de equilíbrio  $x_0$ , está sujeita a uma força restauradora que o traz de volta ao ponto de equilíbrio [42], dada pela equação

$$F = -kx. \quad (2.1)$$

A força atuante está diretamente atrelada a energia potencial  $V$  do sistema e é dada pela equação,

$$V(x) = \frac{k(x - x_0)^2}{2}. \quad (2.2)$$

A dinâmica do oscilador harmônico simples é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(x - x_0) = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de oscilação

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.4)$$

Para uma energia potencial não harmônica  $V$ , podemos expandir em torno da posição  $x_0$  em termos de uma série de Taylor. Considerando o sistema com posição de equilíbrio estável

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) (x - x_0)^2, \quad (2.5)$$

## 2.1. OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

---

asumindo que  $V(x_0) = 0$  temos que

$$V(x) \approx \frac{(\omega_0)^2 m}{2} (x - x_0)^2. \quad (2.6)$$

A energia total do sistema é

$$E = T + V.$$

Como o potencial é conservativo, a energia mecânica se conserva

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{m \omega_0^2}{2} (x - x_0)^2. \quad (2.7)$$

Em termos do momento

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega_0^2}{2} (x - x_0)^2. \quad (2.8)$$

## 2.1 Oscilador Harmônico Quântico

Para fazer o estudo do oscilador harmônico quântico se faz necessário fazer a correta mudança das grandezas clássicas para operadores quânticos [21]:

$$E \rightarrow \hat{H},$$

$$p \rightarrow \hat{p},$$

$$x \rightarrow \hat{x}.$$

A partir deles originam as seguintes relações

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle, \quad (2.9)$$

$$\hat{p} |x\rangle = \hbar i \frac{d}{dx} |x\rangle. \quad (2.10)$$

O comutador  $[\hat{x}, \hat{p}]$  pode ser obtido a partir da aplicação de um ket  $|\Phi\rangle$  :

$$[\hat{x}, \hat{p}] |\Phi\rangle = \hat{x} \hat{p} |\Phi\rangle - \hat{p} \hat{x} |\Phi\rangle. \quad (2.11)$$

Passando para a representação de posição

$$\langle x | \hat{x}, \hat{p} | \Phi \rangle = \langle x | \hat{x} \hat{p} | \Phi \rangle - \langle x | \hat{p} \hat{x} | \Phi \rangle. \quad (2.12)$$

Considerando as equações 2.9 e 2.10, obtém-se

$$\langle x | \hat{x}, \hat{p} | \Phi \rangle = -x \left( \hbar i \frac{d}{dx} \right) x \Phi + \hbar i \left[ x \Phi + x \frac{d}{dx} x \Phi \right], \quad (2.13)$$

logo

$$\langle x | \hat{x}, \hat{p} | \Phi \rangle = \langle x | \hbar i | \Phi \rangle \quad (2.14)$$

o comutador, portanto, será

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hbar i. \quad (2.15)$$

A energia total no caso do oscilador harmônico quântico é dado por

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}. \quad (2.16)$$

Logo o Hamiltoniano para este sistema é escrito como:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x})^2. \quad (2.17)$$

O oscilador harmônico quântico é análogo ao clássico, no entanto, as grandezas posição e o momento, no caso quântico, são definidas em termos de seus observáveis

$$\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}},$$

e

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}.$$

Sabe-se que  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , portanto

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \sqrt{\frac{m\omega}{m\omega\hbar^2}} i\hbar,$$

sendo assim

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (2.18)$$

Com base nisso, o hamiltoniano pode ser escrito como

## 2.1. OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

---

$$\hat{H} = \omega\hbar \left[ \frac{(\hat{X} + i\hat{P})}{\sqrt{2}} \frac{(\hat{X} - i\hat{P})}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right], \quad (2.19)$$

definindo  $\frac{(\hat{X} + i\hat{P})}{\sqrt{2}} = \hat{a}$ , conhecido como operador de aniquilação, e  $\frac{(\hat{X} - i\hat{P})}{\sqrt{2}} = \hat{a}^\dagger$ , chamado operador de criação, pode-se escrever

$$\hat{H} = \omega\hbar \left[ \hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.20)$$

Os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  obedecem a relação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  e o produto  $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{N}$ , posto isso, tem-se que

$$\hat{H} = \omega\hbar \left[ \hat{N} + \frac{1}{2} \right], \quad (2.21)$$

e os autoestados de  $\hat{N}$  são soluções para o oscilador harmônico, e atua nos autoestados,  $|n\rangle$  do oscilador harmônico, sendo

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.22)$$

já o espectro de  $\hat{N}$  inclui todos os números inteiros não negativos, portanto, os autovalores do hamiltoniano são dados por:

$$\hat{H}|n\rangle = \omega\hbar \left[ \hat{n} + \frac{1}{2} \right]|n\rangle, \quad (2.23)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Os operadores de aniquilação e criação atuam sobre os autoestados do oscilador harmônico da forma a seguir:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.24)$$

e

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.25)$$

Quando  $n = 0$  tem-se o estado fundamental  $|0\rangle$ , correspondente a energia mínima do sistema, desta forma

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.26)$$

Os demais estados podem ser construídos a partir do estado fundamental, sendo o  $n$ -ésimo

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (2.27)$$

onde  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  é a constante de normalização.

## 2.2 Estados Coerentes do Oscilador Harmônico

Os estados coerentes são estados particulares característicos do oscilador harmônico cujas distribuições de probabilidade para a posição e o momento são distribuições gaussianas, possuindo, portanto, incerteza mínima

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.28)$$

e seguem a trajetória de uma partícula clássica quando submetida a um potencial harmônico, e não mudam sua forma com o tempo [44].

Para definir os estados coerentes leva-se em consideração os estudos da evolução temporal para o oscilador harmônico de modo a escrever um número complexo  $|\alpha\rangle$  em termos das autofunções de  $\hat{H}$ ,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.29)$$

onde  $e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$  é a normalização e os demais termos é uma característica da evolução temporal, ou seja, há uma expansão de  $|\alpha\rangle$  na base de autoestados do oscilador harmônico, logo:

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{it\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int\omega} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle,$$

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{it\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-it\omega})^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle,$$

sendo  $(\alpha e^{-it\omega})^n = \alpha^n$ , portanto:

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{it\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.30)$$

ou

## 2.2. ESTADOS COERENTES DO OSCILADOR HARMÔNICO

---

$$|\alpha, t\rangle = e^{\frac{-it\omega}{2}} |\alpha, 0\rangle, \quad (2.31)$$

o estado inicial em  $t = 0$ .

Uma observação relevante é que os estados coerentes apresentam como propriedades a supercompleteza, a não-ortogonalidade e a estabilidade o que significa que a evolução temporal de um estado coerente é sempre outro estado coerente [44].

## Capítulo 3

# Dinâmica com Reinício - Oscilador Harmônico Quântico

Nesse capítulo vamos investigar a dinâmica quântica com reinício estocástico periódico. Para isso, consideramos um estado inicial  $|\psi(0)\rangle$ , que evolui sob a ação do potencial harmônico e que, de tempos em tempos, o estado é reiniciado, voltando a ser  $|\psi(0)\rangle$ .

Torna-se relevante apontar que processos estocásticos são generalizações de vetores aleatórios, entretanto apresentam uma interpretação diferente já que processos estocásticos modelam a evolução de um sistema aleatório no tempo [45, 46]. Deste modo, permitem uma intuição probabilística do sistema analisado[46]. Diz-se que um processo estocástico está sob reinício se houver a reiniciação do sistema em algum ponto ( a posição estabelecida como inicial, por exemplo)[39].

Em mecânica quântica, a análise da evolução do sistema no tempo permite prever resultados de uma medida de valores médios de observáveis a partir do conhecimento do estado em que o sistema de interesse se encontra inicialmente. De forma oportuna, escreve-se um vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  utilizando a base de auto-estados comuns aos observáveis aos quais pretende-se estudar.

Um estado físico que não pode ser descrito por um único  $|\psi(t)\rangle$  é dito estar em uma mistura estatística de estados quânticos [47]. Sendo assim, para descrever completamente um sistema associado a um vetor de estado utiliza-se o operador densidade [48]

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)| \tag{3.1}$$

onde  $\hat{\rho}(t)$  é o operador densidade de  $|\psi(t)\rangle$  e, portanto, projetor deste estado.

### 3.1 Dinâmica com reinício

Para escrever a dinâmica com reinício para este sistema considera-se uma evolução temporal a partir dos estados coerentes do oscilador harmônico dados pela equação (2.29). Não se trata de uma evolução unitária, já que a dinâmica com reinício trata-se de um processo estocástico, ou seja, há uma probabilidade de acontecer ou não este reinício. Conseqüentemente, para determinar o estado do sistema é necessário que se faça um média entre todas realizações, sendo essas em elevado número, assim de agora em diante  $\hat{\rho}$  deve ser entendido como o operador densidade médio.

Fazendo a evolução temporal a começar em  $t=0$ , o estado inicial coerente dado por

$$\hat{\rho}_{t_0} = |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0|. \quad (3.2)$$

Considera-se sempre o mesmo estado inicial, portanto ele é igual a sua média, para a evolução temporal iremos considerar eventos discretos, i.e. intervalos de tempos constantes <sup>1</sup> assim  $\Delta t = t_1 - t_0$  tem-se para a próxima janela de tempo

$$\hat{\rho}_{t_1} = r |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0| + (1 - r) |\alpha_1\rangle \langle \alpha_1|,$$

para  $t = t_2 = 2\Delta t$

$$\hat{\rho}_{t_2} = r |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0| + r(1 - r) |\alpha_1\rangle \langle \alpha_1| + (1 - r)^2 |\alpha_2\rangle \langle \alpha_2|,$$

para  $t = t_3 = 3\Delta t$

$$\hat{\rho}_{t_3} = r |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0| + r(1 - r) |\alpha_1\rangle \langle \alpha_1| + r(1 - r)^2 |\alpha_2\rangle \langle \alpha_2| + (1 - r)^3 |\alpha_3\rangle \langle \alpha_3|.$$

Nota-se que a probabilidade de não haver reinício vai diminuindo a medida que ocorre a evolução temporal. E esta pode ser escrita para  $t = t_n = n\Delta t$ , como

$$\hat{\rho}_{t_n} = r |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0| + r(1 - r) |\alpha_1\rangle \langle \alpha_1| + r(1 - r)^2 |\alpha_2\rangle \langle \alpha_2| + \dots + (1 - r)^n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n|, \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Como uma possível forma de realizar o reinício é passando um átomo em ressonância na cavidade e esse efeito é discreto, considera-se intervalos discretos de tempo.

CAPÍTULO 3. DINÂMICA COM REINÍCIO - OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

---

onde  $r$  consiste na propabilidade de haver o reinício,  $(1 - r)$  refere-se a evolução unitária e  $(1 - r)^n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n|$  é a probabilidade de nunca ocorrer o reinício.

Reescrevendo, obtém-se

$$\hat{\rho}_n = (1 - r)^n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1 - r)^m |\alpha_m\rangle \langle \alpha_m|, \quad (3.4)$$

equação geral para a dinâmica com reinício dos estados coerentes do oscilador harmônico com probabilidade periódica onde o termo  $r[1 - \delta(n, 0)]$  foi introduzido para substituir o somatório quando  $n = 0$ .

Relevante destacar que o operador  $\rho$ , matriz densidade, é obtido por meio de uma média das realizações do ensemble do sistema e permite analisar a contribuição de cada uma dessas evoluções. Cabe dizer, portanto, que a probabilidade é conservada, de forma que o traço ( $Tr$ ) é igual a 1.

O traço pode ser obtido pela soma da diagonal principal da matriz densidade [49]. Logo o traço de  $\rho_n$  é

$$Tr\hat{\rho}_n = (1 - r)^n + r \sum_{m=0}^{n-1} (1 - r)^m, \quad (3.5)$$

com

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1 - r)^m = \frac{1 - (1 - r)^n}{r};$$

portanto

$$Tr\hat{\rho}_n = (1 - r)^n + r \left[ \frac{1 - (1 - r)^n}{r} \right] = 1. \quad (3.6)$$

O traço é uma ferramenta matemática que facilita o cálculo do valor esperado de um observável [49]. Para o sistema aqui analisado o valor esperado desse conjunto de observáveis, ou da média do ensemble pode ser feito olhando para a parte real  $\langle \hat{x} \rangle = \lambda Re \langle \hat{a} \rangle$  e imaginária  $\langle \hat{p} \rangle = \beta Im \langle \hat{a} \rangle$ . Sendo

$$\langle \hat{a} \rangle = Tr(\hat{a}\hat{\rho}_n),$$

onde

$$\hat{a}\hat{\rho}_n = (1 - r)^n \alpha_n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1 - r)^m \alpha_m |\alpha_m\rangle \langle \alpha_m|, \quad (3.7)$$

### 3.1. DINÂMICA COM REINÍCIO

---

e o traço é

$$Tr(\hat{\rho}_n) = (1-r)^n \alpha_n + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m \alpha_m = A_n. \quad (3.8)$$

Os elementos da matriz densidade cujo o Traço ( $Tr$ ) foi tomado são os coeficientes da evolução temporal descrita.

Como o estado não é mais coerente a energia média pode não ser  $|\alpha_n|^2$ , sendo assim

$$\frac{E_n}{\hbar\omega} = \mathcal{E}_n = Tr(\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_n),$$

sendo

$$Tr(\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_n) = (1-r)^n |\alpha_n|^2 + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m |\alpha_m|^2 = \mathcal{E}_n. \quad (3.9)$$

Como  $\alpha_m = \alpha_0 e^{-im\Delta t\omega}$  e , considerando  $|\alpha_m|^2 = |\alpha_0|^2$ . Retomando a equação 3.9, temos

$$\mathcal{E}_n = (1-r)^n |\alpha_0|^2 + r[1 - \delta(n, 0)] |\alpha_0|^2 \left[ \frac{1 - (1-r)^n}{r} \right] = |\alpha_0|^2 \quad (3.10)$$

Nota-se que, embora trata-se de um estado não coerente e não puro a energia média de ensemble dos estados é constante. Pode-se obter a solução analítica reescrevendo a equação 3.8 como

$$A_n = \alpha_0 \left[ (1-r)^n (e^{-i\Delta t\omega})^n + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m (e^{-i\Delta t\omega})^m \right], \quad (3.11)$$

expandindo o somatório em termos de uma série geométrica, considerando  $(1-r)^m (e^{-i\Delta t\omega})^m = u$

$$\sum_{m=0}^{n-1} u^m = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1} = S_n,$$

sendo

$$uS_n = u + u^2 + \dots + u^n,$$

de modo que

$$S_n = \frac{1-u^n}{1-u},$$

e substituindo em 3.11, tem-se

$$A_n = \alpha_0 \left[ (1-r)^n (e^{-i\Delta t\omega})^n + r[1 - \delta(n, 0)] \frac{1 - [(1-r)(e^{-i\Delta t\omega})]^n}{1 - (1-r)(e^{-i\Delta t\omega})} \right]. \quad (3.12)$$

Desta forma

$$\mathcal{E}_n = (1-r)^n |\alpha_0|^2 + r[1 - \delta(n, 0)] = |\alpha_0|^2 \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m |\alpha_m|^2 = |\alpha_0|^2. \quad (3.13)$$

## 3.2 Discussão

Foram plotados gráficos da parte real de  $\alpha$  (3.1) e imaginária de  $\alpha$  (3.2). No eixo  $y$  dos gráficos tem-se o valor médio das posições sendo representados por  $X$  para a parte real e  $P$  para a imaginária de  $\alpha$  em 3.1 e 3.2 respectivamente. No eixo  $x$  por sua vez tem-se o tempo representado por  $n$  já que foi considerado tempos discretos, ou seja, significa que entre  $n$  e  $n + 1$  não há reinício.

Os gráficos 3.1 e 3.2 foram plotados para valores de  $r$  entre 0 e 1. Se  $r = 0$  a probabilidade de haver reinício é nula e, portanto, as oscilações ficam mais acentuadas e quanto mais reinício as oscilações tendem a diminuir e tendem atingir a saturação relativamente rápido. Percebe-se, portanto, que o reinício leva o estado para o estado estacionário

Quanto a Média temporal da posição a tendência é aumentar com o aumento reinício, conforme 3.3 . Se o reinício é aleatório, podendo ocorrer a qualquer momento porque vemos um aumento no valor médio? Se o valor de  $r \ll 1$  a figura quase não muda em relação a  $r = 0$  isso se deve pelo fato que a “meia vida” do sistema é muito maior que o tempo característico do sistema que é  $\frac{1}{\omega}$ . Quando  $r$  é próximo de 1 temos o caso onde a “meia vida” é muito menor que  $\frac{1}{\omega}$ , assim na maioria das vezes o reinício ocorre antes do valor esperado de  $X$  ficar negativo e cada vez mais próximo do valor inicial.

### 3.2. DISCUSSÃO

---

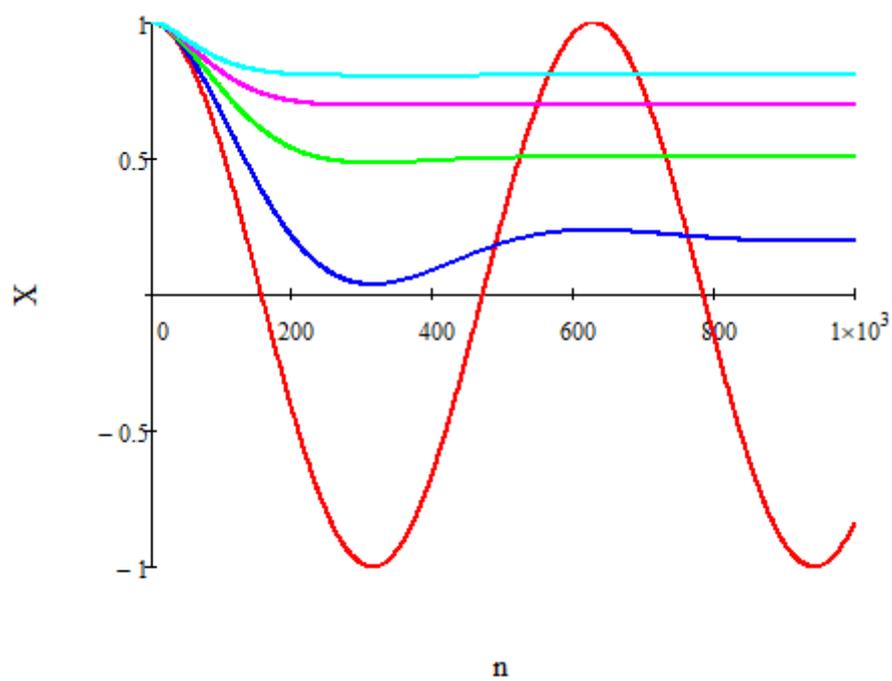


Figura 3.1: Parte Real de  $\alpha$  sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

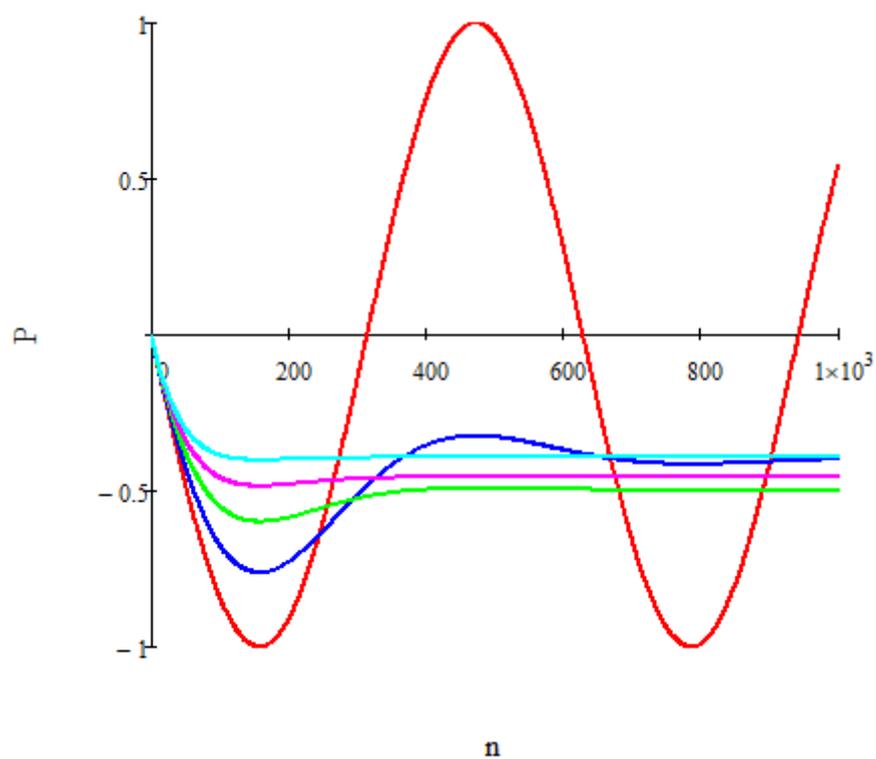


Figura 3.2: Parte Imaginária de  $\alpha$  sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

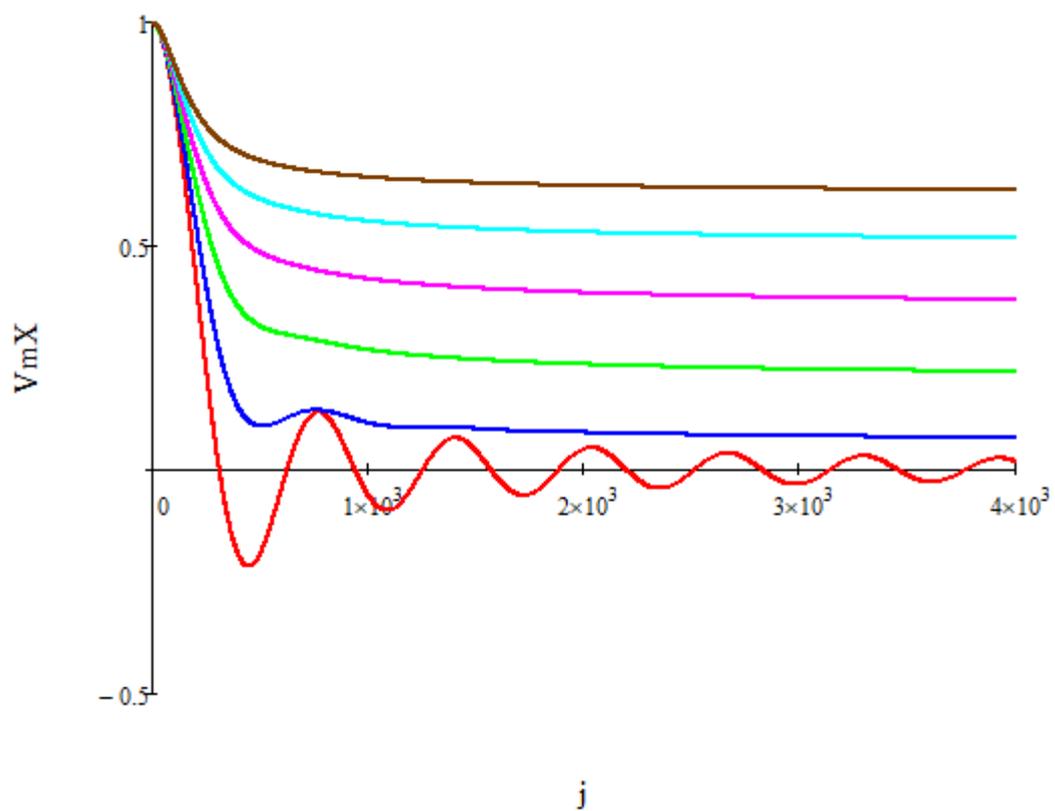


Figura 3.3: Média temporal da posição sendo: vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0.1$ , verde  $r = 0.2$ , Rosa  $r = 0.3$ , Azul claro  $r = 0.4$ , Marron  $r = 0.5$

## Capítulo 4

# Modelo de Jaynes-Cummings

O modelo de Jaynes-Cummings é um modelo de ótica quântica que descreve a interação de um átomo de dois níveis confinado em uma cavidade ótica. Esse modelo é utilizado na ótica quântica, física do estado sólido e física atômica [41].

O modelo é constituído por um átomo de dois níveis de energia sendo respectivamente os vetores,  $|e\rangle$  referente ao estado excitado do átomo e  $|g\rangle$  referente ao estado fundamental, acoplados à cavidade ótica. Essa cavidade é irradiada por um campo eletromagnético com estados de energia dados por  $|n\rangle$ , onde  $n$  representa o número de fótons na cavidade.

O átomo emitindo ou absorvendo fótons transita entre os dois estados, e a alteração desses estados ocorre através de oscilações de Rabi, tendo como uma de suas representações:

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) + g(\hat{a} \hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+). \quad (4.1)$$

Considerando  $\hbar = 1$ , os termos em  $g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+)$  representam os termos girantes e  $g(a \sigma_- + a^\dagger \sigma_+)$  os termos contragirantes. Neste capítulo, consideraremos apenas o caso em que átomo e campo estão em ressonância, portanto, a parte dos termos contragirantes da equação não serão considerados. Estar em ressonância significa que a diferença de energia dos estados do átomo é

$$\Delta = \hbar \omega_a,$$

sendo  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  e  $h$  a constante de Plank. De modo que essa energia dos estados seja igual a energia de um fóton do campo  $\hbar \omega_c$ . Isso torna a inequação

$$\omega_c + \omega_a \gg |\omega_c - \omega_a| \approx 0,$$

---

de aproximação de onde girante verdadeira, o que permite anular os termos contra-girantes. Os termos girantes referem-se a transição do átomo do estado excitado para o fundamental (emissão de um fóton) e do estado fundamental para o estado excitado (absorção de um fóton).

Sendo o modelo de Jaynes-Cummings na aproximação RWA (Rotating Wave Approximation - onda girante) dado por

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+). \quad (4.2)$$

O Hamiltoniano de Jaynes-Cummings apresenta três partes: uma referente ao átomo  $\hat{H}_a$ , que relaciona a diferença de energia entre os dois níveis; a segunda referente ao campo  $\hat{H}_c$ , que está relacionada a energia de cada fóton na cavidade e; por fim, um referente a interação  $\hat{H}_i$ , que é definida pela dinâmica entre os dois anteriores.

A dinâmica se dá pela emissão ou absorção de fóton pelo átomo. Se  $|g\rangle$  absorve um fóton eleva seu nível para o estado excitado  $|e\rangle$ , e este por sua vez volta ao estado inicial  $|g\rangle$  ao emitir um fóton.

O Hamiltoniano é, portanto, dado por

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}(2\hat{N} + \hat{\sigma}_z + 1) + \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}), \quad (4.3)$$

onde  $\hat{\sigma}_z$  são operadores de spin,  $\hat{\sigma}_+$  operador de levantamento,  $\hat{\sigma}_-$  operador de abaixamento,  $\hat{N}$  operador número,  $\hat{a}$  operador de aniquilação,  $\hat{a}^\dagger$  operador de criação e  $\Omega$  constante de acoplamento entre átomo e campo e  $\Delta = \omega_c - \omega_a \sim 0$ .

No formalismo quântico, o estado dinâmico de um sistema quântico é descrito por um vetor de estado  $|\Psi\rangle$ , que é um elemento de um espaço linear vetorial complexo chamado espaço de Hilbert. O espaço de Hilbert do átomo  $\hat{a}$  é composto por dois vetores ortonormais:

$$\hat{H}_a = \{|e\rangle, |g\rangle\},$$

O campo, por sua vez, tem  $n$  vetores ortonormais em sua base:

$$\hat{H}_c = \{|n\rangle\},$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Ao considerar o estado ressonante átomo-campo temos um espaço composto, que é definido pelo produto tensorial ( $\otimes$ ) entre eles:

$$\hat{H} = \hat{H}_a \otimes \hat{H}_c = \{|e, n\rangle, |g, n\rangle\},$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Estes são autoestados da parte do hamiltoniano composto pela soma dos hamiltonianos do campo e do átomo (primeira parte da equação 4.1) e são não degenerados pois suas autoenergias são diferentes.

Devido a ressonância entre átomo e campo, os estados dos espaços  $\hat{H}_a$  e  $\hat{H}_c$  devem diferir em apenas um quantum de energia, ou seja, se o átomo está em  $|e\rangle$  o campo está em  $|n\rangle$ , já se o átomo está em  $|g\rangle$  o campo está em  $|n+1\rangle$ , sendo assim:

$$\hat{H} = \hat{H}_a \otimes \hat{H}_c = \{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\},$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Os estados  $|e, n\rangle = |e\rangle \otimes |n+1\rangle$  e  $|g, n+1\rangle = |g\rangle \otimes |n+1\rangle$  são autoestados do hamiltoniano campo-átomo.

Partindo das equações dos estados fundamental

$$\hat{H} |n, g\rangle = \hbar\omega(n) |n, g\rangle - \frac{\hbar\omega}{2} |n, g\rangle + \Omega\hbar(\sqrt{n} |n-1, e\rangle), \quad (4.4)$$

e excitado

$$\hat{H} |n-1, e\rangle = \hbar\omega(n-1) |n-1, e\rangle + \frac{\hbar\omega}{2} |n-1, e\rangle + \Omega\hbar(\sqrt{n} |n, g\rangle), \quad (4.5)$$

pode-se obter os termos da matriz do modelo Jaynes-Cummings na base  $\{|n\rangle \langle e|\}$  onde  $|e\rangle$  representa o estado do átomo como excitado  $|+\rangle$  ou fundamental  $|-\rangle$  e  $|n\rangle$  representa o estado de campo, por meio de

$$\langle m, g | \hat{H} |n, g\rangle = \hbar\omega(n - \frac{-1}{2})\delta_{m,n};$$

$$\langle m, g | \hat{H} |n-1, e\rangle = \hbar\Omega\sqrt{n}\delta_{m,n};$$

$$\langle m-1, e | \hat{H} |n, g\rangle = \hbar\Omega\sqrt{n}\delta_{m,n};$$

$$\langle m-1, e | \hat{H} |n-1, e\rangle = \hbar\omega(n - \frac{-1}{2})\delta_{m,n}.$$

Pode-se, portanto, considerando uma base finita, obter a forma matricial do hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings:

---


$$H \doteq \begin{bmatrix} \frac{-\hbar\omega}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega}{2} & \Omega\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \Omega\hbar & \frac{\hbar\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\hbar\omega}{2} & \Omega\hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega\hbar\sqrt{2} & \frac{3\hbar\omega}{2} \end{bmatrix}$$

Além do estado fundamental de energia 0, a matriz é bloco diagonal formada por blocos 2x2. Os autovalores e autovetores podem ser obtidos diagonalizando cada bloco.

Com base na análise de cada bloco da hamiltoniana é possível notar que, na condição de ressonância, o modelo de Jaynes-Cummings sempre acopla em dois níveis ( $|n, +\rangle \leftrightarrow |n+1, -\rangle$ ).

Quando não é possível escrever os estados acoplados como produto tensorial, mas apenas em termos das superposições, diz-se que ele é emaranhado. Sendo, o estado geral do Modelo de Jaynes-Cummings dado por:

$$|\psi_{\pm}\rangle = \alpha |e, n\rangle \pm \beta |g, n+1\rangle, \quad (4.6)$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  amplitudes complexas que satisfazem  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . O emaranhamento faz com que quando uma parte do sistema é medida a outra é obtida. A partir da forma matricial da hamiltoniana e da consideração supramencionada pode-se obter os autovalores:

$$E_0 = |0\rangle = |0, g\rangle$$

$$E_1 = |1\rangle = \alpha_1 |0, e\rangle + \beta_1 |1, g\rangle$$

$$E_2 = |2\rangle = \alpha_2 |1, e\rangle + \beta_2 |2, g\rangle$$

.

.

.

$$E_n = |n\rangle = \alpha_n |n-1, e\rangle + \beta_n |n, g\rangle$$

Sendo possível generalizá-los para obter um estado qualquer da seguinte forma

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + \dots + a_n |n\rangle = \sum_{\kappa=0}^n a_{\kappa} |\kappa\rangle. \quad (4.7)$$

Aplicando a evolução temporal obtem-se

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi\rangle \sum_{\kappa=0}^n a_{\kappa 0} e^{-\frac{itE_{\kappa}}{\hbar}} |\kappa\rangle. \quad (4.8)$$

Considerando o caso de um estado inicial com 1 fóton

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle - |g, 1\rangle),$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 1\rangle),$$

sendo

$$|e, 0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|1\rangle + |2\rangle),$$

$$|g, 1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|2\rangle - |1\rangle),$$

logo

$$|\psi_1\rangle(t) = |e, 0\rangle(t) = \hat{U}(t) |e, 0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \left[ |1\rangle + e^{-\frac{-iE_2 - E_1 t}{\hbar}} |2\rangle \right], \quad (4.9)$$

e

$$|\psi_2\rangle(t) = |g, 1\rangle(t) = \hat{U}(t) |g, 1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \left[ |1\rangle - e^{-\frac{-iE_2 - E_1 t}{\hbar}} |2\rangle \right], \quad (4.10)$$

considerando  $E_2 - E_1 = \Omega$  e partindo do estado inicial

$$\hat{\sigma}_z = [ |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \otimes I ], \quad (4.11)$$

e obtendo o valor esperado de  $\hat{\sigma}_z$ , temos

$$\langle \psi_1 | \hat{\sigma}_z | \psi_1 \rangle = \frac{1}{2} [ e^{-it\Omega} + e^{it\Omega} ] = \cos \Omega t, \quad (4.12)$$

ou

$$\langle \psi_2 | \hat{\sigma}_z | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2} [ e^{-it\Omega} - e^{it\Omega} ] = \sin \Omega t. \quad (4.13)$$

O gráfico do valor esperado de  $\hat{\sigma}_z$  foi plotado tendo em vista compará-lo com o que será plotado para o caso da dinâmica dissipativa na última seção deste capítulo.

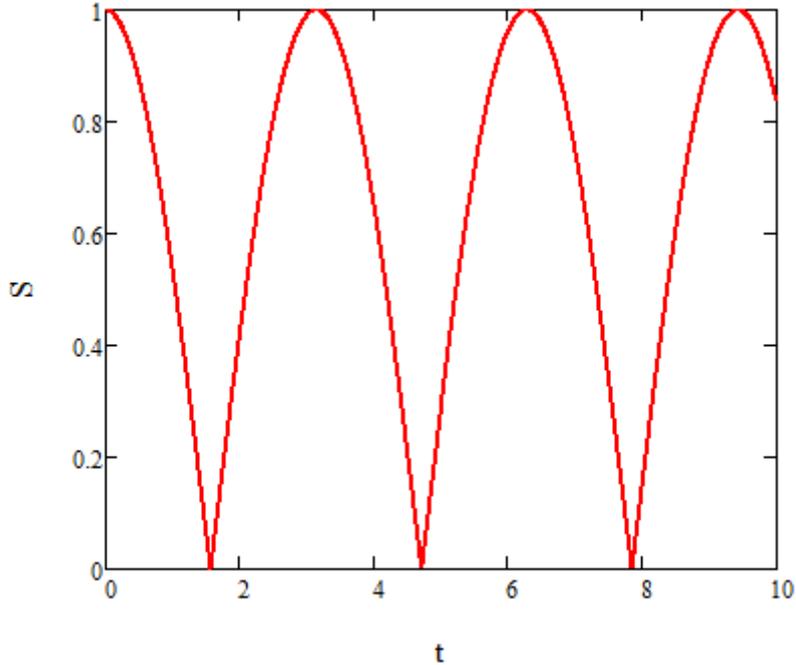


Figura 4.1: Valor esperado de  $\hat{\sigma}_z$

## 4.1 Dinâmica Dispersiva e Dinâmica Dissipativa

Com base no trabalho de Faria (1999) vide referência [38], será feito o estudo do caso dispersivo e dissipativo para o modelo de Jaynes-Cummings.

Reescrevendo o Modelo de Jaynes-Cummings por aproximação RWA (Rotating Wave Approximation)

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_{eg}}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) \quad (4.14)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência do campo,  $\omega_{eg}$  é a frequência entre os dois níveis do átomo representados pelas matrizes de Pauli  $\sigma_j$ . O campo é descrito pelos operadores  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  com  $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1$ , e  $\Omega$  é a frequência de Rabi que mede o acoplamento átomo-campo.

Sendo o modelo com dessintonização definido por  $\delta = \omega_{eg} - \omega_0$ , que mede o quão fora de ressonância está o sistema, cujos autoestados são dados por:

$$E_{\pm n} = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar\Delta_n}{2}. \quad (4.15)$$

O caso dispersivo é dado considerando uma perturbação do tipo

$$\frac{|\delta|}{\Omega} \gg \sqrt{n+1}$$

no hamiltoniano de interação representado matematicamente pelo último termo somado a equação 4.14 para todo  $n$  relevante. Os autovalores dados por

$$E_{\pm n} \cong \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar|\delta|}{2} \pm \frac{\hbar\Omega^2}{|\delta|}(n+1). \quad (4.16)$$

Sendo para  $\delta > 0$

$$|+, n\rangle \rightarrow |e, n\rangle,$$

$$|-, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle,$$

e para  $\delta < 0$

$$|+, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle,$$

$$|-, n\rangle \rightarrow |e, n\rangle.$$

Se a condição de perturbação for satisfeita para todos os valores de  $n$ , pode-se trabalhar com o hamiltoniano ativo de eficácia:

$$\hat{H}_{JC}^{eff} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_{eg}}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega^2}{\delta} \times [(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) |e\rangle \langle e| - \hat{a}^\dagger \hat{a} |g\rangle \langle g|]. \quad (4.17)$$

A dinâmica dissipativa pode ser escrita por meio de uma equação que governa a dinâmica dispersiva de dois níveis acoplados com o campo eletromagnético em uma cavidade como,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \mathcal{L} \hat{\rho} = \frac{[\hat{H}_{JC}^{eff}, \hat{\rho}(t)]}{i\hbar} + \mathcal{D} \hat{\rho}(t), \quad (4.18)$$

onde as perdas das cavidades são representadas por  $\mathcal{D}$ , escrita em temperatura 0 na forma

#### 4.1. DINÂMICA DISPERSIVA E DINÂMICA DISSIPATIVA

---

$$\mathcal{D} \cdot = \kappa(2\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \cdot - \cdot \hat{a}^\dagger \hat{a}),$$

$\kappa$  é a constante de amortecimento e a equação 4.17 pode ser reescrita,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i\omega[(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)|e\rangle\langle e| - \hat{a}^\dagger \hat{a}|g\rangle\langle g|, \hat{\rho}(t)] + \kappa[2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger \hat{a}], \quad (4.19)$$

onde  $\omega = \frac{\Omega^2}{\delta}$ , e o operador densidade  $\rho(t)$  pertence a  $\mathcal{D}(h_a \otimes h_c)$  sendo o produto direto entre o Hamiltoniano do átomo e do campo.

Por meio da equação 4.19 pode-se obter a representação matricial do operador  $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{gg}(t) & \hat{\rho}_{ge}(t) \\ \hat{\rho}_{eg}(t) & \hat{\rho}_{ee}(t) \end{bmatrix},$$

sendo os elementos da matriz operadores que atuam sobre o  $h_c$ :

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = \langle g|\hat{\rho}(t)|g\rangle,$$

$$\hat{\rho}_{ge}(t) = \langle g|\hat{\rho}(t)|e\rangle,$$

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \langle e|\hat{\rho}(t)|g\rangle,$$

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \langle e|\hat{\rho}(t)|e\rangle.$$

E o operador reduzido do campo pode ser escrito como:

$$\hat{\rho}_c(t) = Tr_a \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{gg}(t) + \hat{\rho}_{ee}(t). \quad (4.20)$$

Considerando o operador  $\hat{\rho}_{gg}(t)$  a dinâmica RWA é governada por:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{gg}(t) = i\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{gg}(t)] + \kappa[2\hat{a}\hat{\rho}_{gg}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho}_{gg}(t) - \hat{\rho}_{gg}(t)\hat{a}^\dagger \hat{a}] \quad (4.21)$$

O efeito dispersivo no átomo no estado  $|g\rangle$  ocorre pelo deslocamento do termo unitário da frequência natural para  $\omega_0 - \frac{\Omega^2}{\delta}$ . Se considerar o operador  $\hat{\rho}_{ee}(t)$  a dinâmica é governada por:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ee}(t) = -i\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{ee}(t)] + \kappa[2\hat{a}\hat{\rho}_{ee}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho}_{ee}(t) - \hat{\rho}_{ee}(t)\hat{a}^\dagger \hat{a}] \quad (4.22)$$

O efeito dispersivo no átomo no estado  $|e\rangle$  ocorre pelo deslocamento do termo unitário da frequência natural para  $\omega_0 + \frac{\Omega^2}{\delta}$ .

Usando a linguagem dos superoperadores, o liouvilliano correspondente aos elementos da matrix  $\hat{\rho}_{gg}(t)$  e  $\hat{\rho}_{ee}(t)$  pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}\pm = \pm i\omega(\mathcal{M} - \mathcal{P}) + \kappa(2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P}), \quad (4.23)$$

onde  $\mathcal{L}_+$  age em  $\hat{\rho}_{ee}(t)$  e  $\mathcal{L}_-$  age em  $\hat{\rho}_{gg}(t)$ , sendo os superoperadores  $\mathcal{M} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\mathcal{P} \equiv \hat{a} \hat{a}^\dagger$  e  $\mathcal{J} \equiv \hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger$ .

Para os operadores  $\hat{\rho}_{ge}(t)$  e  $\hat{\rho}_{eg}(t)$  fora da diagonal a equação 4.19 assume uma forma diferente da de RWA. Sendo a partir de  $\hat{\rho}_{eg}(t)$ :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{eg}(t) = -i\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) + \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho}_{eg}(t)] - \kappa[2\hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) - \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}], \quad (4.24)$$

onde em RWA era o termo unitário passa a ser  $-i\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) + \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho}_{eg}(t)]$ .

Em linguagem de superoperadores, o liouvilliano é dado por:

$$\mathcal{L}_{eg} = -i\omega(\mathcal{M} + \mathcal{P} + 1) + \kappa(2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P}). \quad (4.25)$$

## 4.2 Evolução temporal

Considerando o Hamiltoniano da equação 4.17 e a dinâmica completa incluindo as perdas da cavidade dada pela equação 4.18, e fazendo a evolução temporal do sistema a partir do estado inicial, segue

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle. \quad (4.26)$$

O átomo entra na cavidade em uma superposição coerente e encontra um campo coerente  $|\alpha\rangle$ . Para satisfazer a condição  $\frac{|\delta|}{\Omega} \gg \sqrt{n+1}$  assume-se que  $\frac{|\delta|}{\Omega} \gg |\alpha|$ . Em  $t = 0$  começa a interação do sistema sendo os operadores iniciais  $\hat{\rho}_{gg}(0) = \hat{\rho}_{ge}(0) = \hat{\rho}_{eg}(0) = \hat{\rho}_{ee}(0) = \frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha|$ .

Para obter  $\hat{\rho}(t)$  faz-se a evolução dos elementos da matriz da seção anterior. A evolução dos elementos diagonais para o estado coerente tem autoestados:

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = e^{\mathcal{L}_+ t} \hat{\rho}_{ee}(0) = \frac{1}{2} |\alpha(t) e^{-i\omega t}\rangle \langle \alpha(t) e^{-i\omega t}|, \quad (4.27)$$

## 4.2. EVOLUÇÃO TEMPORAL

---

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = e^{\mathcal{L}t} \hat{\rho}_{gg}(0) = \frac{1}{2} |\alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle \alpha(t)e^{i\omega t}|, \quad (4.28)$$

onde  $\alpha(t) \equiv \alpha e^{-\kappa t}$ .

Para encontrar  $\hat{\rho}_{eg}(t)$  se faz necessário resolver a equação 4.24. Sendo:

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = e^{\mathcal{L}t} \hat{\rho}_{eg}(0) = e^{-i\omega t} e^{\frac{\kappa}{\kappa+i\omega}(e^{2(i\omega+\kappa)t}-1)} \mathcal{J} e^{-(i\omega+\kappa)t} \mathcal{M} e^{-(i\omega+\kappa)t} \hat{\rho}_{eg}(0), \quad (4.29)$$

para  $\hat{\rho}_{eg}(0) = \frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha|$  e considerando  $\gamma \equiv 1 - e^{2\kappa t}$  e  $\delta \equiv \frac{\kappa}{\kappa+i\omega}(e^{2(i\omega+\kappa)t} - 1)$ :

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \frac{1}{2} e^{(-i\omega t) - |\alpha|^2(\gamma+\delta)} |\alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle \langle \alpha(t)e^{-i\omega t}|, \quad (4.30)$$

para encontrar  $\hat{\rho}_{ge}$  o processo é o mesmo

$$\hat{\rho}_{ge}(t) = \frac{1}{2} e^{(-i\omega t) + |\alpha|^2(\gamma+\delta)} |\alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle \alpha(t)e^{i\omega t}|. \quad (4.31)$$

Substituindo os termos encontrados na equação :

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{gg}(t) \otimes |g\rangle \langle g| + \hat{\rho}_{ge}(t) \otimes |g\rangle \langle e| + \hat{\rho}_{eg}(t) \otimes |e\rangle \langle g| + \hat{\rho}_{ee}(t) \otimes |e\rangle \langle e|,$$

tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} |e, \alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t)e^{-i\omega t}| \\ & + |g, \alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t)e^{i\omega t}| + e^{(-i\omega t) - |\alpha|^2(\gamma+\delta)} |e, \alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t)e^{i\omega t}| \\ & + e^{(i\omega t) + |\alpha|^2(\gamma+\delta)} |g, \alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t)e^{-i\omega t}|. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para simplificar define-se uma parte real  $R(t)$ , e outra imaginária  $I(t)$  sendo, respectivamente:

$$R(t) = -|\alpha|^2(1 - e^{-2\kappa t}) - \frac{|\alpha|^2 \kappa}{\kappa^2 + \omega^2} [e^{-2\kappa t} (\kappa \cos(2\omega t) - \omega \sin(2\omega t)) - \kappa], \quad (4.33)$$

$$I(t) = -\omega t + \frac{|\alpha|^2 \kappa}{\kappa^2 + \omega^2} [e^{-2\kappa t} (\kappa \sin(2\omega t) - \omega \cos(2\omega t)) - \omega]. \quad (4.34)$$

Reescrevendo a equação 4.32:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} |e, \alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t)e^{-i\omega t}| + |g, \alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t)e^{i\omega t}|$$

$$+ e^{iI(t)+R(t)} |e, \alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t)e^{i\omega t}| + e^{-iI(t)+R(t)} |g, \alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t)e^{-i\omega t}|. \quad (4.35)$$

A matriz densidade pode ser diagonalizada produzindo os seguintes autovetores e autovalores:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e, \alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle + e^{-iI(t)} |g, \alpha(t)e^{i\omega t}\rangle, \quad (4.36)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e, \alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle - e^{-iI(t)} |g, \alpha(t)e^{i\omega t}\rangle, \quad (4.37)$$

e

$$\lambda_+(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{R(t)}), \quad (4.38)$$

$$\lambda_-(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{R(t)}), \quad (4.39)$$

sendo que  $R(t)$  foi definido na equação 4.33. Em termos da matriz densidade

$$\hat{\rho}(t) = \lambda_+(t) |+\rangle \langle +| + \lambda_-(t) |-\rangle \langle -|.$$

Como a dinâmica considerada leva em conta as perdas da cavidade, logo a coerência deste operador densidade é estudada pela entropia linear[38]

$$\delta(t) = 1 - Tr \hat{\rho}^2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{2R(t)}). \quad (4.40)$$

O operador densidade pode ser

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(t) = & \frac{1}{2} [|e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| + e^{iI(t)+R(t)-|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(1-e^{-2i\omega t})} |e\rangle \langle g| \\ & + e^{-iI(t)+R(t)-|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(1-e^{2i\omega t})} |g\rangle \langle e|]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Após diagonalizar a matriz temos os autovalores e autovetores

$$|g'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e\rangle + e^{-i[I(t)-|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(2\omega t)]} |g\rangle], \quad (4.42)$$

$$|e'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e\rangle - e^{-i[I(t)-|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(2\omega t)]} |g\rangle], \quad (4.43)$$

## 4.2. EVOLUÇÃO TEMPORAL

---

e

$$\lambda_{g'}(t) = \frac{1}{2}[1 + e^{R(t)-|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(1-\cos(2\omega t))}], \quad (4.44)$$

$$\lambda_{e'}(t) = \frac{1}{2}[1 - e^{R(t)-|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(1-\cos(2\omega t))}]. \quad (4.45)$$

A perda de coerência será

$$\delta_A(t) = 1 - Tr \hat{\rho}_A^2(t),$$

$$\delta_A(t) = \frac{1}{2}[1 - e^{2[R(t)-2|\alpha|^2 e^{-2\kappa t}(1-\cos(2\omega t))]}]. \quad (4.46)$$

Em termos do campo, escreve-se a matriz densidade

$$\hat{\rho}_C(t) = \frac{1}{2} [|\alpha(t)e^{i\omega t}\rangle \langle \alpha(t)e^{i\omega t}| + |\alpha(t)e^{-i\omega t}\rangle \langle \alpha(t)e^{-i\omega t}|]. \quad (4.47)$$

Tomando o traço e considerando a perda de coerência

$$\delta_C(t) = 1 - Tr \hat{\rho}_C^2(t),$$

$$\delta_C(t) = \frac{1}{2}[1 - e^{-4|\alpha|^2 e^{-2\kappa t} \text{sen}^2(\omega t)}]. \quad (4.48)$$

Verifica-se a dissipação por meio do gráfico do valor esperado de  $\hat{\sigma}_z$  para essa dinâmica na figura 4.2.

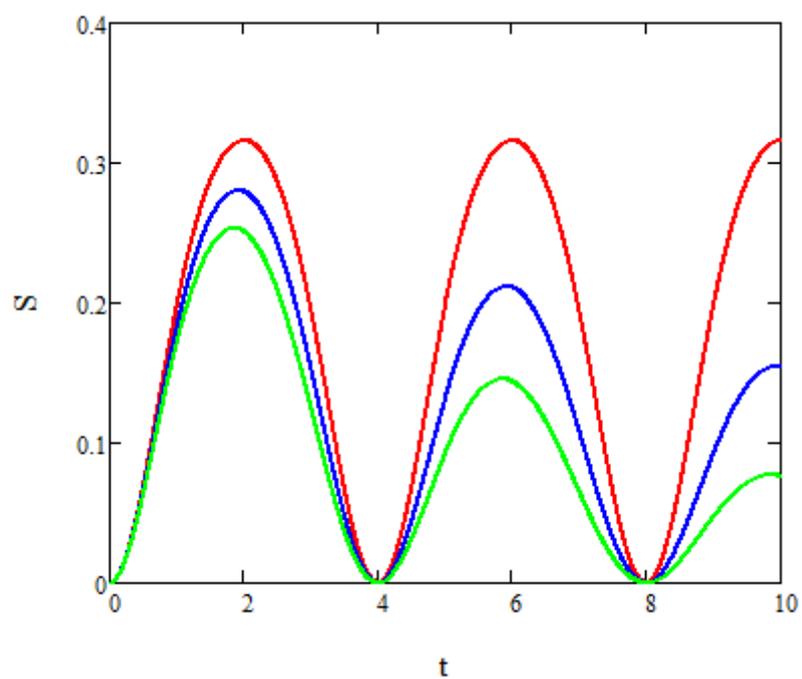


Figura 4.2: Valor esperado de  $\hat{\sigma}_z$  Vermelho:  $\kappa = 0$ , Azul escuro:  $\kappa = 0,05$ , Verde:  $\kappa = 0,09$

# Capítulo 5

## Dinâmica com reinício para o Modelo de Jaynes-Cummings

### 5.1 Dinâmica com Reinício: caso com dissipação

Para escrever a dinâmica com reinício para o Modelo de Jaynes-Cummings considera-se uma evolução a partir da equação 4.27 em  $t=0$ , onde foi escolhido acompanhar apenas a dinâmica do campo, assim considerou-se somente a dinâmica quando o átomo é medido no seu estado fundamental, de modo que teremos apenas a contribuição do termo  $\hat{\rho}_{gg}$  que é

$$\hat{\rho}_{gg_0} = |\alpha_0 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_0 e^{i\omega\Delta t}|, \quad (5.1)$$

novamente, para passos discretos de tempo  $\Delta t = t_1 - t_0$ , temos  $\hat{\rho}_{t_1}$

$$\hat{\rho}_{gg_1} = r |\alpha_0 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_0 e^{i\omega\Delta t}| + (1-r) |\alpha_1 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_1 e^{i\omega\Delta t}|,$$

para  $t = t_2 = 2\Delta t$

$$r |\alpha_0 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_0 e^{i\omega\Delta t}| + r(1-r) |\alpha_1 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_1 e^{i\omega\Delta t}| + (1-r)^2 |\alpha_2 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_2 e^{i\omega\Delta t}|,$$

para  $t = t_3 = 3\Delta t$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{gg_3} = & r |\alpha_0 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_0 e^{i\omega\Delta t}| + r(1-r) |\alpha_1 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_1 e^{i\omega\Delta t}| + \\ & + r(1-r)^2 |\alpha_2 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_2 e^{i\omega\Delta t}| + (1-r)^3 |\alpha_3 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_3 e^{i\omega\Delta t}|. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5. DINÂMICA COM REINÍCIO PARA O MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

---

Mais uma vez, aqui entende-se que  $\hat{\rho}$  é obtido pela média das realizações. A probabilidade de não sofrer reinício vai diminuindo a medida que ocorre a evolução temporal até o  $n$ -ésimo termo  $t = t_n = n\Delta t$ , sendo escrita de forma genérica

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{gg_n} = & r |\alpha_0 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_0 e^{i\omega\Delta t}| + r(1-r) |\alpha_1 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_1 e^{i\omega\Delta t}| + \\ & + r(1-r)^2 |\alpha_2 e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_2 e^{i\omega\Delta t}| + \dots + (1-r)^n |\alpha_n e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_n e^{i\omega\Delta t}|. \end{aligned} \quad (5.2)$$

O termo  $r$  consiste na propabilidade de haver o reinício,  $(1-r)$  refere-se a evolução unitária e  $(1-r)^n |\alpha_n e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_n e^{i\omega\Delta t}|$  é a probabilidade de nunca ocorrer o reinício.

Reescrevendo a equação 5.2 temos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n = & (1-r)^n |\alpha_n e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_n e^{i\omega\Delta t}| + \\ & + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m |\alpha_m e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_m e^{i\omega\Delta t}| \end{aligned} \quad (5.3)$$

equação que descreve a evolução com reinício para o modelo de Jaynes-Cummings para o caso dissipativo. O termo  $r[1 - \delta(n, 0)]$  foi introduzido para substituir o somatório quando  $n = 0$ .

As propriedades do operador  $\rho$ , matriz densidade, possibilitam extrair informações por meio da média das realizações do ensemble da evolução temporal de um estado quântico. Dentre estas propriedades, cabe mencionar aquela que aponta que o valor esperado de uma matriz densidade pode ser obtido pelo traço da matriz resultante do seu produto [49]. Sendo assim, o traço de  $\rho_n$  pode ser dado por

$$Tr \hat{\rho}_n = (1-r)^n + r \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m, \quad (5.4)$$

sendo

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m = \frac{1-(1-r)^n}{r}.$$

Outra propriedade da matriz densidade é a condição de que o valor esperado do operador identidade seja 1 e, por conseguinte, o traço de  $\rho$  também é a unidade [49], portanto

$$Tr\hat{\rho}_n = (1-r)^n + r \left[ \frac{1 - (1-r)^n}{r} \right] = 1. \quad (5.5)$$

Com base nas propriedades supratranscritas, o valor esperado desse conjunto de observáveis, ou da média do ensemble pode ser feito olhando para a parte real  $\langle \hat{x} \rangle = \lambda Re \langle \hat{a} \rangle$  e imaginária  $\langle \hat{p} \rangle = \beta Im \langle \hat{a} \rangle$ . Seguindo a

$$\langle \hat{a} \rangle = Tr(\hat{a}\hat{\rho}_n),$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{\rho}_n &= (1-r)^n \alpha_n |\alpha_n e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_n e^{i\omega\Delta t}| + \\ &+ r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m \alpha_m |\alpha_m e^{i\omega\Delta t}\rangle \langle \alpha_m e^{i\omega\Delta t}|, \end{aligned} \quad (5.6)$$

logo o traço é

$$Tr(\hat{a}\hat{\rho}_n) = (1-r)^n \alpha_n + r[1 - \delta(n, 0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m \alpha_m = A_n, \quad (5.7)$$

os elementos da matriz densidade cujo o Traço ( $Tr$ ) foi tomado são os coeficientes da evolução temporal descrita.

### 5.1.1 Discussão

Foram plotados gráficos para a parte real e imaginária de  $\alpha$ , sendo  $\alpha$  o valor esperado de  $a$ , conforme dado pelas figura 5.1 e 5.2 respectivamente. No eixo  $y$  dos gráficos tem-se o valor médio das posições sendo representados por  $X$  para a parte real e  $P$  para a imaginária de  $\alpha$  em 5.1 e 5.2 respectivamente. No eixo  $x$  por sua vez tem-se o tempo representado por  $n$  já que foi considerado tempos discretos, ou seja, significa que entre  $n$  e  $n + 1$  não há reinício.

Os gráficos 5.1 e 5.2 foram plotados para valores de  $r$  entre 0 e 1. Se  $r = 0$ , a probabilidade de haver reinício é nula e, a medida que ocorre reinício as oscilações diminuem até atingir a saturação. Além disso, foi considerado uma dissipação dada por  $\kappa = 1$ . Nota-se, portanto, que enquanto o reinício ( $r$ ) leva o estado para o estado estacionário, a dissipação ( $\kappa$ ) leva o estado para o vácuo. Em função a atuação de  $r$  e  $\kappa$  o estado atinge o estado estacionário mais rápido.

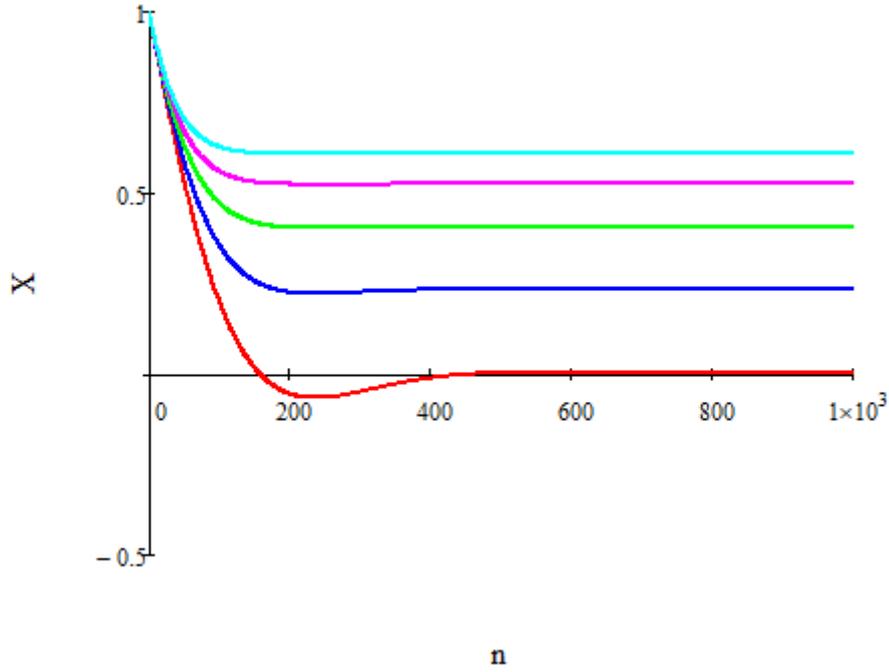


Figura 5.1: Parte Real de  $\alpha$  sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

Quanto a energia do sistema

$$Tr(\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho_n) = (1-r)^n |\alpha_n|^2 + r[1 - \delta(n,0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m |\alpha_m|^2 = E_n, \quad (5.8)$$

com  $\alpha_m = \alpha_0 e^{-im\Delta t\omega} e^{-\kappa m\Delta t}$  e , considerando  $|\alpha_m|^2 = |\alpha_0|^2$ , a equação 5.7 pode ser reescrita como

$$A_n = \alpha_0 \times \\ \times [(1-r)^n (e^{-i\Delta t\omega} e^{-\kappa m\Delta t})^n + r[1 - \delta(n,0)] \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m (e^{-i\Delta t\omega} e^{-\kappa m\Delta t})^m], \quad (5.9)$$

expandindo o somatório em termos de uma série geométrica e considerando  $(1-r)^m (e^{-i\Delta t\omega})^m = u$

5.1. DINÂMICA COM REINÍCIO: CASO COM DISSIPACÃO

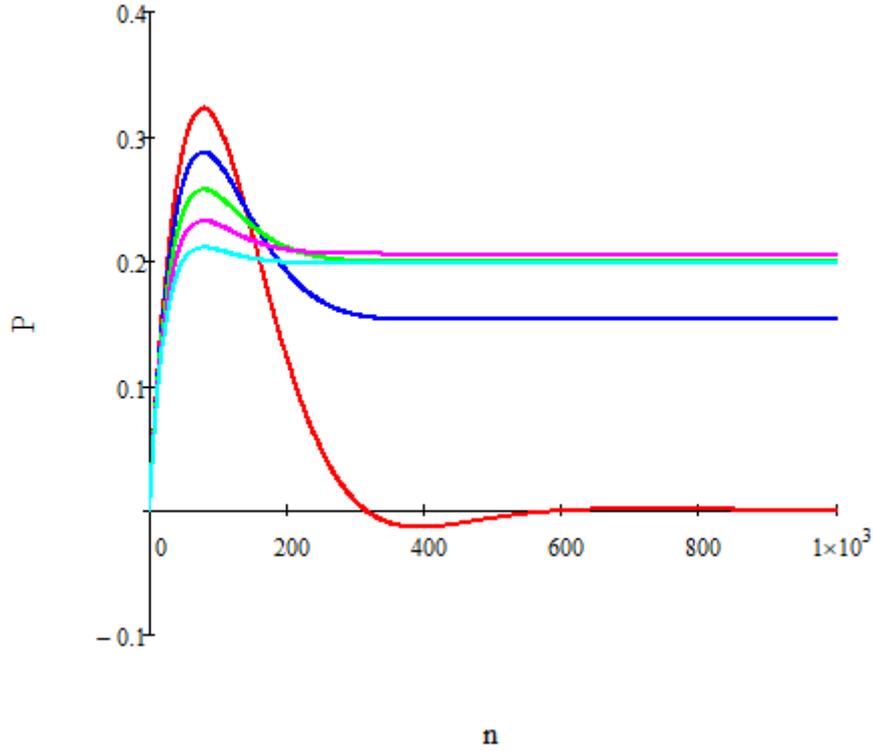


Figura 5.2: Parte Imaginária de  $\alpha$  sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

$$\sum_{m=0}^{n-1} u^m = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1} = S_n,$$

sendo

$$uS_n = u + u^2 + \dots + u^n,$$

de modo que

$$S_n = \frac{1-u^n}{1-u},$$

e substituindo na equação 5.9, temos

$$A_n = \alpha_0 \left[ (1-r)^n (e^{-i\Delta t\omega} e^{-\kappa m\Delta t})^n + r[1 - \delta(n, 0)] \frac{1 - [(1-r)(e^{-i\Delta t\omega} e^{-\kappa m\Delta t})^n]^n}{1 - (1-r)(e^{-i\Delta t\omega} e^{-\kappa m\Delta t})^n} \right], \quad (5.10)$$

desta forma

$$\mathcal{E}_n = (1-r)^n |\alpha_0|^2 e^{-\kappa m \Delta t n} + r [1 - \delta(n, 0)] |\alpha_0|^2 \sum_{m=0}^{n-1} (1-r)^m |\alpha_m|^2 e^{-\kappa m \Delta t m}. \quad (5.11)$$

Em termos da expansão geométrica, a energia é dada por

$$\mathcal{E}_n = |\alpha_0|^2 e^{-\kappa m \Delta t n} + r [1 - \delta(n, 0)] \frac{1 - [(1-r)e^{-\kappa m \Delta t}]^n}{1 - (1-r)e^{-\kappa m \Delta t}}. \quad (5.12)$$

Nota-se que este caso do Modelo de Jaynes-Cummings é bastante similar ao de um oscilador harmônico, entretanto, em função da dissipação, a energia média de ensemble dos estados não se conserva e é dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n = |\alpha_0|^2 \frac{r}{1 - (1-r)e^{-\kappa m \Delta t}} > 0, \quad (5.13)$$

justamente devido a dissipação. Gráficamente observe a figura 5.3 que descreve a energia desse sistema.

## 5.2 Dinâmica com Reinício - átomo projetado em g

A partir do trabalho de dissertação intitulado "Inibindo a decoerência de memórias quânticas em cavidades de microondas realísticas" equação 3.15, vide referência [51]

$$\hat{\rho}_C = |e\rangle \langle e| \otimes |0\rangle \langle 0|; \quad (5.14)$$

com o átomo projetado em "g", ou seja, no estado fundamental, obtém-se

$$\hat{\rho}_C(t) = \hat{\rho}_{1,1}(t) |1\rangle \langle 1| + \hat{\rho}_{0,0}(t) |0\rangle \langle 0|. \quad (5.15)$$

Sendo  $\hat{\rho}_{0,0}(t)$  e  $\hat{\rho}_{1,1}(t)$  definidos em [51], respectivamente, como:

$$\hat{\rho}_{0,0}(t) = 1 - e^{-\kappa t} \left[ \cos \frac{\Omega t}{2} + \frac{\kappa}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right]^2 + \left[ \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right]^2, \quad (5.16)$$

e

## 5.2. DINÂMICA COM REINÍCIO - ÁTOMO PROJETADO EM G

---

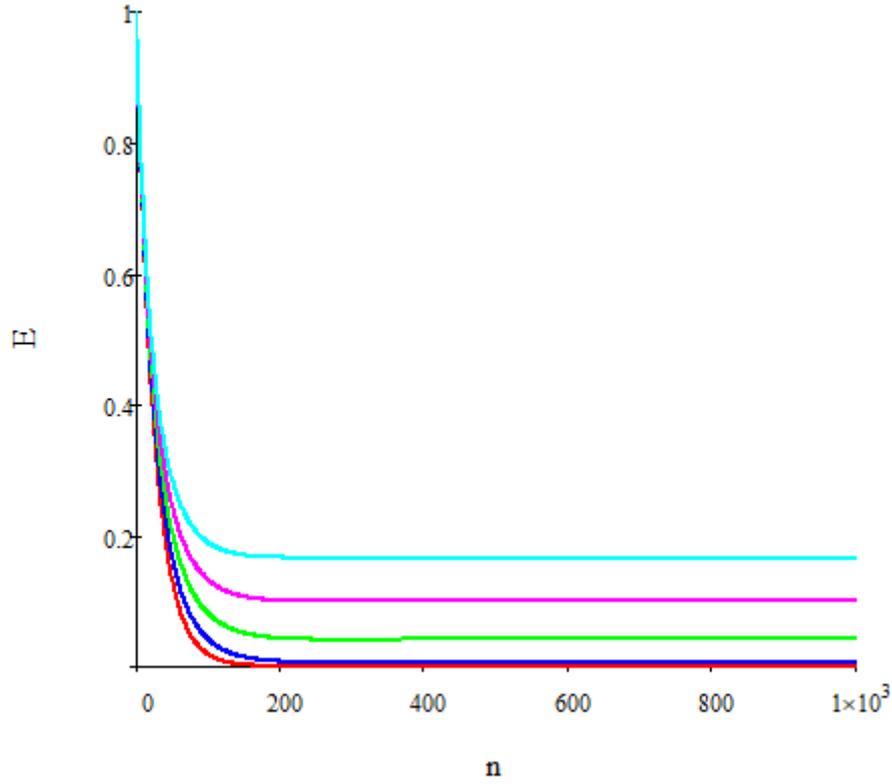


Figura 5.3: Energia do sistema sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

$$\hat{\rho}_{1,1}(t) = e^{-\kappa t} \left[ \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right]^2. \quad (5.17)$$

Considerando o tempo  $t = \frac{(2n+1)\pi}{\Omega(100)}$  e  $\tilde{\kappa}(n) = \frac{(2n+1)\pi}{\Omega(100)}\kappa$ , torna-se possível reescrever  $\hat{\rho}_{0,0}(t)$  e  $\hat{\rho}_{1,1}(t)$  das seguintes formas:

$$\hat{\rho}_{0,0}(t) = 1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \left[ \frac{\kappa^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right] \equiv 1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu, \quad (5.18)$$

e

$$\hat{\rho}_{1,1}(t) = e^{-\tilde{\kappa}(n)} \left[ \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right]. \quad (5.19)$$

CAPÍTULO 5. DINÂMICA COM REINÍCIO PARA O MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

---

Para  $t = 1$  e  $n = 1$

$$\hat{\rho}_f(1) = r\hat{\rho}_c(0) + (1 - r)\hat{\rho}_c(1), \quad (5.20)$$

se  $n = 2$

$$\hat{\rho}_f(2) = r\hat{\rho}_c(0) + (1 - r)[r\hat{\rho}_c(1) + (1 - r)\hat{\rho}_c(2)], \quad (5.21)$$

já se  $n=3$

$$\hat{\rho}_f(3) = r\hat{\rho}_c(0) + (1 - r)[r\hat{\rho}_c(1) + r(1 - r)\hat{\rho}_c(2) + (1 - r)^2\hat{\rho}_c(3)], \quad (5.22)$$

Reescrevendo

$$\hat{\rho}_f(3) = r\hat{\rho}_c(0) + \sum_{j=1}^2 r(1 - r)^j \hat{\rho}_c(j) + (1 - r)^3 \hat{\rho}_c(3), \quad (5.23)$$

ou

$$\hat{\rho}_f(3) = \sum_{j=0}^2 r(1 - r)^j \hat{\rho}_c(j) + (1 - r)^3 \hat{\rho}_c(3). \quad (5.24)$$

Considerando  $n$  termos, ou seja,  $n = n$ , a dinâmica pode ser escrita como:

$$\hat{\rho}_f(n) = \sum_{j=0}^{n-1} r(1 - r)^j \hat{\rho}_c(j) + (1 - r)^n \hat{\rho}_c(n). \quad (5.25)$$

Cabe mencionar, que a rugosidade é apresentada na literatura [32] como uma medida que permite indicar o quão quântico é um dado sistema físico. Deste modo, tendo em vista verificar se para o Modelo de Jaynes-Cummings a dinâmica com reinício faz o estado ficar mais ou menos quântico, a análise do sistema aqui apresentado será feita com base na rugosidade e na relação de complementaridade entre este parâmetro, a entropia linear do sistema e o parâmetro  $Q$  de Mendel, conforme explicitado no trabalho “A Complementary Resource Relation of Concurrence and Roughness for a two-Qubit State”, haja vista referência [35]. Sendo a rugosidade deste sistema definida por:

$$R^2(\hat{\rho}_f) = \frac{1}{6}|\hat{\rho}_{00}|^2 + \frac{55}{108}|\hat{\rho}_{11}|^2 - \frac{7}{18}\hat{\rho}_{00}\hat{\rho}_{11}, \quad (5.26)$$

uma vez feitas as devidas substituições referentes a  $\hat{\rho}_{00}$  e  $\hat{\rho}_{11}$ , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$R^2(\hat{\rho}_f) = \frac{1}{6} |1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu|^2 + \frac{55}{108} \left| e^{-\tilde{\kappa}(n)} \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right|^2 - \frac{7}{18} (1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu) \left( e^{-\tilde{\kappa}(n)} \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right). \quad (5.27)$$

Conforme já mencionado nesta dissertação, a entropia linear apresenta uma relação com o traço ( $Tr$ ) da matriz densidade de um sistema físico seguindo a

$$\delta(\rho) = 1 - Tr(\rho)^2, \quad (5.28)$$

sendo, portanto, tanto a entropia linear como o traço indicadores de quão puro é um determinado sistema. Para obter estes parâmetros, escreve-se a relação  $\rho_{0,0}$  e  $\rho_{1,1}$  na forma matricial

$$\hat{\rho}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{00}(t) & \hat{\rho}_{01}(t) \\ \hat{\rho}_{10}(t) & \hat{\rho}_{11}(t) \end{bmatrix},$$

sendo os elementos desta matriz obtidos por meio das relações

$$\hat{\rho}_{00}(t) = \langle 0 | \hat{\rho}(t) | 0 \rangle,$$

$$\hat{\rho}_{01}(t) = \langle 0 | \hat{\rho}(t) | 1 \rangle,$$

$$\hat{\rho}_{10}(t) = \langle 1 | \hat{\rho}(t) | 0 \rangle,$$

$$\hat{\rho}_{11}(t) = \langle 1 | \hat{\rho}(t) | 1 \rangle.$$

Reescrevendo a equação 5.28

$$\delta(\rho) = 1 - Tr(\hat{\rho}_{00}(t) + \hat{\rho}_{11}(t)), \quad (5.29)$$

e substituindo  $\rho_{0,0}$  e  $\rho_{1,1}$  obtém-se a entropia linear do sistema dado por:

$$\delta(\rho) = 1 - \left[ e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu + e^{-\tilde{\kappa}(n)} \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right]. \quad (5.30)$$

Por fim, considerando a relação de complementaridade entre rugosidade, entropia linear e o parâmetro  $Q$  de Mendel dado em [35], é possível definir  $Q$ , o desvio da distribuição de energia do sistema, tendo por base a equação 16 do artigo [35], tal como transcrita a seguir:

$$R^2(\rho) = \frac{1}{6} + \frac{37}{108}Q^2(\rho) - \frac{39}{108}\delta(\rho), \quad (5.31)$$

logo

$$Q^2(\rho) = \frac{108}{37} \left( \frac{-1}{6} + \frac{1}{6}|\hat{\rho}_{00}|^2 + \frac{7}{18}\hat{\rho}_{00}\hat{\rho}_{11} + \frac{55}{108}|\hat{\rho}_{11}|^2 + \frac{39}{108}[1 - (\hat{\rho}_{00} + \hat{\rho}_{11})] \right), \quad (5.32)$$

reescrevendo, obtemos a equação referente a  $Q$  como:

$$Q^2(\rho) = \frac{-18}{37} + \frac{18}{37}|\hat{\rho}_{00}|^2 + \frac{42}{37}\hat{\rho}_{00}\hat{\rho}_{11} + \frac{55}{37}|\hat{\rho}_{11}|^2 + \frac{39}{37}[1 - (\hat{\rho}_{00} + \hat{\rho}_{11})], \quad (5.33)$$

substituindo os termos  $\hat{\rho}_{00}$  e  $\hat{\rho}_{11}$ , que foram anteriormente definidos chega-se a

$$Q^2(\rho) = -\frac{18}{37} + \frac{18}{37} |1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu|^2 + \frac{55}{37} \left| e^{-\tilde{\kappa}(n)} \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right|^2 + \frac{42}{37} (1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu) \left( e^{-\tilde{\kappa}(n)} \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right) + \frac{39}{37} \left[ 1 - (1 - e^{-\tilde{\kappa}(n)} \cdot \mu) + \left( e^{-\tilde{\kappa}(n)} \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right) \right]. \quad (5.34)$$

### 5.2.1 Discussão

Foram plotados gráficos para a parte real e imaginária de  $\alpha$ , sendo  $\alpha$  o valor esperado de  $a$ , conforme dado pelas figuras 5.4 e 5.5 respectivamente. No eixo  $y$  dos gráficos tem-se o valor médio das posições sendo representados por  $X$  para a parte real e  $P$  para a imaginária de  $\alpha$  em 5.4 e 5.5 respectivamente. No eixo  $x$  por sua vez tem-se o tempo representado por  $n$  já que foi considerado tempos discretos, ou seja, significa que entre  $n$  e  $n + 1$  não há reinício.

Os gráficos 5.4 e 5.5 foram plotados para valores de  $r$  entre 0 e 1. Observe que aqui também há atuação do reinício e da dissipação mas se comparado ao caso anterior o estado não atinge o estado estacionário tão rapidamente. Lembrando que para este caso consideramos o átomo projetado em “ $g$ ”. No caso anterior, considerou-se o estado inicial como aquele em que o átomo é medido em seu estado fundamental.

No que tange a Energia, nota-se que o gráfico para o estado inicial em “ $g$ ” é bastante similar ao caso onde o estado inicial é o estado fundamental sendo a energia média de ensemble dada por 5.6.

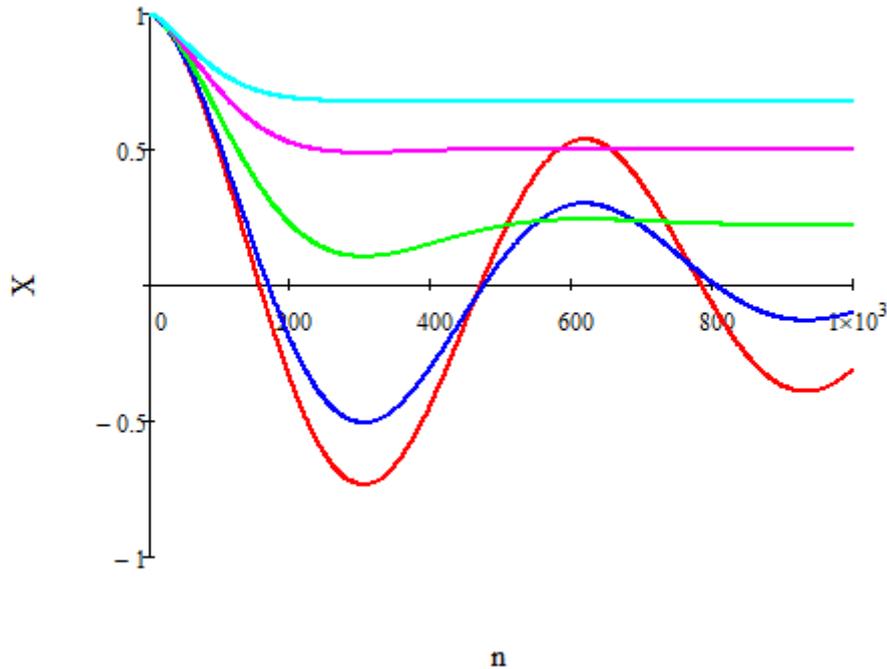


Figura 5.4: Parte Real de  $\alpha$  sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

Quanto à rugosidade, é importante apontar que a rugosidade de um estado coerente é dada por  $R(|\alpha\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}}$  [32] que é aproximadamente 0,4. Observe pelo gráfico da figura 5.7 da esquerda, que o pico da rugosidade está entorno de 0,4. Além disso, é importante ressaltar que o tempo foi fixado em  $10^3$ , o que foi chamado de tempo longo, isso porque foi considerado um tempo em que, para os casos de reinício estudados ao longo deste trabalho, a saturação já havia ocorrido. Esse tempo também foi fixado pensando no tempo do experimento, já que este trabalho apresenta esse viés na seção 5.2.2.

Percebe-se que com o aumento da dissipação ( $\kappa$ ) o sistema acaba indo para uma rugosidade alta já que vai para um estado fundamental, já se reinício ( $r$ ) for alto a rugosidade diminui devido o estado ser um estado de mistura estatística que fica oscilando entre 0 e 1. A rugosidade oscila entre esses termos mas pode-se dizer que na média se comporta como nas figuras de 5.7.

Convergir, em termos de rugosidade significa ser menos quântico, pelo gráfico do valor médio de convergência da Rugosidade da figura 5.8, obtém-se que não

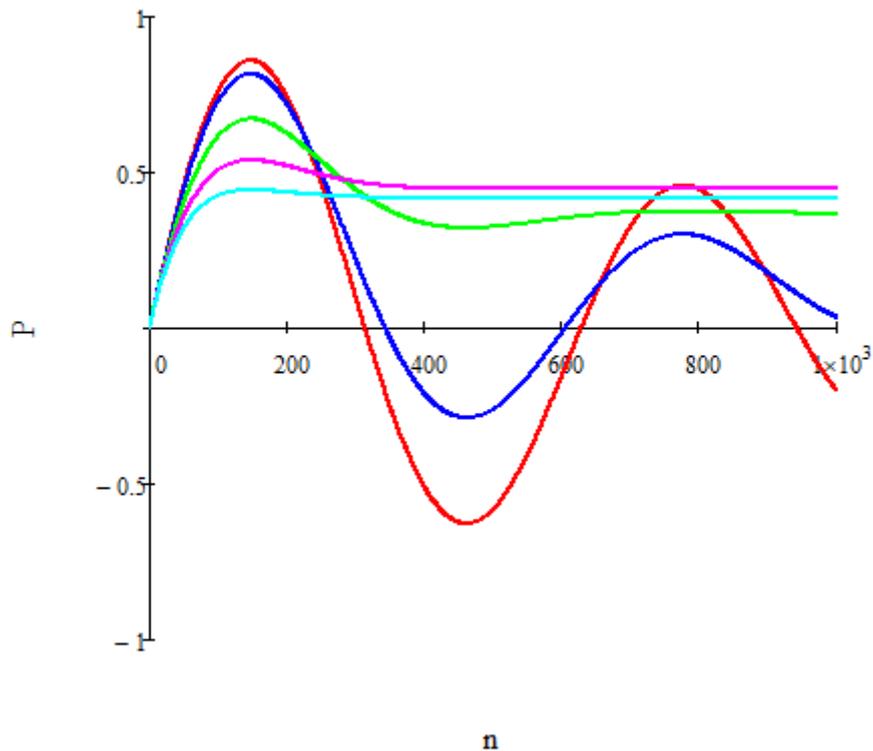


Figura 5.5: Parte imaginária de  $\alpha$  sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

há convergência, dentro dos intervalos de tempo investigados, para valores de reinício e dissipação pequena - região azul escuro - dos gráficos em todas as demais regiões há convergência.

Pode-se dizer que é possível por meio do reinício e da dissipação, varrer melhor a rugosidade e, por consequência controlar para qual estado o sistema vai [52], ou seja, vamos para estados menos quântico já que o pico está entorno de 0,4 mas com a possibilidade de controlar a dinâmica pelos valores de  $r$  e  $\kappa$  o que demonstra relevância no que tange a fazer estudos experimentais do tema analisado. Cabe mencionar que para uma escala de tempo maior pode ser que ocorra a convergência da rugosidade nas regiões para  $r$  e  $\kappa$  pequenos, entretanto, além de apresentar um custo computacional alto também não trata-se de uma escala de tempo factível experimentalmente.

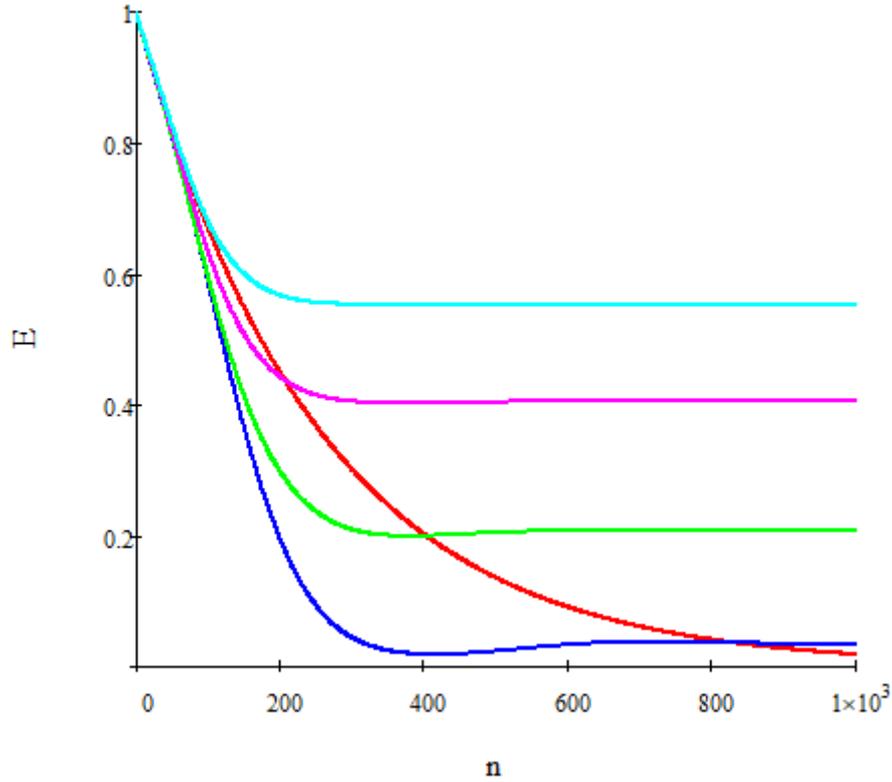


Figura 5.6: Energia do sistema sendo: Vermelho  $r = 0$ , Azul escuro  $r = 0,005$ , Verde  $r = 0,01$ , Rosa  $r = 0,015$ , Azul claro  $r = 0,02$

### 5.2.2 Realização experimental

Uma questão importante é de como esse modelo poderia ser realizado experimentalmente. A parte da dinâmica dissipativa é atualmente feita com grande precisão e controle [59], assim restaria a implementação do procedimento de reinício. Matematicamente, o reinício pode ser feito aplicando o operador  $|0\rangle$  no estado do campo e a posteriorie injetando o campo coerente pelo operador deslocamento  $D(\alpha_0)$ , a ação total será implementada por  $D(\alpha_0) |0\rangle = |\alpha_0\rangle$ .

A injeção do campo é feita através da própria antena instalada na cavidade e, portanto, é uma operação simples do ponto de vista experimental, já a ação de remoção do campo requer maior atenção. Uma possibilidade é enviar um átomo no estado fundamental e fora da ressonância, assim a probabilidade dele capturar o fóton é baixa e aleatória. Se medimos o átomo em estado

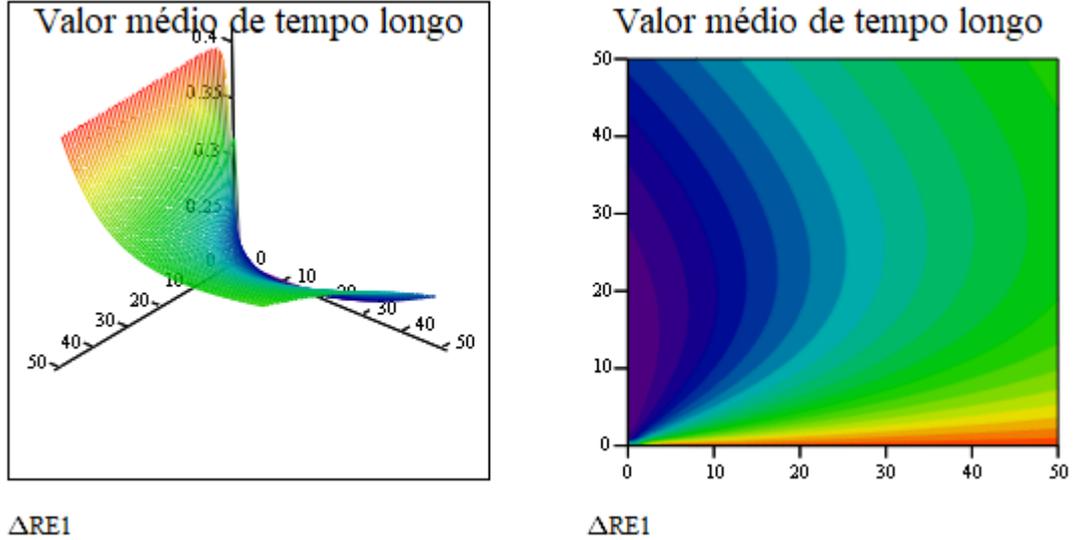


Figura 5.7: Valor médio da rugosidade para tempos longos. Eixo x: Dissipação - ( $\kappa$ ); Eixo y: Reset - ( $r$ )

excitado sabemos que o fóton foi capturado e outro átomo é injetado na cavidade. Para variar a probabilidade de captura do fóton tem-se ao menos uma possibilidade, uma vez que a probabilidade do fóton ser absorvido pode ser escrita como [61]

$$P(\Delta t) \propto \left[ \frac{\sin \frac{1}{2} \delta \omega \Delta t}{\frac{1}{2} \delta \omega} \right]^2 \quad (5.35)$$

onde  $\delta \omega$  é a dessintonia,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo da interação, de modo que escolhendo átomos com velocidades ligeiramente distintas teremos uma variação na probabilidade de reinício.

Entretanto, esse procedimento gera uma interação com muitos átomos de maneira dispersiva gerando o tipo de reservatório conhecido como reservatório de fase [60] e, nesse caso, o modelo apresentado neste trabalho não se aplica para um estado geral sendo necessário incluir os efeitos desse novo ambiente. Entretanto, para estados diagonais, o efeito do reservatório de fases se anula e o resultado encontrado é válido, esse é o caso do estado dado por 5.25, assim acreditamos que para essas condições colocadas o nosso modelo é passível de realização para um número pequeno de reinícios, já que para tempos muito longos inviabilizam a realização do experimento.

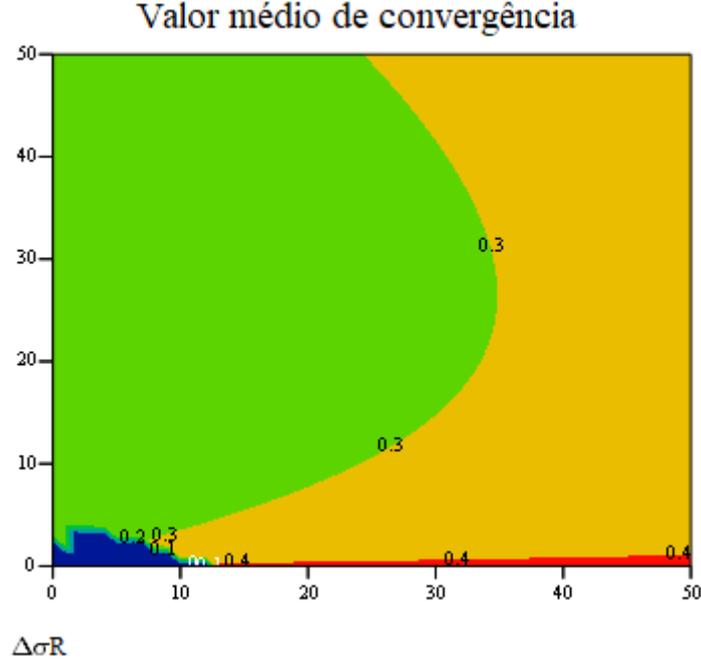


Figura 5.8: Valor médio da rugosidade para tempos longos. Eixo x: Dissipação - ( $\kappa$ ); Eixo y: Reset - ( $r$ )

O estado da arte atual permite meia vida do campo na ordem de algumas centenas de micro-segundos, entretanto, para realização do reinício é necessário que se tenha aparatos de medição compatíveis com os tempos utilizados para o intervalos  $\Delta t$ .

### Reinício contínuo

Tomando-se o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$  temos o modelo de reinício contínuo. Como demonstrado por Mukherjee e colaboradores [20], nesse limite o estado tem uma evolução, na média do ensemble, dada por

$$\hat{\rho}(t) = \int_0^t \kappa e^{-\kappa u} e^{\mathcal{L}(u)} \hat{\rho}_0 du \quad (5.36)$$

$$+ e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}(t)} \hat{\rho}_0, \quad (5.37)$$

tomando o limite de  $t \rightarrow \infty$ , temos

CAPÍTULO 5. DINÂMICA COM REINÍCIO PARA O MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

---

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^{st} = \int_0^{\infty} \kappa e^{-\kappa u} e^{\mathcal{L}(u)} \hat{\rho}_0 du. \quad (5.38)$$

Para a realização do reinício contínuo pode-se passar uma grande quantidade de átomos no estado fundamental  $|g\rangle$  e fora da ressonância, entretanto, é necessário medir todos os átomos e injetar o campo se detectado o átomo em  $|e\rangle$ , embora seja hipoteticamente possível é atualmente inviável.

# Capítulo 6

## Conclusões

Tendo em vista responder se para o modelo de Jaynes-Cummings, a dinâmica com reinício faz o estado ficar mais ou menos quântico e verificar se há uma dependência em relação ao estado inicial bem como analisar como o ambiente influencia o sistema, foi feito uma série de estudos por meio deste trabalho.

Primeiramente, foi feito o estudo do oscilador harmônico quântico. Isso porque o campo no interior da cavidade referente ao modelo de Jaynes-Cummings comporta como um oscilador Harmônico . A dinâmica com reinício foi feita para este caso e por meio dos gráficos das figuras 3.1,3.2 e 3.3 foi possível notar que o aumento do reinício leva a uma saturação relativamente rápida do sistema. Quanto a energia foi possível verificar analiticamente que a energia média de ensemble se conserva.

Já em relação à análise sobre modelo de Jaynes-Cummings, que consiste na descrição de um átomo de dois níveis confinado em uma cavidade ótica, fizemos um estudo de vários cenários. A interação entre o sistema e o ambiente foi feita tendo em vista verificar a diferença entre o caso ideal - sem dissipação - e dissipativo. De modo que por meio do gráfico das figuras 4.1 e 4.2 foi possível ilustrar a consequência do aumento da dissipação neste sistema.

Por fim, foi feito o estudo da dinâmica quântica com reinício para o modelo de Jaynes-Cummings com dissipação tanto para o estado inicial sendo dado pelo estado fundamental bem como para o estado fundamental dado pelo átomo projetado em “g”.

Para o primeiro caso, o aumento do reinício leva a uma saturação relativamente rápida do sistema. Quanto a energia, diferentemente do caso feito para o oscilador harmônico a média do ensemble não é conservada, vide gráfico da figura 5.3.

Para o segundo caso, com o estado inicial com átomo projetado em “g”, as observações referentes ao reinício são de que a mudança do estado inicial retarda um pouco a saturação do sistema, vide figuras 5.4 e 5.5. Quanto a energia, esta não se conserva devido a dissipação, apresentando um comportamento similar ao que considera o estado inicial sendo o estado fundamental.

O estudo da rugosidade foi feito com base na dinâmica com reinício para o átomo projetado em “g”, tornando possível argumentar sobre o questionamento inicial deste trabalho, ou seja, para o modelo de Jaynes-Cummings é possível que o estado fique mais ou menos quântico, a depender dos valores de  $r$  e  $\kappa$  estabelecidos. Sendo, portanto, possível definir os melhores parâmetros para obter o sistema de interesse e por conseguinte a aplicação experimental da teoria estudada. Vide gráficos das figuras 5.7 e 5.8.

Observe que controlar o estado vai além de um aspecto conceitual da indagação teorica sobre se para o modelo de Jaynes-Cummings a dinâmica com reinício faz o sistema ficar mais ou menos quântico já que “controlar o estado” significa que existe a possibilidade de escolher o estado que for conveniente para determinada aplicação deste, por conseguinte é motivação para o desenvolvimento de trabalhos futuros. Para tanto, é interessante levar em consideração efeitos da dispersão de velocidade do átomo que atualmente é mais significativo do que efeitos de decoerência em cavidades ópticas modernas [62].

Embora não tenhamos utilizados dados realísticos relativos ao modelo, acreditamos que o mesmo possa ser realizado experimentalmente. Experimentalmente o reinício pode ser realizado através de uma interseção com um segundo átomo não ressonante com a cavidade, escolhendo o átomo adequado podemos ter uma probabilidade desse capturar ou não o átomo. Medindo o estado do átomo sabe-se se há ou não fóton na cavidade e caso esse tenha sido capturado, outro fóton é injetado realizando o procedimento de reinício. De fato para esse procedimento é necessário incluir no modelo o segundo fóton que é um dos nossos objetivos no futuro. Na literatura é muito comum estudar o limite do reinício contínuo, fazendo a intensidade do reinício tender a zero e o número destes tender a infinito, embora seja formalmente elegante, não conseguimos vislumbrar uma forma de fazê-lo experimentalmente.

# Bibliografia

- [1] Khun. T.. A estrutura das revoluções científicas. Ed:5 São Paulo: Editora Perspectiva S.A, 1997.
- [2] Brockliss, L. W. B.. Aristotle, Descartes and the New Science: Natural philosophy at the University of Paris, 1600–1740. Ed: 38, Pgs:33–69 Annals of Science, 2006. /<https://doi.org/10.1080/00033798100200111>.
- [3] Bolivar, A.. Quantum-classical correspondence: dynamical quantization and the classical limit. Springer Science and Business Media, 2013.
- [4] Zurek, W.H.. Decoherence and the Transition from Quantum to Classical — Revisited. In: Duplantier, B., Raimond, JM., Rivasseau, V. (eds) Quantum Decoherence. Progress in Mathematical Physics, V. 48, Birkhäuser Basel, 2006. [https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7808-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7808-0_1).
- [5] Oliveira, Adélcio C.. Classical Limit of Quantum Mechanics Induced by Continuous Measurements. V. 392, p. 655-668, Physica. A (Print), 2014.
- [6] Oliveira, Adélcio C.; de Magalhães, A.R. Bosco ; de Faria, J.G. Peixoto .. Influence of experimental resolution on the quantum-to-classical transition in the quartic oscillator. V. 391, p. 5082-5089, Physica. A (Print), 2012.
- [7] Leslie E. Ballentine. The statistical interpretation of quantum mechanics. V.42(n.4),p.358, Rev, Mod. Phys., 1970.
- [8] Leslie E. Ballentine, Yumin Yang, and J. P. Zibin. Inadequacy of Ehrenfest's theorem to characterize the classical regime. V.50(n.4), p.2854, Phys. Rev. A, 1994.
- [9] L. E. Ballentine and S. M. McRae. Moment equations for probability distributions in classical and quantum mechanics. V.58(n.3), p.1799, Phys. Rev. A, 1998.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [10] L. E. Ballentine. Lyapunov exponents for the differences between quantum and classical dynamics. V.63(n.2), p.024101, Phys. Rev. A, 2001.
- [11] Nathan Wiebe and L. E. Ballentine. Quantum mechanics of Hyperion. V.72(n.2), p.022109, Phys. Rev. A, 2005.
- [12] Peixoto de Faria, J. G., Aspectos do Entrelaçamento em Sistemas Abertos, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2000.
- [13] Oliveira, A. C. , Peixoto de Faria, J. G., Nemes, M. C.. Quantum-classical transition of the open quartic oscillator: the role of the environment. V.73, p.046207, Phys Rev. E., 2006.
- [14] Oliveira, A. C. and Amarante-Segundo, G.. Tunnel Effect as Hidden Variable Theory test. V.338, p.1413, Phys A., 2009.
- [15] Zurek, W. H.. Decoherence and the transition from quantum to classical. V.44, pgs.36-44, Phys. Today, 1991.
- [16] Benatti, F., Floreanini, R., and Scholes, G.. Loss of coherence and memory effects in quantum dynamics. V.45(n.15), p.150201, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2012. doi:10.1088/0953-4075/45/15/150201
- [17] Oliveira, A. C., Romero, K. F., and Nemes, M. C.. Quantum Time Scales and the classical limit: Analytic Results for some simple systems. V. 68, p. 36214, Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids and Related Interdisciplinary Topics, 2003.
- [18] Nielsen, M. A., and Chuang, I. L.. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, 2011.
- [19] Rose, D. C., Touchette, H., Lesanovsky, I., and Garrahan, J. P.. Spectral properties of simple classical and quantum reset processes. V.98(n.2), Physical Review E, 2018. doi:10.1103/physreve.98.022129
- [20] Mukherjee, B., Sengupta, K., & Majumdar, S. N.. Quantum dynamics with stochastic reset. V.98(n.10), Physical Review B, 2018. doi:10.1103/physrevb.98.104309
- [21] Griffiths, David J. Mecânica Quântica. Ed.2, 2011.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [22] Eric Chitambar and Gilad Gour, Quantum resource theories. V.91, p.025001, Rev. Mod. Phys., 2019.
- [23] Horodecki, R., P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. Quantum entanglement. V.81 (n.2), p.865, Rev. Mod. Phys., 2009.
- [24] Weedbrook, C., S. Pirandola, R. García-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, Gaussian quantum information. V.84, p.621, Rev. Mod. Phys., 2012.
- [25] OLIVEIRA, Adélcio Carlos de; Zolacir T. O. jr ; Nestor Santos Correia. Quantum noise and its importance to the quantum classical transition problem: Energy Measurement aspects. In: XVI Encontro de Modelagem Computacional, IV Encontro de Ciência e Tecnologia dos Materiais e III Encontro Regional de Matemática e Computacional, Ilhéus. Anais do 16<sup>o</sup> EMC / 4<sup>o</sup> ECTM / 3<sup>o</sup> ERMAC, 2013.
- [26] Ball, David W.. Basics of Spectroscopy. Bellingham, Washington: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers. pp. 24, 28, 2001. ISBN 0-8194-4104-X.
- [27] R. Short, and L. Mandel,. Observation of Sub-Poissonian Photon Statistics. V.51, p.384-387, Phys. Rev. Lett., 1983.
- [28] Wenchao Ge, Kurt Jacobs, and Suhail Zubairy,. The Metrological Power of Nonclassical Single-Mode States, arXiv:2103.17206v1
- [29] Anatole Kenfack and Karol Życzkowski,. Quantum and Semiclassical Optics Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality. V.6, p.396, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2004.
- [30] Sam A. Hill and William K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. V.78, p.5022, Phys. Rev. Lett., 1997.
- [31] Llewellyn, D., Ding, Y., Faruque, I.I. et al. Chip-to-chip quantum teleportation and multi-photon entanglement in silicon. V.16, pgs.148–153, Nat. Phys., 2020. <https://doi.org/10.1038/s41567-019-0727>
- [32] Lemos, H.C.F, Almeida, A. C. L., Amaral, B., Oliveira, A. C.. Roughness as classicality indicator of a quantum state. V.382, pgs.823-836, Physics Letters A, 2018.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [33] Reis, M., Oliveira, A. C.. Roughness as Entanglement Witness: The two Coupled Cavity Model. In: 2018 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC), Campinas, 2018. p. 1.
- [34] Reis, M., Oliveira, Adélcio C.. Relation between the roughness, linear entropy and visibility of a quantum state, the Jaynes-Cummings model. V.20, p.2189-2198, Journal of Computational Electronics, 2021.
- [35] Reis, M. and Oliveira, C.A.. A Complementary Resource Relation of Concurrence and Roughness for a two-Qubit State. V.608, p.128313, Physica A, 2022.
- [36] E.T. Jaynes; F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. V.51(n1), pgs.89–109, Proc. IEEE., 1963. doi:10.1109/PROC.1963.1664
- [37] J. Gea-Banacloche,. V.44, p.5913, Phys. Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields. Phys. Rev. A, 1991.
- [38] Faria de Peixoto, G.J., Nemes,C.M. , Dissipative dynamics of the Jaynes-Cummings model in the dispersive approximation: Analytical results. V.59, Journal Phys. Rev. A, 1999. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.59.3918>
- [39] Martin, R. E. ; Majumdar N.S. and Schehr g. Stochastic resetting and applications. 2019.
- [40] Verstraete, F., Wolf, M. Ignacio Cirac, J. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. Pgs.633–636, Nature Phys 5, 2009. <https://doi.org/10.1038/nphys1342>
- [41] Wellysson, F., and Sobreira, A. Modelo de Jaynes-Cummings. Instituto de Física de São Carlos. Disponível em <<https://www.ifsc.usp.br/strotrium/Teaching/Material2011-2>> Acesso em: 14/12/2021
- [42] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F. Quantum mechanics, v.1, 1991.
- [43] Oliveira, A. C.. Continuum reset dynaics as a pathway to the Newtonian classical limit of Quantum Mechanics. Physica A, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126099>

## BIBLIOGRAFIA

---

- [44] Rodrigues, R.L. Estados Coerentes em Mecânica Quântica. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)
- [45] Žitković G.. Introduction to Stochastic Processes - Lecture Notes. University of Texas at Austin, 2010.
- [46] Ross M. S. Stochastic Processes. Ed:2, 1996.
- [47] Balian R.. From Microphysics to Macrophysics: Methods and applications of statistical physics. V.1, 1991.
- [48] Blum k. L. Density Matrix theory and application. Ed.3, v.64, 2012.
- [49] Junior, M. P. C.. Paralelizando o MOPAC usando CUDA e bibliotecas de Matrizes Esparsas. UFPB, 2012.
- [50] Fano, U.; Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. V.29, p.74, Reviews of Modern Physics, 1957.
- [51] Júnior, O. G. G. J. Inibindo a decoerência de memórias quânticas em cavidades de microondas realísticas, UFMG, 2006.
- [52] Hu, Q., Yusufu, T., Turek, Y, Quantum state engineering using weak measurement. V.105, p.022608, Phys. Rev. A, 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.022608>
- [53] Shiryaev, A.N., Probability,. Grad. Texts Math. Ed.2, v.95, Springer, 1995.
- [54] Graham,R.L.; Knuth, D.E., Patashnik, O.. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Ed.2, Addison–Wesley Professional, 1994.
- [55] Fetecau, R.C., Huang, Y., Kolokolnikov, T.. Swarm dynamics and equilibria for a nonlocal aggregation model. V.24(n.10), p.2681, Nonlinearity 24, 2011.
- [56] Wigner, E.. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. V.40, pgs.749–759. Phys. Rev., 1932.
- [57] Arfken,G.B., Weber, H.J., Harris,F.E.. Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide. E.7, Academic Press, 2011.

## *BIBLIOGRAFIA*

---

- [58] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.. Table of Integrals, Series, and Products. Ed.7, Academic Press, 2007.
- [59] Haroche, S.. Controlling Photons in a Box and Exploring the Quantum to Classical Boundary. Nobel Lecture, December 8, 2012.
- [60] Oliveira, A. C. and Bosco de Magalhães, A. R..V.80, p.026204, Phys. Rev. E. 2009.
- [61] Mandel, L. and Wolf, E., Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge University Press, New York, NY, 1995.
- [62] Lira, J. et al, Physica A, 591, 126802, 2022.

# Capítulo 7

## Apêndice

No trabalho intitulado “Roughness as classicality indicator of a quantum state”, os autores fizeram a descrição da rugosidade enquanto um indicador de quão quântico é um determinado estado. Como a definição feita por eles foi utilizada neste trabalho de dissertação torna-se aprazível acrescentar essa definição por meio de uma tradução direta dos apêndices do trabalho deles.

### 7.0.1 Resultado auxiliar

Ao provar o limite superior da equação 6 [32] para a rugosidade, foi encontrado um resultado auxiliar. Para qualquer estado quântico dado, reescrevendo a rugosidade como

$$R^2 = R_{W^2}^2 + R_{Q^2}^2 - R_{WQ}^2, \quad (7.1)$$

no mesmo sentido que foi feito para as equações 14a, 14b e 14c para um estado de Fock. O primeiro e o segundo termo do RHS da igualdade são claramente positivas, mas não é necessariamente positiva. Usando mais uma vez a transformada de Fourier, como usamos para provar o limite superior, obtemos

$$\begin{aligned} R_{WQ}^2 &= \int_2 dq dp W(q, p) Q(q, p) = (W, Q) = \\ (\widehat{W}, \widehat{Q}) &= \int_2 du dv e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)} \left| \widehat{W}(u, v) \right|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

o que prova que cada termo da equação 7.1 é positivo. Como consequência, temos o limite superior para a Rugosidade

$$R^2 \leq 2\pi \int_{\mathfrak{R}^2} dq dp (W(q, p)^2 + Q(q, p)^2), \quad (7.3)$$

O que pode ser útil em alguns casos.

---

## 7.0.2 Rugosidade de um Estado de Fock, Resultados analíticos

Neste apêndice foi dado alguns detalhes do resultados obtidos na subseção 3.2 (“Harmonic oscillator eigenstates: Fock states”) do trabalho [32]. Foi provado o primeiro limite na equação 18 do trabalho [32]. Para isso, foi usado a aproximação de Stirling dada em [57]

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (7.4)$$

Usando corretamente em 15b [27], obtém-se

$$\frac{e^{-\frac{1}{6n}}}{\sqrt{\pi n}} \leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \leq \frac{e^{\frac{1}{24n}}}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \quad (7.5)$$

e como os lados esquerdos e direito da desigualdade acima vão para 0 com  $n \rightarrow \infty$ , então termina-se a demonstração pelo teorema do squeeze.

Agora, olhando para 15c [27] e reescrevendo como

$$\text{begin equation } R_{W_n Q_n}^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n (-1)^n \underbrace{\sum_{j=0}^n \frac{(n+j)!}{(j!)^2 (n-j)!} \left(-\frac{4}{3}\right)^j}_{=: C_n},$$

onde foi definido  $C_n$ . Não está claro acima que  $C_n > 0$ , pois deve ser extraída da equação 7.2.

Reescrevendo  $C_n$  como

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j=0}^n (j+n) \dots (j+1) \frac{j! n!}{(j!)^2 (n-j)!} \left(-\frac{4}{3}\right)^j = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} j^k \right) \binom{n}{j} \left(-\frac{4}{3}\right)^j, \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  são os números de Stirling sem sinal do primeiro tipo [57], e eles aparecem como coeficientes para os polinômios em  $j$  do produto acima. De fato, os números de Stirling do primeiro tipo aparecem na definição de fatoriais crescentes.

$$x^{(n)} := x(x+1) \dots (x+n-1) \Rightarrow x^{(n)} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k,$$

e muitas outras aplicações. Foi invertida a ordem da soma para obter

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \left[ \sum_{j=0}^n j^k \binom{n}{j} \left(-\frac{4}{3}\right)^j \right].$$

A soma do índice  $j$  acima pode ser escrita como derivadas da soma para obter

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \left( x \frac{d}{dx} \right)^k (1+x)^n \Big|_{x=-\frac{4}{3}}, \quad (7.7)$$

e foi mostrado que

$$\left( x \frac{d}{dx} \right)^k (1+x)^n = \sum_{j=0}^k \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} \frac{n!}{(n-j)!} x^j (1+x)^{n-j},$$

onde  $\begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix}$  são os números de Stirling de segunda espécie [30]. Substituímos a expressão acima na equação 7.4, invertendo a soma, otém-se

$$\begin{aligned} C_n &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} \right) \frac{1}{(n-j)!} \left(-\frac{4}{3}\right)^j \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-j} = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} \right) \frac{1}{(n-j)!} 4^j > 0, \end{aligned} \quad (7.8)$$

e assim foi provado que  $C_n > 0$ . Mas, melhor ainda, foi possível provar que

$$\sum_{k=j}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix} = (n-j)! \binom{n}{j}^2, \quad (7.9)$$

e então a equação 17 foi encontrada em [32].

Para continuar a estudar  $R_{W_n Q_n}^2$ , a equação 17 foi combinada com um polinômio  $\mathcal{P}_n(t)$  cujos coeficientes são o quadrado dos coeficientes binominais [31], ou seja

$$\mathcal{P}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (1+t^2 - 2t \cos \theta)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 t^{2j}, \quad (7.10)$$

então tem-se que

$$R_{W_n Q_n}^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n \mathcal{P}_n(2) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (5 - 4 \cos \theta)^n =$$

---


$$\frac{4}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left(9 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^n > \frac{4}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n \frac{9^n}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^{2n} \theta, \quad (7.11)$$

Usando o fato conhecido de que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^{2n} \theta = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

tem-se

$$R_{W_n Q_n}^2 > \frac{4}{3} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} > \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = R_{Q_n^2}^2, \quad (7.12)$$

o que prova a equação 16 em [32]. Além disso, tem-se um limite inferior para  $R_{W_n Q_n}^2$ . É bem mais técnico, mas pode-se encontrar um limite superior semelhante para  $R_{W_n Q_n}^2$ . De fato, foi encontrada uma constante  $B > 1$ , tal que

$$R_{W_n Q_n}^2 < B \frac{4}{3} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

e assim, novamente usando o teorema de Squeeze, foi provado que  $R_{W_n Q_n}^2 > 0$ . Para fazer isso, foi definido para cada  $n$  a constante  $B_n$  como

$$\begin{aligned} B_n &= \left[ \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right]^{-1} 9^{-n} \mathcal{P}_n(2) = \\ &= 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \left( \sin^2 \theta + \frac{1}{9} \cos^2 \theta \right)^n. \end{aligned} \quad (7.13)$$

A avaliação explícita mostra que  $B_0 = 1$  e  $B_1 = 10/9$ .

Após alguns cálculos tediosos, pode-se mostrar que, para qualquer  $n \geq 1$ , temos  $1 \leq B_{n+1} < B_n$ , e assim, foi possível concluir que  $B_n \leq 10/9$ , para qualquer  $n$ , o que encerra a prova.

### 7.0.3 Integrais de $\Pi_{n,m}$ e $\Psi_{n,m}$

Aqui foi avaliada as quantidades úteis para encontrar a rugosidade para estados gerais como na equação 20 de [32]. Como a transformada de Wigner é linear [57], a função de Wigner para esse estado é

$$W(q, p) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{n,m} \Pi_{m,n}(\alpha), \quad (7.14)$$

onde  $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$ , e  $\Pi_{m,n}(\alpha)$  é

$$\Pi_{m,n}(\alpha) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{\pi} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-2|\alpha|^2} (2\alpha)^{n-m} L_m^{n-m}(4|\alpha|^2), & \text{if } n \geq m, \\ \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-2|\alpha|^2} (2\alpha)^{m-n} L_n^{m-n}(4|\alpha|^2), & \text{if } n < m. \end{cases} \quad (7.15)$$

O  $L_m^{n-m}$  são associados as funções de Laguerre associadas [33]. Analogamente, a função de Husimi para equação 20 em [32] é

$$Q(q, p) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{n,m} \Psi_{m,n}(\alpha), \quad (7.16)$$

onde

$$\Psi_{m,n}(\alpha) = \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{2\pi \sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha|^2}, \quad (7.17)$$

onde  $\alpha^*$  denota o complexo conjugado. É importante resaltar que, para  $n = m$ , as equações 7.15 e 7.17 respectivamente dão as funções 11 e 12 de [32] para estados puros.

Das definições (7.14)-(7.17), a rugosidade para o estado geral dado pela equação 20 de [32] é

$$\begin{aligned} R^2 &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} dq dp |W(q, p) - Q(q, p)|^2 = \sum_{n,m,n',m'} A_{n,m}^* A_{n',m'} \times \\ &\times \left[ R_{\Pi_{m,n}\Pi_{m',n'}}^2 + R_{\Psi_{m,n}\Psi_{m',n'}}^2 - \left( R_{\Pi_{m,n}\Psi_{m',n'}}^2 + R_{\Psi_{m,n}\Pi_{m',n'}}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (7.18)$$

onde foi definido

$$R_{\Pi_{m,n}\Pi_{m',n'}}^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} dq dp \Pi_{m,n}^* \Pi_{m',n'} , \quad (7.19)$$

$$R_{\Psi_{m,n}\Psi_{m',n'}}^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} dq dp \Psi_{m,n}^* \Psi_{m',n'} , \quad (7.20)$$

$$R_{\Pi_{m,n}\Psi_{m',n'}}^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} dq dp \Pi_{m,n}^* \Psi_{m',n'} , \quad (7.21)$$

$$R_{\Psi_{m,n}\Pi_{m',n'}}^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} dq dp \Psi_{m,n}^* \Pi_{m',n'} . \quad (7.22)$$

Os resultados para as integrais acima foram apresentados, por serem necessários para calcular a Rugosidade para estados gerais da equação 20 de [32]. Todos esses cálculos foram realizados analiticamente, usando algumas propriedades bem conhecidas de funções de Laguerre associados [34]. Sendo obtidos

$$R_{\Pi_{m,n}\Pi_{m',n'}}^2 = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} , \quad (7.23)$$

$$R_{\Psi_{m,n}\Psi_{m',n'}}^2 = \frac{\delta_{n-m,n'-m'}}{\sqrt{n!m!n'!m'!}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+m+n'+m'}{2}+1} \left(\frac{n+m+n'+m'}{2}\right)! . \quad (7.24)$$

Embora as outras duas integrais sejam obtidas da mesma maneira, suas expressões são um pouco mais complicadas. Primeiro, deve-se definir  $X := \max(n, m)$ ,  $Y := \min(n, m)$ , e quantidades semelhantes para índices primos. Assim tem-se

$$R_{\Pi_{m,n}\Psi_{m',n'}}^2 = \frac{2}{3} \delta_{n-m,n'-m'} (-1)^Y \sqrt{\frac{Y!}{X!X'!Y'!}} 2^{X-Y} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{X-Y+X'+Y'}{2}} \times \\ \times \sum_{j=0}^Y \binom{X}{Y-j} \frac{\left(\frac{X-Y+X'+Y'}{2} + j\right)!}{j!} \left(-\frac{4}{3}\right)^j . \quad (7.25)$$

$$R_{\Psi_{m,n}\Pi_{m',n'}}^2 = \frac{2}{3} \delta_{n-m,n'-m'} (-1)^{Y'} \sqrt{\frac{Y'!}{X!Y!X'!}} 2^{X'-Y'} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{X+Y+X'-Y'}{2}} \times \\ \times \sum_{j=0}^{Y'} \binom{X'}{Y'-j} \frac{\left(\frac{X+Y+X'-Y'}{2} + j\right)!}{j!} \left(-\frac{4}{3}\right)^j . \quad (7.26)$$

Observe que as equações 7.25 e 7.26 são a mesma expressão com índices não primos.

Pode não ser fácil avaliar manualmente a rugosidade para um estado geral da equação 20 de [32] usando as equações 7.23-7.26, mas é relevante enfatizar que calculamos integrais analiticamente na equação 7.18, certamente economizará muitos recursos computacionais para realizar essa tarefa. É mais fácil um computador avaliar numericamente somas como as apresentadas em 7.23-7.26 do que calcular integrais.