

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI (UFSJ)
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS (DCNAT)**

ISAAC MAX PEREIRA

**A RELAÇÃO DE GOLDBERGER-TREIMAN NO MODELO DE
NAMBU-JONA-LASÍNIO**

**SÃO JOÃO DEL REI-MG
2021**

ISAAC MAX PEREIRA

A RELAÇÃO DE GOLDBERGER-TREIMAN NO MODELO DE NAMBU-JONA-LASÍNIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del Rei, em associação ampla com as Universidades Federais de Alfenas e Lavras, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos.

Orientador: Dr. André Luiz Mota

Coorientador: Dr. Edson Wander Dias



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

NOMEAÇÃO DE BANCA EXAMINADORA Nº 28 / 2021 - PPGF (13.29)

Nº do Protocolo: 23122.034616/2021-36

São João del-Rei-MG, 21 de setembro de 2021.

São João del-Rei, 20 de setembro de 2021.

A dissertação de mestrado "**A RELAÇÃO DE GOLDBERGER-TREIMAN NO MODELO DE NAMBU-JONA-LASÍNIO**" elaborada por **Isaac Max Pereira** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

(Assinado digitalmente em 21/09/2021 16:51)

ANDRE LUIZ MOTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DCNAT (12.12)
Matrícula: 1217987

(Assinado digitalmente em 04/10/2021 09:41)

SERGIO MARTINS DE SOUZA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 894.558.437-49

(Assinado digitalmente em 21/09/2021 16:14)

JEAN CARLOS COELHO FELIPE
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 069.879.496-62

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **28**, ano: **2021**, tipo: **NOMEAÇÃO DE BANCA EXAMINADORA**, data de emissão: **21/09/2021** e o código de verificação: **794645507b**

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P436r

Pereira, Isaac Max.

A RELAÇÃO DE GOLDBERGER-TREIMAN NO MODELO DE
Nambu-Jona-Lasínio / Isaac Max Pereira ; orientador
André Luiz Mota; coorientador Edson Wander Dias. --
São João del-Rei, 2021.

80 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2021.

1. Cromodinâmica Quântica. 2. Relação de Goldberger
Treiman. 3. Modelo de Nambu-Jona-Lasínio. 4.
Transformações de Chan. 5. Méson Pí. I. Mota, André
Luiz, orient. II. Dias, Edson Wander, co-orient.
III. Título.

*Aos meus pais, Ivane e Vanderlei,
às minhas irmãs, Nayara e Hinara,
e à Elisa.*

AGRADECIMENTOS:

Apesar da minha família possuir pouco conhecimento no tema desta pesquisa nada disso seria possível sem essas pessoas pois com trabalho duro não mediram esforços para me apoiar sem a necessidade de dar um motivo explícito, sendo em todo momento por acreditar em mim e na importância dos estudos. Como os agradecimentos nesse contexto estão além da minha capacidade de comunicação, espero que mais uma vez aceitem poucas palavras para todo agradecimento.

Em meio tantas outras pessoas que estão neste tópico sem os nomes escritos espero que saibam de conversas e da amizade para se identificarem nas entrelinhas ou que eu ainda tenha a oportunidade de agradecer, o critério que me veio para poucas linhas e pouco tempo é priorizar nomes de pessoas que trabalham diretamente com ciência em vista do meio de divulgação deste texto.

Na UFSJ conheci várias pessoas que me colocaram no meio profissional, uma dessas sem a qual provavelmente o tema neste trabalho seria outro, o Edson Dias foi quem abriu as portas da pesquisa científica e do contato com Teoria Quântica de Campos realizando forte influência na minha formação, não apenas pelos trabalhos desenvolvidos juntos mas principalmente por acreditar na importância do papel social da profissão. Mesmo com limitações devido a pandemia de COVID-19, o André Mota contribuiu de forma fundamental para o desenvolvimento deste projeto e na minha trajetória acadêmica, agradeço pela empatia e suporte para prosseguir na pós-graduação. Ainda no contexto da UFSJ, o Juan Campoy é mais um dos quais fico feliz de ter tido contato com conversas estendendo a física para música, política, etc. O Fernando Marroquim, outro dos quais sou grato, me parece dos físicos que eu via nos livros e trouxe a ficção para minha realidade nas suas aulas em caráter voluntário. Dos amigos do curso de Física na UFSJ não poderia deixar de citar José Geraldo de Oliveira, Filipe Santos, João Paulo Mello e Elves Moreira, grandes físicos e amigos que se formaram, além de outras coisas, pela identificação com a estrada na vida do proletário brasileiro tentando se sustentar da ciência.

Entre tantos frutos na república Terreno Baldio com pessoas se formando em diversas áreas do conhecimento e envolvendo amplos momentos com moradores e agregados, embora muitos deveriam ser citados, vou colocar o rei da antimonaquia como representante, Vinicius Rodrigues. Nesse mesmo meio e presente no período de construção deste texto já na república Módulo 1000, o Rodrigo Marcondes (Lorde Papa) em alguns momentos durante o projeto foi um companheiro de “laboratório imaginário”.

Ainda gostaria de agradecer ao coordenador do PPGF, Marcelo Oliveira, pela atenção e disposição em auxiliar a permanência dos alunos no programa. Também em especial às secretarias da UFSJ, principalmente a Maria Lúcia da Silva e a Joana Longatti, e à todas (os) faxineiras (os), cozinheiras (os), porteiros (as) e outras (os) profissionais que fazem parte do funcionamento da instituição pois dedicam seu tempo mesmo que alguns deles, infelizmente pela posição social de baixa renda, tenham poucas oportunidades de até mesmo os filhos poderem cursar um ensino superior apesar da instituição ser pública. Em vista do momento que este projeto foi desenvolvido durante a pandemia de COVID-19, que não pode ser dissociado do trabalho, agradeço a todos pelos esforços extras e pela compreensão da situação, assim como a banca externa formada em caráter emergencial pelos professores Jean Carlos Coelho (UFVJM) e Sergio Martins (UFLA).

*"Criar o que não existe ainda deve ser a pretensão
de todo sujeito que está vivo"*
(Paulo Freire, *Folha de S.Paulo*, 8.1.1997).

RESUMO:

Neste trabalho, apresentamos um ensaio sobre a relação de Goldberger-Treiman no contexto do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) empregando um procedimento que preserva suas simetrias fundamentais. Para isso, apresentamos explicitamente a construção da Lagrangiana bosonizada do modelo de NJL e o mecanismo de obtenção dos observáveis físicos a partir dessa Lagrangiana. A partir dela, obtemos as expressões explícitas para a auto-energia do méson pí e para a constante de decaimento fraco do pión, as duas quantidades físicas envolvidas na relação de Goldberger-Treiman. Finalmente, calculamos estas quantidades explicitamente utilizando a invariância da Lagrangiana efetiva em relação à *transformação de Chan* para eliminar quantidades ambíguas (não físicas) que surgem devido às divergências presentes nas amplitudes, mostrando que a relação de Goldberger-Treiman é satisfeita nesse contexto.

PALAVRAS-CHAVE: QCD, Goldberger-Treiman, NJL, Transformações de Chan, Méson π .

ABSTRACT:

In this work, we present an essay on the Goldberger-Treiman relation in the context of the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model, employing a symmetry-preserving procedure (referred to as Chan's transformation). For this purpose, we explicitly present the construction of the bosonized Lagrangian of the NJL model and the mechanism for obtaining the physical observables from this Lagrangian. From it, we obtain the explicit expressions for the self-energy of the pion and for the pion weak decay constant, the two physical quantities involved in the Goldberger-Treiman relation. Finally, we explicitly calculate these quantities using the invariance of the effective Lagrangian relative to Chan's transformation to eliminate ambiguous (non-physical) quantities that arise due to the divergences present in the amplitudes, showing that the Goldberger-Treiman relation is satisfied in this context.

KEY-WORDS: QCD, Goldberger-Treiman, NJL, Chan's transformation, Meson π .

Sumário

Sumário	8
1 Introdução	10
2 Modelo de Nambu-Jona-Lasinio para Interações Fortes	16
2.1 Aspectos da Cromodinâmica Quântica (QCD)	16
2.2 Bósons de Nambu-Goldstone	21
2.3 Anomalias Associadas à Quebra de Simetria	25
2.4 Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)	27
2.5 Simetria Quiral no Modelo de NJL	28
2.6 Identificação de Observáveis na Bosonização do NJL	32
3 O Méson Pí no Quadro do Modelo de NJL	38
3.1 Auto Energia do Píon	41
3.2 Constante de Decaimento Fraco do Píon	52
3.3 Constante de Acoplamento	58
3.4 A Relação de Goldberger-Treiman	59
4 Ambiguidades no Acoplamento	63
5 Conclusão	65
6 Apêndices	67
6.1 Grupos de Simetria	69
6.2 Algebra de Correntes na QCD	71
6.3 Aspectos da Simetria Quiral	73
6.4 Mecanismo de Massa (Equação de Gap)	75
7 Referências	78

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Projeção na Simetria Quiral.	11
Figura 2.1 – Carga dos Quarks e Antiquarks (Diagrama de Venn).	17
Figura 2.2 – Decaimento Anômalo do Píon Neutro ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$).	25
Figura 3.1 – Píon na Interação de Quarks.	39
Figura 3.2 – Perturbação para o Espalhamento do Píon.	39
Figura 3.3 – Auto Energia do Méson π	44
Figura 3.4 – Auto Energia com Roteamento Arbitrário.	45
Figura 3.5 – Diagrama da Constante de Decaimento.	52
Figura 3.6 – Diagrama do Decaimento com Roteamento Arbitrário.	55
Figura 6.1 – Diagrama que Representa a Interação com $(G\Gamma_i \Gamma_i)$	76

1 INTRODUÇÃO

“...

Neste quadro de beleza

A gente vê com certeza

Que a musga da natureza

Tem riqueza de incantá.

Do campo até na floresta

As ave se manifesta

Compondo a sagrada orquesta

Desta festa naturá.

... ”

(A Festa da Natureza, Patativa do Assaré)

Assuntos acerca de *simetrias* na Natureza são vastos desde as histórias mais antigas, ainda que na tentativa de restrição ao contexto científico esse conceito envolve ampla interação com o desenvolvimento na Filosofia e nas Artes. Na beleza da harmonia Pitagórica, as proporções de Fibonacci nas artes plásticas, o Barroco na arquitetura, na estética da poesia ou na beleza matemática defendida por físicos como Paul Dirac (1902-1984) os conceitos se interagem ¹. Além de interpretar eventos do cotidiano, a matemática na descrição da Natureza possibilita criar argumentos no contexto de simetrias para estimar fenômenos ainda não observados em situações análogas ao que ocorreu com os mésons de H. Yukawa (1907-1981), mais tarde identificados como pions em experimentos por um grupo de cientistas (Lattes C. M. et al, 1947) essas partículas são atualmente interpretadas pelo Modelo Padrão como hádrons constituídos por quarks e se apresentam em três possibilidades de estados: $\pi^0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$, $\pi^- \equiv \bar{u}d$ e $\pi^+ \equiv u\bar{d}$ (Nilton A. J.,Caruso F., 2018).

A maneira como o uso de simetrias para previsões se desenvolveu também pode induzir crenças em padrões equivocados já que a própria palavra carrega arbitrariedades ² (Weyl H., 1952), apesar do sucesso com o Campo Eletrofraco, Teorias de Grande Unificação ou Teorias Supersimétricas ainda não são amplamente satisfatórias. A *assimetria* também é uma característica da Natureza, como exemplo da assimetria matéria e antimatéria, dualidade onda-partícula,

¹ Consequência de feitos como o de Eratóstes (276 a.C-194a.C) com registros do sec II a.C que obteve boa estimativa para o diâmetro da Terra com a geometria da projeção de sombras, ou o de Galileu (1564-1642) que registrou descrições do comportamento de sombras na Lua assim como as formadas na Terra, são tendência no contexto de regras trigonométricas e caráter universal para as leis da física sob justificativas de simetrias.

² O modelo esférico para o planeta Terra dos Gregos (entre 6 a.C e 5 a.C) prevê tal forma por questões de simetria na idealização da esfera como objeto perfeitamente simétrico relacionando aspectos como a equidistância entre quaisquer dois pontos na superfície conectados pelo diâmetro. Mesmo que agora possamos construir ferramentas para ver com os próprios olhos seu formato similar a de uma esfera, isso se distingue da maneira em que a matemática é utilizada nos princípios de simetria para Natureza Física, não apenas pelo real formato de esfera imperfeita do planeta, principalmente por não se tratar de uma teoria com formulação científica.

entre outras, a quebra de simetria *quiral* na física de partículas está associada com a estrutura dos mésons π (Miranski V. A., 1993).

No uso da matemática para descrições físicas, Legendre (1752-1833) apresenta temas sobre a simetria geométrica entre sólidos comparados sob projeção em um "reflexo de espelho", o plano do espelho separa os dois corpos em *esquerda* e *direita* com a ideia de lateralidade (Figura 1.1). Diferente das ideias de Ptolomeu (100 d.C) ou de Newton (1643-1727) em que o *reflexo* era uma "ilusão" ou artificial, ambos os corpos no caso de Legendre são considerados "reais" com aspectos comuns às ideias de Kant (1724-1804) (HON G., GOLDSTEIN B. R., 2008).

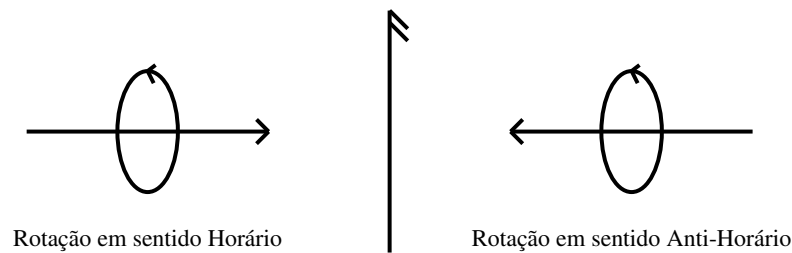


Figura 1.1 – Projeção na Simetria Quiral.

Essa comparação de lateralidade na ciência recebe o nome de "Quiral" (do Grego "khéir", significa "mão") aquele que a imagem de reflexo não pode ser sobreposta, em teorias sobre à Origem da Vida a homoquiralidade, ou unilaterialidade, é uma propriedade exibida por proteínas (Barron L. D., 2008). Na física de partículas a comparação está relacionada ao efeito de operações com transformações de Lorentz (Impulso (*boost*) e Rotação) nas equações de movimento representadas pelos grupos de simetrias com presença da matriz γ^5 que atua na projeção (Seção 2.1 e 2.5).

Para partículas de spin 1/2 e massa de repouso nula a *quiralidade* e *helicidade* são equivalentes, assim a simetria quiral pode ser representada em decomposição de *esquerda* e *direita* com espinores relativísticos em um modelo algébrico que funciona bem para dinâmica de mésons leves. Nos registros de Fresnel (1788-1827) a rotação óptica da reflexão de polarizações com circulações distintas, para direita ou para esquerda, representam *helicidade* de direita ou esquerda associada à um movimento dextrogiro ou sinistrogiro. A *helicidade* em física de partículas é definida como a projeção do spin na direção do momento linear, partículas sem massa com spin na direção do momento linear e sentido oposto possui *helicidade* negativa, já uma antipartícula sem massa com spin na direção do momento linear e mesmo sentido possui *helicidade* positiva³.

Noether (1882-1935) introduz um teorema em que a simetria representa invariância sob operações de transformações na *ação efetiva*, na Lagrangiana ou no Hamiltoniano, questões matemáticas abstratas de caráter algébrico diferente da simetria em objetos concretos, sendo

³ Helicidade é a projeção do spin na direção do momento linear da partícula

$$h = \vec{J} \cdot \vec{p} = (\vec{L} + \vec{s}) \cdot \vec{p} = \vec{s} \cdot \vec{p} \quad \text{pois} \quad \vec{L} \cdot \vec{p} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{p}$$

essas simetrias correspondentes à correntes conservadas relacionadas com parâmetros mensuráveis (Srednicki M., 2007). Nessas correntes as quantidades são caracterizadas por partículas elementares sob análise de essências (singularidades, ou cargas elementares), por exemplo, o elétron como unidade de carga eletromagnética ou os quarks com carga *cor*. Diferente da carga elétrica que tem valor convertido em múltiplos de Coulomb onde os quarks apresentam uma fração em comparação com o elétron, no campo de *cor* as partículas ou antipartículas podem assumir estados distintos não correlacionados e com a mesma intensidade de carga *cor* (Seção 2.1). Com a construção dos *princípios de simetria* a Física desenvolveu formulações para descrição da Natureza em escalas subatômicas com grande êxito, fenômenos em velocidade próxima ao limite da luz a Mecânica Newtoniana da lugar a Relatividade, que a princípio aplicada em grandes escalas agora pode ser praticada em pequenas dimensões na Mecânica Quântica com a Teoria Quântica de Campos (TQC). No Modelo Padrão, Tabela 1: a antimatéria se diferencia por exibir anticarga; Partículas com spin de valor inteiro são chamadas de Bósons em homenagem a Satyendra Nath Bose (1894-1974), já as partículas com spin semi-inteiro são chamados de Férmions em homenagem a Enrico Férmí (1901-1954).

Tabela 1.1 – Partículas Elementares no Modelo Padrão

CLASSIFICAÇÃO	Férmions			Bósons
	<i>u</i> <i>up</i>	<i>d</i> <i>down</i>	<i>s</i> <i>strange</i>	
Quarks <i>Leves</i> massa α MeV				γ fóton
Quarks <i>Pesados</i> massa α GeV	<i>t</i> <i>top</i>	<i>b</i> <i>bottom</i>	<i>c</i> <i>charm</i>	<i>g</i> glúon
Léptons	<i>e</i> <i>elétron</i>	μ <i>múon</i>	τ <i>tau</i>	Z
Neutrino Léptônico	ν_e	ν_μ	ν_τ	W
				H Higgs

Partículas Mediadoras de Interação:

Campo Eletromagnético \rightarrow Fótons;

Campo Forte \rightarrow Glúons;

Campo Fraco \rightarrow Bósons: W e Z^\pm .

Na TQC as partículas são interpretadas como campos gerados por densidades de cargas (campos são representados por funções definidas em todos os pontos do espaço, um único campo abrange infinito graus de liberdade) onde os elementos da Natureza se interagem pelos campos de ação (ou força), as partículas "virtuais" mediadoras de interações são intermediárias nos diagramas de Feynman enquanto que as partículas reais "massivas" são as observadas nos estados inicial e final dos processos em experimentos. A Lagrangiana (ou densidade Lagrangiana) na TQC descreve a dinâmica dessas partículas com simetrias expressas na invariância desses campos sob transformação de Lorentz Local (ou simetrias de Calibre Exata) e por transformação de Lorentz Global (por exemplo, Número Bariônico e Isospin), podendo passar por mudanças de Calibre e

Globais sem afetar as descrições dinâmicas do fenômeno (Seções 2.1 e 2.5). Dessas operações, dois vetores que estão paralelos em um primeiro referencial inercial continuam paralelos em todo referencial inercial resultado de transformações Globais. Já numa transformação Local, por depender de coordenadas da posição de cada vetor, para garantir que no sistema resultante os vetores continuem paralelos é necessário adotar "campos de transporte paralelo", ou campos de calibre Γ_μ , independentes de qualquer característica do sistema de referencial. Disso obtém-se a "derivada covariante D_μ , a qual tem o seguinte significado físico: aquela que faz $v(\lambda)$ se transformar realmente como um vetor"(Anselmino M. et al,2013, p.139).¹

Na Eletrodinâmica a invariância Global de carga elétrica indica que o conjunto das cargas de um sistema se conserva não importando a posição de cada carga nesse meio, como também pode ser demonstrado invariância Local onde as cargas que mudam de posição se deslocam com transformações relativísticas (não simplesmente desaparecendo de um ponto e surgindo em outro, diferente da atração instantânea na Gravitação Newtoniana). Modelos consagrados para campos clássicos possuem concordância com princípios de conservação de carga expressos pelo Teorema de Noether, sua correspondente na Teoria Quântica de Campos são as Identidades de Ward-Takahashi (IWT)(Seção 2.2) em que os modelos de interações podem ser obtidos da invariância de Calibre (Gauge), essa invariância na *ação quântica* implica nas IWT para funções de Green que descrevem os estados. Para Eletrodinâmica Quântica (QED), representada por campos *abelianos* já que as partículas que transportam informação (fótons) não interagem entre si, na conservação das Correntes Vetorial e Axial as simetrias expressas por IWT representam conservação de carga elétrica e transversalidade do campo eletromagnético no movimento da partícula. Ambiguidades que surgem na interpretação dos fenômenos podem ser eliminadas dos cálculos com métodos de regularização e renormalização em diversas estratégias bem sucedidas (Dias W. E., 2008).

Já no caso da QCD, descrita por grupos *não abelianos* pois os glúons interagem entre si na *liberdade assintótica* (interação entre glúons para pequenas distâncias com baixo valor de acoplamento quark-glúon), a simetria Local está associada com a conservação de carga *cor* enquanto que a Global se relaciona à outros números quânticos (Ipercarga). Em altas energias (momento elevado) as partículas que constituem os hádrons são interpretados como os únicos graus de liberdade, a interação entre quarks expressa pela constante de acoplamento atinge valores insuficientes para afetar de forma significativa os resultados extraídos da Lagrangiana nesses regimes sendo possível utilizar tratamentos perturbativos para QCD semelhante aos métodos convencionais da QED. Para baixas energias (longas distâncias), também conhecido como regime quiral quando a massa das partículas tendem a ser nulas, a constante de acoplamento exhibe

¹ Álgebra envolvendo um vetor v^α paralelo a outro vetor v_\parallel^α :

$$v^\alpha(\lambda + d\lambda) - v_\parallel^\alpha(\lambda + d\lambda) = v^\alpha(\lambda) + d\lambda^\mu \partial_\mu v^\alpha(\lambda) - v^\alpha(\lambda) + d\lambda^\mu \Gamma_{\mu,\beta}^\alpha v^\beta(\lambda) = d\lambda^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu)v(\lambda)$$

$$d\lambda^\mu D_\mu v(\lambda) = d\lambda^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu)v(\lambda) \quad \rightarrow \quad D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$$

valores que impossibilitam o tratamento perturbativo mas existem estratégias que se mostram promissoras para contornar algumas dessas dificuldades.

As transformações quirais incluem matrizes γ^5 e se associam com o número quântico de *helicidade* de partículas com massa nula, essas chamadas transformações Axiais alteram a *paridade* do estado da partícula, a invariância sob transformação quiral implica a existência para cada multiplete de isospin partículas "correspondentes na projeção de um espelho" com *paridade* oposta, entretanto, partículas com características correspondentes nas interações Fortes nunca foram encontradas na Natureza e isso indica que a simetria quiral não deve ser conservada na QCD. Na hipótese de conservação parcial das correntes (PCAC- Partial Conservation of Axial Current) a quebra de simetria quiral justifica parâmetros físicos como a massa dos píons, estados com quebra dinâmica de simetria Global estão relacionados à existência de partículas sem massa e sem spin, essa quebra por não obter resultado nulo para o valor médio do campo no estado de vácuo ocorre devido uma mudança relativística sobre os campos descritos nas equações de movimento do processo de criação e aniquilação de pares com a massa interpretada no conjunto de mésons que são considerados *leves* dentro do quadro dos hádrons, ou seja, a geração da massa dinâmica ocorre na quebra da simetria quiral em partículas identificadas como bósons de Nambu-Goldstone (Seção 2.2).

Simetrias presentes na Lagrangiana do modelo podem não se apresentar na descrição do estado físico, processos que envolvem QED e QCD para baixas energias, como nos representados por diagramas triangulares, geralmente os resultados para as interações carregam ambiguidades por não satisfazer conservação simultânea das correntes Vetorial e Axial na Anomalia Quiral (Adler, 1969; Bell J., Jackiw R., 1969;), como exemplo do decaimento do pión neutro em dois fótons ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) ou o decaimento radiativo do pión ($\pi^- \rightarrow \gamma\bar{\nu}_e e^-$). O não simétrico as vezes também é chamado de "anômalo", os indícios de ter mais matéria em relação a antimatéria no Universo, dualidade onda-partícula, entre outras, são anomalias, mas diferente de cada um desses casos o não simétrico da Anomalia Quiral se associa à capacidade da teoria em descrever a natureza e não ao que aparentemente observamos nela. Esse fenômeno causa ambiguidades ao que ocorre no nível quântico que não reflete resultados teóricos antes observados no cenário clássico e isso torna o tratamento da teoria dependente da escala de energia abordada (Seção 2.3).

Modelos efetivos em faixas de energia do regime quiral podem apresentar alternativas para esses casos seguindo princípios de restringir-se aos parâmetros de interesse com a justificativa da baixa influência dos demais descartados na causa do fenômeno, já que as simetrias existentes na Lagrangiana estão relacionadas aos parâmetros físicos das partículas envolvidas no processo. O Modelo de Nambu-Jona-Lasinio inicialmente desenvolvido como uma teoria para *núcleons* (Nambu Y., Lasinio G., 1961;1961) passou por reformulações a fim de adequá-lo ao conceito de quarks como grau de liberdade, o que possibilita construir uma Lagrangiana para interações Fortes selecionando simetrias da QCD com os observáveis desejados, das relações de simetria quiral é possível extrair interpretações para hádrons leves. Transformações de Lorentz Locais indicam o modelo das interações, ainda que a Lagrangiana de NJL não apresente grau de

liberdade relacionado aos glúons e não seja invariante sob transformação Local, o que não aborda o confinamento de quarks, processos entre hádróns em escalas de baixas energias sem a presença de quarks livres tem pouca influência das causas do confinamento de quarks. Já as simetrias Globais todas expressas pela QCD estão presentes no modelo de NJL (Klevansky S. P., 1992), inclusive a simetria de *cor* nesse contexto (Griffiths D., 1987).

No modelo de NJL o procedimento de bosonização usando a expansão derivativa permite extrair a Lagrangiana efetiva no grau de liberdade mesônico (Seção 2.4 ; 2.5 e 2.6) com o pión interpretado em uma interação entre quarks, divergências surgem da interação de partículas pontuais e por ser um modelo efetivo com a necessidade de limitar a escala de energia não abrange o confinamento de quarks. Termos interpretados como ambiguidades que ocorrem no cálculo perturbativo não afetam a renormalização pois argumentos da simetria quiral permitem extrair seu valor, para constante de decaimento fraco (obtida dos elementos de matriz da corrente axial no processo de transição do vácuo para o estado do pión) pelo esquema de Regularização Implícita as ambiguidades podem ser separadas antes de tomado seu valor numérico, de forma que os resultados são organizados permitindo fixar tais termos com valor nulo em SU(2) utilizando da relação de Goldberger-Treiman (1958), mas esse procedimento parece comprometer a interpretação da constante de decaimento fraco do káon em SU(3)(Dias. E W., 2004). A relação de Goldberger-Treiman vincula a constante de decaimento do méson com a constante de acoplamento entre méson-quarks e a massa ($f_{\pi}g_{\pi qq} = m$), esse resultado deve ser satisfeito para qualquer modelo que deseja interpretar fenômenos envolvendo interações Fortes em baixas energias e é independente do esquema de regularização aplicado, estabelecendo consequências da quebra de simetria quiral e da hipótese de conservação parcial da corrente axial (PCAC).

Surgem ainda outras parcelas indesejadas na regularização do NJL vinculado a escolha dos momentos internos em diagramas que contem *loop* induzindo comportamentos não físicos (Mota A. L., 1999), as "Transformações de Chan"apresentam um método para avaliação da expansão derivativa aplicada para perturbação de primeira ordem em *loop* da *ação efetiva* de bósons e férmions relacionado ao roteamento arbitrário dos momentos internos nos diagramas afim de eliminar tais termos sem significado físico (Chan L. H., 1986; 1988; 1997). O objetivo neste trabalho com NJL é obter a constante de decaimento fraco com a anulação de ambiguidades utilizando-se dos recursos nas Transformações de Chan e o efeito desse resultado na relação de Goldberger-Treiman (1958)(Seção 3). Para Lagrangiana de NJL no modelo SU(2) de *sabor* fixando a massa experimental do pión (m_{π}) e a densidade do condensado de quarks ($\langle \bar{\psi}\psi \rangle$), com a obtenção da massa corrente (m) e a constante de acoplamento ($g_{\pi qq}$), esperamos que a constante de decaimento fraco do pión (f_{π}) possa ser obtida dependente do esquema de regularização na escala de energia (Λ) mas livre de ambiguidades relativa aos *termos de superfície* que surgem da operação de translação nos momentos de integração das amplitudes em processos físicos.

2 MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO PARA INTERAÇÕES FORTES

As informações sobre um processo representado por TQC estão contidas num funcional gerador em que as funções de Green das amplitudes de cada processo são determinadas pela "Ação Quântica", os sucessos da QED e a variedade recorrente de experimentos acerca das interações fundamentais incentivaram a descrição do campo Forte que obteve êxito nas formulações da QCD de forma semelhante, entretanto, há atuais dificuldades no tratamento de processos com regime de baixas energias como na Anomalia Quiral. Explorando relações de simetria no modelo alternativo de NJL, inspirado na identificação dos parâmetros físicos de interesse apresentados na Lagrangiana do modelo original que possam ser tratados de forma individual, é possível obter bons resultados para dinâmica de mésons leves.

Interações no campo Forte dependem da simetria de *cor* apresentada na invariância de Calibre da QCD, o *acoplamento forte* é responsável pelo confinamento dos quarks no interior dos hádrons, o acoplamento quark-glúon-quark fica menos intenso com a aproximação dos quarks (Gross et al., 1973) em altas energias podendo ser interpretados como partículas livres com *liberdade assintótica*, efeito de blindagem no campo de *cor* dos glúons (Halzen F., Martin A., 2011). Em distâncias próximas ao limite quiral, baixas energias, o acoplamento é intenso ocasionando o confinamento (não observação de quarks livres) o que dificulta o tratamento perturbativo. Embora a Lagrangiana no NJL não apresente simetria Local, na correspondência do modelo com a QCD acerca da quebra dinâmica na simetria quiral envolve parâmetros físicos associados à geração de massa nos bósons de Nambu-Goldstone com o condensados de quarks estabelecendo a estrutura perturbativa do vácuo. Em um primeiro momento descrevendo campos de férmions as funções de onda na Lagrangiana de NJL em SU(2) podem ser ressignificadas em campos para bósons nos processos envolvendo o méson π .

2.1 ASPECTOS DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA (QCD)

Na interpretação dos hádrons a Cromodinâmica Quântica (QCD) é uma teoria desenvolvida para descrever interações Fortes, o nome "Cromodinâmica" se associa à Espectroscopia Hadrônica que introduz o conceito de carga *cor* para os quarks constituintes dos hádrons com o modelo de interação expresso na invariância do grupo SU(3) de *cor* mediada por glúons (Anselmino A., et al, 2013).

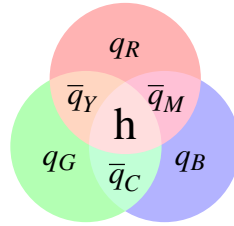


Figura 2.1 – Carga dos Quarks e Antiquarks (Diagrama de Venn).

Composição de hádrons (h) e anti-hádrons (\bar{h}) em que os mésons (m) são formados por pares quark (q) e antiquark (\bar{q}), e os bárions (b) por três quarks ou três antiquarks:

$$\begin{aligned} m &= R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G} \quad ; \\ b &= RGB \quad ; \\ \bar{b} &= \bar{R} \bar{G} \bar{B} \quad . \end{aligned}$$

Nas simetrias de *sabores* dos quarks a dinâmica dos hádrons pode ser descrita em grupos $SU(N)$ com N representando a quantidade de quarks envolvidos:

$$\begin{aligned} SU(2)_f &\rightarrow u, d; \\ SU(3)_f &\rightarrow u, d, s; \\ SU(4)_f &\rightarrow u, d, s, c; \\ SU(5)_f &\rightarrow u, d, s, c, b; \\ SU(6)_f &\rightarrow u, d, s, c, b, t. \end{aligned}$$

Um quark possui spin $1/2$ e massa constituinte (m_f) (é uma matriz no espaço de sabores, independente da característica de cor), na representação da equação livre de Dirac para férmions cada sabor " f " de quark pode se manifestar em três diferentes cores $i = 1, 2, 3$ (azul, verde e vermelho),

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_f c)\psi_f = 0 \quad , \quad (2.1)$$

onde, na equação (2.1), cada componente ψ_f^i é um espinor de Dirac

$$\psi_f = \begin{pmatrix} \psi_f^1 \\ \psi_f^2 \\ \psi_f^3 \end{pmatrix} .$$

Para transformação Local no grupo $SU(3)$ com densidade de Lagrangiana Livre (sem o termo de interação dos glúons) e $c = 1$:

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)\psi_f \quad . \quad (2.2)$$

Lagrangiana de massa:

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{c=1}^3 \sum_{f=1}^6 m_f \bar{\psi}_{fc} \psi_{fc} \quad . \quad (2.3)$$

A massa dos quarks (m_f) não pode ser medida de forma isolada (confinamento de quarks), com técnicas na álgebra de correntes é possível estimar a massa corrente dos quarks nas interações entre hádrons, o conceito de massa corrente é diferente da massa de estrutura dos quarks constituintes dos hádrons. O grupo $SU(3)$ de *cor* tem um caráter *não abeliano* (Apêndice 5.1), na transformação $SU(3)_c$

$$\psi_f \rightarrow \psi'_f(x) = e^{ig_s \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_f(x) \quad , \quad \text{com } (a=1,2,\dots,8) \quad , \quad (2.4)$$

onde α_a são os parâmetros do grupo, λ_a são as matrizes de Gell-Mann e g_s caracteriza a intensidade das interações fortes entre os quarks. Na invariância da Lagrangiana ($\mathcal{L} = \mathcal{L}'$) define-se a derivada covariante ²,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \quad , \quad (2.5)$$

nos Campos de Calibre ($a=1,2,3,\dots,8$) que correspondem aos 8 glúons com spin 1 e massa nula. Da relação de comutação $[\lambda^a, \lambda^b] = i2f_{abc}\lambda^c$, o termo f^{abc} representa as constantes de estrutura para $SU(3)_c$ na propriedade *não abeliana* do grupo. A Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma_\mu D_\mu - m_f) \psi_f \\ &= \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma_\mu \partial_\mu - m_f) \psi_f + g_s \sum_f \bar{\psi}_f \frac{\lambda_a}{2} \gamma_\mu A_\mu^a \psi_f = \mathcal{L}_0 + g_s \sum_f \bar{\psi}_f \frac{\lambda_a}{2} \gamma_\mu A_\mu^a \psi_f \end{aligned} \quad (2.6)$$

com a derivada covariante é invariante sob transformações infinitesimais,

$$\psi_f^i \rightarrow \psi'_f = \psi_f^i + ig_s \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} (\delta\alpha^a) \psi_f^j \quad , \quad (2.7)$$

com transformações de Calibre para os campos A_μ^a :

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a - \partial_\mu (\delta\alpha^a) A_\mu^c \quad . \quad (2.8)$$

Das relações anteriores, na parte cinética

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{cin} &= \sum_f \bar{\psi}'_f (i\gamma_\mu D'_\mu - m_f) \psi'_f \\ &= [\bar{\psi}_f - ig_s \bar{\psi}_f \frac{\lambda^a}{2} \delta\alpha^a] \\ &\quad \times [i\gamma_\mu [\partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} (A_\mu^a - \partial_\mu \delta\alpha^a - g_s f^{abc} \delta\alpha^b A_\mu^c)] - m_f] \\ &\quad \times [\psi_f + ig_s \frac{\lambda^a}{2} \delta\alpha^a \psi_f] \\ &= \bar{\psi}_f [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a) - m_f] \psi_f \\ &= \mathcal{L}_{cin} \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

2

$$\begin{aligned} \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu [e^{ig_s \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_f(x)] &= e^{ig_s \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}} \partial_\mu \psi_f + \psi_f \partial_\mu e^{ig_s \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}} \\ &= e^{ig_s \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}} [\partial_\mu + ig_s \partial_\mu \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}] \psi_f \quad ; \text{ onde } \quad \partial_\mu \alpha_a \equiv A_\mu^a \end{aligned}$$

Para transformações de fase globais α_a são constantes e a transformação do grupo *não abeliano* $SU(3)_c$ ocorre como uma transformação do Grupo *abeliano* $U(1)$, a Lagrangiana permanece invariante $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ ³.

Na Lagrangiana da QCD com o termo de interação dos glúons,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_q \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi - \frac{1}{2}Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = \sum_q \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad , (2.10)$$

para os campos de glúons,

$$G^\mu \equiv G_a^\mu T_c^a \rightarrow G'^\mu = UG^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} \partial^\mu U U^\dagger \quad , \quad (2.11)$$

a derivada covariante pode ser definida como:

$$D_\mu \psi \equiv (\partial_\mu - ig_s G_\mu)\psi \quad . \quad (2.12)$$

O termo cinético dos glúons é representado pelo tensor campo de força,

$$G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}^a T_c^a = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig_s [G_\mu, G_\nu] \quad , \quad (2.13)$$

com transformação unitária,

$$G^{\mu\nu} \rightarrow UG^{\mu\nu}U^\dagger \quad . \quad (2.14)$$

De forma mais explícita,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \frac{-1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + \\ &+ \sum_f \bar{\psi}_f(i\gamma_\mu \partial_\mu - m_f)\psi_f + \\ &- g_s A_\mu^a \sum_f \bar{\psi}_f^i \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} \psi_f^j + \\ &+ \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \\ &- \frac{g_s}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nessa expressão, a primeira parcela representa um termo cinético para os glúons, o segundo um termo cinético e de massa para os quarks, o terceiro termo a interação quark-glúon, o quarto termo a interação entre 3 glúons, o último termo a interação entre 4 glúons.

³ No Grupo $U(1)$:

$$U = e^{i\theta}$$

Duas transformações sucessivas:

$$U_1 U_2 = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = U_2 U_1$$

No caso das transformações no grupo de *sabores* (Apêndice 5.2), para as respectivas transformações Vetorial e Axial,

$$\begin{aligned}\psi \rightarrow \psi' &= e^{-\alpha^a(x)T^a} \psi \\ &\text{e} \\ \psi \rightarrow \psi' &= e^{-\beta^a(x)T^a \gamma_5} \psi \quad ,\end{aligned}$$

no caso da transformação quiral define-se o operador de paridade (Berlmann R. A., 1996),

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad , \quad (2.16)$$

onde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Atuando nos campos,

$$\psi_{L,R} \equiv \psi_{\mp} = P_{\mp} \psi \quad , \quad (2.17)$$

com "quiralidade" \mp 1.

Essa operação envolvendo a matriz γ_5 corresponde a uma transformação Axial de *sabor* alterando a propriedade de *paridade* dos campos

$$\gamma_5 \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm} \quad . \quad (2.18)$$

Para partículas massivas: a *helicidade* se conserva no tempo e não é invariante sob transformações de Lorentz; a *quiralidade* não se conserva no tempo e é invariante sob transformada de Lorentz. No limite em que a massa é nula a *quiralidade* e *helicidade* são equivalentes, das equações de movimento temos que

$$(i\cancel{\partial} - m + i\not{V} + i\not{A}\gamma_5)\psi = 0 \quad (2.19)$$

e

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + m - i\not{V} - i\not{A}\gamma_5) = 0 \quad (2.20)$$

com as correntes associadas ao Teorema de Noether (Apêndice 5.2):

$$\text{Vetorial: } j_{\mu}^a = \bar{\psi}\gamma_{\mu}T^a\psi \quad .$$

$$\text{Axial: } j_{\mu}^{\tilde{a}} = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5T^a\psi \quad .$$

$$\text{Pseudoscalar: } P^a = \bar{\psi}\gamma_5T^a\psi_H \quad .$$

Na divergência dessas correntes:

$$D_{\mu}j^{\mu} = 0 \quad ;$$

$$D_{\mu}j^{\tilde{5}\mu} = 2imP \quad ;$$

quando $m = 0$ as correntes axial e vetorial são conservadas. Para baixas energias a simetria vetorial $SU_V(N) \times U_V(N)$ permanece inalterada e satisfaz-se a igualdade: $SU_A(N) \equiv$

$[SU_L(N) \times SU_R(N)]/SU_V(N)$. Das relações clássicas para as correntes de esquerda (L) e direita (R) (Apêndice 5.2):

$$j_\mu^a = j_\mu^{La} + j_\mu^{Ra} \quad ;$$

$$j_\mu^{La} = \frac{1}{2}(j_\mu^a + j_\mu^{5a}) \quad ; \quad j_\mu^{Ra} = \frac{1}{2}(j_\mu^a - j_\mu^{5a}) \quad ;$$

$$j_\mu^{5a} = j_\mu^{La} - j_\mu^{Ra} \quad ;$$

de maneira que o divergente das correntes:

$$D_\mu^L j^{L\mu} - D_\mu^R j^{R\mu} = 2imP \quad ; \quad (2.21)$$

$$-D_\mu^R j^{R\mu} = D_\mu^L j^{L\mu} = imP \quad ; \quad (2.22)$$

no caso em que $m=0$,

$$D_\mu^R j^{R\mu} = D_\mu^L j^{L\mu} = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Nesse conjunto de simetrias, para QCD na parte vetorial $SU_V(2)$ representa a conservação de Isospin e $U_V(1)$ representa conservação do número Bariônico. Como consequência da simetria $SU_A(2)$ a teoria indica para cada multiplete de isospin a existência de partículas correspondentes num "reflexo de espelho" com *paridade* oposta, no entanto, partículas que apresentam essas características nunca foram observadas, na quebra dessa simetria são identificados bósons pseudoescalares com isospin de uma unidade ($I=1$) e com massa no quadro dos mésons leves, os pions. No caso da simetria $U_A(1)$ indica a existência de mésons pseudoescalares com isospin nulo ($I=0$) e massa semelhante a dos pions, o que também não foi observado, discussões acerca dessa simetria podem ser encontradas na literatura (t' Hooft, 1976a; 1976b). Nesse trabalho o foco está em efeitos na violação da simetria $SU_A(2)$ com a formação dos bósons de Nambu-Goldstone os quais serão apresentados na seção seguinte.

2.2 BÓSONS DE NAMBU-GOLDSTONE

A conservação de uma carga (Q) na simetria contínua pode ser representada pelo comutador com o Hamiltoniano (H), $[H, Q] = 0$ (Zee A., 2010). O vácuo, estado fundamental da Mecânica Quântica, denotado por $|0\rangle$, quando realizado uma transformação do tipo:

$$H \rightarrow H + constante \quad ; \quad (2.24)$$

$$H|0\rangle = 0 \quad ; \quad (2.25)$$

$$e^{i\theta Q}|0\rangle = |0\rangle \quad ; \quad (2.26)$$

de outro modo,

$$Q|0\rangle = 0 \quad , \quad (2.27)$$

supor que a simetria é quebrada espontaneamente significa que o vácuo não é invariante sob uma transformação de simetria $Q|0\rangle \neq 0$.

Da relação de energia, $HQ|0\rangle = [H, Q]|0\rangle = 0$, significa que há um outro estado $Q|0\rangle$ com a mesma energia que $|0\rangle$, o que representa os estados degenerados na Mecânica Quântica.

Em Teoria Quântica de Campos:

$$Q = \int d^D x J^0(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.28)$$

com estado $|s\rangle$,

$$|s\rangle = \int d^D x e^{-i\vec{k}\vec{x}} J^0(\vec{x}, t) |0\rangle \quad , \quad (2.29)$$

para $Q|s\rangle \rightarrow 0$ e $\vec{k}|s\rangle \rightarrow 0$ a energia se anula, na teoria da relatividade isso significa que $|s\rangle$ representa uma partícula sem massa. A quebra espontânea de simetria em física da matéria condensada representa a supercondutividade, inspirado no desenvolvimento das teorias de Barden-Cooper-Schrieffer (BCS) a quebra dinâmica de simetria quiral em física de partículas descrita por Nambu Y. (1960) apresenta a geração de massa dos férmions no formalismo não-relativístico, posteriormente Nambu e Jona-Lasinio (1961) desenvolveram um modelo relativístico em TQC. No processo de transição de fase quiral para outra em que a simetria não se conserva implica na transição de um meio não massivo para outro com presença de massa, o Teorema de Goldstone (1961) indica um tripleto de píons na quebra espontânea da simetria quiral na QCD⁴, da massa corrente dos píons pode ser extraído a massa corrente dos quarks no limite quiral. Na conservação parcial de simetria quiral, os mésons considerados *leves* dentro do quadro dos hádrons ($\pi^0; \pi^\pm; k^0; \bar{k}^0, k^\pm; \eta$) compostos pela família de três quarks (u, d, s) são descritos aproximadamente como bósons de Nambu-Goldstone (Miranski V. A, 1993). A quantidade de bósons de Nambu-Goldstone é equivalente ao número de cargas conservadas que não levam a invariância do vácuo, ou seja, que não aniquila o estado $|0\rangle$.

Simetrias contínuas no caso clássico do Teorema de Noether são descritas pela conservação das correntes (Srednicki, 1996; p.132; Hung, Bizot, 2016, p.28), com $\psi_a(x)$ na representação de um campo escalar e a densidade Lagrangiana por

$$L(x) = L(\psi_a(x), \partial_\mu \psi_a(x)) \quad ,$$

o efeitos de um deslocamento infinitesimal pode ser representado nos campos como

$[\psi_a(x) \rightarrow \psi_a(x) + \delta\psi_a(x)]$, então para Lagrangiana $[L(x) \rightarrow \mathbb{L}(x) + \delta L(x)]$ com

$$\delta L(x) = \frac{\partial L}{\partial \psi_a(x)} \delta\psi_a(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi_a(x))} \partial_\mu \delta\psi_a(x) \quad . \quad (2.30)$$

⁴ Entre as contribuições da obra de Jorge André Swieca (1936-1980) foi a demonstração rigorosa do chamado “Teorema de Goldstone” (Marino E.C., 2015).

Na Equação de Euler Lagrange (ou Equação de Campo):

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_a(x)} = 0 \quad , \quad (2.31)$$

onde $s = \int d^4y L(y)$ é a Ação e $\delta \psi_a(x)$ é um funcional derivativo,

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_a(x)} = \frac{\partial L(x)}{\partial \psi_a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\mu \psi_a(x))} \quad (2.32)$$

e

$$\delta L(x) = \partial_\mu \left(\frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\mu \psi_a(x))} \delta \psi_a(x) \right) + \frac{\delta S}{\delta \psi_a(x)} \delta \psi_a(x) \quad , \quad (2.33)$$

daí define-se as Correntes de Noether

$$j^\mu(x) \equiv \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\mu \psi_a(x))} \delta \psi_a(x) \quad , \quad (2.34)$$

com o divergente

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \delta L(x) - \frac{\delta S}{\delta \psi_a(x)} \delta \psi_a(x) \quad , \quad (2.35)$$

onde $j^0(x)$ é a densidade de carga e $\vec{j}(x)$ é a densidade de corrente.

O Teorema de Noether conecta a simetria Global contínua da dinâmica de um sistema como uma quantidade conservada, que são as constantes de movimento. Para uma Lagrangiana dependente de n campos independentes Φ_i e suas derivadas parciais de primeira ordem $\partial_\mu \Phi_i$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i) \quad \text{com } i = 1 \dots n \quad ,$$

é possível obter n equações de movimento das Equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = 0 \quad . \quad (2.36)$$

Os campos Φ_i se transformam com uma variação infinitesimal :

$$\Phi_i(x) \rightarrow \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \delta \Phi_i(x) = \Phi_i(x) + i \varepsilon_a(x) F_{ai}[\Phi(x)] \quad , \quad (2.37)$$

$\Phi(x)$ denota todos os campos $\Phi_i(x)$ juntos. A variação da Lagrangiana sob transformação Local:

$$\delta \mathcal{L} = -\varepsilon_a \partial_\mu J_a^\mu - \partial_\mu \varepsilon_a J_a^\mu \quad , \quad (2.38)$$

onde as equações representam

$$J_a^\mu = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} F_{ai} \quad (2.39)$$

e

$$\partial J_a^\mu = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu \Phi_i} F_{ai} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \partial_\mu F_{ai} \quad . \quad (2.40)$$

Então, nas definições de correntes,

$$J_a^\mu = -\frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \quad (2.41)$$

e

$$\partial J_a^\mu = -\frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_a} \quad , \quad (2.42)$$

temos que

$$\partial_\mu \varepsilon_a = 0,$$

portanto

$$\delta \mathcal{L} = -\varepsilon_a \partial_\mu J_a^\mu = 0,$$

o que significa que a corrente J_a^μ é conservada e que a quantidade de carga é independente do tempo ($Q_a(t) = Q_a$),

$$Q_a(t) = \int d^3x J_a^0(t, \vec{x}) \quad . \quad (2.43)$$

Para Teoria Quântica de Campos, de forma semelhante, as Identidades de Ward-Takahash (IWT) indicam simetrias expressas pelos estados. Discussões com mais detalhes incluindo a forma diagramática para as IWT podem ser encontradas amplamente na literatura (Peskin, 1995, p.238; A.Zee, 2010). As IWT para funções de Green são equivalentes à invariância de Calibre na *ação quântica*, em uma função com n pontos em um campo *não abeliano* (Bertlmann A., 1996)

$$\partial_\mu \tau_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}(x, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n i f_{aa_j}^b \tau_{a_2 \dots b \dots a_n}^{\mu_2 \dots \mu_j \dots \mu_n}(x_2, \dots, x, \dots, x_n) \delta(x - x_j) \quad , \quad (2.44)$$

no *funcional gerador* das funções de Green

$$Z[A_\mu] = e^{iW[A_\mu]} \quad (2.45)$$

com

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (2.46)$$

para uma variação da *ação quântica*

$$\delta W[A_\mu] = W[A_\mu] = W[A_\mu + \delta A_\mu] - W[A_\mu] = 0 \quad (2.47)$$

as transformações infinitesimais

$$\delta A_\mu = D_\mu \Lambda \quad (2.48)$$

$$i\delta W[A_\mu] = iW[A_\mu + D_\mu \Lambda] - iW[A_\mu] \quad (2.49)$$

representam na invariância de Calibre ($\delta W = 0$) a Identidade de Ward-Takahash

$$0 = \partial < 0 | T j^\mu(x) \psi_{a1}(x_1) \dots \psi_{an}(x_n) | 0 > + \\ i \sum_{j=0}^n < 0 | T \psi_{a1}(x_1) \dots \delta \psi_{aj}(x) \delta^4(x - x_j) \dots \psi_{an}(x_n) | 0 > \quad . \quad (2.50)$$

Em uma aplicação dessas identidades na transição do estado de vácuo para o de um pión no cálculo da taxa de decaimento,

$$\langle 0|A_\mu^b|\pi^a(q)\rangle = \langle 0|\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}\psi|\pi^a(q)\rangle = if_\pi q_\mu e^{(-iq\cdot x)\delta_{ab}} \quad , \quad (2.51)$$

pelo Teorema de Noether aplicado na conservação da corrente Axial, o produto de parâmetros físicos do pión (massa m_π e constante de decaimento f_π) deve ser nulo,

$$\langle 0|\partial^\mu A_\mu^b|\pi^a(q)\rangle = im_\pi^2 f_\pi e^{(-iq\cdot x)\delta_{ab}} \quad (2.52)$$

portanto

$$m_\pi^2 f_\pi = 0 \quad . \quad (2.53)$$

As soluções triviais, m_π ou f_π com valor nulo, não correspondem aos dados experimentais. Nos bósons de Goldstone a princípio são previstas partículas sem massa, resultado da quebra de simetria os pions estão nesse contexto pelo valor de massa no quadro de hádrons *leves* e que no chamado limite quiral pode ser interpretado com massa nula, assim essa corrente é interpretada como parcialmente conservada (Conservação Parcial da Corrente Axial-PCAC).

2.3 ANOMALIAS ASSOCIADAS À QUEBRA DE SIMETRIA

Uma simetria pode estar presente na Lagrangiana do modelo mas não se apresentar no estado da partícula, no caso da quebra de simetria em diagramas triangulares o decaimento do pión neutro em dois fótons ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) ocorre o que ficou conhecido como "Anomalia Quiral"(Adler, 1969; Bell and Jackiw, 1969).

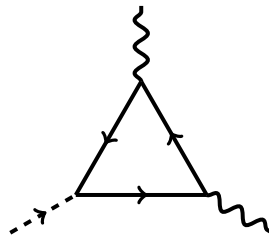


Figura 2.2 – Decaimento Anômalo do Pión Neutro ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$).

As Identidades de Ward-Takahashi na função de Green para esse diagrama (Berlmann, 1996, p. 190) satisfazem na parte Axial (AWI)

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu}$$

e para Vetorial (VWI)

$$k^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0,$$

sendo que para parcela Axial

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_\mu\nu + A_\mu\nu$$

surge um termo inesperado (Anomalia) que não se anula para ($m = 0$),

$$A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} K_1^\alpha K_2^\alpha \quad , \quad (2.54)$$

que pode também ser verificada na divergencia da corrente axial,

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2imP + A \quad (2.55)$$

$$A = \frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (2.56)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 2i\bar{q}\gamma_5mq + \frac{g_s^2 N}{32\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma} \quad . \quad (2.57)$$

Em um caso semelhante envolvendo a corrente axial há alternativas com o modelo de NJL para eliminar termos que causam ambiguidades indesejadas no decaimento do pión eletricamente carregado ($\pi^\pm \rightarrow l^\pm + \bar{\nu}_{l^\pm}$), onde l^\mp representa o elétron para partícula negativa ou o múon para positiva, e $\bar{\nu}_{l^\mp}$ seus respectivos antineutrinos. A taxa em que esse processo ocorre, constante de decaimento (f_π), pode ser extraída dos elementos da matriz axial no processo de transição do vácuo para o estado de um pión (Klevansky, 1992)

$$\langle 0 | J_{5\mu}^a | \pi \rangle = ip_\mu f_\pi \quad . \quad (2.58)$$

Para satisfazer as relações de simetria quiral no modelo NJL e também a relação de Goldberger-Treiman ($f_\pi^2 g_{\pi qq}^2 = m^2$) é necessário exigir valor nulo para ambiguidade que surge nesse cálculo,

$$f_\pi = -4ig_{\pi qq} m N_c [iI_{log} + Z0(m_\pi^2)] \quad , \quad (2.59)$$

da condição de renormalização do campo pionico

$$\frac{1}{g_\pi^2} = -4N_c (I_{log}(m^2) + \Delta) \quad , \quad (2.60)$$

$$f_\pi = g_{\pi qq} m \left(\frac{1}{g_\pi^2 - 4N_c [Z0(m_\pi^2) + m_\pi^2 Z0'(m_\pi^2)]} \right)$$

e

$$g_{\pi qq}^{-2} = g_\pi^{-2} - 4N_c [Z0(m_\pi^2) + m_\pi^2 Z0'(m_\pi^2)]$$

no Limite Quiral ($m_\pi = 0$): $g_{\pi qq}^{-2} = g_\pi^{-2}$, com o resultado

$$f_\pi = \frac{m}{g_{\pi qq}} + 4iN_c g_{\pi qq} m \Delta \quad , \quad (2.61)$$

a ambiguidade deve ser fixada com valor nulo

$$\Delta = 0 \quad . \quad (2.62)$$

Ainda que a renormalização no modelo NJL SU(2) seja independente do valor das ambiguidades, as relações de simetria indicam o anulamento, isso não ocorre na versão SU(3) para a constante de decaimento fraco do káon de forma que a presença de anomalias afetam a interpretação fenomenológica dos procesos envolvidos (Dias E. W., 2004). Nesse trabalho a proposta é que essa ambiguidade seja eliminada usando das Transformações de Chan no modelo de NJL com os *termos de superfície* que surgem de uma translação na variável de integração, momento das partículas no estado inicial e final dos processos, interpretados no ajuste dos resultados em comparação aos dados experimentais.

2.4 MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO (NJL)

Com conhecimentos acerca de supercondutores, Nambu e Jona-Lasinio criaram uma proposta para descrever propriedades da massa gerada na auto interação de férmions (Nambu Y., Lasinio J., 1960; 1961), ainda em exploração o modelo de NJL possibilita adequações a fim de estudar a dinâmica de quarks (Klevansky, 1992). Não é uma teoria renormalizável, a interação de quatro férmions em um mesmo ponto, interação puntual entre quarks, gera um termo de segunda ordem no acoplamento ($G \rightarrow 1/\alpha^2$) e a integral no potencial cresce indefinidamente no limite superior ($+\infty$) devendo ser regularizado com um *corte* no parâmetro que define a escala de energia em que a teoria é válida, a dependência do esquema de regularização surge da característica do modelo já que a formulação na Lagrangiana resulta da regularização aplicada nos propagadores. Em modelos renormalizáveis os parâmetros adicionados na regularização são eliminados com as possíveis divergências em reparametrização das amplitudes de probabilidade. Nos não renormalizáveis o tratamento depende de cada caso específico pois ocorre com a adição de constantes de acoplamento extras na Lagrangiana a fim de obter amplitudes independentes do esquema de regularização, diferentes esquemas de regularização podem gerar resultados distintos para as integrais divergentes limitando a interpretação dos resultados. Na interação Local de quarks o modelo de NJL não descreve o confinamento, entretanto, para processos de interação entre hádrons que não envolvem quarks livres o confinamento não é importante. Com algumas das simetrias que expressam parâmetros físicos em comum com a QCD, em particular a simetria quiral permite extrair observáveis associados aos hádrons na geração da massa dinâmica de férmions com a quebra dinâmica dessa simetria, constituintes dos bósons de Nambu-Goldstone. A Lagrangiana de NJL pode ser construída com simetria $SU_V(2) \times SU_A(2) \times U_V(1) \times U_A(1)$ e depois

desprezado $U_A(1)$ em vista dos dados experimentais (Klevansky S. P., 1992) e principalmente pelo interesse do trabalho que está em $SU_A(2)$.

Na Lagrangiana de NJL para $SU(2)_f$,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi(x) + G[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma_5\vec{\tau}\psi(x))^2] \quad , \quad (2.63)$$

os termos representam:

Campos de quarks, $\psi(x) \equiv \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix};$

Matriz de massa dos quarks, $\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix};$

Matrizes de Pauli ($\vec{\tau}$), $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

Matriz γ_5 ,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.64)$$

No modelo NJL a interação entre quarks e anti-quarks que ocorre num campo com os glúons como partículas de ação e com acoplamento forte constante é atrativa ($G = \frac{g^2}{2\mu^2}$), isso conduz ao chamado *condensado* formado por um par quark e anti-quark inseridos em um vácuo que quebra a simetria quiral ocasionando nos modos de Goldstone. Nesse sentido são assumidos apenas os quarks como graus de liberdade, os glúons são congelados, assim a Lagrangiana com o modelo de NJL representa apenas a interação entre quatro férmions. É suposto que os glúons adquirem massa dinâmica conduzindo a interação efetiva entre os quarks ocasionando problemas com divergências que conduzem a necessidade de um esquema de regularização, como o *Sharp-Cutoff* que especifica o limite de energia válido para o momento linear nessa aproximação.

2.5 SIMETRIA QUIRAL NO MODELO DE NJL

Transformações Quirais, ou Axiais, representadas nos Grupos $SU_A(2)$ e $U_A(1)$ alteram a *paridade* do estado operados com matriz γ_5 , a função de onda passa por uma mudança do tipo

$$\psi \rightarrow \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}\gamma_5)\psi \quad (2.65)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 \rightarrow [\exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}\gamma_5)]^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}\gamma_5) \quad . \quad (2.66)$$

O termo da transformação pode ser expandido em Série de Taylor:

$$\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5) = 1 + i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5 + \frac{(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)^2}{2!} + \dots$$

onde $(\vec{\tau}\cdot\hat{n})^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, temos com essa identidade para a translação

$$\begin{aligned} \exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots - i\vec{\tau}\cdot\hat{n}\gamma_5 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \cos(\theta) + i\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5 \sin(\theta) \quad . \end{aligned} \quad (2.67)$$

De forma semelhante [$\exp(-i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5) = \cos(\theta) - i\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5 \sin(\theta)$], da propriedade de anticomutação $\{\gamma_0, \gamma_5\} = 0$ e com os resultados anteriores é possível extrair a relação

$$\exp(-i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\gamma_0 = \gamma_0 \exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5) \quad ,$$

com essas operações podemos escrever a transformação quiral do spinor

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5) \quad . \quad (2.68)$$

Para os termos da Lagrangiana de NJL construída com a simetria quiral (eq. 2.63), após as transformações

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &\rightarrow i\bar{\psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\not{\partial}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\psi \\ &= i\bar{\psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\gamma^\mu\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\partial_\mu\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \quad , \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\psi \\ &= \bar{\psi}[\cos(2\theta) + i\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\sin(2\theta)]\psi \\ &= \bar{\psi}\psi\cos(2\theta) + i\bar{\psi}\gamma_5(\hat{n}\cdot\vec{\tau})\psi\sin(2\theta) \end{aligned} \quad (2.70)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}_i\psi &\rightarrow i\bar{\psi}\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\gamma_5\tau_i\exp(i\theta\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5)\psi \\ &= i\bar{\psi}[\cos(2\theta) + i\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\sin(2\theta)]\gamma_5\tau_i[\cos(2\theta) + i\hat{n}\cdot\vec{\tau}\gamma_5\sin(2\theta)]\psi \quad , \end{aligned} \quad (2.71)$$

das identidades

$$\begin{aligned} [\tau_k, \tau_i] &= 2\delta_{ki} \\ \hat{n}\cdot\vec{\tau}\tau_i &= \sum_k n_k \tau_k \tau_i = \sum_k n_k (2\delta_{ki} - \tau_i \tau_k) = 2n_i - \tau_i(\hat{n}\cdot\vec{\tau}) \end{aligned}$$

podemos reescrever para parcela de interação na (eq. 2.71)

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}[\cos(\theta)\gamma_5\tau_i + i\gamma_5^2\sin(\theta)(2n_i - \tau_i(\hat{n}\cdot\vec{\tau}))][\cos(\theta) + i\gamma_5(\hat{n}\cdot\vec{\tau})\sin(\theta)]\psi = \\ = i\left[\bar{\psi}\gamma_5\tau_i\psi + in_i\sin(2\theta)\bar{\psi}\psi - 2n_i(\bar{\psi}\gamma_5\hat{n}\cdot\vec{\tau}\psi)\sin^2(\theta)\right] \quad . \end{aligned}$$

Assim como os termos presentes na Lagrangiana, são necessárias expressões quadráticas nas interações,

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \psi)^2 &= (\bar{\psi} \psi)^2 \cos^2(2\theta) - (\bar{\psi} \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 \psi)^2 \sin^2(2\theta) + \\ &+ 2i(\bar{\psi} \psi)(\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 \psi) \cos(2\theta) \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (2.72)$$

e para o outro termo de interação com preseça da matriz γ_5

$$\begin{aligned} [i(\bar{\psi} \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \gamma_5 \tau_i \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \psi)]^2 &= i^2 \left\{ (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi)^2 - \sin^2(2\theta) (\bar{\psi} \psi)^2 + \right. \\ &+ 4(\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 \sin^4(\theta) + \\ &+ 2i \sin(2\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) + \\ &- 4 \sin^2(\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 - \\ &\left. - 4i \sin(2\theta) \sin^2(\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) \right\} . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Com algumas simplificações no último resultado, para uma parcela

$$\begin{aligned} 2i \sin(2\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) - 4i \sin(2\theta) \sin^2(\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) &= \\ = (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) (\bar{\psi} \psi) [2i \sin(2\theta) (1 - 2 \sin^2(\theta))] & \\ = (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) (\bar{\psi} \psi) [2i \sin(2\theta) \cos(2\theta)] & \end{aligned}$$

e para outra

$$\begin{aligned} 4(\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 \sin^4(\theta) - 4 \sin^2(\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 &= 4 \sin^2(\theta) (\sin^2(\theta) - 1) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 \\ = (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 \sin^2(2\theta) , & \end{aligned}$$

que substituídas na (eq. 2.73)

$$\begin{aligned} [(i(\bar{\psi} \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \gamma_5 \tau_i \exp(i\theta \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5) \psi)]^2 &= \\ = i^2 \{ (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi)^2 \sin^2(2\theta) (\bar{\psi} \psi)^2 - \sin^2(2\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 + \\ + 2i \sin(2\theta) \cos(2\theta) (\bar{\psi} \psi) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) \} . & \end{aligned} \quad (2.74)$$

Somando os resultados para as interações (eq. 2.72) e (eq. 2.74)

$$\begin{aligned} [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2] &\rightarrow (\bar{\psi} \psi)^2 \cos^2(2\theta) - (\bar{\psi} \hat{n} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 \psi)^2 \sin^2(2\theta) + \\ &+ 2i(\bar{\psi} \psi)^2 \cos^2(2\theta) - (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) \cos(2\theta) \sin(2\theta) + (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 + \\ &+ \sin^2(2\theta) (\bar{\psi} \psi)^2 + \sin^2(2\theta) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2 + \\ &- 2i \sin(2\theta) \cos(2\theta) (\bar{\psi} \psi) (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi) \\ &= [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \hat{n} \cdot \vec{\tau} \psi)^2] \end{aligned} \quad (2.75)$$

vemos a invariância da Lagrangiana sob essas transformações ($\mathcal{L}' = \mathcal{L}$). Na simetria quiral do modelo, com a equação livre de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.76)$$

$$\bar{\psi}(i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \quad (2.77)$$

obtemos

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -im\psi \quad (2.78)$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu = im\bar{\psi} \quad (2.79)$$

Consequência do Teorema de Noether,

$$j_\mu^k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{\delta \psi}{\delta \alpha^k} \quad , \quad (2.80)$$

com as correntes de esquerda (L) e direita(R)

$$J_L^\mu = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x) \quad (2.81)$$

$$J_R^\mu = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x) \quad (2.82)$$

$$\partial_\mu J_L^\mu = \partial_\mu J_R^\mu = 0 \quad (2.83)$$

e das correspondentes correntes Vetorial e Axial

$$V^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (2.84)$$

$$A^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \quad , \quad (2.85)$$

temos as relações

$$J_{L,R}^\mu = \frac{1}{2} [V^\mu(x) \mp A^\mu(x)] \quad (2.86)$$

$$\partial_\mu V^\mu(x) = \partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad . \quad (2.87)$$

A Lagrangiana possui a simetria $SU_V(2) \times SU_A(2) \times U_V(1)$, invariante nas transformações

$$SU_V(2) : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}} \psi(x) \quad (2.88)$$

$$SU_A(2) : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5} \psi(x) \quad (2.89)$$

$$U_V(1) : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta} \psi(x) \quad , \quad (2.90)$$

com correntes de Noether associadas

$$SU_V(2) : j_\mu^k(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \tau^k \psi(x) \quad (2.91)$$

$$SU_A(2) : j_{5\mu}^k(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau^k \psi(x) \quad (2.92)$$

$$U_V(1) : j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad . \quad (2.93)$$

O modelo também apresenta a quebra de simetria para $(m \neq 0)$,

$$\partial_\mu(j^{\mu 5}) = \partial_\mu[\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi] \quad (2.94)$$

$$= \partial_\mu[\bar{\psi}] \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 [\partial_\mu \psi] \quad , \quad (2.95)$$

$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, portanto

$$\partial_\mu(j^{\mu 5}) = im\bar{\psi}\gamma^5\psi + im\psi\gamma^5\bar{\psi} \quad (2.96)$$

$$= 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (2.97)$$

o divergente da corrente Axial se anula apenas para $m = 0$.

2.6 IDENTIFICAÇÃO DE OBSERVÁVEIS NA BOSONIZAÇÃO DO NJL

Na renormalização da versão bosonizada do modelo NJL SU(2) com expansão perturbativa até a primeira ordem em *loops*, aproximação de campo médio, seguimos o formalismo de integrais de caminho de Feynman (Herbert, D., Reinhardt H., 1986;) para obter parâmetros físicos na estrutura do méson π com a expansão da *ação efetiva* partindo da Lagrangiana fermiônica,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi(x) + G[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma_5\bar{\tau}\psi(x))^2] \quad , \quad (2.98)$$

e do funcional gerador da *ação efetiva* com fontes (η e $\bar{\eta}$) de campos fermiônicos (ψ e $\bar{\psi}$),

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\bar{\psi} \cdot \psi) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi) \right] \quad . \quad (2.99)$$

Substituindo os graus de liberdade fermiônicos por graus bosônicos que representam mésons, esses novos campos auxiliares não afetam as equações de movimento (Equação de Euler-Lagrange) e serão introduzidos com o formalismo das integrais de caminho de Feynman (Das A., 1997)

$$\int D\sigma \exp \left[\int d^4x \left(\frac{-i}{2G} (\sigma - G\bar{\psi}\psi)^2 \right) \right] = c_1 \quad (2.100)$$

e

$$\int D\pi \exp \left[\int d^4x \left(\frac{-i}{2G} (\pi - G\bar{\psi}i\gamma_5\bar{\tau}\psi)^2 \right) \right] = c_2 \quad (2.101)$$

que são termos constantes. Na nova Lagrangiana bosonizada

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi(x) + G[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma_5\bar{\tau}\psi(x))^2] \\ &- \frac{1}{2G}[\sigma - G\bar{\psi}\psi]^2 - \frac{1}{2G}[\pi - G\bar{\psi}i\gamma_5\bar{\tau}\psi]^2 \end{aligned} \quad (2.102)$$

das equações de movimento obtemos os vínculos para os campos escalar e pseudo-escalar, σ e π respectivamente, chamadas de *quantidades nuas* do modelo que estão relacionados com o surgimento de divergências,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \sigma} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \sigma)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \pi)} = 0 \quad , \quad (2.103)$$

com

$$\sigma = G \bar{\psi} \psi \quad \text{e} \quad \pi = iG \bar{\psi} \vec{\tau} \gamma_5 \psi \quad . \quad (2.104)$$

Podemos reescrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\partial - \hat{m})\psi(x) + G[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2 + (\bar{\psi}(x)i\gamma_5 \vec{\tau}\psi(x))^2] \\ &- \frac{1}{2G}[\sigma^2 - 2\sigma G \bar{\psi}\psi + G^2(\bar{\psi}\psi)^2] - \frac{1}{2G}[\pi^2 - 2\pi G \bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau}\psi + G^2(\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau}\psi)^2] \end{aligned}$$

ou após cancelar os termos excedentes

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - \hat{m} + \sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau})\psi - \frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2) \quad , \quad (2.105)$$

$\langle 0|\sigma|0 \rangle = s$ causa a quebra espontânea de simetria, a fim de preservar a invariância define-se um campo auxiliar $\sigma = \sigma' + s$. Pela proximidade no valor de massa dos quarks vamos usar um termo escalar (m) no lugar da matriz de massa (\hat{m}),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\partial - m + (\sigma' + s) + i\pi\gamma_5 \vec{\tau})\psi - \frac{1}{2G}((\sigma' + s)^2 + \pi^2) \\ &= \bar{\psi}(i\partial - m + (\sigma' + s) + i\pi\gamma_5 \vec{\tau})\psi - \frac{1}{2G}((\sigma'^2 + s^2 + 2\sigma's) + \pi^2) \quad . \quad (2.106) \end{aligned}$$

Dessa expressão podemos definir um termo de massa constituinte dos quarks $M = m - s$, de modo que a Lagrangiana pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - M + \sigma') + i\pi\gamma_5 \vec{\tau})\psi - \frac{1}{2G}((\sigma'^2 + s^2 + 2\sigma's) + \pi^2) \quad . \quad (2.107)$$

Para obtenção da *ação efetiva* reescrevemos o funcional gerador, nesse ponto fazemos uma mudança de variáveis ($\sigma' \rightarrow \sigma$) para simplificar as notações

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}] &= \frac{1}{N} \int D\pi \int D\sigma \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp[i \int d^4x (\bar{\psi}(i\partial - M + \sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau})\psi \\ &- \frac{1}{2G}(\sigma^2 + s^2 + \pi^2) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)] \quad , \quad (2.108) \end{aligned}$$

é conveniente separar os termos para os campos no produto de dois funcionais ($Z[\eta, \bar{\eta}] = Z_B Z_F$) onde uma parcela é dependente apenas dos campos para bósons (Z_B) e outra somente com campos fermiônicos (Z_F), no caso dessa última

$$Z_F = \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp[i \int d^4x (\bar{\psi}(i\partial - M + \sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau})\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)] \quad (2.109)$$

ou para o campo de Dirac

$$Z_F = Z_0 \exp \left[-i \int d^4x \int d^4y [\bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(x)] \right] . \quad (2.110)$$

Com a definição do propagador na função de dois pontos

$$\langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) Z[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}, \eta=0} \quad (2.111)$$

de modo que

$$i S_F(x-y) = \frac{i \delta^4(x-y)}{i \not{\partial} - M + \sigma + i \pi \gamma_5 \vec{\tau}} , \quad (2.112)$$

o funcional gerador dos férmions fica na forma

$$Z_F = Z_0 \exp \left[-i \int d^4x \int d^4y [\bar{\psi} S_F^{-1} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi] \right] . \quad (2.113)$$

Usando a seguinte propriedade da Algebra de Grassman (Das, A., 2006):

$$\int \prod_{i,j} d\theta_i^* d\theta_j \exp \left[i \int d^4x (\theta_i^* M_{ij} \theta_j + \theta_i^* C_i + C_i^* \theta_i) \right] = N' \det M_{ij} \exp \left[-i \int d^4x (C_i^* M_{ij}^{-1} C_j) \right] ,$$

identificando os parâmetros para a expressão equivalente no funcional gerador (Z_F),

$$\left[\theta_i^* = \bar{\psi} , \quad M_{ij} = S^{-1}(x-y) , \quad \theta_i = \psi , \quad C_j = \eta \quad e \quad C_i^* = \bar{\eta} \right] ,$$

podemos reescrever a (eq. 2.113) na forma

$$Z_F = N' \det [S_F^{-1}] \exp \left[-i \int d^4x [\bar{\eta}(x) S_F \eta(x)] \right] , \quad (2.114)$$

que usando uma identidade das relações no cálculo do *traço*

$$\ln[\det(S_F^{-1})] = \text{Tr}[\ln(S_F^{-1})] \rightarrow \det(S_F^{-1}) = e^{\text{Tr}[\ln(S_F^{-1})]}$$

temos para o campos de férmions

$$Z_F = N' \exp \left[\text{Tr}[\ln(S_F^{-1})] - i \int d^4x [\bar{\eta}(x) S_F \eta(x)] \right] . \quad (2.115)$$

Substituindo esse resultado, o funcional gerador (eq.2.109) em termos da *ação efetiva*

$$Z = \frac{1}{N} \int D\pi \int D\sigma \exp \left(i S_{ef} - i \int d^4x [\bar{\eta}(x) \frac{1}{i \not{\partial} - M + \sigma + i \pi \gamma_5 \vec{\tau}} \eta(x)] \right) \quad (2.116)$$

com

$$\begin{aligned} S_{ef} &= - \int d^4x \left[\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{1}{G} \sigma s \right] - i \text{Tr} [\ln (i \not{\partial} - M + \sigma + i \pi \gamma_5 \vec{\tau})] \\ &= - \int d^4x \left[\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{1}{G} \sigma s \right] - i \text{Tr} \left[\ln \left(1 + \frac{\sigma + i \pi \gamma_5 \vec{\tau}}{i \not{\partial} - M} \right) \right] . \end{aligned} \quad (2.117)$$

Expandindo essa expressão para até quarta ordem (os termos de ordem superior são equivalentes ao de quarta ordem) com a identidade de expansão em série de Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

para

$$x = \frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\vec{\partial} - M}$$

os termos na expansão representam um diagrama de Feynman para cada parcela $S_{ef} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$, cada um deles pode ser interpretado na amplitude de probabilidade de transição com os coeficientes de cada potência dos campos uma nova Lagrangiana efetiva para os parâmetros mensuráveis no modelo de NJL.

- Linear

$$S_1 = - \left(\int d^4x \frac{1}{G} \sigma s + iTr \left[\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\vec{\partial} - M} \right] \right) ; \quad (2.118)$$

- Quadrático

$$S_2 = - \int d^4x \frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{i}{2} Tr \left[\left(\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\vec{\partial} - M} \right)^2 \right] ; \quad (2.119)$$

- Cúbico

$$S_3 = - \frac{i}{3} Tr \left[\left(\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\vec{\partial} - M} \right)^3 \right] ; \quad (2.120)$$

- Quártico

$$S_4 = + \frac{i}{4} Tr \left[\left(\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\vec{\partial} - M} \right)^4 \right] . \quad (2.121)$$

A massa constituinte e a massa corrente dos quarks estão relacionadas com o condensado de quarks na equação de Gap obtida na minimização da *ação efetiva* em primeira ordem nos campos (com $\alpha = \sigma, \pi$),

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial \alpha} = 0 . \quad (2.122)$$

Para o campo π

$$iTr \left[\frac{i\gamma_5}{i\vec{\partial} - M} \right] = 0 . \quad (2.123)$$

Para o campo σ

$$-i \int d^4x \frac{s}{G} - iTr \left[\frac{1}{i\partial - M} \right] = 0 \quad . \quad (2.124)$$

Nessa última expressão as duas parcelas devem ser nulas, então

$$-s = iGTr \left[\frac{1}{i\partial - M} \right] = M - m \quad . \quad (2.125)$$

A diferença entre a massa constituinte (M) e a massa corrente dos quarks (m) é a massa dinâmica (s). Na definição da equação de Gap,

$$M - m = -G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad , \quad (2.126)$$

o condensado de quarks representa

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -iTr \left[\frac{1}{i\partial - M} \right] = -iTr \int d^4x \langle x | \frac{1}{i\partial - M} | x \rangle \\ &= -iTr \int d^4x \langle x | \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} | k \rangle \langle k | \frac{1}{i\partial - M} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} | k' \rangle \langle k' | x \rangle \\ &= -iTr \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{ikx} \langle k | \frac{1}{i\partial - M} | k' \rangle e^{-ik'x} \\ &= -iTr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{i(k-k')x} \langle k | \frac{1}{i\partial - M} | k' \rangle \\ &= -iTr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k-k') \frac{1}{i\not{k} - M} \langle k | k' \rangle \\ &= -iTr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i\not{k} - M} \quad . \end{aligned} \quad (2.127)$$

Podemos reescrever com o *traço* aplicado no espaço de *cores*, *sabores* e matrizes de Dirac (Apêndice)

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= 4iN_cN_sTr_D \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M} \frac{1}{\not{k} + M} \\ &= 4iN_cN_sM \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.128)$$

Aplicando a Rotação de Wick

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -4i^2N_cN_sM \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\infty dk d\theta_1 d\theta_2 d\phi \frac{k^3 \text{sen}(\theta_1) \text{sen}^2(\theta_2)}{k^2 + M^2} \\ &= -\frac{N_cN_sM}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{k^2 + M^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.129)$$

Do valor experimental da massa do pión ($m_\pi \approx 139MeV$) a constante de acoplamento (G) é fixada pela equação de Gap. Com uma contagem na ordem das potências da variável de integração

(4ª no numerador e 2ª no denominador) percebemos uma tendência de divergência quadrática (4-2=2) para solução da integral no limite em que $k \rightarrow \infty$. Utilizando o método de regularização *Sharp-Cutoff* que limita a escala de energia no momento da partícula por um parâmetro (Λ), após manipular o integrando

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi}\psi \rangle &= -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k^3 + kM^2 - kM^2}{k^2 + M^2} \\
&= -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k(k^2 + M^2) - kM^2}{k^2 + M^2} \\
&= -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \left[\frac{k^2}{2} \Big|_0^\Lambda - \int_0^\Lambda dk \frac{kM^2}{k^2 + M^2} \right] \\
&= -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \left(\frac{k^2}{2} \Big|_0^\Lambda - M^2 \frac{1}{2} \ln [M^2 + k^2] \Big|_0^\Lambda \right) ,
\end{aligned}$$

para o limite de integração, temos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_s M}{2\pi^2} \left(\frac{\Lambda^2}{2} - M^2 \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right] \right) . \quad (2.130)$$

Esse resultado não nulo indica a quebra de simetria quiral de onde pode ser extraído a massa constituinte dos quarks com auxílio da equação (eq.2.126) denominando a massa corrente (m) por (m_0),

$$M = m_0 + \frac{GN_c N_s M}{4\pi^2} \left(\Lambda^2 - M^2 \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right] \right) . \quad (2.131)$$

3 O MÉSON PÍ NO QUADRO DO MODELO DE NJL

Os píons são partículas interpretadas com estrutura constituída por quarks e antiquarks nos *sabores* up (u) e down (d), o tripleto de isospin com uma unidade (I=1) de estados formados apresentam características intrínsecas de *paridade* negativa (-1) e spin nulo. No modelo de NJL a Lagrangiana de interação no acoplamento ($G_{\pi NN}$) entre o campo de píons e o campo de núcleons (ψ_N) é dada por

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = iG_{\pi NN} \bar{\psi}_N \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi_N \quad , \quad (3.1)$$

com a reinterpretação dos campos fermiônicos para campos de quarks (ψ) no acoplamento entre um pión, um quark e um antiquark ($g_{\pi qq}$),

$$\mathcal{L}_{\pi qq} = ig_{\pi qq} \bar{\psi} \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi \quad . \quad (3.2)$$

O produto dos operadores pode ser decomposto na forma

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \tau^{(+)} \pi^{(+)} + \tau^{(-)} \pi^{(-)} + \tau^{(3)} \pi^{(3)} \quad ,$$

onde

$$\pi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2) \quad ,$$

que atuam destruindo os respectivos mésons π^+ e π^- . De modo semelhante

$$\tau^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 \pm i\tau_2) \quad ,$$

com $\tau_i = \tau^{(\mp)}$, $\tau_j = \tau^{(\pm)}$ para criação dos píons π^\mp ou $\tau_i = \tau_j = \tau_3$ para o pión neutro (π^0). Nesse conjunto:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \tau^- \psi &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = u\bar{d} \quad ; \\ \bar{\psi} \tau^3 \psi &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \bar{u}u - \bar{d}d \quad ; \\ \bar{\psi} \tau^+ \psi &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \bar{u}d \quad . \end{aligned}$$

O diagrama de espalhamento do pión eletricamente carregado na interação de quarks pode ser representado pela Figura 3.1. Para o conjunto de propagadores representado nesse diagrama,

$$[\bar{d}' i\gamma_5 \tau^{(-)} u] [(ig_{gqq})^2] \frac{i}{k^2 - m_\pi^2} [\bar{u}' i\gamma_5 \tau^{(+)} d] \quad , \quad (3.3)$$

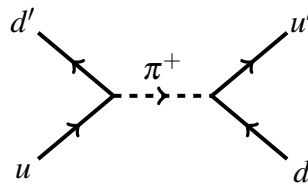


Figura 3.1 – Píon na Interação de Quarks.

podemos definir a interação efetiva

$$\text{-----}\rightarrow\text{-----} = (i\gamma_5)\tau^{(-)} \frac{-ig_{gqq}^2}{k^2 - m_\pi^2} (i\gamma_5)\tau^{(+)} \quad . \quad (3.4)$$

A descrição da interação efetiva do píon no modelo NJL pode ser aproximada por uma expansão perturbativa (Figura 3.2).

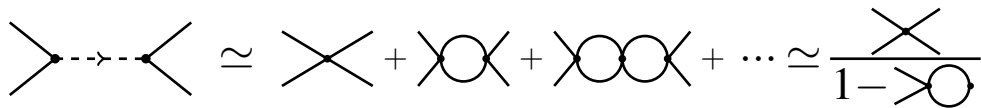


Figura 3.2 – Perturbação para o Espalhamento do Píon.

No cálculo para o digrama no lado esquerdo da igualdade

$$\begin{aligned} iU_{ij}(p^2) &= (i\gamma_5\tau_i)iG(i\gamma_5\tau_j) + (i\gamma_5\tau_i)iG\Pi_F(i\gamma_5\tau_j) + (i\gamma_5\tau_i)iG\frac{\Pi_F(p^2)}{i}iG(i\gamma_5\tau_j) + \dots \\ &= (i\gamma_5\tau_i) \left[\frac{iG}{1 - G\Pi_F(p^2)} \right] (i\gamma_5\tau_j) \quad , \end{aligned} \quad (3.5)$$

a massa do píon pode ser extraída do pólo dessa equação

$$1 - G\Pi_F(p^2) = 0 \quad . \quad (3.6)$$

Aplicando a técnica de expansão em séries de Taylor até segunda ordem para o resultado em torno de $p^2 = m_\pi^2$,

$$1 - G\Pi_f(p^2) = [1 - G\Pi_F(p^2)] + \frac{\partial[1 - G\Pi_F(p^2)]}{\partial p^2}(p^2 - m_\pi^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[1 - G\Pi_F(p^2)]}{\partial^2 p^2}(p^2 - m_\pi^2)^2 + \dots \quad ,$$

o primeiro termo é nulo devido a condição do pólo da amplitude, considerando apenas o termo de primeira ordem e com a (eq 3.5),

$$\begin{aligned} (i\gamma_5\tau_i) \left[\frac{iG}{1 - G\Pi_F(p^2)} \right] (i\gamma_5\tau_j) &\approx (i\gamma_5\tau_i) \left[\frac{iG}{\frac{\partial[1 - G\Pi_F(p^2)]}{\partial p^2}(p^2 - m_\pi^2)} \right] (i\gamma_5\tau_j) \\ &\approx (i\gamma_5\tau_i) \left[\frac{-i \left(\frac{\partial\Pi_F(p^2)}{\partial p^2} \right)^{-1}}{(p^2 - m_\pi^2)} \right] (i\gamma_5\tau_j) \quad , \end{aligned}$$

ou seja,

$$iU_{ij}(p^2) \approx i\gamma_5 \tau_i \frac{-i \left(\frac{\partial \Pi_F(p^2)}{\partial p^2} \right)^{-1} \Big|_{p^2=m_\pi^2}}{k^2 - m_\pi^2} i\gamma_5 \tau_j \quad . \quad (3.7)$$

O termo no numerador é identificado como a constante de acoplamento entre um pión, um quark e um antiquark,

$$g_{\pi\bar{q}q}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_F(p^2)}{\partial p^2} \right)^{-1} \Big|_{p^2=m_\pi^2} \quad . \quad (3.8)$$

Na correlação da massa do pión com a massa corrente dos quarks obtida da expressão para (π_F) no contexto dos bósons de Goldstone,

$$\pi_F = 4N_c N_f i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 - k \cdot p - m^2)}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \quad , \quad (3.9)$$

pode ser separada em frações parciais com a identidade

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2(p^2 + k^2/2 - m^2 - k \cdot p)} \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]}$$

e também

$$\begin{aligned} (k-p)^2 &= k^2 - 2k \cdot p + p^2 \\ k \cdot p &= \frac{1}{2}[k^2 + p^2 - (k-p)^2] \quad , \end{aligned} \quad (3.10)$$

a amplitude fica

$$\begin{aligned} \pi_F &= 4iN_c N_f \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[k^2 + p^2 - (k-p)^2]}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \right) \\ \pi_F &= 4iN_c N_f \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} + \right. \\ &\quad \left. - p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Com uma mudança na variável de integração ($k-p \rightarrow k$) no segundo termo da equação anterior e nomeando a última parcela de $I(p^2)$, temos que

$$\pi_F = 4iN_c N_f \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{2} I(p^2) \right) \quad . \quad (3.12)$$

Da equação de Gap

$$1 = \frac{m_0}{m} + 4iN_c N_f G \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad , \quad (3.13)$$

realizando algumas operações algébricas temos

$$1 - G\pi_F = \frac{m_0}{m} + 2N_c N_f G i p^2 I(p^2) \quad . \quad (3.14)$$

Para ($p^2 = m_\pi^2$)

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{m} \frac{1}{2iN_c N_f G I(m_\pi^2)} \quad , \quad (3.15)$$

dessa expressão, no limite quiral ($m_0 = 0$) o pión terá massa nula no modelo de NJL interpretado como bóson de Goldstone.

3.1 AUTO ENERGIA DO PÍON

A expressão para auto-energia do pión fornece uma correção para sua massa, esse fenômeno que ocorre intermediário às observações experimentais são interpretados como a produção e aniquilação de pares estimados em arranjos de partículas virtuais, da *ação efetiva*

$$S_{ef} = \int \mathcal{L}_{ef} d^4x \quad (3.16)$$

com a expressão apresentada na seção anterior (eq. 2.117), após o procedimento de bosonização, obtemos

$$S_{ef} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{1}{G} \sigma_s \right] - iTr \left[\ln \left(1 + \frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\partial - M} \right) \right] \quad , \quad (3.17)$$

e a Lagrangiana efetiva do méson pí pode ser expressa por

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \frac{1}{G} \sigma_s - iTr \left[\ln \left(1 + \frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\partial - M} \right) \right] \quad . \quad (3.18)$$

Realizando uma expansão em Série de Taylor:

$$f(x = x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \left(\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\partial - M} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\partial - M} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \vec{\tau}}{i\partial - M} \right)^3 + \dots$$

podemos reescrever a Lagrangiana na forma

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma_s + \frac{1}{2G} \left[-1 + iGTr \left(\frac{1}{i\partial - M} \right)^2 \right] \sigma^2 + \frac{1}{2G} \left[-1 + iGTr \left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \right)^2 \right] \pi^2 + \dots$$

Definindo as amplitudes de probabilidade da auto-energia dos mésons escalar e pseudo-escalar por

$$\Sigma_s \equiv iTr \left[\frac{1}{i\partial - M} \right]^2 \quad (3.19)$$

$$\Pi_F \equiv iTr \left[\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \right]^2 \quad (3.20)$$

e uma função auxiliar

$$f(p^2) = \frac{1}{G}(-1 + G\Pi_F(p^2)) \quad (3.21)$$

a expressão para Lagrangiana Efetiva, escrita no espaço de momentos e expandida em torno de ($p^2 = m^2$) se torna:

$$\begin{aligned} L_{ef} = & -\frac{1}{2G}s^2 - \frac{1}{G}\sigma_s + \frac{1}{2G}[-1 + G\Sigma_s(p^2)]\sigma^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{f(m^2)}{f'(m^2)} + (p^2 - m^2) + \dots \right] \tilde{\pi}^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde redefinimos o campo pseudo-escalar por

$$\tilde{\pi} = \pi \sqrt{f'(m^2)} \quad , \quad (3.23)$$

com

$$g_{\pi\bar{q}q}^{-1} \equiv \sqrt{f'(m^2)} \quad . \quad (3.24)$$

Assim, o termo de massa física pode ser escrito como

$$m_F^2 = m^2 - \frac{f(m^2)}{f'(m^2)} \quad . \quad (3.25)$$

Neste ponto, se escolhermos o parâmetro (m) da expressão como o valor físico da massa do méson pseudo-escalar, ou seja, $m^2 = m_F^2$, obtemos

$$m_F^2 = m_F^2 - \frac{f(m_F^2)}{f'(m_F^2)} \Rightarrow f(m_F^2) = 0 \quad . \quad (3.26)$$

Dessa forma, como

$$f(p^2) = \frac{1}{G}(-1 + G\Pi_F(p^2)) \quad (3.27)$$

a massa do méson pseudo-escalar pode ser determinada pela solução de

$$(-1 + G\Pi_F(m_F^2)) = 0 \quad (3.28)$$

A amplitude de probabilidade da auto energia do pión (Π_F) pode ser calculada explicitamente. Temos

$$\Pi_F(x^2) = iTr \left[\left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \right) \left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \right) \right] \quad (3.29)$$

Abrindo o traço no espaço das configurações, obtemos

$$Tr\hat{A}\hat{B} = Tr \int d^4x \int d^4y \langle x|\hat{A}|y \rangle \langle y|\hat{B}|x \rangle \quad , \quad (3.30)$$

que, aplicado em ($\Pi_F(x^2)$), e introduzindo relações de completeza no espaço dos momentos, resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_F(x^2) &= iTr \int d^4x \int d^4y \\ &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x|\frac{i\gamma_5}{i\partial - M}|k \rangle \langle k|y \rangle \langle y|\frac{i\gamma_5}{i\partial - M}|k' \rangle \langle k'|x \rangle \quad , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Pi_F(x^2) &= iTr \int d^4x \int d^4y \\ &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left(\frac{i\gamma_5 e^{ik(x-y)}}{i\partial - M} \right) \left(\frac{i\gamma_5 e^{-ik'(x-y)}}{i\partial - M} \right) \quad . \quad (3.31) \end{aligned}$$

Calculando a transformada de Fourier da equação anterior (3.31), obtemos:

$$\Pi_F(p^2) = iTr \int d^4z \quad (3.32)$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ipz} \left(\frac{i\gamma_5 e^{ik(x-y)}}{k - M} \right) \left(\frac{i\gamma_5 e^{-ik'(x-y)}}{k' - M} \right) \quad . \quad (3.33)$$

Finalmente, observando que

$$\int d^4z e^{iz(p-k+k')} = (2\pi)^4 \delta^4[(k-p) - k'] \quad , \quad (3.34)$$

temos

$$\Pi_F(p^2) = iTr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left(\frac{i\gamma_5}{k - M} \right) \left(\frac{i\gamma_5}{k' - M} \right) (2\pi)^4 \delta^4[(k-p) - k'] \quad . \quad (3.35)$$

Essa amplitude de probabilidade encontrada corresponde ao diagrama apresentado na figura 3.3,

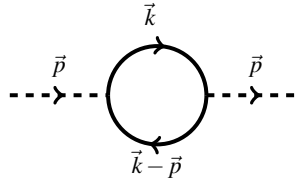


Figura 3.3 – Auto Energia do Méson π .

chamando a auto energia do méson pseudo-escalar de Π_{PS} , obtemos, finalmente,

$$\Pi_{PS}(p^2) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\left(\frac{i\gamma_5}{\not{k} - M} \right) \left(\frac{i\gamma_5}{(\not{k} - \not{p}) - M} \right) \right] . \quad (3.36)$$

A partir deste ponto, podemos proceder o cálculo explícito de $(\Pi_{PS}(p^2))$. Temos:

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) &= iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr_D \left[\left(\frac{i\gamma_5}{\not{k} - M} \right) \left(\frac{i\gamma_5}{(\not{k} - \not{p}) - M} \right) \right] \\ &= -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr_D \left[\frac{\gamma_5(\not{k} + M) \gamma_5[(\not{k} - \not{p}) + M]}{\not{k} - M (\not{k} - \not{p}) - M} \right] \\ &= -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr_D \left[\frac{\gamma_5 \gamma_5 (\not{k} + M) [-(\not{k} - \not{p}) + M]}{[\not{k}^2 - M^2][(\not{k} - \not{p})^2 - M^2]} \right] \\ &= -iN_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr_D \left[\frac{1[\not{k}\not{p} - \not{k}^2 - \not{k}M + M\not{p} + \not{k}M] + M^2}{[\not{k}^2 - M^2][(\not{k} - \not{p})^2 - M^2]} \right] . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Após a aplicação dos teoremas de *traço* (ver Apêndice):

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - M^2}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} . \quad (3.38)$$

Aplicando uma identidade conhecida como parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x + b]^2} , \quad (3.39)$$

obtemos

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k(k-p) - M^2}{([(k-p)^2 - M^2 - k^2 + M^2]x + k^2 - M^2)^2} . \quad (3.40)$$

Simplificando o termo do denominador,

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k(k-p) - M^2}{((k-px)^2 - p^2x^2 + p^2x - M^2)^2} , \quad (3.41)$$

e definindo $(\xi'^2 \equiv p^2x^2 - p^2x + M^2)$, a amplitude pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Pi_{PS}(p^2) = i4N_c N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k(k-p) - M^2}{((k-px)^2 - \xi'^2)^2} . \quad (3.42)$$

O resultado para essa expressão com o esquema de regularização *Sharp-Cutoff* pode ser encontrado na literatura (Vale P. R., 2020), para o presente trabalho a expressão anterior é suficiente.

O resultado obtido na expressão (3.42), no entanto, não é uma representação única, diferentes escolhas para o roteamento do momento externo (p) nos *loops* internos resultam em diferentes resultados para (Π_{PS}) (Mota, A. L. 1999), introduzindo ambiguidades no modelo. Essas ambiguidades, correspondentes a diferentes escolhas de roteamentos nos *loops* internos, podem ser evidenciadas quando calculamos as amplitudes de probabilidade com a introdução de roteamentos arbitrários, como representado na Figura 3.4:

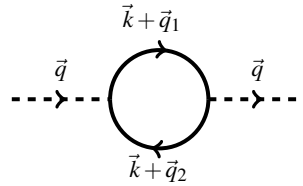


Figura 3.4 – Auto Energia com Roteamento Arbitrário.

A conservação de energia e momento nos vértices do *loop* na Figura 3.4 implicam em $q_1 - q_2 = q$, a única relação física a ser imposta sobre q_1 e q_2 . Dessa forma, o *loop* possui dois graus de liberdade (q_1 e q_2), mas apenas um deles é físico. Para determinarmos q_1 e q_2 explicitamente, necessitamos de uma segunda equação que relacione as duas quantidades. Essa equação é escrita, da forma mais geral possível, como

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = \lambda q + \delta = \Delta \quad , \quad (3.43)$$

de onde obtemos

$$q_1 + \frac{\beta}{\alpha} q_2 = \frac{\Delta}{\alpha} \quad (3.44)$$

e

$$q_2 = \frac{\lambda - \alpha}{\alpha + \beta} q + \frac{\delta}{\alpha + \beta} \quad , \quad (3.45)$$

assim,

$$q_2 = \hat{\lambda} q + \hat{\delta} \quad (3.46)$$

$$q_1 = (1 + \hat{\lambda}) q + \hat{\delta} \quad , \quad (3.47)$$

podemos redefinir

$$q_2 = \hat{\Delta} \quad (3.48)$$

$$q_1 = q + \hat{\Delta} \quad . \quad (3.49)$$

Dessa forma, considerando a expressão para amplitude escrita como

$$\Pi_F(q^2) = -iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left(\frac{i\gamma_5}{[k + q_1 - m]} \frac{i\gamma_5}{[k + q_2 - m]} \right) \quad , \quad (3.50)$$

obtemos

$$\Pi_F(q^2) = -iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left(\frac{\gamma_5 \gamma_5 [(k + q_1) + m] [-(k + q_2) + m^2]}{[(k + q_1)^2 - m] [(k + q_2)^2 - m^2]} \right) . \quad (3.51)$$

Usamos uma mudança de variáveis dada por

$$P_{1\mu} = (k + q_1)_\mu \quad (3.52)$$

e

$$P_{2\nu} = (k + q_2)_\nu \quad (3.53)$$

para simplificar o cálculo do *traço*

$$\begin{aligned} N &= Tr[(\gamma^\mu P_{1\mu} + m)(-\gamma^\nu P_{2\nu} + m)] \\ &= Tr[-\gamma^\mu \gamma^\nu P_{1\mu} P_{2\nu} + \gamma^\mu P_{1\mu} m - \gamma^\nu P_{2\nu} m + m^2] \\ &= -4g^{\mu\nu} P_{1\mu} P_{2\nu} - 4m^2 \\ &= -4(P_1 P_2 + m^2) . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Dessa forma, o numerador de (3.51) pode ser escrito como

$$N = -4[(k + q + \hat{\Delta})(k + \hat{\Delta}) - m^2] . \quad (3.55)$$

Aplicando a Parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x + b]^2} \quad (3.56)$$

na expressão da amplitude, obtemos

$$\Pi_F(q^2) = i4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{(k + \hat{\Delta})(k + q + \hat{\Delta}) - m^2}{[[[(k + q_1)^2 - m^2] - [(k + q_2)^2 - m^2]]x + (k + q_2)^2 - m^2]^2} .$$

Simplificando o denominador, obtemos, finalmente

$$\Pi_F(q^2) = i4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{(k + \hat{\Delta})(k + q + \hat{\Delta}) - m^2}{[[(k + q + \hat{\Delta})^2 - (k + \hat{\Delta})^2]x + (k + \hat{\Delta})^2 - m^2]^2} \quad (3.57)$$

onde $(\hat{\Delta})$ representa os termos não físicos do sistema.

Nesse ponto, os termos não físicos, representados por $(\hat{\Delta})$, aparecem como uma translação no momento interno do *loop*, sempre na forma $(k + \hat{\Delta})$. Uma expansão da expressão em torno de $\hat{\Delta}$ (como faremos posteriormente) (Mota A. L., 1999) revela que os termos dependentes de $\hat{\Delta}$ são termos de superfície e, por isso, ambíguos (Dias E. W., 2004). Uma forma de eliminar tais

termos faz uso de uma invariância identificada em Lagrangianas efetivas a 1-loop por (Chan, L. H. 1986; 1988; 1997), que pode ser representada pela identidade

$$\begin{aligned}
S &= \text{Tr}[\ln(F(k))] \\
&= \text{Tr}[e^{ilx} e^{-ilx} \ln(F(k))] \\
&= \text{Tr}[e^{ilx} \ln(F(k)) e^{-ilx}] \\
&= \text{Tr}[\ln(F(k+l))] \quad ,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

que é um resultado livre dos graus de liberdade não físicos ($\hat{\Delta}$),

$$\Pi_F(q^2) = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k(k+q) - m^2}{[(k+q)^2 - k^2]x + k^2 - m^2]^2} \quad . \tag{3.59}$$

De forma mais compacta com uma mudança de variável ($\xi^2 \equiv (m^2 + q^2 x^2 - q^2 x)$)

$$\begin{aligned}
\Pi_F(q^2) &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k(k+q) - m^2}{[(k+qx)^2 - q^2 x^2 + q^2 x - m^2]^2} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k(k+q) - m^2}{[(k+qx)^2 - \xi^2]^2} \quad .
\end{aligned} \tag{3.60}$$

A fim de exemplificar a equivalência nos resultados independentes do roteamento, a equação (eq. 3.60) é a mesma que a (eq. 3.42) para ($q = -p$), com isso ($\xi = \xi'$) já que os termos relacionados aos momentos externos estão elevados ao quadrado. Realizando a seguinte substituição: $l = qx$ e $l_\mu = q_\mu x$,

$$\begin{aligned}
\Pi_F(q^2) &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k(k+q) - m^2}{[(k+qx)^2 - \xi^2]^2} \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k(k+q) - m^2}{[(k+l)^2 - \xi^2]^2} \quad .
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Ao procedimento representado pela eq. (3.58) damos o nome de "transformação de Chan". Após a aplicação da transformação de Chan, o resultado para a auto-energia do méson pseudo-escalar fica expressa por (3.61). Para o cálculo desta expressão, entretanto, temos de levar em conta outros *termos de superfície* que não são eliminados pela transformação de Chan, por não se relacionar a graus de liberdade não físicos do sistema. Para isso, realizamos uma translação na variável de integração $k \rightarrow k - l$, expondo os *termos de superfície* através da seguinte operação (Mota A. L., 1999)

$$\begin{aligned}
S(k+l) &= \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) S(k) \\
&= S(k) + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} S(k) + \frac{l_\mu l_\nu}{2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} S(k) + \dots \quad ,
\end{aligned}$$

que aplicado na amplitude para auto-energia com roteamento arbitrário fornece

$$\begin{aligned}
\Pi_F(q^2) &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) \left[\frac{(k-l)(k-l+q) - m^2}{[(k-l+l)^2 - \xi^2]^2} \right] \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(k-l)(k-l+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} + \right. \\
&\quad + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k-l)(k-l+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k-l)(k-l+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right] . \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Novamente em termos de qx e q_μ

$$\begin{aligned}
\Pi_F(q^2) &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(k-qx)(k-qx+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} + \right. \\
&\quad + q_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k-qx)(k-qx+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} q_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k-qx)(k-qx+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right] . \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Agora separando a expressão em parcelas com

$$\begin{aligned}
\Pi_{(1)} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(k-qx)(k-qx+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{k^2 - 2kqx + kq + q^2 x^2 - q^2 x - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{k^2 - k(2qx - q) + q^2 x(x-1) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] , \tag{3.64}
\end{aligned}$$

uma parte dessa se anula $[-k(2qx - q)]$ (integrando ímpar com intervalos simétricos),

$$\Pi_{(1)} = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{k^2 + q^2 x(x-1) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] . \tag{3.65}$$

Usando a rotação de Wick,

$$\Pi_{(1)} = -\frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int dk \left[\frac{k^3 (k^2 + q^2 x(x-1) - m^2)}{[k^2 + \xi^2]^2} \right] .$$

Agora aplicando um corte na escala de energia ("*Sharp-Cutoff*")

$$\begin{aligned}
\Pi_{(1)} &= -\frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{k^3(k^2 + q^2 x(x-1) - m^2)}{[k^2 + \xi^2]^2} \\
&= -\frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{[k^2 + \xi^2]^2} + \\
&\quad - \frac{N_c N_s}{2\pi^2} [q^2 x(x-1) - m^2] \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + \xi^2]^2} . \tag{3.66}
\end{aligned}$$

A solução das integrais fica

$$\begin{aligned}
\int_0^\Lambda dk \frac{k^5}{[k^2 + \xi^2]^2} &= \left(\frac{k^2}{2} - \frac{\xi^4}{2[k^2 + \xi^2]} - \xi^2 \ln[k^2 + \xi^2] \right) \\
&= \frac{2\xi^2}{2} \frac{\Lambda^2 + \Lambda^4}{[\xi^2 + \Lambda^2]} - \xi^2 \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] \tag{3.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + \xi^2]^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{k^2 + \xi^2} + \ln[k^2 + \xi^2] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] - \frac{\Lambda^2}{[\xi^2 + \Lambda^2]} \right) . \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão para $(\Pi_{(1)})$

$$\Pi_{(1)} = \frac{N_c N_s}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left(\ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] [m^2 + 2\xi^2 - q^2 x(x-1)] - \frac{\Lambda^2 [m^2 + 2\xi^2 - q^2 x(x-1) + \Lambda^2]}{\xi^2 + \Lambda^2} \right) .$$

Os Termos de Superfície:

$$\begin{aligned}
\Pi'_{ts} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \left[\frac{(k-qx)(k-qx+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_{\nu}} q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \left[\frac{(k-qx)(k-qx+q) - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots] \\
&= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \frac{k^2 - 2kqx + kq + q^2 x^2 - q^2 x - m^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_{\nu}} q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \frac{k^2 - kq(2x-1) + q^2 x(x-1) - m^2}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots] . \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Algumas parcelas são nulas, é necessário calcular apenas

$$\begin{aligned}
\Pi_{ts} &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \frac{k^2 - kq(2x-1)}{[k^2 - \xi^2]^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_{\nu}} q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \frac{k^2 - kq(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots] . \tag{3.70}
\end{aligned}$$

No termo quadrático da expressão anterior adicionamos e subtraímos um termo ξ^2

$$\begin{aligned}\Pi_{ts}^2 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + \xi^2 - \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \\ &+ \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^2 + \xi^2 - \xi^2}{(k^2 - \xi^2)^2} + \dots] \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{ts}^2 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{\xi^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_{\mu x} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{\xi^2}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots] \quad . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Eliminando divergências logarítmicas, resta:

$$\begin{aligned}\Pi_{ts}^2 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_{\mu x} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots] \quad . \end{aligned} \quad (3.73)$$

No cálculo das derivadas

$$q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{k^2 - \xi^2} = q_{\mu x} \frac{-2k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} = -2q_{\mu x} \frac{k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} \quad (3.74)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_{\mu x} \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_{\mu x} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} &= \frac{1}{2} q_{\nu x} \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_{\mu x} \frac{-2k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} \\ &= -q_\nu q_{\mu x} x^2 \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} \\ &= -q_\nu q_{\mu x} x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + k^\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] \\ &= -q_\nu q_{\mu x} x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + k^\mu \frac{2(2k^\nu)}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] \\ &= -q_\nu q_{\mu x} x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} - \frac{4k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.75)$$

Substituindo o resultado na expressão para amplitude com os termos de superfície (TS):

$$\begin{aligned}\Pi_{ts}^2 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [(-2)q_{\mu x} \frac{k^\mu}{[k^2 - \xi^2]^2} + \\ &- q_\nu q_{\mu x} x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} - \frac{4k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] + \dots] \quad . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Eliminando o termo ímpar no integrando,

$$\Pi_{ts}^2 = i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} q_\nu q_{\mu x} x^2 \left[\frac{-g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{4k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] + \dots \quad (3.77)$$

Vamos resolver essa parcela utilizando a seguinte estratégia

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} = \alpha g^{\mu\nu} \quad , \quad (3.78)$$

portanto

$$g_{\mu\nu}I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu}{[k^2 - \xi^2]^3} = \alpha g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4\alpha \quad . \quad (3.79)$$

Podemos identificar

$$\alpha = \frac{1}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \quad , \quad (3.80)$$

reescrevendo na forma

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + \xi^2 - \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - \xi^2 + \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{\xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.81)$$

Substituindo os resultados na expressão para amplitude (Π_{ts}^2),

$$\begin{aligned} \Pi_{ts}^2 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [q_\nu q_\mu x^2 \left[\frac{-g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - \xi^2]^2} + \frac{g^{\mu\nu} \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \right]] \\ &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [q_\nu q_\mu x^2 \left[\frac{g^{\mu\nu} \xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \right]] \\ &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [q^2 x^2 \left[\frac{\xi^2}{[k^2 - \xi^2]^3} \right]] \quad . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Com rotação de Wick e corte no momento de integração

$$\Pi_{ts}^2 = \frac{N_c N_s}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk [q^2 x^2 \left[\frac{k^3 \xi^2}{[k^2 + \xi^2]^3} \right]] \quad , \quad (3.83)$$

a solução dessa integral fica

$$\Pi_{ts}^2 = \frac{N_c N_s}{8\pi^2} \int_0^1 dx [q^2 x^2 \left[\frac{\Lambda^4}{[\Lambda^2 + \xi^2]^2} \right]] \quad . \quad (3.84)$$

Na solução para o termo com divergência linear,

$$\begin{aligned} \Pi_{ts}^1 &= i4N_c N_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [q_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-kq(2x-1)}{[k^2 - \xi^2]^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} q_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-kq(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2}] \quad , \end{aligned} \quad (3.85)$$

cálculando as derivadas no integrando,

$$\begin{aligned} q_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{kq(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} &= -x^2(2x-1)q_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu q_\nu}{(k^2 - \xi^2)^2} \\ \frac{1}{2} q_\nu x \frac{\partial}{\partial k_\nu} q_\mu x \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{-kq(2x-1)}{(k^2 - \xi^2)^2} &= -x^2(2x-1)q^2 \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{(k^2 - \xi^2)^2} - 4 \frac{k^2}{(k^2 - \xi^2)^3} \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$ik_\mu f_\pi = -N_c g_{\pi qq} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr[\gamma_\mu \gamma_5 S(k) S(k-p)] \quad . \quad (3.90)$$

O cálculo do *traço* é realizado no espaço de *sabor*, *cor* e espiniores. $Tr\tau^i \tau^j = 2\delta^{ij}$

$$ik_\mu f_\pi = -N_c g_{\pi qq} 4m p_\mu I(k^2) \quad (3.91)$$

sendo

$$I(k^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]} \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} \quad (3.92)$$

$$g_{\pi qq}^{-2} = 4iGN_c I(0) \quad (3.93)$$

$$f_\pi^2 = -4iN_c m^2 I(0) \quad (3.94)$$

de onde se extrai um resultado livre de regularização (Goldberger-Treiman, 1958)

$$f_\pi^2 g_{\pi qq}^2 = m^2 \quad . \quad (3.95)$$

Outra relação importante pode ser obtida na combinação das relações (eq. 3.15) e (eq. 3.92),

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = m_0 m (2G)^{-1} \quad , \quad (3.96)$$

do condensado de quarks (eq. 2.128) e da (eq. 3.13), temos que

$$m = -2GN_f \langle \bar{u}u \rangle + m_0 \quad , \quad (3.97)$$

unindo as duas equações anteriores

$$f_\pi^2 m_\pi^2 \cong -m_0 \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (3.98)$$

que na aproximação da álgebra de correntes fica

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d) \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle \quad (3.99)$$

obtida em trabalhos de Gell-Mann, Oakes, e Renner (1968).

Do diagrama representado na Figura 3.5 podemos extrair a expressão para o decaimento fraco do pión adicionando um termo de corrente eletrofraca na lagrangiana fermiônica de NJL

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a) \psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \tau^a \psi)^2] \quad . \quad (3.100)$$

Com o processo de bosonização encontramos a *ação efetiva*

$$S_{ef} = - \int d^4 x \left[\frac{1}{2G} (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \frac{1}{g} \sigma s \right] + \\ - iTr \left[\ln \left(1 + \frac{\sigma + i\pi\gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a}{i\partial - M} \right) \right] \quad . \quad (3.101)$$

Os campos σ e π podem estar junto de uma constante de acoplamento g_0 , com uma mudança nos parâmetros: $\sigma, \pi \rightarrow g_0(\sigma, \pi)$ e $G = \frac{g_0^2}{\mu_0^2}$, portanto $\mu_0^2 = \frac{g_0^2}{G}$, a nova expressão fica

$$S_{ef} = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) + \mu_0^2 \sigma s \right] + \\ - iTr \left[\ln \left(1 + \frac{g_0 \sigma + ig_0 \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a}{i\partial - M} \right) \right] \quad (3.102)$$

de onde extraímos a Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = - \frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2 \sigma s + \\ - iTr \left[\ln \left(1 + \frac{g_0 \sigma + ig_0 \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a}{i\partial - M} \right) \right] \quad (3.103)$$

De forma semelhante ao procedimento para auto energia, realizando uma expansão na parcela com o traço

$$\mathcal{L}_{ef} = - \frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma^2 + \pi^2 + s^2) - \mu_0^2 \sigma s + \\ - iTr \left[\left(1 + \frac{g_0 \sigma + ig_0 \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a}{i\partial - M} \right) \right] + \\ + iTr \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{g_0 \sigma + ig_0 \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a}{i\partial - M} \right)^2 \right] + \\ - iTr \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{g_0 \sigma + ig_0 \pi \gamma_5 \tau^a + \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} J_{5\mu}^a}{i\partial - M} \right)^3 \right] + \dots \quad (3.104)$$

Reagrupando os termos

$$\mathcal{L}_{ef} = \left[-\frac{\mu_0^2}{2} + ig_0 Tr \left(\frac{1}{i\partial - M} \right)^2 \right] \sigma^2 + \left[-\frac{\mu_0^2}{2} + ig_0 Tr \left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \right)^2 \right] \pi^2 + \\ + \frac{i}{4} g_0 Tr \left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{i\partial - M} \right) \pi J_{5\mu}^a + \frac{i}{4} g_0 Tr \left(\frac{\gamma_\mu \gamma_5}{i\partial - M} \frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \right) J_{5\mu}^a \pi \dots \quad (3.105)$$

observamos que a terceira parcela está associada com a constante de decaimento fraco. O termo

$$\frac{i}{4} g_0 Tr \left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{i\partial - M} \right) \pi J_{5\mu}^a \quad , \quad (3.106)$$

com uma mudança na constante de acoplamento $g_0 \rightarrow g_{\pi qq}$, é equivalente a

$$ip_\mu f_\pi = i \frac{g_{\pi qq}}{2} Tr \left(\frac{i\gamma_5}{i\partial - M} \frac{\gamma_\mu \gamma_5}{i\partial - M} \right) \quad (3.107)$$

Para o roteamento dos momentos no diagrama da Figura 3.5, temos

$$ip_\mu f_\pi = g_{\pi qq} N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[i\gamma^\mu \gamma^5 \frac{1}{(\not{k} - m)} \frac{i\gamma^5}{(\not{k} - \not{p} - m)} \right] \quad (3.108)$$

Realizando agora a obtenção da constante de decaimento do pión com roteamento arbitrário, representado na Figura (3.6),

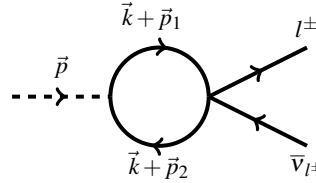


Figura 3.6 – Diagrama do Decaimento com Roteamento Arbitrário.

temos

$$ip_{\mu}f_{\pi} = g_{\pi qq}N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[i\gamma^{\mu}\gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1 - m} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} \right] . \quad (3.109)$$

Identificando

$$I^{\mu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[i\gamma^{\mu}\gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1 - m} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} \right] \quad (3.110)$$

os momentos internos arbitrários são relacionados por: $p_1 - p_2 = p$, onde p é constante. Para resolver essa equação com duas variáveis é preciso mais uma relação com constantes arbitrárias (α, β e Δ), como fizemos no cálculo da auto-energia do pión:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= p \\ \alpha p_1 + \beta p_2 &= \Delta \end{aligned} . \quad (3.111)$$

Com manipulação algébrica podemos escrever

$$p_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} p + \frac{\Delta}{\alpha + \beta} ,$$

e

$$p_2 = \frac{-\alpha}{\alpha + \beta} p + \frac{\Delta}{\alpha + \beta} .$$

Como $p_1 = p + p_2$, temos

$$p_1 = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) p + \frac{\Delta}{\alpha + \beta} \quad (3.112)$$

com uma mudança de variáveis, escolhendo

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\alpha + \beta} &\equiv \hat{\alpha} \\ \frac{\Delta}{\alpha + \beta} &\equiv \hat{\Delta} \end{aligned}$$

podemos reescrever

$$p_1 = (1 + \hat{\alpha})p + \hat{\Delta} = p + \hat{\alpha}p + \hat{\Delta} \quad .$$

Os graus de liberdade $\hat{\alpha}$ e $\hat{\Delta}$ são parâmetros sem significado físico expressos por $\hat{\alpha}p + \hat{\Delta} \equiv \Delta$, disso obtemos

$$p_1 = p + \Delta$$

e

$$p_2 = \Delta \quad .$$

Da expressão para amplitude, podemos reescrever

$$I^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[i\gamma^\mu \gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{\Delta} + \not{p} - m} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{\Delta} - m} \right] \quad . \quad (3.113)$$

O termo não físico pode ser eliminado, normalmente, utilizando a transformação de Chan, de forma que:

$$\begin{aligned} I^\mu &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[i\gamma^\mu \gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} - m} \right] \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{\gamma^\mu \gamma^5 (\not{k} + \not{p}) - m}{(k+p)^2 - m^2} \gamma^5 (\not{k} - m) \right] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4mp^\mu}{(k+p)^2 - m^2} [k^2 - m^2] \quad . \end{aligned}$$

Na ultima expressão foi utilizado a identidade de *traço* (Apêndice). Dessa forma

$$ip_\mu f_\pi = ig_{\pi qq} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-4mp^\mu}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad . \quad (3.114)$$

Usando novamente a Parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x + b]^2} \quad (3.115)$$

e identificando

$$a = [(k+p)^2 - m^2]$$

e

$$b = [k^2 - m^2] \quad ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[[(k+p)^2 - m^2] - [k^2 - m^2]]x + [k^2 - m^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[p^2x + 2k \cdot px + k^2 - m^2]^2} = I \quad . \end{aligned}$$

É conveniente reescrever: $2k \cdot p + k^2 = (k + px)^2 - p^2x^2$, e assim

$$I = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k + px)^2 - p^2x^2 + p^2x - m^2]^2} \quad . \quad (3.116)$$

Definindo um novo parâmetro ($-\xi^2 = -p^2x^2 + p^2x - m^2$) para escrever de forma mais compacta, temos

$$I = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k + px)^2 - \xi^2]^2} \quad . \quad (3.117)$$

Finalmente, inserindo esse resultado na expressão (3.114), temos

$$ip_\mu f_\pi = -4g_{\pi\bar{q}q}N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{mp^\mu}{[(k + px)^2 - \xi^2]^2} \quad . \quad (3.118)$$

Na seqüência, devemos realizar uma mudança de variável de integração $k \rightarrow k - px$, como consequência dessa operação surgem os chamados "termos de superfície". Isso representa uma translação por um fator $\left(\exp[l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}] \right)$ (Mota A. L., 1999)

$$\begin{aligned} S(k+l) &= \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) S(k) \\ &= S(k) + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} S(k) + \frac{l_\mu l_\nu}{2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} S(k) + \dots \end{aligned} \quad (3.119)$$

Fazendo uma translação com $l = px$ e $l_\mu = p_\mu x$, dessa forma, a constante de decaimento fraco do pión é dada por:

$$\begin{aligned} ip_\mu f_\pi &= -4g_{\pi\bar{q}q}N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{mp^\mu}{[(k + px)^2 - \xi^2]^2} \\ &= -4g_{\pi\bar{q}q}N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{mp^\mu}{[(k+l)^2 - \xi^2]^2} \\ &= -4g_{\pi\bar{q}q}N_cN_s \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp\left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) \left[\frac{mp^\mu}{[(k-l+l)^2 - \xi^2]^2} \right] \\ &= -4mg_{\pi\bar{q}q}N_cN_s p_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\left[\frac{1}{[(k)^2 - \xi^2]^2} \right] + l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[(k)^2 - \xi^2]^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.120)$$

onde a primeira parcela sem os termos de superfície é

$$I_1 = -4mg_{\pi\bar{q}q}N_cN_s p_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \quad . \quad (3.121)$$

aplicando rotação de Wick, obtemos

$$I_1 = \frac{i}{2\pi^2} mg_{\pi\bar{q}q}N_cN_s p_\mu \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{k^3}{[k^2 + \xi^2]^2} \quad . \quad (3.122)$$

Com o resultado da integral chegamos em

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{2\pi^2} mg_{\pi\bar{q}q}N_cN_s p_\mu \int_0^1 dx \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{[k^2 + \xi^2]^2} + \ln[k^2 + \xi^2] \right) \Big|_0^\Lambda \\ &= \frac{i}{2\pi^2} mg_{\pi\bar{q}q}N_cN_s p_\mu \int_0^1 dx \left(\ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \xi^2} \right) \quad . \end{aligned}$$

Para a parcela dos Termos de Superfície, temos:

$$I_{ts} = -4mg_{\pi\bar{q}q}N_cN_s p_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \frac{1}{2} l_\nu \frac{\partial}{\partial k_\nu} l_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k^2 - \xi^2]^2} \right] + \dots \right) \quad .$$

Descartando os termos com divergência linear que se anulam naturalmente, temos

$$i p_\mu f_\pi = \frac{i}{4\pi^2} g_{\pi\bar{q}q}N_cN_s m p_\mu \int_0^1 dx \left(\ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right] - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \xi^2} \right) \quad , \quad (3.123)$$

que nos fornece, portanto, o segundo ingrediente da relação de Goldberger-Treiman, ou seja, a constante de decaimento fraco do pión. Resta agora determinarmos, da auto-energia do pión, a constante de acoplamento entre o pión e quarks.

3.3 CONSTANTE DE ACOPLAMENTO

A constante de acoplamento entre quarks e um pión ($g_{\pi qq}$) pode ser extraída da expansão perturbativa (3.8) e calculada através da expressão para auto-energia do pión, usando o resultado obtido na eq. (3.88)

$$g_{\pi\bar{q}q}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_F(q^2)}{\partial q^2} \right)^{-1} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \quad .$$

Realizando a derivada em relação ao momento externo (q^2), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_{\pi\bar{q}q}^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} &= \left[\frac{N_c N_s}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ -\frac{\Lambda^2(x^2-x)[3m^2+2q^2x^2-2q^2x-q^2x(x-1)]}{(x^2q^2+m^2-xq^2)^2 \left(1+\frac{\Lambda^2}{x^2q^2+m^2-xq^2}\right)} + \right. \\
&+ \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{x^2q^2+m^2-xq^2} \right) [2x^2-2x-x(x-1)] + \\
&+ \frac{\Lambda^2[-2x^2+2x-x(x-1)]}{x^2q^2+\Lambda^2+m^2-xq^2} + \\
&- \frac{\Lambda^2[-m^2-2q^2x^2+2q^2x-q^2x(x-1)-\Lambda^2](x^2-x)}{(x^2q^2+\Lambda^2+m^2-xq^2)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{x^2\Lambda^4}{(x^2q^2+\Lambda^2+m^2-xq^2)^2} - \frac{q^2x^2\Lambda^4(x^2-x)}{(x^2q^2+\Lambda^2+m^2-xq^2)^3} + \\
&\left. + \frac{1}{2} \frac{(-2x^2+x)\Lambda^4}{(x^2q^2+\Lambda^2+m^2-xq^2)^2} - \frac{(-2x^2+x)q^2\Lambda^4(x^2-x)}{(x^2q^2+\Lambda^2+m^2-xq^2)^3} \right] \Big|_{q^2=m_\pi^2} \quad (3.124)
\end{aligned}$$

Em termos de ($\xi^2 = m^2 + q^2x^2 - q^2x$), a expressão é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_{\pi\bar{q}q}^2} \Big|_{q^2=m_\pi^2} &= \left[\frac{N_c N_s}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ -\frac{\Lambda^2(x^2-x)[2m^2+\xi^2]}{(\xi^2)^2 \left(1+\frac{\Lambda^2}{\xi^2}\right)} + \right. \\
&+ \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\xi^2} \right) [x^2-x] + \\
&+ \frac{\Lambda^2[-3x^2+3x]}{\xi^2+\Lambda^2} + \\
&- \frac{\Lambda^2[-m^2-2q^2x^2+2q^2x-q^2x(x-1)-\Lambda^2](x^2-x)}{(\xi^2+\Lambda^2)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{x^2\Lambda^4}{(\xi^2+\Lambda^2)^2} - \frac{q^2x^2\Lambda^4(x^2-x)}{(\xi^2+\Lambda^2)^3} + \\
&\left. + \frac{1}{2} \frac{(-2x^2+x)\Lambda^4}{(\xi^2+\Lambda^2)^2} - \frac{(-2x^2+x)q^2\Lambda^4(x^2-x)}{(\xi^2+\Lambda^2)^3} \right] \Big|_{q^2=m_\pi^2} \quad (3.125)
\end{aligned}$$

3.4 A RELAÇÃO DE GOLDBERGER-TREIMAN

As expressões encontradas para o decaimento fraco do pión, eq. (3.123), e para o acoplamento entre pions e quarks, eq. (3.125), são adequadas para o cálculo numérico destas quantidades. Para verificarmos a relação de Goldberger-Treiman no contexto do modelo de Nambu-Jona-Lasínio, é adequado retornarmos um pouco, às expressões (3.114), para a constante de decaimento fraco do pión, e (3.59), para a auto-energia do pión (integrada, porém, no

parâmetro de Feynman), ou seja:

$$iq_\mu f_\pi = -4imN_c q^\mu g_{\pi qq} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} \quad (3.126)$$

e

$$\Pi_F(q^2) = 4iN_c N_s \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + kq - m^2}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} \quad (3.127)$$

O numerador de (3.127) pode ser escrito como

$$k^2 + kq - m^2 = \frac{1}{2}(2k^2 + 2kq - 2m^2) = \frac{1}{2}([k^2 + 2kq + q^2 - m^2] + (k^2 - m^2) - q^2) \quad (3.128)$$

que, substituído em (3.127), resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_F(q^2) &= \frac{4iN_c N_s}{2} \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+q)^2 - m^2]} + \right. \\ &\quad \left. - q^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} \right] \quad (3.129) \end{aligned}$$

A segunda integral no lado direito de (3.129) é quadraticamente divergente e, ao ser transladada da forma $(k+q \rightarrow k)$, gera *termos de superfície*:

$$\begin{aligned} I_q &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+q)^2 - m^2} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} + q^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^\mu q^\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\mu \partial k^\nu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \dots \right]. \quad (3.130) \end{aligned}$$

Os termos não mostrados explicitamente em (3.130) se anulam, por serem integrais de superfície convergentes, como anteriormente mencionado. O segundo termo no lado direito da eq. (3.130) se anula por ter integrando ímpar em (k) . Assim:

$$I_q = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{q^\mu q^\nu}{2} \left(\frac{8k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^3} - \frac{2g_{\mu\nu}}{[k^2 - m^2]^2} \right) \right]. \quad (3.131)$$

Usando integração simétrica em (3.131), ou seja, fazendo $(k_\mu k_\nu \rightarrow \frac{k^2 g_{\mu\nu}}{4})$, e contraindo com $q^\mu q^\nu$, temos

$$\begin{aligned} I_q &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} + q^2 m^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^3} \\ &= I_1 + q^2 m^2 I_3 \quad , \quad (3.132) \end{aligned}$$

onde, para simplificar as expressões, denominamos as integrais no segundo membro de (3.132) por I_1 e I_3 respectivamente.

A terceira integral no lado direito da equação (3.129) pode ser expandida em uma série de potências em q , resultando em:

$$\begin{aligned} I_b &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \frac{q^\mu q^\nu}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k^\mu \partial k^\nu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \dots \right) \right] \quad (3.133) \end{aligned}$$

A exemplo do que foi feito anteriormente, calculando-se explicitamente as derivadas em k , eliminando-se os termos de integrando ímpar e realizando a integração simétrica, temos:

$$\begin{aligned} I_b &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + q^2 m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^4} + \mathcal{O}(q^4) \\ &= I_2 + q^2 m^2 I_4 + \mathcal{O}(q^4) \quad . \end{aligned} \quad (3.134)$$

Substituindo as equações (3.132) e (3.134) em (3.129), encontramos:

$$\begin{aligned} \Pi_F(q^2) &= 2iN_c N_s (I_1 + I_q - q^2 I_b) \\ &= 2iN_c N_s (2I_1 + q^2 m^2 I_3 - q^2 I_2 - q^4 m^2 I_4 + \mathcal{O}(q^6)) \quad . \end{aligned} \quad (3.135)$$

A constante de acoplamento entre píons e quarks pode agora ser obtida a partir de (3.135) como

$$\left. \frac{\partial \Pi_F(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=m_\pi^2} = \frac{1}{(g_{\pi qq})^2} = 2iN_c N_s (-I_2 + m^2 I_3 - 2q^2 m^2 I_4 + \mathcal{O}(q^4)) \quad . \quad (3.136)$$

Por outro lado, com f_π dada por (3.126) e, observando que a integral em (3.126) é igual à I_b , eq. (3.133), temos:

$$\begin{aligned} f_\pi &= -4mg_{\pi qq} N_c I_b \\ &= -4mg_{\pi qq} N_c (I_2 + q^2 m^2 I_4 + \mathcal{O}(q^4)) \quad . \end{aligned} \quad (3.137)$$

Podemos reescrever (3.137) como:

$$\begin{aligned} f_\pi &= \frac{2}{N_s} mg_{\pi qq} (-2iN_c N_s) (I_2 - m^2 I_3 + 2q^2 m^2 I_4 + m^2 I_3 - q^2 m^2 I_4 + \mathcal{O}(q^4)) \\ &= \frac{2}{N_s} mg_{\pi qq} [2iN_c N_s (-I_2 + m^2 I_3 - 2q^2 m^2 I_4)] (1 + \Delta_{GT}) \end{aligned} \quad (3.138)$$

com

$$\Delta_{GT} = \left. \frac{m^2 I_3 - q^2 m^2 I_4}{-I_2 + m^2 I_3 - 2q^2 m^2 I_4} \right|_{q^2=m_\pi^2} \quad . \quad (3.139)$$

O termo Δ_{GT} é conhecido como discrepância Goldberger-Treiman (Nasrallah N.F., 2000), e deve se anular no limite quiral, sendo pequena para m_π^2 finito. Observando que o termo entre colchetes na eq. (3.138) é exatamente $g_{\pi qq}^{-2}$, eq. (3.136), e que $N_s = 2$, temos:

$$f_\pi = mg_{\pi qq} g_{\pi qq}^{-2} (1 + \Delta_{GT}) \quad , \quad (3.140)$$

ou

$$g_{\pi qq} f_\pi = m(1 + \Delta_{GT}) \quad . \quad (3.141)$$

A discrepância Goldberger-Treiman pode ser calculada explicitamente resolvendo as integrais I_2, I_3 e I_4 , que resulta em :

$$I_2 = \frac{i}{16\pi^2} \left(\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right) \quad , \quad (3.142)$$

$$I_3 = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + m^2)^2} \quad (3.143)$$

e

$$I_4 = \frac{i}{96\pi^2} \frac{1}{m^4} \frac{\Lambda^4 (\Lambda^2 + 3m^2)}{[\Lambda^2 + m^2]^3} \quad . \quad (3.144)$$

Substituindo na eq. (3.139) e tomando o limite quiral, com $m \rightarrow 0$, $m_\pi \rightarrow 0$ e $\frac{m_\pi}{m} = \alpha$, com $\alpha = \text{constante}$, teremos :

$$\lim_{m \rightarrow 0} \Delta_{GT} = \frac{3 + \alpha^2}{6 \ln(\Lambda^2/m^2) + \alpha^2 - 3} \Big|_{m \rightarrow 0} = 0 \quad . \quad (3.145)$$

Assim, no limite quiral, obtemos, de (3.141),

$$g_{\pi qq} f_\pi = m \quad , \quad (3.146)$$

a relação de Goldberger-Treiman. Uma observação importante é notar que as expressões (3.126) e (3.127) foram tomadas após a eliminação dos termos ambíguos (não físicos) pelo uso da Transformação de Chan. Nesse contexto, foi possível provar a relação de Goldberger-Treiman no modelo de Nambu-Jona-Lasínio.

4 AMBIGUIDADES NO ACOPLAMENTO

No cálculo da constante de acoplamento sem o uso da Transformação de Chan, da expressão para auto-energia, equação (3.38), temos

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i4N_cN_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k(k-p) - m^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (4.1)$$

Reescrevendo o numerador da equação (4.1) na forma

$$k^2 - kp - m^2 = \frac{1}{2}(2k^2 - 2kp - 2m^2) = \frac{1}{2}([k^2 - 2kp + p^2 - m^2] + [k^2 - m^2] - p^2) , \quad (4.2)$$

obtemos

$$\Pi_{PS}(p^2) = -i\frac{4N_cN_s}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)} + \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} - p^2 \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \right] . \quad (4.3)$$

A segunda parcela da equação (4.3), transladada na forma ($k-p \rightarrow k$) gera termos de superfície, assim

$$I_p = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} - p^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \frac{p^\mu p^\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^\mu \partial k^\nu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \dots \right] \quad (4.4)$$

Os termos ocultados em (eq. 4.4) são integrais de superfície convergentes e se anulam. O segundo termo possui integrando ímpar na variável (k), portanto também se anula, resta apenas

$$I_p = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{p^\mu p^\nu}{2} \left(\frac{8k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^3} - \frac{2g_{\mu\nu}}{[k^2 - m^2]^2} \right) \right] . \quad (4.5)$$

Usando integração simétrica ($k_\mu k_\nu \rightarrow \frac{k^2 g_{\mu\nu}}{4}$) e contraindo com $p^\mu p^\nu$, temos

$$\begin{aligned} I_p &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} + p^2 m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^3} \\ &= I_1 + p^2 m^2 I_3 , \end{aligned} \quad (4.6)$$

que é um resultado equivalente à equação (3.132).

A terceira parcela em (eq. 4.3) expandida em série de potências em p resulta em

$$\begin{aligned} I_\beta &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \frac{p^\mu p^\nu}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k^\mu \partial k^\nu} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) + \dots \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Após o cálculo das derivadas na equação (4.7), eliminando os termos com integrando ímpar e também realizando integração simétrica, obtemos

$$\begin{aligned} I_\beta &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + p^2 m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^4} + \mathcal{O}(p^4) \\ &= I_2 + p^2 m^2 I_4 + \mathcal{O}(p^4) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo os resultados de I_p (eq. 4.6) e I_β (eq. 4.8) na expressão para auto-energia (eq. 4.3) temos

$$\begin{aligned} \Pi_{PS}(p^2) &= 2iN_c N_s (I_1 + I_p - p^2 I_\beta) \\ &= 2iN_c N_s \left(2I_1 + p^2 m^2 I_3 - p^2 I_2 - p^4 m^2 I_4 + \mathcal{O}(p^6) \right) . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Com isso, podemos extrair a constante de acoplamento com auxílio da equação (3.135) aplicada na (eq. 4.9) que resulta em

$$\left. \frac{\partial \Pi_{PS}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_\pi^2} = \frac{1}{(g_{\pi qq})^2} = 2iN_c N_s (-I_2 + m^2 I_3 - 2p^2 m^2 I_4 + \mathcal{O}(p^4)) . \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é equivalente a (eq. 3.136), com isso, os resultados aparentam ser independentes do uso da Transformação de Chan.

5 CONCLUSÃO

A simetria quiral, no modelo de Nambu-Jona-Lasinio, se expressa de diversas formas em diversos resultados do modelo. De particular interesse para esse trabalho é a relação de Goldberger-Treiman (GT).

$$f_{\pi}g_{\pi qq} = m \quad (5.1)$$

que deve ser satisfeita no limite quiral. Trabalhos anteriores (Dias E. W., 2004) mostram que, no âmbito do modelo NJL, para preservação da relação GT é necessário a anulação dos termos de superfície do modelo. Isso só é possível em alguns esquemas de regularização (Regularização Dimensional (RD) ou Pauli - Villars, por exemplo). Entretanto, o modelo de NJL, por ser não renormalizável, apresenta uma série de questões delicadas quanto à adoção destes esquemas. Na regularização dimensional, por exemplo, temos o problema da definição da matriz γ^5 em dimensões arbitrárias, uma vez que é um objeto bem definido apenas em 4 dimensões. Além disso, a RD elimina a divergência quadrática do modelo, e esta é necessária para a correta interpretação do pión como um bóson de Goldstone (Klevansky S. P., 1992). Pauli-Villars, ou, na realidade, uma modificação no esquema Pauli-Villars, poderia ser empregado para contornar os problemas previamente citados, mas com a consequente introdução de campos auxiliares não físicos (que se desacoplarão do modelo no limite de cut-off infinito). Como NJL não é renormalizável, entretanto, esse limite não pode ser tomado.

Um estudo independente de regularização pode ser conduzido no contexto da chamada Regularização Implícita (Dias E. W. et al, 2006). Essa abordagem traz a vantagem de simplificar o estudo das simetrias do modelo, e aponta para a necessidade da supressão de alguns dos termos de superfície para a preservação dessas simetrias. A adoção direta de identidades que anulam automaticamente os termos de superfície, no entanto, parece comprometer a determinação precisa de observáveis mesônicos (Guimarães A. V., 2017 ; Vale P. R., 2020). Para contornar este problema, foi proposta, anteriormente, a adoção da eliminação de parte dos termos de superfície pela transformação de Chan (Guimarães A. V., 2017 ; Vale P. R., 2020), aqueles ligados a quantidades não físicas introduzidas no modelo por adoção de diferentes roteamentos dos momentos internos nos loops. A transformação não elimina, no entanto, outros termos de superfície que não se relacionam a essas ambiguidades, termos estes que vêm se mostrando necessários para um melhor ajuste do modelo de NJL aos dados experimentais. Além disso, esse procedimento permite o emprego do esquema de regularização "Sharp-Cutoff" sem violar as simetrias do modelo, um esquema de regularização que não apresenta as dificuldades presentes pelos outros esquemas previamente mencionados.

Nesse trabalho, pôde ser verificado consequências da relação de Goldberger-Treiman no contexto do modelo de NJL em SU(2) com regularização *Sharp-Cutoff*. Para isso, desenvolvemos o cálculo da auto-energia do pión (eq. 3.135), a constante de acoplamento entre um pión

um quark e um antiquark (eq. 3.136) e a constante de decaimento fraco do pión (eq. 3.138), utilizando a transformação de Chan os *termos de superfície* não físicos são eliminados no limite quiral mostrando a correspondência com a relação de Goldberger-Treiman. Dos resultados, tal abordagem para descrição da dinâmica de mésons leves em baixas energias se mostra propícia na correspondência com os argumentos esperados da quebra de simetria quiral na QCD e da hipótese de conservação parcial da corrente axial (PCAC).

6 APÊNDICES

Nos apêndices estão apresentadas algumas identidades e passagens de cálculos omitidos nos textos das seções anteriores, para unidade de medida comumente usada na física de partículas elementares da ordem de Elétron-Volt ($1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$) na chamada *unidade natural*, onde a velocidade da luz e a constante de Planck dividida por 2π são tomadas em uma unidade ($c = \hbar = 1$), assim os parâmetros de *massa*, *energia* e *momento* possuem a mesma dimensão (MeV, GeV, TeV, \dots). Já os parâmetros de *espaço* e *tempo* são da ordem de ($MeV^{-1}, GeV^{-1}, \dots$).

Diferente da *barra* utilizada na constante de Planck (\hbar) que é equivalente a ($\hbar/2\pi$), nos operadores esse símbolo representa um produto com matrizes gamma de Dirac ($\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, ou, $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$).

Métrica no espaço de Minkowsky:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (6.1)$$

Para os quadrivetores:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \vec{x}) = (x^0, x_1\hat{x}, x_2\hat{y}, x_3\hat{z}) \\ x_\mu &= g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}) \end{aligned}$$

onde os índices gregos representam (0,1,2,3), que é equivalente aos parâmetros de tempo e coordenadas espaciais (t,x,y,z). No produto escalar índices repetidos representam somatórios:

$$a^\mu b_\mu = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 . \quad (6.2)$$

Operador de derivada :

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) ; \\ \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right) . \end{aligned}$$

Variação infinitesimal em coordenadas hiperesféricas para n-dimensões,

$$d^n k = k^{n-1} dk \text{sen}^{n-2}(\theta_{n-2}) \text{sen}^3(\theta_3) d\theta_3 \text{sen}^2(\theta_2) d\theta_2 \text{sen}(\theta_1) d\phi , \quad (6.3)$$

para quatro dimensões

$$d^4k = k^3 dk \text{sen}^2(\theta_2) d\theta_2 \text{sen}(\theta_1) d(\theta_1) d\phi \quad . \quad (6.4)$$

No espaço Euclidiano: $d^4k' = dk'_0 dk_1 dk'_2 dk'_3$

O procedimento de transição do espaço de Minkowsky para o espaço Euclidiano pela Rotação de Wick que aborda a coordenada temporal no plano complexo, tomando $dk'_0 = idk_4$, portanto $d^4k' \rightarrow dK_E = idk_4 dk_1 dk_2 dk_3$

$$k'^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \rightarrow k_E^2 = -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \quad .$$

Com isso, o *pólo* no denominador para frações quando (k=M) pode ser contornado :

$$\frac{1}{(k^2 - M^2)^2} = \frac{1}{(-k_E^2 - M^2)^2} = \frac{1}{(k_E^2 + M^2)^2} \quad .$$

Podemos reescrever, por exemplo, para expressão abaixo

$$I_{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - M^2]^2} \quad \rightarrow \quad I_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi^2} i \int_0^\infty \frac{k_E^3 (k_\mu k_\nu)}{[k_E^2 + M^2]^2} dk_E \quad (6.5)$$

onde $d^4k_E = k^3 dk \text{sen}(\theta_1) d\theta_1 \text{sen}^2(\theta_2) d\theta_2 d\phi$, com θ_1 e θ_2 variando de 0 a π e ϕ variando de 0 a 2π .

Teoremas de Traço:

1. $Tr(1) = 4$;
2. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$;
3. $Tr(\gamma_\mu \gamma^\mu) = 0$;
4. $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda})$;
5. $Tr(\gamma^5 \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$
6. $Tr(\not{a}\not{b}) = 4a.b$;
7. $Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a.b.c.d - a.c.b.d + a.d.b.c)$;
8. O traço do produto de um número ímpar de matrizes gama é zero.

6.1 GRUPOS DE SIMETRIA

Algumas simetrias podem ser representadas por grupos *abelianos* e não-abelianos associado ao comutador dos parâmetros do grupo que é um sistema constituído por um conjunto (C) e operações que satisfazem certas propriedades (Neto J. B., p.136). Na Algebra de Lie no Grupo especial unitário, SU(N), os geradores são:

$$[T_\alpha, T_\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma \quad (6.6)$$

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2i} \quad \text{para } SU(2)$$

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2i} \quad \text{para } SU(3)$$

No Grupo SU(2), as transformações podem ser representadas pelo fator

$$U = e^{i\theta_\alpha S_\alpha} \quad , \text{ com } \{ \alpha = 1, 2, 3 \} \quad , \quad (6.7)$$

para um caso de spin 1/2 o cumutador pode ser apresentado em termos do tensor de Levi-Civita como fator de estrutura do grupo⁵

$$[S_\alpha, S_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma \quad (6.9)$$

onde $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, as matrizes de Pauli representam

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Algumas operações envolvendo as matrizes de Pauli:

$$\{ \sigma_i, \sigma_j \} = 2\delta_{ij} \quad ; \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad ; \quad (6.10)$$

$$\det(\sigma_i) = 1 \quad ; \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_i^2 + \vec{\sigma}_j^2 + \vec{\sigma}_k^2 \quad . \quad (6.11)$$

⁵ Tensor-Antissimétrico:

$$f^{abc} \rightarrow \varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1 & \text{para permutações cíclicas (pares) de 123} \\ 0 & \text{para índices iguais} \\ -1 & \text{para permutações anticíclicas (ímpares) de 123} \end{cases} \quad (6.8)$$

Matrizes gamma de Dirac (Convensão de "Bjorken e Drell"):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} .$$

Operação envolvendo as matrizes de Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} . \quad (6.12)$$

Transformação no Grupo SU(3):

$$U = e^{i\alpha_a \lambda_a} ; \quad (6.13)$$

$$[\lambda_a, \lambda_b] = if_{abc} \lambda_c . \quad (6.14)$$

Com as Matrizes de Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Constante de estrutura no Grupo SU(3):

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 ; \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} ; \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned} \quad (6.15)$$

Para o comutador

$$f^{abc} = \frac{1}{4i} \text{Tr}[\lambda^a, \lambda^b] \lambda^c \quad . \quad (6.16)$$

6.2 ALGEBRA DE CORRENTES NA QCD

Abordagens históricas sobre o desenvolvimento do formalismo na *Algebra de Correntes* incluindo aplicações pode ser encontrado com diversidade na literatura (Bjorken J.D., Nauenberg M., 1968 ; Srednicki M., 2007). Em uma breve apresentação de algumas relações, da equação de Campos de Yang-Mills (Berlmann R. A., 1996, p.164)

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (6.17)$$

com corrente Vetorial Não-Abeliana

$$j_\nu = j_\nu^a T^a \quad (6.18)$$

$$j_\nu^a = -i \bar{\psi} \gamma_\nu T^a \psi \quad (6.19)$$

é extraído o resultado para conservação da corrente

$$D_\nu j^\nu = D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [D_\nu, D_\mu] F^{\mu\nu} \quad (6.20)$$

$$= \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0 \quad . \quad (6.21)$$

Na transformação de Simetria Vetorial Local $SU_V(N)$

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(-\alpha^a(x) T^a) \psi \quad (6.22)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} \exp(\alpha^a(x) T^a) \quad (6.23)$$

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = \exp(-\alpha^a(x) T^a) (V_\mu + \partial_\mu) \exp(\alpha^a(x) T^a) \quad (6.24)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \exp(-\alpha^a(x) T^a) A_\mu \exp(\alpha^a(x) T^a) \quad (6.25)$$

as matrizes T^a são anti-hermitianas. Transformações infinitesimais de calibre vetorial:

$$\delta \psi = -\alpha^a(x) T^a \psi \quad (6.26)$$

$$\delta \bar{\psi} = \bar{\psi} \alpha^a(x) T^a \quad (6.27)$$

$$\delta V_\mu = D_\mu \alpha \quad (6.28)$$

$$\delta A_\mu = [A, \alpha] \quad (6.29)$$

Derivada Covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + [V_\mu, \quad] \quad (6.30)$$

No caso da transformação Axial define-se o operador de paridade (Apêndice 5.3):

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad , \quad (6.31)$$

onde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$,

$$\psi_{R,L} \equiv \psi_\pm = P_\pm \psi \quad (6.32)$$

com "quiralidade" ± 1 .

Essa operação envolvendo a matriz γ_5 corresponde a uma transformação axial de *sabor*, alterando a propriedade de *paridade* dos campos

$$\gamma_5 \psi_\pm = \pm \psi_\pm \quad , \quad (6.33)$$

no limite em que a massa é nula, quiralidade é equivalente à helicidade. Transformação Quiral:

$$\psi \rightarrow e^{-\beta(x)\gamma_5} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-\beta(x)\gamma_5} \quad . \quad (6.34)$$

Com a derivada covariante em função dessas tranformações (Vetorial e Axial)

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + V_\mu + A_\mu \gamma_5 \quad , \quad (6.35)$$

temos a lagrangiana

$$\mathcal{L}(V_\mu, A_\mu) = i\bar{\psi}(\not{\partial} + \not{V} + \not{A}\gamma_5)\psi - m\bar{\psi}\psi \quad . \quad (6.36)$$

Campos não-abelianos com o comutador $[T^a, T^b] = f^{abc}T^c$:

Vetorial: $V_\mu = V_\mu^a T^a$;

Axial: $A_\mu = A_\mu^a T^a$;

f^{abc} é a constante de estrutura totalmente antissimétrica, quando $f^{abc} = 0$ retornamos ao caso Abeliano. Na Simetria Axial Local $SU_A(N)$, as transformações infinitesimais representam

$$\delta \psi = -\beta^a(x)T^a \gamma_5 \psi \quad (6.37)$$

$$\delta \bar{\psi} = -\bar{\psi} \beta^a(x)T^a \gamma_5 \quad (6.38)$$

$$\delta V_\mu = [A_\mu, \beta] \quad (6.39)$$

$$\delta A_\mu = D_\mu \beta \quad (6.40)$$

Combinação das transformações $SU_V(N) \times SU_A(N)$:

$$\delta \psi = (-\alpha^a(x)T^a - \beta^a(x)T^a \gamma_5)\psi \quad (6.41)$$

$$\delta \bar{\psi} = \bar{\psi}(\alpha^a(x)T^a - \beta^a(x)T^a \gamma_5) \quad (6.42)$$

$$\delta V_\mu = D_\mu \alpha + [A_\mu, \beta] \quad (6.43)$$

$$\delta A_\mu = D_\mu \beta + [A_\mu, \alpha] \quad (6.44)$$

Com as Correntes:

Vetorial: $j_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu T^a \psi$;

Axial: $j_\mu^{5a} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 T^a \psi$;

Pseudoscalar: $P^a = \bar{\psi} \gamma_5 T^a \psi$.

Na correspondência entre os conjuntos de simetria $SU_V(N) \times SU_A(N)$ e $SU_R(N) \times SU_L(N)$, a Lagrangiana deve ser invariante sob transformações no campo de quarks reescritos em termos de espiniores de esquerda (L) e direita (R):

$$\psi = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi + \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = P_L \psi + P_R \psi = \psi_L + \psi_R \quad . \quad (6.45)$$

Nesse formalismo as correntes são descritas como

$$j_\mu^L = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L = \bar{\psi} \gamma_\mu (1/2)(1 + \gamma_5) \psi \quad (6.46)$$

e

$$j_\mu^R = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R = \bar{\psi} \gamma_\mu (1/2)(1 - \gamma_5) \psi \quad (6.47)$$

que apresenta as seguintes relações:

$$j_\mu^a = j_\mu^{La} + j_\mu^{Ra} \quad ; \quad j_\mu^{La} = \frac{1}{2}(j_\mu^a + j_\mu^{5a}) \quad ; \quad j_\mu^{5a} = j_\mu^{La} - j_\mu^{Ra} \quad ; \quad j_\mu^{Ra} = \frac{1}{2}(j_\mu^a - j_\mu^{5a}) \quad ;$$

$$A_\mu^L = V_\mu + A_\mu \quad ; \quad A_\mu^R = V_\mu - A_\mu \quad ; \quad (6.48)$$

$$A_\mu = \frac{1}{2}(A_\mu^L - A_\mu^R) \quad ; \quad V_\mu = \frac{1}{2}(A_\mu^L + A_\mu^R) \quad . \quad (6.49)$$

Para baixas energias , a simetria $SU(N)_V \times U(N)_V$ permanesse inalterada, enquanto que para axial satisfaz a igualdade $SU(N)_A \equiv [SU(N)_L \times SU(N)_R]/SU(N)_V$.

6.3 ASPECTOS DA SIMETRIA QUIRAL

Para Lagrangiana de férmions livres na representação quiral com os campos espinoriais com lateralidade de esquerda (L) ou direita (R)

$$\mathcal{L} = \sum_{\psi} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q) \psi \quad , \quad (6.50)$$

a equação de movimento

$$(i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m) \psi(x) = 0 \quad (6.51)$$

em termos dos campos de esquerda (L) e de direita (R)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

temos

$$i \begin{pmatrix} \partial_0 \Psi_L \\ \partial_0 \Psi_R \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -\sigma^i \partial_i \Psi_L \\ \sigma^i \partial_i \Psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (6.53)$$

podendo reescrever a equação de movimento na forma

$$i\partial_0 \psi_L + i\sigma^i \partial_i \psi_L - m\psi_R = 0 \quad (6.54)$$

e

$$i\partial_0 \psi_R - i\sigma^i \partial_i \psi_R - m\psi_L = 0 \quad (6.55)$$

Na representação de Fourier

$$p_0 \psi_L + i\sigma^i p_i \psi_L - m\psi_R = 0 \quad (6.56)$$

$$p_0 \psi_R - i\sigma^i p_i \psi_R - m\psi_L = 0 \quad (6.57)$$

é introduzido o operador de helicidade ($\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$, com $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{p_0}$), onde

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_L = -\psi_L \quad (6.58)$$

e

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_R = \psi_R \quad (6.59)$$

Nessa representação o bi-espinor de esquerda tem helicidade negativa (-1) enquanto o de direita apresenta valor positivo (+1). Os operadores de projeção de forma mais explicita são:

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \quad ; \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad ; \quad \bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 + \gamma_5}{2}$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

Definição da Matriz γ_5 :

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad .$$

$\gamma^5\gamma^5 = 1$, com propriedades de anticomutação

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad , \quad \{\gamma^5, \gamma^0\} = 0 \quad .$$

Propriedades dos operadores de projeção:

$$P_L + P_R = 1 \quad ; \quad P_L P_R = 0 \quad ; \quad P_R^2 = P_R \quad ; \quad P_L^2 = P_L \quad ; \quad \gamma_\mu P_L = P_R \gamma_\mu \quad ; \quad \gamma_\mu P_R = P_L \gamma_\mu \quad ;$$

$$P_L \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \Psi_L \quad ; \quad (6.62)$$

$$P_R \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \Psi_R \quad . \quad (6.63)$$

Nesse formalismo, a Lagrangiana pode ser reescrita com esses campos de lateralidade com

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu)\Psi_L(x) + \bar{\Psi}_R(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu)\Psi_R(x) \quad (6.64)$$

Para transformações de simetria no grupo $(U(1)_L X U(1)_R)$ os campos passam por mudanças com fases constantes (α_L e α_R) e arbitrárias:

$$U(1)_L : \Psi_L \rightarrow \Psi'_L = e^{i\alpha_L} \Psi_L \quad ; \quad (6.65)$$

$$U(1)_R : \Psi_R \rightarrow \Psi'_R = e^{i\alpha_R} \Psi_R \quad . \quad (6.66)$$

Que é equivalente na transformação $(U(1)_V X U(1)_A)$

$$U(1)_V : \Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha_V} \Psi \quad (6.67)$$

e

$$U(1)_A : \Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha_A \gamma_5} \Psi \quad . \quad (6.68)$$

6.4 MECANISMO DE MASSA (EQUAÇÃO DE GAP)

Na minimização da energia total é introduzido a equação de Gap, de forma compacta, a Lagrangiana do modelo de NJL pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \sum_{ijk} \bar{\Psi}(x)[i\cancel{\partial} + G_{ijk} \langle \bar{\Psi}(x)\Gamma_{ijk}\Psi(x) \rangle]\Psi(x) \quad , \quad (6.69)$$

de modo que podemos associar um termo de massa

$$M \equiv -G_{ijk} \langle \bar{\Psi}(x) \Gamma_{ijk} \Psi(x) \rangle \quad . \quad (6.70)$$

Para a parcela que representa a Lagrangiana de interação envolvendo quatro férmions,

$$\mathcal{L} = \sum G_{ijk} [\bar{\Psi}(x) \Gamma_{ijk} \Psi(x)]^2 \quad , \quad (6.71)$$

G_{ijk} é a constantes de acoplamento, já termos em $\Gamma_{ijk} = S_i I_j \Lambda_k$ são operadores no espaço de Dirac S_{ijk} , Isospin I_j e Cor Λ_k .

$$G_{ijk} = \mathbf{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \dots \quad ; \quad (6.72)$$

$$I_j = \mathbf{1}, \tau_1, \tau_2, \tau_3 \quad ; \quad (6.73)$$

$$\Lambda_k = \mathbf{1}, \lambda_1, \dots, \lambda_8 \quad . \quad (6.74)$$

A interação de forma geral pode ser representada no diagrama da figura 5.1.

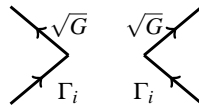


Figura 6.1 – Diagrama que Representa a Interação com $(G\Gamma_i \Gamma_i)$.

Dentre os operadores para o condensado de quarks,

$$\langle \bar{\Psi} \Gamma_{ijk} \Psi \rangle = -i \text{Tr} S_F(x-y) \Gamma_{ijk} \quad , \quad (6.75)$$

no caso do vértice pseudo-escalar o valor esperado é nulo ($\langle \bar{\Psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \rangle = 0$) devido o traço de um número ímpar de matrizes de Dirac (γ^i).

Para o valor esperado do vácuo,

$$\langle 0 | \bar{\Psi}(x) \gamma_{ijk} \Psi(x) | 0 \rangle = -i \text{Tr}_{S,I,C} [S_F(x-y) \Gamma_{ijk}] \quad , \quad (6.76)$$

com o propagador de Feynman

$$S_F(x-y) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{\not{k} - M} \quad (6.77)$$

temos para o termo escalar

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -i \text{Tr} S_F(0) \quad (6.78)$$

que corresponde a

$$S_F(0) = \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - M} \quad . \quad (6.79)$$

Da equação de Dirac para férmions

$$(i\cancel{\partial} - m + G \langle \bar{\psi}\psi \rangle)\psi = 0 \quad (6.80)$$

temos a equação de GAP generalizada do modelo de NJL

$$M - m = -G \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad . \quad (6.81)$$

O resultado para

$$M - m = iG \text{Tr} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\cancel{k} - M} \right) \quad (6.82)$$

corresponde a quebra de simetria quiral no modelo

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0 \quad . \quad (6.83)$$

7 REFERÊNCIAS

Adler, S. L., Phys.Rev. 177, 2426. 1969.

Adler, S. L., and W. A. Bardeen, Phys.Rev. 182, 1517, 1969.

Anselmino A., Caruso F., Mahon J. R, Oguri V. Introdução á QCD Perturbativa. LTC, Rio de Janeiro, 2013.

Barron L. D. Chirality and Life. Springer Science. Space Sci Rev, 135: 187–201, 2008.

Bell, J., and R. Jackiw, Nuovo Cim. A60, 47, 1969.

Bertlmann R. A. Anomalies in Quantum Field Theory. Oxford University Press. United States, New York, 1996.

Bizot N. New physics from a natural electroweak symmetry breaking. Physics [physics]. Université Montpellier, 2016.

Bjorken J.D., Nauenberg M. Current Algebra. Annual Reviews Further. Work supported in part by the United States Atomic Energy Commission, the National Science Foundation, and the A. P. Sloan Foundation. 1968.

Chan L. H. Derivative Expansion for the One-Loop Effective Actions with Internal Symmetry. Physical Review Letters, V. 57, N. 10, 1986.

Chan L. H. Improvement of the derivative expansion. Physical Review D, VOLUME 38, NUMBER 12, 1988.

Chan L. H. Generalized derivative expansion and one-loop corrections to the vacuum energy of static background fields. Physical Review D, V. 55, N. 10, 1997.

Das, A., Field Theory: a path integral approach, World Scientific, Singapore, 1997.

Dias, E. W. Independência de ambiguidades na versão renormalizável do modelo de Nambu-Jona-Lasinio SU(2). Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

Dias, E. W.; B. Hiller ; M. C. Nemes ; M. Sampaio ; Osipov, A. Symmetries and Ambiguities in the linear sigma model with light quarks. Modern Physics Letters A, v. 21, p. 339-347, 2006.

Dias E. W. Generalização do procedimento de regularização implícita para ordens superiores em teorias de calibre abelianas. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

Gell-Mann, M., R. Oakes, and B. Renner, 1968, Phys. Rev. 175, 2195.

Goldberger, M. L., Treiman, S. B. Decay of the ρ Meson. Phys. Rev. 110, 1178, 1958.

Goldberger, M. L., Treiman, S. B. Conserved Currents in the Theory of Fermi Interactions. Phys. Rev. 110, 1478, 1958.

Goldstone, J., Nuovo Cimento, 19, 154(1961).

Goldstone, J. Field theories with Superconductor solutions. Il Nuovo Cimento, 1961.

Goldstone, J., Salam, A., and Weinberg, S. Broken Symmetries. Physical Review, 1962.

Guimaraes, A. V. A. Transformação de gauge e termos de superfície no cálculo de fatores de forma eletromagnético no modelo de Nambu-Jona-Lasinio. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São João del Rei, 2017.

Griffiths D. Introduction to Elementary Particles, John Wiley Sons, Inc. (1987).

Halzen F., Martin A. D. Quarks & Leptons An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley & Sons, Inc, Wiley India. 2011.

Herbert, D., Reinhardt H., Nucl. Phys. B 271, 1343, 1986.

Hon G., Goldstein B. R. From Summetria to Symmetry: The Making of a Revolutionary Scientific Concept. Springer Science+Business Media B.V., Archimedes, V. 20, 2008.

Klevansky S. P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. Rev. Mod. Phys., n. 64, p. 649-708, 1992.

Lattes C. M. G., H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell, Nature 159, 694, 1947.

Marino E.C. Jorge André Swieca: Uma figura ímpar na física brasileira. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 37, n. 3, 3602 (2015).

Miranski V. A. Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories. World Scienti-

fic Publishing Co. Pte. Ltd. 1993.

Mota, A. L. O modelo de Nambu-Jona-Lasínio como uma Teoria Quântica de Campos. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.

Nambu Y., Phys. Rev. Lett. 4, (1960) 380

Nambu, Y., Lasínio, G. J. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I. Physical Review, 1961.

Nambu, Y., Lasínio, G. J. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity II. Physical Review, 1961.

Nasrallah N. F. Goldberger-Treiman Discrepancy, Phys. Rev. D 62, 2000.

Neto B. J. Matemática para Físicos com Aplicações: vetores, tensores e spinors, Volume 1, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

Nilton A. J., Caruso F. Edição Comemorativa dos 70 Anos do Meson π com Cesar Lattes. CIENCIA e SOCIEDADE, V.5, N.3, 2018.

Peskin M. E., and Schroeder D. V. An Introduction to Quantum Field Theory. Levant Books, 1995.

Srednicki M. Quantum Field Theory. Cambridge University Press. 2007.

't Hooft, G., Phys. Rev. Lett. 37, 8. 1976a.

't Hooft, G., Phys. Rev. D 14, 3432, 1976b.

Vale P.R.B.R, O efeito dos termos de superfície no decaimento raro do pión no modelo de Nambu-Jona-Lasínio. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São João del Rei, 2020.

Weyl H. Symetry, Princeton University Press. United Staits, 1952.

Zee A. Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press, Second Edition, 2010.