

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS

Larissa Ferreira Eleotério

Simetrias e Anomalias no Modelo de Schwinger Quiral na  
Regularização Espectral

São João del-Rei - MG

07 de Março de 2024

Larissa Ferreira Eleotério

Simetrias e Anomalias no Modelo de Schwinger Quiral na  
Regularização Espectral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, em associação ampla com as Universidades Federais de Alfenas e Lavras, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos

Orientador: Dr. André Luiz Mota

Co-orientador: Dr. Edson Wander Dias

São João del-Rei – MG  
Departamento de Ciências Naturais - UFSJ  
07 de Março de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383s Ferreira Eleotério, Larissa.  
Simetrias e Anomalias no Modelo de Schwinger  
Quiral na Regularização Espectral / Larissa Ferreira  
Eleotério ; orientador André Luiz Mota; coorientador  
Edson Wander Dias. -- São João del-Rei, 2024.  
84 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,  
2024.

1. Eletrodinâmica Quântica. 2. Modelo de Schwinger.  
3. Modelo de Schwinger Quiral. 4. Tensor de  
Polarização do Vácuo. 5. Regularização Espectral. I.  
Luiz Mota, André, orient. II. Wander Dias, Edson, co  
orient. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - UNIFAL/MG-UFSJ

**HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 14 / 2024 - PPGF (13.29)**

**Nº do Protocolo: 23122.008361/2024-07**

**São João del-Rei-MG, 12 de março de 2024.**

A dissertação de mestrado "SIMETRIAS E ANOMALIA NO MODELO DE SCHWINGER QUIRAL NA REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL" elaborada por **LARISSA FERREIRA ELEOTÉRIO** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

## **MESTRE EM FÍSICA**

*(Assinado digitalmente em 15/03/2024 15:34 )*

ANDRE LUIZ MOTA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DCNAT (12.12)  
Matrícula: 1217987

*(Assinado digitalmente em 12/03/2024 10:08 )*

LIZARDO HENRIQUE CERQUEIRA MOREIRA NUNES  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DCNAT (12.12)  
Matrícula: 1672479

*(Assinado digitalmente em 12/03/2024 23:34 )*

JAKSON MIRANDA FONSECA  
ASSINANTE EXTERNO  
CPF: 013.275.766-43

Visualize o documento original em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **14**, ano: **2024**, tipo: **HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**, data de emissão: **12/03/2024** e o código de verificação: **ebaf2229da**

*Este trabalho é dedicado aos meus pais,  
Sônia e Edson.*

## Resumo

Neste trabalho investigamos o emprego de uma regularização não perturbativa – a regularização espectral, previamente implementada no contexto de modelos quirais de quarks – no estudo da preservação da simetria de calibre dentro do modelo de Schwinger e violação no modelo de Schwinger Quiral. Nós mostramos que a regularização espectral fornece consistência matemática e soluções livres de ambiguidade para as funções de dois pontos de ambos modelos em exatas (1+1) dimensões. O emprego da regularização espectral evita qualquer dependência de amplitudes ambíguas e/ou álgebra de  $\gamma^5$  não convencional. Nossos resultados reforçam a regularização espectral como sendo um esquema de regularização matematicamente consistente, livre de divergências e ambiguidades, e que implementa corretamente a conservação ou violação da simetria em cada caso.

**Palavras-chave:** Modelo de Schwinger, Modelo de Schwinger Quiral e Regularização Espectral.

# Abstract

In this work we investigate the use of a non-perturbative regularization – spectral regularization, previously implemented in the context of chiral quark models – in the study of the preservation of gauge symmetry within the Schwinger model and violation in the chiral Schwinger model. We show that spectral regularization provides mathematical consistency and ambiguity-free solutions for the two-point functions of both models in exact (1+1) dimensions. The use of spectral regularization avoids any dependence on ambiguous amplitudes and/or unconventional  $\gamma^5$  algebra. Our results reinforce the spectral regularization as a mathematically consistent regularization scheme, free from divergences and ambiguities, and that correctly implements the conservation or violation of symmetry in each case.

**Keywords:** Schwinger Model, Chiral Schwinger Model and Spectral Regularization.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Sônia e Edson, por todo apoio e incentivo ao longo da minha formação. Agradeço pela paciência e carinho em todos os momentos de aflição e angústia. Obrigada por acreditarem em mim e por toda torcida. Sem vocês eu não teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço a minha irmã Vanessa pelo carinho e seu bom humor, mesmo de longe está sempre comigo.

Agradeço ao meu orientador Dr. André L. Mota pela confiança, dedicação, por todos os ensinamentos e, principalmente, por sua paciência.

Agradeço a todos meus familiares, em especial minha prima/madrinha Marylaine pelo carinho e por me presentear com livros que foram de muita ajuda em meus estudos.

Agradeço aos meus amigos, Larissa e Cleber, pelo carinho e por todo incentivo. Agradeço também a minha amiga de mestrado Gabrielle e, especialmente, meu amigo Daniel pela companhia e apoio durante essa caminhada.

Agradeço aos meus professores da graduação (IF Sudeste MG - campus Juiz de Fora) que contribuíram para minha formação, especialmente ao Dr. Bruno Gonçalves e ao Dr. Mário M. Dias, por me apresentarem à física teórica e por todo o aprendizado durante minha iniciação científica.

Agradeço aos professores do PPGF da UFSJ.

Agradeço a Capes pela concessão da bolsa de mestrado.



*”O sentido da vida é viver em busca de sentido. É no ato da busca, na experiência do novo e do inesperado, que damos sentido à nossa existência.”*

*Marcelo Gleiser*

## Lista de Abreviações

QED Eletrodinâmica Quântica

TPV Tensor de Polarização do Vácuo

QCD Cromodinâmica Quântica

TQC Teoria Quântica de Campos

# Conteúdo

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lista de Abreviações</b>  | <b>6</b>  |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>8</b>  |
| <b>2 Eletrodinâmica Quântica</b>   | <b>11</b> |
| 2.1 Equação de Dirac . . . . .   | 11        |
| 2.2 Soluções para a Equação de Dirac . . . . .   | 15        |
| 2.3 Covariantes Bilineares . . . . .   | 21        |
| 2.4 Eletrodinâmica . . . . .   | 25        |
| 2.5 As Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica . . . . .                                | 29        |
| 2.6 Identidades de Ward-Takahashi . . . . .  | 32        |
| <b>3 Modelo de Schwinger</b>   | <b>38</b> |
| 3.1 Tensor de Polarização do Vácuo no Modelo de Schwinger . . . . .                              | 38        |
| <b>4 Modelo Espectral de Quarks</b>  | <b>49</b> |
| 4.1 Momentos da Função Espectral . . . . .   | 51        |
| 4.2 Limite $p \rightarrow \infty$ . . . . .  | 54        |
| 4.3 O Tensor de Polarização do Vácuo no Modelo de Schwinger em uma Abordagem Espectral . . . . . | 55        |
| 4.3.1 Regularização Espectral . . . . .  | 55        |
| 4.3.2 Uma Solução Particular . . . . .   | 60        |
| <b>5 Modelo de Schwinger Quiral</b>  | <b>63</b> |
| <b>6 Conclusão</b>   | <b>70</b> |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>71</b> |
| <b>A Grau Superficial de Divergências</b>  | <b>73</b> |
| <b>B Cálculo da integral (3.23)</b>  | <b>74</b> |
| <b>C Cálculo da integral (3.30) e (3.31)</b>   | <b>75</b> |
| <b>D Cálculo da Solução Particular</b>   | <b>76</b> |

# 1 Introdução

A Eletrodinâmica Quântica (Quantum Electrodynamics - QED) corresponde à descrição quântica da interação eletromagnética entre partículas carregadas e o campo eletromagnético, ou seja, o campo de Dirac (o elétron e o pósitron) e o campo de Maxwell (o fóton). Em  $(1+1)D$ , a QED é conhecida como Modelo de Schwinger (Schwinger 1962), uma teoria que trata de férmions sem massa. É um modelo peculiar, pois apresenta características semelhantes a modelos realistas como a QED em 4D e, também, como a Cromodinâmica Quântica.

A principal característica do modelo de Schwinger é ser finito em sua abordagem perturbativa. Isso significa que não restam quantidades divergentes ao final do cálculo das amplitudes de probabilidade. No entanto, apesar de sua finitude, o modelo apresenta grandezas ambíguas, ou seja, grandezas dependentes de regularização que resultam de uma indeterminação matemática (Morais e Mota 2011). O fato de apresentar grandezas ambíguas não afeta sua interpretação física, já que as ambiguidades podem ser removidas através do procedimento de renormalização. Apesar disso, um fator que merece ser investigado corresponde aos mecanismos através dos quais a preservação das simetrias do modelo podem ser obtidas em um procedimento de regularização específico. Por exemplo, em um trabalho anterior de Jackiw (Jackiw 2000), verificou-se que ao se garantir a preservação da simetria fundamental do modelo - a invariância de gauge, expressa pela transversalidade do Tensor de Polarização do Vácuo (TPV), deve-se abandonar uma propriedade formal do TPV - a nulidade de seu traço. O TPV no modelo de Schwinger quando avaliado em exatas  $(1+1)D$  tem traço nulo e isso implica que o termo ambíguo presente no TPV também deve ser nulo. Porém, se aceitarmos este resultado formal no tratamento perturbativo do modelo, a invariância de calibre não será satisfeita. Então, para preservar a invariância de calibre no modelo de Schwinger, a identidade do traço deve ser violada, como apontado em (Jackiw 2000).

É importante ressaltar que a preservação ou não da identidade do traço do TPV não é relevante no contexto de uma teoria renormalizável, justamente porque o modelo

pode ser renormalizado pela introdução adequada de contra-termos invariantes. Ainda assim, a preservação da identidade de traço do TPV pode ser utilizada como um teste na busca por esquemas de regularização matematicamente consistentes e que preservem a simetria (Battistel, Mota e Nemes 1998, Scarpelli, Sampaio e Nemes 2001).

Contudo, há uma classe de modelos onde ambas características (consistência matemática e resultados de preservação de simetria) têm relevância significativa - os modelos de quarks quirais não renormalizáveis. Dentro desses modelos encontra-se desenvolvida uma técnica de regularização muito interessante e promissora que é a regularização espectral, uma regularização não perturbativa desenvolvida no contexto do chamado Modelo Espectral de Quarks (Arriola e Broniowski 2003). Técnicas não perturbativas de tratamento da Teoria Quântica de Campos são uma tentativa tradicional de melhorar os resultados e evitar divergências na avaliação das amplitudes. Correspondem ao emprego de cálculos não perturbativos que equivalem, pelo menos formalmente, à ressonância de algum conjunto específico de diagramas em diferentes ordens na expansão perturbativa. Por exemplo, a chamada técnica de gauge corresponde a encontrar alguma representação particular para as funções de vértice dos modelos de calibre, como um funcional do propagador de férmions, que satisfazem às identidades de Ward-Takahashi. Se considerarmos o propagador exato para a teoria (o propagador Lehmann-Källén), as funções de dois pontos podem ser expressas usando a densidade espectral de energia do férmion, presumivelmente calculada a partir da autoenergia do férmion. Assim, a solução particular da função de vértice também será expressa em termos desta densidade espectral. Espera-se que as amplitudes resultantes calculadas a partir dessas soluções de vértices sejam bem definidas (sem divergências e ambiguidades), a não ser por termos transversais que não podem ser definidos pelas identidades de Ward-Takahashi, e esse recurso pode ser usado para impor algumas condições esperadas a serem satisfeitas pela densidade espectral desconhecida - essa conjunção da técnica de gauge com o conjunto de condições esperadas para dado modelo (simetrias, finitude e ausência de ambiguidades) constituem assim a chamada regularização espectral.

Esta conjunção de características esperadas para a regularização espectral nos motiva a investigar se este método de regularização pode ser empregado no modelo de

Schwinger e Schwinger Quiral, e se é capaz de evitar os resultados ambíguos que levam tanto à violação da identidade do traço quanto ao surgimento de uma álgebra não convencional para a matriz  $\gamma^5$  de Dirac.

Neste trabalho mostraremos que, ao empregar a regularização espectral no Modelo de Schwinger, podemos encontrar as condições para que a invariância de gauge e a identidade do traço do TPV sejam simultaneamente preservados. Além disso, iremos mostrar soluções explícitas para a densidade espectral e o acoplamento eletromagnético que atendam a todos os requisitos de simetria do modelo.

Este texto está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2, apresentaremos as teorias físicas que embasam nosso trabalho e são necessárias para a compreensão da QED. No Capítulo 3, mostramos, através de cálculos, a obtenção do TPV do Modelo de Schwinger e expomos sua ambiguidade. No Capítulo 4, apresentaremos o Modelo Espectral de Quarks e aplicaremos a regularização espectral no TPV do modelo de Schwinger. Finalmente faremos o mesmo procedimento para o modelo de Schwinger Quiral no Capítulo 5.

## 2 Eletrodinâmica Quântica

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados de teorias que foram fundamentais para o desenvolvimento da QED. Começaremos pela Equação de Dirac.<sup>1</sup>

### 2.1 Equação de Dirac

Em 1928, Paul Dirac publicou uma teoria relativística para o elétron (Dirac 1928, Dirac 1928). A equação de Dirac se refere a partículas com spin  $\frac{1}{2}$  e é capaz de descrever muitas das propriedades de partículas fermiônicas. Um de seus objetivos foi tentar resolver os problemas de interpretação da equação de Klein-Gordon (Klein 1927) que levava a densidades de probabilidade negativas.

Neste tópico, será apresentada uma breve revisão da equação de Schrödinger e Klein-Gordon, e depois, a formulação da equação de Dirac será demonstrada.

Começemos pela relação de energia-momento clássica,

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E \quad (2.1)$$

aplicando a prescrição quântica

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.2)$$

e deixando o operador resultante atuar na função de onda  $\psi$ , obtém-se a *equação de Schrödinger*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2.3)$$

A equação de Klein-Gordon pode ser obtida partindo da relação energia-momento relativística

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Referência deste capítulo (Griffiths 2020)

Da notação de quadrivetor

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu, \quad (2.5)$$

onde

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.6)$$

Colocando (2.3) em (2.2) e deixando as derivadas atuarem sobre uma função de onda  $\psi$ , obtem-se

$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\psi - m^2c^2\psi = 0. \quad (2.7)$$

Reescrevendo (2.5), tem-se a *equação de Klein-Gordon*:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi. \quad (2.8)$$

O obstáculo encontrado na equação de Klein-Gordon foi atribuído ao fato de ser uma equação de segunda ordem em t. Dirac diferiu de Klein-Gordon ao considerar que uma equação consistente com a fórmula relativística de energia-momento deveria ter derivada temporal de ordem um. Em 1934, Pauli e Weisskopf (Pauli e Weisskopf 1934) reinterpretaram a equação de Klein-Gordon como base de uma teoria de campo e mostraram que isso poderia descrever partículas de spin zero, por exemplo, mésons  $\pi$ .

A estratégia básica de Dirac era "fatorar" a relação energia-momento (2.4) (Griffiths 2020). Isso seria fácil se tivesse  $p^0$  (ou seja, se  $\mathbf{p}$  fosse zero):

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0. \quad (2.9)$$

É obtido duas equações de primeira ordem:

$$(p^0 - mc) = 0 \quad \text{ou} \quad (p^0 + mc) = 0 \quad (2.10)$$

qualquer uma em (2.10) garante que  $p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0$ . Mas é uma questão diferente quando as três componentes de ordem de  $p^\mu$  são incluídas; nesse caso, estamos procurando por algo da forma:

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc), \quad (2.11)$$



onde  $\beta^\kappa$  e  $\gamma^\lambda$  são oito coeficientes a serem determinados. Multiplicando o lado direito, tem-se:

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa) p_\kappa - m^2 c^2. \quad (2.12)$$

Não queremos nenhum termo linear em  $p_\kappa$ , então devemos escolher  $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ ; para finalizar, é preciso encontrar coeficientes  $\gamma^\kappa$  tais que

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \quad (2.13)$$

o que quer dizer

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 \\ &\quad + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 + (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 \\ &\quad + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 \\ &\quad + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nesse ponto há um problema: poderia ser escolhido  $(\gamma^0)^2 = 1$  e  $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$ , mas não parece haver nenhuma maneira de se livrar dos "termos cruzados". Dirac encontrou uma solução brilhante: considerou os  $\gamma$ 's como matrizes ao invés de números (Griffiths 2020). Como as matrizes não comutam, é possível encontrar um conjunto tal que

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \text{para } \mu \neq \nu \end{aligned} \quad (2.15)$$

ou, de maneira mais sucinta,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski, e os colchetes denotam o anticomutador.

Existem vários conjuntos essencialmente equivalentes de matrizes gamma, aqui

será usado a convenção padrão Bjorken and Drell (Bjorken e Drell 1965):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

onde  $\sigma^i (i = 1, 2, 3)$  são as *matrizes de Pauli*.

Como uma equação matricial 4x4, então, a relação energia-momento relativística fatora:

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0. \quad (2.18)$$

É possível obter a equação de Dirac retirando um termo (realmente não importa qual termo, mas será feita a escolha convencional):

$$\gamma^\mu p'_\mu - mc = 0. \quad (2.19)$$

Agora, será feita a substituição usual  $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$  (2.5), e deixamos o resultado agir na função de onda  $\psi$ . Dessa forma, a *equação de Dirac* escreve-se:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0, \quad (2.20)$$

ou ainda,

$$(i\hbar\rlap{-}\not{\partial} - mc)\psi = 0, \quad (2.21)$$

onde  $\rlap{-}\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ , introduzindo a notação de Feynman que abrevia a contração de matrizes  $\gamma$  com um quadrivetor.

Note que, agora,  $\psi$  é uma matriz coluna de quatro elementos :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

a matriz (2.22) é chamada de *bi-spinor* ou *spinor de Dirac*. (Embora carregue quatro

componentes, esse objeto não é um quadrivetor. Esse assunto será tratado com mais detalhes na seção 2.3.)

## 2.2 Soluções para a Equação de Dirac

Este tópico será dedicado às soluções simples para a equação de Dirac.

Começemos supondo que  $\psi$  seja independente da posição:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (2.23)$$

Tendo em vista a equação (2.5), isso descreve um estado com momento zero ( $\mathbf{p} = 0$ ). A equação de Dirac (2.20) se reduz a

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0 \quad (2.24)$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

onde

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

carrega os dois componentes superiores, e

$$\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

carrega os dois componentes inferiores. Pos isso

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_A, \quad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_B \quad (2.28)$$

e as soluções são

$$\psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\psi_A(0), \quad \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\psi_B(0). \quad (2.29)$$

Em (2.29) é possível reconhecer o fator  $e^{-iEt/\hbar}$  como a característica dependência do tempo de um estado quântico com energia  $E$ . Para uma partícula em repouso,  $E = mc^2$ , em  $\psi_A$  é exatamente o que deveríamos esperar, no caso  $\mathbf{p} = 0$ . Mas  $\psi_B$  representa um estado com energia negativa ( $E = -mc^2$ ). Observamos que, assim como a equação de Klein-Gordon, a equação de Dirac também possui soluções com energia negativa. Para evitar a transição de elétrons para estados de energia mais baixos, Dirac levantou a hipótese na década de 1930 de que todos os estados de energia negativa devem ser ocupados (Dirac 1930). Concluiu-se, então, que as partículas ausentes desses estados ocupados representam partículas com carga oposta denominadas antipartículas. Esse resultado conduziu inevitavelmente a uma teoria de múltiplas partículas, ou a uma teoria do campo quântico.

Assim  $\psi_A$  descreve elétrons (por exemplo), enquanto  $\psi_B$  descreve pósitrons. Cada um é um spinor de dois componentes, ideal para um sistema de spin  $\frac{1}{2}$ . Então, a equação de Dirac com  $\mathbf{p} = 0$  admite quatro soluções independentes (desconsiderando fatores de normalização, por enquanto):

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(2)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi^{(3)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

descrevendo, respectivamente, um elétron com spin para cima, um elétron com spin para baixo, um pósitron com spin para cima e um pósitron com spin para baixo.

Agora, o objetivo é encontrar soluções de ondas planas, da forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{-i/\hbar(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} u(E, \mathbf{p}) \quad (2.31)$$

ou,

$$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)x \cdot p} u(p), \quad (2.32)$$

aqui  $a$  é uma constante de normalização, irrelevante para o propósito atual, mas necessária posteriormente para manter as unidades consistentes.

Esperamos encontrar um bispinor  $u(p)$  tal que  $\psi(x)$  satisfaça a equação de Dirac.

Como a dependência  $x$  está confinada ao expoente

$$\partial_\mu \psi = -\frac{i}{\hbar} p_\mu a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u. \quad (2.33)$$

Colocando esse resultado na equação de Dirac (2.20), obtem-se

$$\gamma^\mu p_\mu a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u - mca e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u = 0$$

ou

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0. \quad (2.34)$$

A equação (2.35) é conhecida como a "equação de Dirac do espaço de momento". Se  $u$  satisfaz a equação (2.35), então  $\psi$  (2.32) satisfaz a equação de Dirac (2.20).

Agora

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \mathbf{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E/c \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Então

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - mc\right) & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & \left(-\frac{E}{c} - mc\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - mc\right) u_A - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_B \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_A - \left(\frac{E}{c} + mc\right) u_B \end{pmatrix}$$

onde, como antes, o subscrito A denota os dois componentes superiores e B os dois infe-

riores. Para satisfazer a equação (2.35), então, devemos ter

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u_B, \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u_A. \quad (2.36)$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtem-se

$$u_A = \frac{c^2}{E^2 - m^2c^4}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2u_A, \quad (2.37)$$

mas

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= p_x \begin{pmatrix} 0 & I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

então

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & p_z(p_x - ip_y) - p_z(p_x - ip_y) \\ p_z(p_x + ip_y) - p_z(p_x + ip_y) & (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2 \end{pmatrix} = \mathbf{p}^2 \quad (2.39)$$

onde I é a matriz unitária 2x2. Logo

$$u_A = \frac{\mathbf{p}^2 c^2}{E^2 - m^2 c^4} u_A \quad (2.40)$$

e, portanto

$$E^2 - m^2 c^4 = \mathbf{p}^2 c^2. \quad (2.41)$$

Ou seja, para satisfazer a equação de Dirac,  $E$  e  $p$  (em 2.31) devem obedecer à relação energia-momento relativística usual. Esse é um resultado interessante, pois a equação de Dirac reforça esse requisito. Como equação para  $E$ , (2.41) admite duas soluções:

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (2.42)$$

A raiz positiva está associada a estados de partículas e a raiz negativa a estados de

antipartículas.

Voltando à equação (2.36) e usando (2.38), é simples construir quatro soluções independentes para a equação de Dirac (ignorando os fatores de normalização por enquanto):

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ Escolha } u_A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{então } u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \\
 (2) \text{ Escolha } u_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{então } u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \\
 (3) \text{ Escolha } u_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{então } u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \\
 (4) \text{ Escolha } u_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{então } u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Para (1) e (2) devemos usar o sinal de mais na equação (2.42), caso contrário,  $u_B$  explode com  $\mathbf{p} \rightarrow 0$ ; estas são soluções de partículas. Para (3) e (4) é obrigatório o uso do sinal de menos; estes são estados de antipartículas. É conveniente normalizar esses espinores de tal forma que <sup>2</sup>

$$u^\dagger u = 2|E|/c \tag{2.44}$$

onde  $\dagger$  significa o conjugado transposto (ou conjugado Hermitiano).

Assim, as quatro soluções são:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad \left( \text{com } E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \right)$$

<sup>2</sup>Na verdade, existem pelo menos três convenções diferentes na literatura:  $u^\dagger u = 2|E|/c$  (Halzen e Martin),  $u^\dagger u = |E|/mc^2$  (Bjorken e Drell),  $u^\dagger u = 1$  (Bogoliubov e Shirkov).

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left( \text{com } E = -\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \right) \quad (2.45)$$

e a constante de normalização é

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2)}/c. \quad (2.46)$$

Para partículas de Dirac, as matrizes de spin são

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}, \quad \text{com } \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

É possível verificar que  $u^{(1)}$ , por exemplo, não é um autoestado de  $\Sigma_z$ . No entanto, se orientarmos o eixo  $z$  de modo que ele aponte ao longo da direção do movimento (caso em que  $p_x = p_y = 0$ ),  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$ ,  $u^{(3)}$  e  $u^{(4)}$  são autospinores de  $S_z$ ;  $u^{(1)}$  e  $u^{(3)}$  estão com spin para cima e  $u^{(2)}$  e  $u^{(4)}$  estão com spin para baixo.

Foi dito anteriormente que  $E$  e  $\mathbf{p}$  (2.31) são parâmetros matemáticos que correspondem fisicamente à energia e momento, e isso é verdade para estados de elétrons,  $u^{(1)}$  e  $u^{(2)}$ . No entanto, o  $E$  em  $u^{(3)}$  e  $u^{(4)}$  não pode representar a energia do pósitron; todas as partículas livres, tanto os pósitrons quanto os elétrons, carregam energia positiva. As soluções de "energia negativa" devem ser reinterpretadas como estados de antipartículas com energia positiva (Griffiths 2020). Para expressar essas soluções em termos de energia física e momento do pósitron, invertamos os sinais de  $E$  e  $\mathbf{p}$ :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{i/\hbar(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} u(-E, -\mathbf{p}) \quad (\text{para as soluções (3) e (4)}). \quad (2.48)$$

Essas são as soluções para a equação de Dirac. É comum usar o melhor  $v$  para estados



de pósitrons, expressos em termos de energia física e momento:

$$v^{(1)}(E, \mathbf{p}) = u^{(4)}(-E, -\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^{(2)}(E, \mathbf{p}) = -u^{(3)}(-E, -\mathbf{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left( \text{com } E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} \right). \quad (2.49)$$

A partir de agora não será mais mencionado  $u^{(3)}$  e  $u^{(4)}$ ; as soluções que serão usadas são  $u^{(1)}$  e  $u^{(2)}$  (representando os dois estados de spin de um elétron com energia  $E$  e momento  $\mathbf{p}$ ), e  $v^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$  (representando os dois estados de spin de um pósitron com energia  $E$  e momento  $\mathbf{p}$ ). É observado que enquanto os  $u$ 's satisfazem a equação de Dirac do espaço de momento (2.34) na forma

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$$

os  $v$ 's obedecem a equação com o sinal de  $p_\mu$  invertido:

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0. \quad (2.50)$$

As ondas planas são soluções bastante especiais para a equação de Dirac. Elas são muito interessantes porque descrevem partículas com energias e momentos especificados e, em um experimento típico, esses são os parâmetros onde há controles e medidas.

## 2.3 Covariantes Bilineares

Foi mencionado na seção 2.1 que os componentes de um spinor de Dirac não se transformam em um quadrivetor, quando você passa de um sistema inercial para outro.

O objetivo dessa seção não é mostrar como eles se transformam, mas apenas citar os resultados: se formos para um sistema que se move com velocidade  $v$  e direção  $x$ , a regra de transformação é

$$\psi \rightarrow \psi' = S\psi, \quad (2.51)$$

onde  $S$  é a seguinte matriz  $4 \times 4$ :

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

com

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad (2.53)$$

e  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , como sempre.

Suponhamos que queremos construir uma quantidade escalar a partir de um spinor  $\psi$ . Seria razoável tentar a expressão

$$\psi^\dagger \psi = (\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2. \quad (2.54)$$

Mas o resultado (2.54) não é um escalar e isso pode ser verificado:

$$(\psi^\dagger \psi)' = (\psi')^\dagger \psi' = \psi^\dagger S^\dagger S \psi \neq (\psi^\dagger \psi). \quad (2.55)$$

Na verdade:

$$S^\dagger S = S^2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c}{v} \sigma_1 \\ -\frac{c}{v} \sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1. \quad (2.56)$$

A soma dos quadrados dos elementos de um quadrivetor também não é invariante; é preciso de sinais de menos para os componentes espaciais. Com um pouco de tentativa e erro, descobrimos que, no caso dos spinores, precisamos de sinais de menos para o terceiro e quarto componentes. Assim como já é conhecido os quadrivetores covariantes, agora

serão apresentados spinores adjuntos:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \psi_2^* - \psi_3^* - \psi_4^*). \quad (2.57)$$

A quantidade

$$\bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \quad (2.58)$$

é um invariante relativístico. Para  $S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$ , e portanto

$$(\bar{\psi} \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi. \quad (2.59)$$

É possível, como já é sabido, distinguir escalares e pseudoescalares, de acordo com seu comportamento sob transformação de paridade,  $P : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ . Pseudoescalares mudam de sinal, escalares não. É natural perguntar se  $\bar{\psi} \psi$  é o primeiro tipo ou o segundo. Primeiro, é necessário saber como os spinores de Dirac se transformam sob  $P$ . Citando o resultado:

$$\psi \rightarrow \psi' = \gamma^0 \psi. \quad (2.60)$$

Segue-se que

$$(\bar{\psi} \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi, \quad (2.61)$$

então  $(\bar{\psi} \psi)$  é invariante sob  $P$ ; é um escalar "verdadeiro". Mas também pode-se fazer um pseudoescalar de  $\psi$ :

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi, \quad (2.62)$$

onde

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Quanto ao seu comportamento em paridade:

$$(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad (2.64)$$

(Foi usado o fato que  $(\gamma^0)^2 = 1$  na última etapa). Agora, o  $\gamma^0$  está do "lado errado" de  $\gamma^5$ ,

mas podemos "puxá-lo" observando que anticomuta com  $\gamma^1, \gamma^2$  e  $\gamma^3$  (16) e comuta consigo mesmo ( $\gamma^3\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^3, \gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2, \gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0$ ), então

$$\gamma^5\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = (-1)^3\gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\gamma^0\gamma^5. \quad (2.65)$$

Da mesma forma,  $\gamma^5$  anticomuta com todas as outras matrizes  $\gamma$ :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (2.66)$$

De qualquer maneira

$$(\psi\gamma^5\psi)' = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = -(\psi\gamma^5\psi) \quad (2.67)$$

é um pseudoescalar.

Ao todo, existem 16 produtos da forma  $\psi_i^*\psi_j$ , pois  $i$  e  $j$  vão de 1 a 4. Esses 16 produtos podem ser somados em várias combinações lineares para construir quantidades com comportamento de transformação distinto, como segue:

$$\begin{aligned} (1) \quad \bar{\psi}\psi &= \text{escalar} && (\text{um componente}) \\ (2) \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi &= \text{pseudoescalar} && (\text{um componente}) \\ (3) \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \text{vetor} && (\text{quatro componentes}) \\ (4) \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi &= \text{pseudovetor} && (\text{quatro componentes}) \\ (5) \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \text{tensor antisimétrico} && (\text{seis componentes}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu). \quad (2.69)$$

O caráter tensorial dos covariantes bilineares, e mesmo seu comportamento em paridade, é indicado à primeira vista:  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  parece um quadrivetor, e é um quadrivetor. Mas  $\gamma^\mu$  por si só certamente não é um quadrivetor; é uma coleção de quatro matrizes fixas (2.17); eles não mudam quando você vai para um sistema inercial diferente - é  $\psi$  que muda.

## 2.4 Eletrodinâmica

Esta seção apresenta uma breve revisão de eletrodinâmica clássica, e em seguida, é apresentado a descrição de fótons em eletrodinâmica quântica.

Na eletrodinâmica clássica, os campos elétrico e magnético ( $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ) criados por uma densidade de carga  $\rho$  e uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$  são determinados pelas equações de Maxwell:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\
 (ii) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
 (iii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Na notação relativística,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  juntos formam um tensor antissimétrico de segunda ordem,  $F^{\mu\nu}$ :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

enquanto  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  constituem um quadrivetor:

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}). \tag{2.72}$$

As equações não homogêneas de Maxwell ((i) e (ii)) agora podem ser escritas de forma mais sucinta

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \tag{2.73}$$

Da antissimetria de  $F^{\mu\nu}$  (isto é:  $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$ ) segue-se que  $\mathbf{J}$  é sem divergência:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{2.74}$$

Ou, na notação de vetores 3D,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ ; esta é a "equação da continuidade",

expressando a conservação local de carga.

Quanto às equações homogêneas de Maxwell, (iii) é equivalente à afirmação de que  $\mathbf{B}$  pode ser escrito como o rotacional de um potencial vetorial,  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.75)$$

Com isso, (ii) se torna

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.76)$$

que é equivalente à afirmação de que  $\mathbf{E} + (1/c)(\partial \mathbf{A}/\partial t)$  pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar,  $V$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.77)$$

Na notação relativística, as equações (2.75) e (2.77) tornam-se

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.78)$$

onde

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}). \quad (2.79)$$

Em termos desse potencial de quatro vetores, as equações não homogêneas de Maxwell (2.73) nos diz que:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (2.80)$$

Na eletrodinâmica clássica, os campos são as entidades físicas; os potenciais são construções matemáticas simplesmente úteis. A virtude da formulação potencial é que ela cuida automaticamente das equações homogêneas de Maxwell: as equações dadas (2.75) e (2.77), (ii) e (iii) seguem imediatamente, não importa o que  $V$  e  $\mathbf{A}$  possam ser. Isso nos deixa apenas a equação não homogênea (2.80) com a qual devemos nos preocupar. O defeito da formulação potencial é que  $V$  e  $\mathbf{A}$  não são unicamente determinados. De fato, fica claro pela equação (2.78) que novos potenciais

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (2.81)$$

(onde  $\lambda$  é qualquer função de posição e tempo) não alteram as equações de Maxwell. Essa mudança de potencial, que não tem efeito sobre os campos, é chamada de transformação de calibre. É possível explorar essa liberdade de calibre para impor uma restrição extra no potencial:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.82)$$

Isso é chamado de condição de Lorentz; com ela as equações de Maxwell (2.80) simplificam ainda mais:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (2.83)$$

Aqui  $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ; é chamado de operador d'Alembertiano.

Mesmo a condição de Lorentz, no entanto, não especifica exclusivamente  $A^\mu$ . Outras transformações de calibre são possíveis, sem perturbar a equação (2.82), desde que a função de calibre  $\lambda$  satisfaça a equação de onda:

$$\square \lambda = 0. \quad (2.84)$$

Infelizmente, não há uma maneira clara de eliminar a ambiguidade residual em  $A^\mu$ , e pode-se (1) conviver com a indeterminação, o que significa carregar supostos graus de liberdade, ou (2) impor uma restrição adicional, que estraga a manifesta covariância de Lorentz da teoria. Ambas as abordagens foram usadas na formulação da eletrodinâmica quântica. No espaço vazio, onde  $J^\mu = 0$ , escolhemos:

$$A^0 = 0. \quad (2.85)$$

A condição de Lorentz então se lê

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.86)$$

Esta escolha (gauge de Coulomb) é atraentemente simples, mas ao selecionar um componente ( $A^0$ ) para tratamento especial, ela nos liga a um sistema inercial particular. Na prática, isso raramente é um problema, mas é esteticamente desagradável.

Na eletrodinâmica quântica  $A^\mu$  torna-se a função de onda do fóton. O fóton livre

satisfaz a equação (2.83) com  $J^\mu = 0$

$$\square A^\mu = 0 \quad (2.87)$$

que é reconhecido neste contexto como a equação de Klein-Gordon (2.8) para uma partícula sem massa. Como no caso da equação de Dirac, também se busca soluções de ondas planas com momento  $p = (E/c, \mathbf{p})$ :

$$A^\mu(x) = ae^{-(i/\hbar)p \cdot x} \epsilon^\mu(p). \quad (2.88)$$

Aqui  $\epsilon^\mu$  é o vetor de polarização - caracteriza o spin do fóton - e  $a$  é um fator de normalização. Substituindo a equação (2.88) na equação (2.87), obtemos uma restrição em  $p^\mu$ :

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \text{para que} \quad E = |\mathbf{p}|c \quad (2.89)$$

que é como deveria ser para uma partícula sem massa.

O termo  $\epsilon^\mu$  tem quatro componentes, mas nem todos são independentes. A condição de Lorentz (2.82) requer que

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0. \quad (2.90)$$

Além disso, no gauge de Coulomb, tem-se

$$\epsilon^0 = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (2.91)$$

o que quer dizer que o trivetor de polarização ( $\epsilon$ ) é perpendicular à direção de propagação; é dito que um fóton livre é polarizado transversalmente. Por esta razão, o gauge de Coulomb também é conhecido como gauge transversal. Agora, existem dois trivetores linearmente independentes que são perpendiculares a  $\mathbf{p}$ ; por exemplo, se  $\mathbf{p}$  aponta na direção  $z$ , pode-se escolher

$$\epsilon_{(1)} = (1, 0, 0), \quad \epsilon_{(2)} = (0, 1, 0). \quad (2.92)$$

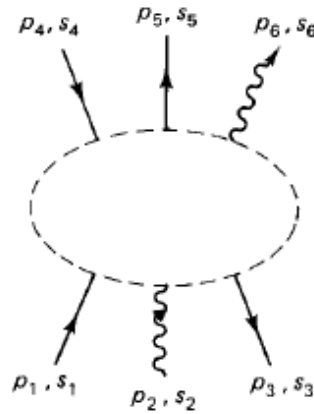


Assim, em vez de quatro soluções independentes para um determinado momento, ficam apenas duas. O fóton não tem três estados de spin porque uma partícula massiva de spin  $s$  admite  $2s + 1$  diferentes orientações de spin, mas uma partícula sem massa tem apenas dois, independentemente de seu spin (exceto para  $s = 0$ , que tem apenas um). Ao longo do seu sentido de movimento só pode ter  $m_s = +s$  ou  $m_s = -s$ ; sua helicidade, em outras palavras, só pode ser  $+1$  ou  $-1$ .

## 2.5 As Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

Durante sua formulação para QED, Richard Feynman desenvolveu os diagramas (Feynman 1949) que são ferramentas que permitem transmitir um conceito físico de forma simples sem a necessidade de cálculos complexos. Além disso, através dos diagramas é possível representar as diferentes maneiras que um espalhamento de partículas (determinado através da amplitude de probabilidade) pode ocorrer. Dessa forma, os diagramas são utilizados nos estudos de interação de partículas e tem amplo uso em todos os ramos teóricos do Modelo Padrão. Nessa seção será indicado as regras de Feynman para a QED.

1. *Notação.* Considere os quatro momentos de entrada e saída  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e os spins correspondentes  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ; considere também os quatro momentos internos  $q_1, q_2, \dots$ . Deve-se atribuir setas às linhas da seguinte maneira: as setas nas linhas de férmions externas indicam se é um elétron ou um pósitron; as setas nas linhas de férmions internas são atribuídas de modo que a "direção do fluxo" através do diagrama seja preservada (ou seja, cada vértice deve ter uma seta entrando e uma seta saindo). As setas nas linhas de fótons externos apontam para "frente", para linhas de fótons internos a escolha é arbitrária. (Figura 1.)



**Figura 1:** Um diagrama típico da QED com linhas externas rotuladas. (Linhas internas não mostradas).

2. *Linhas externas.* Para cada elétron que entra no diagrama: um fator  $u(p, s)$ . Se sai do diagrama: um fator  $\bar{u}(p, s)$ .

Para cada pósitron deixando o diagrama: um fator  $v(p, s)$ . Entrando no diagrama: um fator  $\bar{v}(p, s)$ .

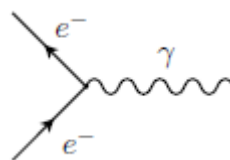
Para cada fóton no estado inicial o vetor polarização  $\varepsilon_\mu(k)$  e no estado final  $\varepsilon^*_\mu(k)$ .

3. *Fatores de vértice.* Cada vértice, Figura 2, contribui com um fator

$$ig_e\gamma^\mu.$$

A constante de acoplamento adimensional  $g_e$  está relacionada com a carga do pósitron:

$$g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}.$$
<sup>3</sup>



**Figura 2:** Vértice.

<sup>3</sup>Em unidades de Heaviside-Lorentz, com  $\hbar$  e  $c$  iguais a 1,  $g_e$  é a carga do pósitron e, portanto, é escrita "e" na maioria dos textos. Aqui foram usadas unidades Gaussianas e foi mantido todos os fatores de  $\hbar$  e  $c$ .

4. *Propagadores.* Cada linha interna contribui com um fator da seguinte forma:

$$\text{Elétrons e pósitrons: } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2}.$$

$$\text{Fótons: } \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2}.$$

5. *Conservação de energia e quantidade de movimento.* Para cada vértice, deve-se escrever uma função delta da forma

$$(2\pi)^2 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3),$$

onde os  $k$ 's são os três quadrimomentos que entram no vértice (se uma seta aponta para fora, então  $k$  é menos o quadrimomento dessa linha, exceto para pósitrons externos). Este fator reforça a conservação de energia e momento no vértice.

6. *Integre Sobre Momentos Internos.* Para cada momento interno  $q$ , escrevemos um fator

$$\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

e calculamos a integral.

7. *Cancele a Função Delta.* O resultado incluirá um fator

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

correspondente à conservação total de energia-momento. Devemos cancelar este fator, e o que resta é  $-i\mathcal{M}$ . Como antes, o procedimento é anotar todos os diagramas que contribuem para o processo em questão (até a ordem desejada), calcular a amplitude ( $\mathcal{M}$ ) de cada um e somá-los para obter a amplitude total, que é então inserida em uma fórmula apropriada para a seção transversal ou a vida útil, conforme o caso.

8. *Antisimetria.* Incluimos um sinal de menos entre os diagramas que diferem apenas

na troca de dois elétrons (ou pósitrons) que chegam (ou saem), ou de um elétron que entra com um que sai (ou vice-versa).

## 2.6 Identidades de Ward-Takahashi

As identidades de Ward-Takahashi (Ward 1950, Takahashi 1957) são a relação entre o vértice eletromagnético e o propagador. As identidades decorrem da invariância de calibre da QED e desempenham um papel fundamental na prova da renormalização dessa teoria. Por terem grande importância no desenvolvimento de nosso trabalho, nesta seção as identidades serão deduzidas no contexto da QED.

Começemos pelo funcional gerador  $Z$  para um sistema de fótons e elétrons, dado por

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}, \quad (2.93)$$

onde  $J^\mu$ ,  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  são as fontes dos campos  $A_\mu$ ,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  respectivamente. Além disso, a lagrangeana efetiva é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \\ & - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta. \end{aligned} \quad (2.94)$$

A lagrangeana efetiva contém a parte do fóton de campo livre, a parte do elétron de campo livre, e o termo de interação entre o elétron e o campo eletromagnético. É importante ressaltar que sem o termo de fixação de calibre  $-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$ , resultaria em uma contribuição infinita para o funcional gerador e, conseqüentemente, para as funções de Green, ou seja, isso prejudicaria a construção não-singular para o fóton. O parâmetro  $\alpha$  é um multiplicador de Lagrange responsável por fixar a classe de calibre covariante ( $\alpha = 1$  fornece o calibre de Feynman; e  $\alpha = 0$ , o calibre de Landau).

Ao realizar uma transformação de calibre infinitesimal

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \\ \psi &\rightarrow \psi' = \psi - ie\Lambda\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

os três primeiros termos em (2.94) são invariantes, mas os outros termos (que contém o termo fixador de calibre) não são invariantes sob estas transformações, como pode ser verificado:

$$-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 \rightarrow -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \Lambda)^2 = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\mu \partial_\mu \Lambda) + O(\Lambda^2), \quad (2.96)$$

aqui é feita a hipótese que o parâmetro de transformação,  $\Lambda$ , seja uma função infinitesimal. Também devemos considerar o comportamento das fontes sob tais transformações:

$$\begin{aligned} J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta &\rightarrow J^\mu(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) + \bar{\eta}(\psi - ie\Lambda\psi) + (\bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi})\eta \\ &= J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie\Lambda\bar{\eta}\psi + ie\Lambda\bar{\psi}\eta, \end{aligned} \quad (2.97)$$

o termo  $J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie\Lambda\bar{\eta}\psi + ie\Lambda\bar{\psi}\eta$  em (2.97) é a contribuição das fontes.

Logo, a equação (2.93) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Z \rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\mu \partial_\mu \Lambda) + J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)\Lambda \right)} e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}.$$

Será necessário integrar por partes os dois primeiros termos da primeira exponencial e, do Teorema de Green, podemos considerar que os campos tendem a zero na "fronteira" do volume, isso nos permite fatorar  $\Lambda$ :

$$\int d^4x \left[ -\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\mu \partial_\mu \Lambda) + J^\mu \partial_\mu \Lambda \right] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{\alpha} \square (\partial^\mu A_\mu) \Lambda - \partial_\mu J^\mu \Lambda \right]. \quad (2.98)$$

Então,

$$Z \rightarrow N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{\alpha} \square (\partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu J^\mu - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right) \Lambda} e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}.$$

É permitido expandir a primeira exponencial, pois  $\Lambda$  é uma função infinitesimal, então tem-se

$$Z \rightarrow Z + N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \left[ i \int d^4x \mathcal{O}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) \Lambda \right] e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)],}$$

onde  $\mathcal{O}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) = -\frac{1}{\alpha} \square (\partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu J^\mu - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)$ . Podemos transformar  $\mathcal{O}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$  em um operador diferencial ao realizar as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu}, \\ \psi &\rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \\ \bar{\psi} &\rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Assim,

$$Z \rightarrow Z - i \int d^4x \Lambda \left[ -\frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \left( \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right) + \partial_\mu J^\mu + e\bar{\eta} \left( \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) - e\eta \left( \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z.$$

Z deve ser invariante, então para restaurar sua invariância, qualquer que seja  $\Lambda$ , deve-se exigir que

$$\left[ -\frac{i}{\alpha} \square \partial_\mu \left( \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right) + \partial_\mu J^\mu + e\bar{\eta} \left( \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) - e\eta \left( \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] Z = 0. \quad (2.100)$$

Observamos que, a escolha de um termo fixador de calibre linear tornou a equação anterior linear nas derivadas funcionais em relação às diferentes fontes, e essa linearidade admite escrever (2.100) da seguinte forma:

$$\partial_\mu J^\mu + \left[ -\frac{i}{\alpha} \square \partial_\mu \left( \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right) + e\bar{\eta} \left( \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) - e\eta \left( \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] W = 0, \quad (2.101)$$

onde W é o funcional gerador das funções de Green conexas:  $iW := \ln Z$ . O funcional gerador das funções de Green irreduzíveis (ação efetiva) é definido como a transformada de Legendre de  $W[J^\mu, \bar{\eta}, \eta]$ :

$$\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = W[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] - \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta), \quad (2.102)$$

onde

$$\begin{aligned} J^\mu &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu}, & A^\mu &= \frac{\delta W}{\delta J_\mu} \\ \bar{\eta} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}, & \psi &= \frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} \\ \eta &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}, & \bar{\psi} &= -\frac{\delta W}{\delta\eta}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

O objetivo agora é escrever (2.101) em termos do funcional gerador. Usando as relações de (2.103), temos:

$$\frac{\square}{\alpha}\partial_\mu A^\mu - i\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} + ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\psi + ie\bar{\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} = 0. \quad (2.104)$$

A equação (2.104) garante a invariância de calibre de  $Z$  em todas as ordens de perturbação. Assim, obtemos uma expressão para o vértice ao diferenciarmos funcionalmente (2.104) em relação a  $\psi(y)$  e  $\bar{\psi}(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\psi(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)} \left[ i\partial_x^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)} \right] &= \frac{\delta}{\delta\psi(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)} \left[ -ie\psi(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} + ie\bar{\psi}(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} \right] \\ i\partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta A^\mu(x)} &= ie \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(z)} \frac{\delta\psi(x)}{\delta\psi(y)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} + ie \frac{\delta}{\delta\psi(y)} \frac{\delta\bar{\psi}(x)}{\delta\bar{\psi}(z)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Agora é necessário anti-comutar as derivadas funcionais com relação aos campos fermiônicos no primeiro termo do lado direito, e em seguida, fazer  $A_\mu = \bar{\psi} = \psi = 0$ , então

$$i\partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta A^\mu(x)} = ie \left[ \delta^4(x-z) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} - \delta^4(x-y) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(z)} \right]. \quad (2.106)$$

Podemos reescrever (2.106) no espaço dos momentos e, para isto, serão realizadas as seguintes transformadas de Fourier:

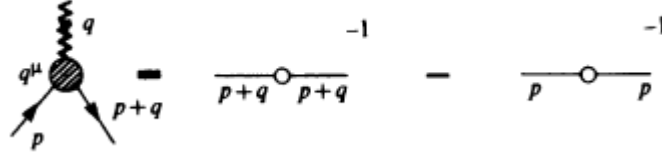
$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'.y - p.z - q.x)} \partial_x^\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(z)\delta A^\mu(x)} &= e(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) q^\mu \Gamma_\mu(p', p, q), \\ \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'.y - p.z - q.x)} \delta^4(x-z) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(y)\delta\bar{\psi}(x)} &= (2\psi)^4 \delta^4(p' - p - q) S^{-1}(p'), \\ \int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'.y - p.z - q.x)} \delta^4(x-y) \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(z)} &= (2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q) S^{-1}(p), \end{aligned} \quad (2.107)$$

onde  $S(p')$  e  $S(p)$  representam propagadores fermiônicos no espaço de momentos e  $\Gamma_\mu(p', p, q)$

é a função de vértice amputada. Multiplicando (2.106) por  $e^{i(p'.y-p.z-q.x)}$  e integrando em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , temos

$$q^\mu \Gamma_\mu(p', p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p) \quad (2.108)$$

a *Identidade de Ward-Takahashi*; que pode ser representada pelo diagrama abaixo:



**Figura 3:** Identidade de Ward-Takahashi

A identidade também pode ser expressa em termos da função de vértice não amputada  $\Lambda_\mu(p', p)$ , definida como

$$\Lambda_\mu(p', p) = iS(p')\Gamma_\mu(p', p)iS(p). \quad (2.109)$$

No limite  $q \rightarrow 0$ , obtemos a identidade de Ward:

$$\Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p^\mu}, \quad (2.110)$$

que é um caso particular de (108).

Para concluir,

$$q^\mu \Lambda_\mu(p', p) = S(p') - S(p). \quad (2.111)$$

Os resultados obtidos em (2.108) e (2.111) são equações que representam as simetrias das amplitudes em Teoria Quântica de Campos (TQC) e, também, que as correntes devem satisfazer em nível quântico. Diversas dessas amplitudes (funções de vértice, propagadores), quando calculadas explicitamente, resultam em integrais divergentes, sendo necessário o emprego de procedimentos que permitam o tratamento apropriado de infinitos e ambiguidades resultantes dessas divergências.

O problema dos infinitos na TQC aparece até sobre quantidades que deveriam ser medidas diretamente, como correções de carga e massa de partículas como as do elétron. Na QED, uma das formas desse problema está no cálculo dos efeitos da auto-energia do



elétron e a polarização do vácuo, que é denominada *catástrofe ultravioleta*.

O processo em TQC que trata do manuseio desses infinitos recebe o nome de *Renormalização*. O primeiro passo da renormalização consiste em controlar a divergência através de um processo chamado *Regularização*, o qual modifica, devidamente, as integrais divergentes para que apresentem um comportamento convergente. Através dessas técnicas matemáticas do processo de renormalização, as divergências são absorvidas em quantidades físicas que passam a ser redefinidas, como a massa e a carga do elétron.

A Renormalização passou a ser utilizada no final da década de 40, nas teoria de Feynman (Feynman 1949), Schwinger e, entre outros como Dyson (Dyson 1949) e Tomanaga (Fukuda, Miyamoto e Tomonaga 1949), e permitiu superar as dificuldades da QED.

Vale ressaltar também que teorias em que se tem campos fermiônicos, como a QED, por exemplo, possuem invariância perante transformações quirais globais, a invariância quiral. Segundo o teorema de Noether, a invariância quiral resulta na existência de uma corrente conservada, a corrente pseudo-vetorial.

Schwinger, em 1951 (Schwinger 1951), descobriu (tema estudado também por outros pesquisadores da época (Adler 1969, Bell e Jackiw 1969)) que devido aos efeitos quânticos relacionados com a regularização, essa corrente pseudo-vetorial não é conservada, e esse fenômeno é denominado de anomalia quiral ou axial. E devido a essa anomalia, ocorre a impossibilidade de se preservar simultaneamente as identidades de Ward vetorial e axial, tema que será abordado no presente trabalho.

### 3 Modelo de Schwinger

O modelo de Schwinger (Schwinger 1962) é definido pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} + m)\psi - e_0\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

onde  $\psi$  e  $A^\mu$  são os campos fermiônico e de calibre respectivamente,  $e_0$  é a constante de acoplamento e  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Temos  $m = 0$  no modelo de Schwinger, esta característica permite soluções exatas e também simetria quiral local e global. Entretanto, vamos manter  $m$  explícito nas expressões a seguir e usar  $m = 0$  quando apropriado. As matrizes gama de Dirac podem ser representadas, em (1+1)D, por duas das matrizes de Pauli, ou seja,

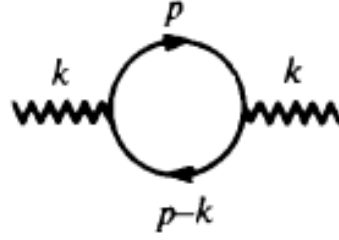
$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A métrica no espaço de Minkowski em (1+1)D é dada por  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ .

Já mencionamos que, embora o modelo de Schwinger apresente solução exata, o TPV no modelo é uma quantidade indeterminada que aparece no resultado final como uma ambiguidade. Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a identidade formal de traço nulo do TPV e sua invariância de gauge não podem ser preservadas simultaneamente, ou seja, para que uma propriedade seja preservada, a outra deve ser abandonada. Assim, calcularemos o TPV do modelo de Schwinger e trataremos de sua ambiguidade.

#### 3.1 Tensor de Polarização do Vácuo no Modelo de Schwinger

Dentre os processos físicos descritos pela QED, destacamos a autoenergia do fóton, também chamada de *Tensor de Polarização do Vácuo* que é apresentada na Figura 4.



**Figura 4:** Diagrama de Feynman da autoenergia do fóton.

O diagrama acima corresponde às contibições quânticas perturbativas para a autoenergia do fóton, ou seja, o fóton ao se propagar cria um par elétron-pósitron virtual que interage com o próprio campo bosônico (o próprio fóton). Na presença de uma carga externa, como um outro elétron, por exemplo, o elétron virtual tenderá a se afastar do elétron real, enquanto o pósitron virtual se aproxima. Dessa forma, ao redor de uma carga virtual há uma nuvem de dipolos virtuais elétron-pósitron polarizados, em um processo similar ao que ocorre em dielétricos polarizados, por exemplo. Por isso, o processo ganha o nome de Polarização do Vácuo. O gráfico da Figura 4 representa a correção em primeira ordem<sup>4</sup> da autoenergia do fóton, é denominado Tensor de Polarização do Vácuo, como dissemos.

Através das regras de Feynman, a expressão matemática correspondente ao TPV no modelo de Schwinger é dada por

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \text{tr} \left\{ i\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m} i\gamma^\nu \frac{i}{\not{p} - \not{q} - m} \right\}, \quad (3.1)$$

com  $m \equiv 0$ . Racionalizando a expressão (3.1):

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} \cdot \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} = \frac{1}{(\not{p} - m) - \not{q}} \cdot \frac{(\not{p} + m) - \not{q}}{(\not{p} + m) - \not{q}} = \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p - q)^2 - m^2}. \quad (3.3)$$

<sup>4</sup>Também conhecida como correção a nível de 1-loop, pois há apenas uma linha fechada (loop) no gráfico.

Substituindo (3.2) e (3.3) em (3.1), obtemos

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{Tr \{ \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \not{q} + m) \}}{(p^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]}, \quad (3.4)$$

onde  $\not{p} = \gamma^\rho p_\rho$  e  $\not{q} = \gamma^\sigma q_\sigma$ . Para obter o resultado da integral (3.4), primeiramente é necessário calcular os traços das matrizes  $\gamma$ , lembrando que o TPV está em (1+1)D. As identidades de traço das matrizes<sup>5</sup>  $\gamma$  são dadas por:

$$\begin{aligned} Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} &= 2g^{\mu\nu}, \\ Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \} &= 0, \\ Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \} &= (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aplicando as identidades acima em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} &Tr \{ \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \not{q} + m) \} \\ &= Tr \{ \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{q}) \} + Tr \{ \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu m \} + Tr \{ \gamma^\mu m \gamma^\nu (\not{p} - \not{q}) \} + Tr \{ \gamma^\mu m \gamma^\nu m \} \\ &= p_\rho (p - q)_\sigma Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \} + m p_\rho \underbrace{Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \}}_{=0} + m (p - q)_\sigma \underbrace{Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \}}_{=0} \\ &+ m^2 Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} \\ &= 2p_\rho (p_\sigma - q_\sigma) (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}) + 2m^2 g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Levando o resultado (3.6) em (3.4), temos

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = 2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu - (p^2 - p \cdot q) g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]}. \quad (3.7)$$

Para facilitar o manuseio da equação (3.7) usaremos a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[(a - b)x + b]^2} \quad (3.8)$$

e obtemos,

$$a = (p - q)^2 - m^2, \quad b = p^2 - m^2$$

---

<sup>5</sup>Referência (Griffiths 2020)

$$\begin{aligned}
(a - b)x + b &= (-2pq + q^2)x + p^2 - m^2 \\
&= (p - qx)^2 - [m^2 + q^2x(x - 1)] \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{[(p - qx)^2 - m^2 + q^2x(x - 1)]^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

substituindo (3.9) em (3.7) e definindo  $M^2 = m^2 + q^2x(x - 1)$ ,

$$\Pi^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu - (p^2 - p \cdot q)g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}}{[(p - qx)^2 - M^2]^2}. \tag{3.10}$$

Uma maneira de indicar o grau de divergência desta amplitude é a contagem de potências da variável de integração  $p$ , na qual contamos o número de potências no numerador (incluindo a potência no elemento de integração) e o número de potências que há no denominador. A diferença irá fornecer o *grau superficial de divergência*<sup>6</sup>. Ao fazer essa análise na integral (3.9), obtemos termos logaritmicamente divergentes e termos convergentes. Por esse motivo, vamos reescrever (3.9) da seguinte forma

$$\Pi_{div}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{[(p - qx)^2 - M^2]^2}. \tag{3.11}$$

$$\Pi_{conv}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{-p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + (p \cdot q + m^2)g^{\mu\nu}}{[(p - qx)^2 - M^2]^2}. \tag{3.12}$$

Tomando a equação (3.10) e fazendo o *shift*<sup>7</sup> em  $\Pi_{conv}^{\mu\nu}$ , ou seja,  $p \rightarrow p + qx$  e mantendo só os termos pares, temos

$$\Pi_{div}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu} + 2q^\mu q^\nu x^2 - q^2 x^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2}. \tag{3.13}$$

Reescrevendo a equação acima para que fique explícito o termo que será integrado, assim

$$\begin{aligned}
\Pi_{div}^{\mu\nu} &= 2 \int_0^1 dx \left\{ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} \right. \\
&\quad \left. + [(2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})x^2] \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2} \right\},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

<sup>6</sup>Apêndice A

<sup>7</sup>Vale ressaltar que a técnica do *shift* só foi utilizada porque a integral (3.11) e (3.12) é logaritmicamente divergente e convergente, respectivamente. A mesma técnica não seria possível caso a integral fosse divergente.

definimos

$$I = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2}. \quad (3.15)$$

Para resolver a integral (3.14), devemos recorrer ao método chamado rotação de Wick (O'Brien 1975). O objetivo de utilizá-lo é que (3.14) deve ser levada do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano,

$$\begin{aligned} p_0 &= ip_4 \rightarrow p_0^2 = -p_4^2, \\ p^2 &= p_0^2 - p_1^2 \\ &= -p_4^2 - p_1^2 \\ &= -p_E^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

O elemento diferencial no espaço bidimensional é reescrito como

$$d^2p = dp^0 dp^1 = idp^4 dp^1 = id^2p_E \quad (3.17)$$

e alterando para coordenadas polares

$$d^2p_E = p_E dp_E d\theta, \quad (3.18)$$

no qual  $\theta$  varia de 0 a  $2\pi$ . Aplicando a rotação de Wick e mudando para coordenadas polares em (3.14), temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty p_E dp_E \frac{1}{(-p_E^2 - M^2)^2} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)} \int_0^\infty dp_E \frac{p_E}{(p_E^2 + M^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Temos que  $d^2p_E = 2p_E dp_E$ , substituindo em (3.18) obtemos

$$I = -\frac{i}{(2\pi)} \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{d^2p_E}{(p_E^2 + M^2)^2}, \quad (3.20)$$

realizando uma mudança de variáveis, ficamos com

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{(z + M^2)^2} \\
&= \frac{i}{4\pi} (z + M^2)^{-1} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{i}{4\pi} \frac{1}{M^2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo (3.20) em (3.13) temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{div}^{\mu\nu} &= 2 \left\{ \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} + \left( \frac{i}{4\pi} \frac{1}{M^2} \right) \int_0^1 dx [2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}] x^2 \right\} \\
&= 2 \left\{ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} + \frac{i}{2\pi} (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \int_0^1 dx \frac{x^2}{[m^2 + q^2 x(x-1)]} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A integral cuja variável de integração é  $x$ , nos dá

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{[m^2 + q^2 x(x-1)]} = \frac{1}{q^2} - \frac{4m^2}{q^2} Z_0 + 2Z_0, \tag{3.23}$$

onde

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{4m^2 q^2 - q^4}} \arctan \left( \frac{q^2}{\sqrt{4m^2 q^2 - q^4}} \right).$$

Então, substituindo (3.22) em (3.21), obtemos como resultado

$$\Pi_{div}^{\mu\nu} = 2 \left\{ \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} + \frac{i}{2\pi} (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \left( \frac{1}{q^2} - \frac{4m^2}{q^2} Z_0 + 2Z_0 \right) \right\}. \tag{3.24}$$

Fazendo a análise da invariância de gauge na equação (3.23)

$$\begin{aligned}
q_\mu \Pi_{div}^{\mu\nu} &= 2q_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} + \frac{i}{2\pi} q^2 g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{q^2} - \frac{4m^2}{q^2} Z_0 + 2Z_0 \right) \\
&= 2q_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} + \frac{i}{2\pi} q^\nu + q^\nu (2q^2 - 4m^2) \frac{i}{2\pi} Z_0 \\
&= 2q_\mu \Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi} q^\nu + q^\nu (2q^2 - 4m^2) \frac{1}{2\pi} Z_0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

com

$$\Delta^{\mu\nu} = \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2},$$

explicaremos esse termo com detalhes mais à frente. Para termos invariantes de gauge, observamos, de (3.25), que

$$2q_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} + \frac{i}{2\pi} q^\nu = 0 \Rightarrow 2q_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} = \frac{i}{2\pi} g^{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Agora, vamos calcular a equação (3.11) onde também faremos o *shift* em  $\Pi_{conv}^{\mu\nu}$ :  $p \rightarrow p + qx$  e manteremos apenas os termos pares. Então,

$$\Pi_{conv}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{-2q^\mu q^\nu x + q^2 x g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2}. \quad (3.27)$$

Reescrevendo a equação acima, obtemos

$$\Pi_{conv}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \left\{ (-2q^\mu q^\nu x + q^2 x g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}) \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2} \right\} \quad (3.28)$$

como é possível observar, a integral cujo integrando é a variável  $p$  é idêntica a integral (3.14). Então, substituindo (3.20) em (3.27) obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{conv}^{\mu\nu} &= 2 \left( \frac{i}{4\pi} \right) \int_0^1 dx \frac{(2q^\mu q^\nu x + q^2 x g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu})}{M^2} \\ &= \frac{i}{2\pi} \left\{ (-2q^\mu q^\nu + q^2 g^{\mu\nu}) \int_0^1 dx \frac{x}{[m^2 + q^2 x(x-1)]} \right. \\ &\quad \left. + m^2 g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 + q^2 x(x-1)]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

as integrais acima tem como resultado:

$$\int_0^1 dx \frac{x}{[m^2 + q^2 x(x-1)]} = 2Z_0. \quad (3.30)$$

$$\int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 + q^2 x(x-1)]} = 4Z_0. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.29) e (3.30) em (3.28), encontramos a solução

$$\Pi_{conv}^{\mu\nu} = \frac{i}{2\pi} [(-2q^\mu q^\nu + q^2 g^{\mu\nu}) 2Z_0 + m^2 g^{\mu\nu} 4Z_0]. \quad (3.32)$$

Assim como fizemos na equação (3.23), também analisaremos a invariância de



gauge da equação (3.31)

$$\begin{aligned} q_\mu \Pi_{conv}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2\pi} [(-2q^2 q^\nu + q^2 q^\nu) 2Z_0 + m^2 q^\nu 4Z_0] \\ &= \frac{i}{2\pi} (-2q^2 q^\nu Z_0 + 4m^2 q^\nu Z_0). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ao final dos cálculos das equações (3.10) e (3.11), encontramos

$$\Pi_{conv}^{\mu\nu} = [2(-2q^2 q^\nu + q^2 g^{\mu\nu}) + 4m^2 g^{\mu\nu}] \frac{i}{2\pi} Z_0 \quad (3.34)$$

$$\Pi_{div}^{\mu\nu} = 2\Delta^{\mu\nu} + (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \frac{i}{2\pi q^2} + (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \left(2 - \frac{4m^2}{q^2}\right) \frac{i}{2\pi} Z_0, \quad (3.35)$$

com

$$\Delta^{\mu\nu} = \int_0^1 dx \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} {}^8. \quad (3.36)$$

O termo  $\Delta^{\mu\nu}$  é independente de  $M^2$  (que pode ser verificado calculando  $\frac{\partial \Delta^{\mu\nu}}{\partial M^2}$ ), superficial e divergente logaritmicamente. Todavia, resulta finito em qualquer esquema de regularização, ainda que indeterminado.

Para que  $\Pi^{\mu\nu}$  seja invariante de gauge precisamos obter

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow q_\mu \Pi_{div}^{\mu\nu} + q_\mu \Pi_{conv}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.37)$$

entretanto, as análises da invariância de gauge resultaram nas equações (3.24) e (3.32) que ao serem somadas resultam em

$$q_\mu (\Pi_{div}^{\mu\nu} + \Pi_{conv}^{\mu\nu}) = 2q_\mu \Delta^{\mu\nu} + \frac{i}{2\pi} q^\nu \quad (3.38)$$

só obteremos  $q_\mu \Pi^{\mu\nu}$  nulo se  $\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{4\pi} q^\nu$ .

Façamos a análise de  $\Delta^{\mu\nu}$ :

1.  $\Delta^{\mu\nu} = \int_0^1 dx \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} = \alpha g^{\mu\nu}$ , pois não há outro tensor de 2<sup>a</sup> ordem para  $\Delta^{\mu\nu}$  ser expandido;

Definimos  $\int_p = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2}$ .

---

<sup>8</sup>Um comentário importante é que todos os termos em  $(2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu})$  tem traço nulo ( $2q^2 - 2q^2 = 0$ ) e, também,  $\Delta^\mu{}_\mu = 0$ . Assim, sobra apenas o termo em  $m^2$  de  $\Pi_{conv}^{\mu\nu}$ .

2.  $\Delta^{\mu\nu}$  é adimensional ( $p^4/p^4$ ) e poderá depender apenas de  $q^2$  e  $m^2$  que aparecem na expressão

$$\Delta^{\mu\nu} = f(q^2/m^2)g^{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

3. Se quisermos preservar a identidade de traço em  $\Delta^{\mu\nu}$ , devemos ter

$$\Delta^\mu{}_\mu = \int_{p,x} \frac{2p^2 - 2p^2}{(p^2 - M^2)^2} = 0 = 2\alpha. \quad (3.40)$$

Dessa maneira,  $\alpha = 0$  e, conseqüentemente,  $\Delta^{\mu\nu} = \alpha g^{\mu\nu} = 0$ ;

4. Alternativamente, poderíamos calcular  $\Delta^{\mu\nu}$  por integração simétrica

$$I^{\mu\nu} = \int_p p^\mu p^\nu f(p^2) = \beta g^{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

$$g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = \int_p p^\mu p_\mu f(p^2) = \int_p p^2 f(p^2) = \beta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 2\beta \quad (3.42)$$

Logo,

$$\beta = \frac{1}{2} \int_p p^2 f(p^2) \Rightarrow \Delta^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \int_p p^2 f(p^2) \quad (3.43)$$

que, ao aplicar em  $\Delta^{\mu\nu}$ , resulta em

$$\Delta^{\mu\nu} = \int_{p,x} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} = \int_{p,x} \frac{2\frac{g^{\mu\nu}}{2} p^2 - p^2 g^{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} = 0. \quad (3.44)$$

Portanto, concluímos que em estritas (1+1) dimensões, deveríamos ter  $\Delta^{\mu\nu} = 0$ .

Agora, faremos a soma da parte divergente e convergente de  $\Pi^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= 2\Delta^{\mu\nu} + (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \left[ \frac{i}{2\pi q^2} + \left(2 - \frac{4m^2}{q^2}\right) \frac{i}{2\pi} Z_0 - 2\frac{i}{2\pi} Z_0 \right] + 4m^2 g^{\mu\nu} \frac{i}{2\pi} Z_0 \\ &= 2\Delta^{\mu\nu} + (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \left[ \frac{i}{2\pi q^2} - \frac{4m^2}{q^2} \frac{i}{2\pi} Z_0 \right] + 4m^2 g^{\mu\nu} \frac{i}{2\pi} Z_0 \\ &= 2\Delta^{\mu\nu} + \left( \frac{i q^\mu q^\nu}{q^2 \pi} - \frac{i g^{\mu\nu}}{2\pi} - \frac{4im^2 q^\mu q^\nu Z_0}{q^2 \pi} - \frac{4im^2 g^{\mu\nu} Z_0}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\Pi^{\mu\nu} = 2\Delta^{\mu\nu} + \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right) \frac{i}{\pi} - \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \frac{i}{\pi} m^2 Z_0, \quad (3.45)$$

aqui fizemos uma pequena mudança na definição de  $Z_0$ , que será dada por

$$Z_0 = \frac{4}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}} \arctan \left( \frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}} \right).$$

Nosso objetivo é encontrar um valor para  $\Delta^{\mu\nu}$  que ao ser substituído em (3.45) mantenha a propriedade de traço nulo de  $\Pi^{\mu\nu}$  e, também, sua invariância de gauge. Podemos ter as seguintes escolhas

1.  $\Delta^{\mu\nu} = 0$ :

$$\Pi^{\mu\nu} = (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \left[ \frac{i}{2\pi q^2} - \frac{4m^2}{q^2} \frac{i}{2\pi} Z_0 \right] + 4m^2 g^{\mu\nu} \frac{i}{2\pi} Z_0. \quad (3.46)$$

Neste caso, temos o traço zero ( $\Pi^\mu_\mu = 0$ ), se  $m^2 = 0$ . Mas, em relação à invariância de gauge, obtemos

$$\begin{aligned} q_\mu \Pi^{\mu\nu} &= q^2 q^\nu \left( \frac{i}{2\pi q^2} - \frac{4m^2}{q^2} \frac{i}{2\pi} Z_0 \right) + 4m^2 g^{\mu\nu} \frac{i}{2\pi} Z_0 = \frac{i}{2\pi} q^\nu \\ &\Rightarrow q_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Concluimos que para este caso,  $\Delta^{\mu\nu} = 0$ , o traço nulo é preservado. Entretanto, o mesmo não ocorre com a invariância de gauge;

2.  $\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{4\pi} g^{\mu\nu}$ , em contraste com o cálculo explícito de  $\Delta^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \Pi^\mu_\mu &= -2 \frac{i}{2\pi} = -\frac{i}{\pi} \\ &\Rightarrow \Pi^\mu_\mu \neq 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Neste caso, o traço não é nulo. Já para a invariância de Gauge encontramos

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = -\frac{2i}{4\pi} q^\nu + \frac{i}{2\pi} q^\nu = 0. \quad (3.49)$$

Para este caso a invariância de gauge é preservada e, por esse motivo, é a melhor escolha já que esta é uma propriedade física fundamental.

Finalmente, após toda essa exploração do termo  $\Delta^{\mu\nu}$ , confirmamos que as duas

propriedades (o traço nulo e a invariância de gauge) do TPV no Modelo de Schwinger, em exatamente (1+1)D não podem ser preservadas ao mesmo tempo. Ou seja, uma propriedade deve ser abandonada para que a outra seja mantida. Porém, este trabalho se propõe a demonstrar, mais adiante, que é possível satisfazer tanto a invariância de gauge como a identidade de traço nulo, simultaneamente, através de uma abordagem não-perturbativa (regularização espectral).

Para finalizar, também faremos a análise de  $m^2 Z_0$

$$\begin{aligned}
m^2 Z_0 &= \frac{m^2}{\sqrt{4m^2 q^2 - q^4}} \arctan \left( \frac{q^2}{\sqrt{4m^2 q^2 - q^4}} \right) \\
&= \frac{m^2}{i\sqrt{q^4 - 4m^2 q^2}} \arctan \left( \frac{q^2}{i\sqrt{q^4 - 4m^2 q^2}} \right) \\
&= -\frac{m^2}{\sqrt{q^4 - 4m^2 q^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{q^2}{\sqrt{q^4 - 4m^2 q^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

ou seja,

$$\lim_{m^2 \rightarrow 0} m^2 Z_0 = 0. \tag{3.51}$$

Expandindo  $\Pi^{\mu\nu}$  (3.45), observamos que

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu} &= 2\Delta^{\mu\nu} + (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \frac{i}{2\pi q^2} - 4m^2 \frac{2q^\mu q^\nu}{q^2} \frac{i}{2\pi} Z_0 + 8m^2 g^{\mu\nu} \frac{i}{2\pi} Z_0 \\
&= 2\Delta^{\mu\nu} + (2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \frac{i}{2\pi q^2} - 4m^2 \frac{i}{\pi} Z_0 \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \\
&= 2\Delta^{\mu\nu} + \underbrace{\left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right)}_{\text{Traço nulo}} \frac{i}{\pi} - \frac{i}{\pi} \underbrace{\left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right)}_{\text{Invariante de Gauge}} 4m^2 Z_0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Podemos notar, novamente, a impossibilidade de se satisfazer ambas propriedades (traço nulo e invariância de gauge). O segundo termo de (3.52) possui traço nulo, mas não é invariante de gauge. O terceiro termo de (3.52) é igual à zero para  $m^2 = 0$ . Se o primeiro termo possuir traço nulo, deverá ser identicamente nulo. Nesse caso, o traço de  $\Pi^{\mu\nu}$  é zero, mas a invariância de gauge não é satisfeita. Por outro lado, se  $\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{4\pi} g^{\mu\nu}$  temos invariância de gauge, mas o traço não será nulo.

## 4 Modelo Espectral de Quarks

A Cromodinâmica Quântica (QCD) descreve a interação entre quarks e glúons, conhecida como interação forte. Uma alternativa para se descrever a QCD em baixas energias é a utilização do Modelo Espectral de Quarks (Arriola e Broniowski 2003), tal modelo está inserido no que se conhece como Modelos Quirais de Quarks. O nome modelo quiral de quarks é comum para qualquer teoria de campo relativística que descreva características não-perturbativas da QCD. O objetivo deste capítulo é apresentar o modelo espectral de quarks, pois a regularização espectral, desenvolvida no contexto do Modelo Espectral de Quarks, será um instrumento fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Um modelo quiral de quarks pode ser construído a partir de uma generalização da representação de Lehmann para o propagador do quark, que passa a ser representado por uma dada função espectral  $\rho(\omega)$  e a técnica de calibre, essa abordagem é chamada de modelo espectral de quarks. Na representação de Lehmann (Bessis, Itzykson e Zuber 1980), o propagador do quark é dado por

$$S(p) = \int_C d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega}, \quad (4.1)$$

onde  $\omega$  é a massa espectral (massa constituinte do quark),  $\rho(\omega)$  é a função espectral (ou distribuição espectral) e  $C$  denota um contorno no plano complexo escolhido adequadamente.

O conceito de massa constituinte está relacionado à hipótese de que os quarks dentro dos hádrons não são partículas pontuais livres. Ou seja, considera-se que os quarks dentro dos hádrons adquirem uma massa efetiva (chamada massa constituinte) por causa do meio no qual estão inseridos (glúons, quarks virtuais, etc.). Então, o propagador (4.1) pode ser considerado como o propagador de uma partícula não pontual, à qual está relacionada uma função espectral  $\rho(\omega)$ , que descreve como a massa efetiva do quark é distribuída dentro dos hádrons.

A normalização adequada e a finitude dos observáveis hadrônicos são alcançadas pelo cumprimento das seguintes condições para os momentos da distribuição espectral  $\rho(\omega)$

$$\rho_0 \equiv \int d\omega \rho(\omega) = 1 \quad (4.2)$$

$$\rho_n \equiv \int d\omega \omega^n \rho(\omega) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

sendo os observáveis físicos proporcionais aos momentos negativos (ou momentos inversos),

$$\rho_{-n} \equiv \int d\omega \omega^{-n} \rho(\omega) \quad (4.4)$$

e aos momentos logarítmicos,

$$\begin{aligned} \rho'_n &\equiv \int d\omega \log\left(\frac{\omega^2}{\mu^2}\right) \omega^n \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega) - \underbrace{\int d\omega \log(\mu^2) \omega^n \rho(\omega)}_{=0} \\ &= \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na última passagem de (4.5), usamos a condição (4.3) para remover a dependência na escala  $\mu$ , garantindo assim a ausência de qualquer transmutação dimensional. A única exceção é o momento  $\rho'_0$

$$\rho'_0(\mu^2) = \int d\omega \log\left(\frac{\omega^2}{\mu^2}\right) \rho(\omega) \quad (4.6)$$

que depende de uma escala  $\mu$  e que não é regularizada pelo método espectral.

A princípio, não é necessário determinar a forma da distribuição espectral  $\rho(\omega)$ , mas sim as consequências gerais e relações implícitas que seguem das condições espectrais (4.2-4.5).

Como já foi dito, em certas amplitudes de probabilidade é necessário o emprego de esquemas de regularização, pois permitem identificar e eliminar (quando possível) as divergências presentes nas diferentes amplitudes. É preciso atenção na escolha de um esquema de regularização já que o mesmo deve preservar propriedades de simetria presentes na teoria. A regularização espectral permite resolver explicitamente as identidades de

Ward-Takahashi eletromagnética (ou de calibre) e quiral, através da técnica de calibre (Delbourgo e West 1977, Delbourgo 1979).

Portanto, o modelo com a regularização espectral, expressões (4.1), (4.2) e (4.3), suprido com acoplamentos obtidos por meio da técnica de calibre, possui simultaneamente as seguintes características:

1. fornece valores finitos para os observáveis hadrônicos, que podem ser usados para fixar os momentos inversos (4.4) e os momentos log (4.5);
2. satisfaz, por construção, as identidades de Ward-Takahashi de calibre e quiral, re-produzindo assim, todas as exigências de simetria necessárias.

Conclui-se, diante do que foi exposto, que a regularização espectral introduzida pela técnica de calibre é especial pois ela não apenas torna a teoria finita, mas também corresponde a tomar o limite de *cut-off* infinito naqueles observáveis que não dependem da massa constituinte. Isto permite, por exemplo, a avaliação adequada de anomalias, pois o valor próximo do experimental para a largura de decaimento anômalo do pión (decaimento do pión neutro em dois fótons) pode ser obtido apenas em um modelo quiral de quarks na ausência de um regularizador (ou no limite em que o *cut-off* vai para o infinito).

## 4.1 Momentos da Função Espectral

Pode-se parametrizar o propagador (4.1) na forma

$$\begin{aligned}
 S(p) &= A(p)\not{p} + B(p) \\
 &= A(p) \left[ \not{p} + \frac{B(p)}{A(p)} \right] \\
 &= \frac{Z(p)}{\not{p} - M(p)}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

com

$$A(p) = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \tag{4.8}$$

$$B(p) = \int d\omega \frac{\rho(\omega)\omega}{p^2 - \omega^2}. \tag{4.9}$$

A função  $M(p)$  em (4.7) é a autoenergia do quark, enquanto  $Z(p)$  é a renormalização da função de onda do quark, dadas por

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (4.10)$$

$$Z(p) = [p^2 - M^2(p)]A(p). \quad (4.11)$$

É interessante observar que se  $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$  a massa do quark seria zero,  $M(p^2) = 0$ , e a quebra espontânea da simetria quiral não ocorreria. Portanto, em geral, espera-se que  $\rho(\omega)$  não seja uma função par.

Como os observáveis físicos são proporcionais aos momentos da função espectral  $\rho(\omega)$ , é conveniente relacionar os momentos negativos (4.4) e os momentos log (4.5) às integrais que envolvem  $M(p)$  e  $Z(p)$ . Para isso, é assumido que o seguinte conjunto de condições espectrais seja satisfeito

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) = \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

e será utilizada a seguinte identidade

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{\not{p} - \omega} = \not{p}^n S(\not{p}) - \not{p}^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Substituindo (4.7) em (4.13) e racionalizando os denominadores, obtem-se

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} = \not{p}^n Z(p) \frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p}^{n-1}. \quad (4.14)$$

Há duas possibilidades para  $n$ , par ou ímpar. Para  $n = 2\kappa$  (par), tem-se

$$\int d\omega \omega^{2\kappa} \rho(\omega) \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} = p^{2\kappa} Z(p) \frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p}^{2\kappa-1} \quad (4.15)$$

$$\int d\omega \left[ \rho(\omega) \frac{\not{p} \omega^{2\kappa}}{p^2 - \omega^2} + \rho(\omega) \frac{\omega^{2\kappa+1}}{p^2 - \omega^2} \right] = p^{2\kappa} \frac{\not{p} Z(p)}{p^2 - M^2(p)} + p^{2\kappa} \frac{Z(p) M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \frac{p^{2\kappa}}{\not{p}} \times \frac{\not{p}}{\not{p}} \quad (4.16)$$

$$\not{p} L_{2\kappa}(p^2) + L_{2\kappa+1}(p^2) = \not{p} p^{2\kappa} \frac{Z(p)}{p^2 - M^2(p)} + p^{2\kappa} \frac{Z(p) M(p)}{p^2 - M^2(p)} - \not{p} p^{2\kappa-2} \quad (4.17)$$



onde, na última passagem, foi definido

$$L_n(p^2) = \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \quad (4.18)$$

Comparando termos de mesma potência em  $\not{p}$ , são obtidas as seguintes identidades

$$L_{2\kappa}(p^2) = p^{2\kappa} \frac{Z(p)}{p^2 - M^2(p)} - p^{2\kappa-2} \quad (4.19)$$

$$L_{2\kappa+1}(p^2) = p^{2\kappa} \frac{Z(p)M(p)}{p^2 - M^2(p)} \quad (4.20)$$

que são obtidas também para o caso de  $n$  ímpar. A partir do conjunto de condições espectrais (4.12), são encontradas as seguintes relações de recorrência para  $n > 2$

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = p^2 \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}, \quad n > 2 \quad (4.21)$$

$$L_n(p^2) = p^2 L_{n-2}(p^2), \quad n > 2 \quad (4.22)$$

De (4.5), tem-se que

$$\begin{aligned} \rho'_n &= \int d\omega \omega^n \log(\omega^2) \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \int_0^\infty dp^2 \frac{1}{p^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Passando para o espaço Euclidiano ( $p^2 \rightarrow -p_E^2$ ), obtem-se

$$\begin{aligned} \rho'_n &= - \int_0^\infty dp_E^2 L_n(-p_E^2) \\ &= - \int_0^\infty dp_E^2 p_E^2 L_{n-2}(-p_E^2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

que descreve os momentos log de  $\rho(\omega)$  em termos de  $M(p)$  e  $Z(p)$ .

Já os momentos negativos podem ser obtidos a partir da derivada do propagador do quark (4.1) na origem

$$\rho_{-n} = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega^n} = - \left( \frac{d}{d\not{p}} \right)^{n-1} S(\not{p}) \Big|_{p=0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Assim, dado o propagador do quark  $S(\not{p})$ , é possível obter os momentos log e os

momentos negativos apenas utilizando as relações (4.22) e (4.23) sem precisar encontrar a forma explícita da função espectral.

## 4.2 Limite $p \rightarrow \infty$

Para grandes momentos, limite em que  $p \rightarrow \infty$ , é permitido expandir o propagador do quark (4.1), na forma

$$S(p)\Big|_{p \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\not{p}} \int d\omega \rho(\omega) + \frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega)\omega + \frac{1}{p^3} \int d\omega \rho(\omega)\omega^2 + \dots \quad (4.26)$$

Uma vez que na região assintótica o propagador do quark é normalizado para

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}} \quad (4.27)$$

pode-se obter de (4.24) a seguinte condição espectral

$$\rho_0 = \int d\omega \rho(\omega) = 1. \quad (4.28)$$

Considerando que a função de massa  $M(p)$  deve assintoticamente se anular, a relação (4.10) se torna

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \rightarrow M(p)\Big|_{p \rightarrow \infty} = \frac{\frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega)\omega}{\frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega)} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{1} = 0 \quad (4.29)$$

com isso, é obtido que  $\rho_1 = 0$ . Observe que se todas as condições espectrais fossem determinadas a partir da mesma expansão para grandes momentos, trivialmente isso resultaria em um propagador total para o quark livre e sem massa. Portanto, a expansão para grandes momentos não pode representar o propagador completo (e não trivial) do quark.

## 4.3 O Tensor de Polarização do Vácuo no Modelo de Schwinger em uma Abordagem Espectral

Uma maneira para termos a preservação simultânea do traço e da invariância de gauge é utilizando a *Regularização Dimensional*. A justificativa para a escolha desta regularização é o fato de  $\Delta^{\mu\nu}$  ser calculado com mais facilidade ao ser substituído  $d^2p \rightarrow d^\omega p$  na equação (3.36), calculando seu resultado, e tomando o limite  $\omega \rightarrow 2$ , resulta em  $\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{4\pi}g^{\mu\nu}$  que, substituindo este resultado na equação (3.45), resulta em um TPV invariante de calibre no limite  $m^2 \rightarrow 0$ . Nesse caso, o traço do TPV no espaço de Minkowski não é nulo. No entanto, é importante observar que a ausência de traço do TPV, mencionado anteriormente, foi calculada em duas dimensões, assim o traço da expressão (3.4) em dimensões  $\omega$  não inteiras resulta em  $\Pi_\mu^\mu \neq 0$  desde o início. Dessa forma, a avaliação do TPV no modelo de Schwinger dentro da regularização dimensional é completamente consistente, já que tanto as identidades de traço (não nulo em dimensões  $\omega$ ) quanto de gauge são preservadas. Isto posto, deixa claro o objetivo desta seção que é apresentar o TPV no modelo de Schwinger no contexto da *Regularização Espectral* (Arriola e Broniowski 2003), em exatas (1+1) dimensões.

Como foi apresentado na seção 3.1, o TPV no modelo de Schwinger é dado pela equação (3.45). Além disso, ficou explícita a dificuldade em se manter o traço nulo do TPV ao mesmo tempo em que se preserva sua invariância de gauge no espaço de Minkowski. Nosso objetivo nesta seção é aplicar a Regularização Espectral no TPV no Modelo de Schwinger e, dessa forma, remover suas ambiguidades.

### 4.3.1 Regularização Espectral

Nas primeiras seções desse capítulo, a regularização espectral foi introduzida no contexto do chamado modelo espectral de quarks. No modelo espectral de quarks, a fenomenologia de mésons de baixa energia é estudada através de amplitudes de probabilidade calculadas usando-se propagadores e vértices não perturbativos obtidos do propagador de Lehmann e utilizando-se a técnica de gauge. A regularização espectral corresponde a

encontrar uma solução particular para a identidade de Ward-takahashi, tal que

$$q_\mu \Gamma^\mu(p, p - q) = S(p) - S(p - q), \quad (4.30)$$

onde  $S(p)$  é o propagador não perturbativo de Lehmann

$$S(p) = \int_C d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p} - \omega + i\epsilon} \quad (4.31)$$

e  $\Gamma^\mu(p)$  é a função de vértice

$$\Gamma^\mu(p, p - q) = \int_C d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p} - \omega + i\epsilon} i\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{q} - \omega + i\epsilon}. \quad (4.32)$$

Dessa forma, a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$\Pi^{\mu\nu} = \int_C d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} Tr \left\{ \frac{i}{\not{p} - \omega} i\gamma^\mu \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - \omega} i\gamma^\mu \right\} \quad (4.33)$$

a integral do momento que aparece no integrando em  $\omega$  na equação acima é exatamente a mesma integral que foi resolvida na abordagem perturbativa resultando na equação (3.45), com a substituição  $m \rightarrow \omega$ .

Nosso foco é encontrar uma solução particular para  $\rho(\omega)$  que atenda aos requisitos que esperamos para o TPV do modelo de Schwinger, ou seja, para férmions sem massa:

- Resultar em uma amplitude finita e inequívoca (não ambígua);
- Ser invariante de gauge;
- Preservar o traço da amplitude no espaço de Minkowski.

Além desses requisitos, devemos esperar a unitariedade da densidade espectral:

$$\int_C d\omega \rho(\omega) = 1. \quad (4.34)$$

esta é uma condição importante porque garante que nenhum conteúdo constante (independente de  $\omega$ ) das amplitudes seja modificado pela regularização espectral.

Devemos definir algumas grandezas físicas dentro da regularização espectral. O propagador de férmions será escrito como

$$S(p) = \left( \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{p^2 - \omega^2} \right) \not{p} + \left( \int d\omega \rho(\omega) \frac{i\omega}{p^2 - \omega^2} \right) = A(p^2)\not{p} + B(p^2). \quad (4.35)$$

Também pode ser descrito em termos da massa do férmion  $m(p^2)$  e da constante de renormalização do campo  $Z(p)$ :

$$S(p) = Z(p)i \frac{\not{p} + m(p^2)}{p^2 - m(p^2)^2}, \quad (4.36)$$

a partir do qual, comparando com a equação (4.35), obtemos para a massa do férmion

$$m(p^2) = \frac{B(p^2)}{A(p^2)}. \quad (4.37)$$

Ressaltamos que  $m(p^2)$  não é a mesma massa  $m$  que aparece na lagrangeana do modelo, para a qual  $m \equiv 0$ .  $m(p^2)$ , em vez disso, é a massa efetiva dinâmica calculada a partir do propagador de Lehmann não perturbativo, equação (4.31). A massa física do férmion é dada pelo pólo do propagador de férmions, equação (4.36), ou seja,  $p^2 - m(p^2)^2 = 0$ . A condição para férmions sem massa (o modelo de Schwinger), necessária para garantir um modelo solucionável e simetria quiral (no modelo de Schwinger Quiral), é a presença de um pólo no propagador em  $p^2 = 0$ , ou seja,  $m(0) = 0$ , o que implica, a partir da equação (4.37), em

$$B(p^2 = 0) = -i \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega} = 0. \quad (4.38)$$

Outra quantidade relevante a ser levada em consideração em nossa análise é a constante de acoplamento  $e(p^2)$  ou sua contraparte espectral,  $e^2(\omega^2)$ . Ela considera as correções não perturbativas do acoplamento eletromagnético, ou seja, a dependência do acoplamento entre os férmions e o campo de gauge com a massa espectral (como uma escala de energia). Neste contexto, devido à dependência do fator eletromagnético com a massa espectral, não podemos mais fatorar este acoplamento como foi feito na equação

(4.30). Assim, a identidade de Ward-Takahashi deve ser escrita como

$$q_\mu \Gamma_e^\mu(p, p - q) = e^2(p^2)S(p) - e^2((p - q)^2)S(p - q) \quad (4.39)$$

onde  $e(p^2)$  é a constante de acoplamento e  $\Gamma_e^\mu$  é a função de vértice do vetor com o acoplamento espectral incluído que é dado por

$$\Gamma^\mu(p, p - q) = \int_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega^2) \frac{i}{\not{p} - \omega + i\epsilon} i\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{q} - \omega + i\epsilon}. \quad (4.40)$$

O TPV pode ser escrito agora, usando a equação (3.45) e a equação (4.33), como

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q^2) &= \left[ 2\Delta^{\mu\nu} + \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right) \frac{i}{\pi} \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) d\omega \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \frac{i}{\pi} \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) \omega^2 Z_0(q^2, \omega^2) d\omega \right] \\ &= \left[ 2\Delta^{\mu\nu} + \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right) \frac{i}{\pi} \right] \rho_e - \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \frac{i}{\pi} \rho_{Z_0} \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $Z_0(q^2, \omega^2)$  continua sendo

$$Z_0(q^2, \omega^2) = \frac{4}{\sqrt{4\omega^2 q^2 - q^4}} \arctan \left( \frac{q^2}{\sqrt{4\omega^2 q^2 - q^4}} \right) \quad (4.42)$$

e definimos

$$\rho_e = \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) d\omega \quad (4.43)$$

e

$$\rho_{Z_0} = \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) \omega^2 Z_0(q^2, \omega^2) d\omega. \quad (4.44)$$

O traço do TPV no espaço de Minkowski agora é dado pela expressão

$$4 \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) d\omega \int \frac{d^2 p}{(2\pi^2)} \frac{\omega^2}{(p^2 - \omega^2)[(p - q)^2 - \omega^2]} = 2\Delta_\mu^\mu \rho_e + \frac{i}{\pi} \rho_{Z_0}. \quad (4.45)$$

O grau superficial de divergências da integral acima (cujo integrando é a variável  $p$ ) é menor que zero e isso faz da integral convergente. Por esse motivo, ela pode ser calculada

e resulta em

$$\frac{i}{\pi}\rho_{Z_0} = 2\Delta_\mu^\mu\rho_e + \frac{i}{\pi}\rho_{Z_0} \quad (4.46)$$

e para preservar a identidade de traço em exatamente (1+1)D, a condição a ser satisfeita é  $\Delta_\mu^\mu = 0$  ou  $\rho_e = 0$ . Devemos observar que, usando a regularização espectral,  $\Pi_\mu^\mu = \frac{i}{\pi}\rho_{Z_0}$ , ou seja, o traço não é nulo. A identidade de traço, nesse caso, corresponde à garantir que os traços calculados no lado esquerdo e no lado direito da equação (4.45) ou (4.46) sejam os mesmos.

Agora, para obter um resultado invariante de gauge para a equação (4.41) podemos atribuir um valor não nulo específico a  $\Delta_\mu^\mu$  de tal forma que o primeiro termo da equação (4.41) (o coeficiente de  $\rho_e$ ) se torne invariante de gauge, como feito antes, ou, em vez disso, podemos assumir  $\rho_e = 0$ , eliminando tanto o termo ambíguo  $\Delta_\mu^\mu$  quanto o termo não invariante de gauge  $\left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}\right)$ , preservando também a identidade do traço, equação (4.46). Assim, para satisfazer simultaneamente a invariância de gauge e a identidade do traço, obtendo como consequência um resultado não ambíguo, devemos ter  $\rho_e = 0$ . Para evitar a solução trivial  $\Pi^{\mu\nu} = 0$  também devemos ter  $\rho_{Z_0} \neq 0$  - e é por isso que na abordagem perturbativa, onde  $\rho(\omega) = \delta(\omega - m)$ , não há solução que preserve simultaneamente as identidades de traço e gauge, pois, neste abordagem,  $\rho_{Z_0} = 0$  para  $m = 0$ .

Em resumo, temos as seguintes condições a serem satisfeitas pela função espectral:

i) Unitariedade da função espectral

$$\rho_0 \equiv \oint_C d\omega \rho(\omega) = 1; \quad (4.47)$$

ii) Férmions com massa zero

$$iB(p^2 = 0) = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega} = 0; \quad (4.48)$$

iii) TPV não ambíguo, invariante de gauge e identidade de traço preservada:

$$\rho_e = \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) d\omega = 0; \quad (4.49)$$

iv) Solução não trivial para o TPV:

$$\rho_{Z_0} = \oint_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) \omega^2 Z_0(q^2, \omega^2) d\omega \neq 0. \quad (4.50)$$

As condições (i) a (iv) constituem um conjunto de requisitos que devem ser cumpridos por qualquer procedimento de regularização ao serem aplicados no modelo de Schwinger, de forma a satisfazer, simultaneamente, as propriedades físicas (e matemáticas) anteriormente referidas do modelo em exatas (1+1)D de forma consistente.

### 4.3.2 Uma Solução Particular

Como já mencionado, a técnica de gauge consiste em encontrar uma solução particular para as funções de vértice do modelo, a menos de partes transversais, que satisfaça todos os requisitos do modelo, em particular a identidade de Ward-Takahashi (4.39). Em nossa abordagem, significa encontrar uma representação particular para  $\rho(\omega)$  e  $e^2(\omega^2)$  na equação (4.40) que satisfaça as condições (i) a (iv). No contexto da regularização espectral, também temos que escolher um contorno complexo apropriado  $C$  que se torne, assim, parte da regularização. Observamos que a única escala de energia presente em funções de dois pontos como o TPV, calculada a partir da solução da função de vértice vetorial, (4.40), é a norma do quadrado do momento externo,  $q^2$ , uma vez que os férmions não têm massa - modelo de Schwinger. Assim, devemos esperar que a função espectral  $\rho(\omega)$  e o acoplamento espectral  $e^2(\omega^2)$  sejam funções implícitas desta única escala, pelo menos dentro das funções de dois pontos. Mostraremos ainda que esta função espectral dependente da escala não compromete as condições (i) e (ii), que devem ser independentes de  $q^2$ .

Observamos, a partir da equação (4.50), que se  $\rho(\omega) e^2(\omega^2) = \frac{f(q^2, \omega)}{\sqrt{q^2 - 4\omega^2}}$  para um arbitrário não singular, obtemos dois pólos no integrando de (4.50) sem introduzir nenhum pólo no integrando de  $\rho_e$ , equação (4.49). Juntamente com o deslocamento dos pólos para a metade superior do plano complexo  $\omega$  de uma quantidade infinitesimal  $\epsilon$  e a integração ao longo de um caminho fechado  $C$  envolvendo ambos os pólos, isso garante que as condições (iii) e (iv) sejam satisfeitas. Assim, considerando também as condições das equações



(4.47) e (4.48), uma solução particular para as condições (i) a (iv), a menos de termos transversais e fatores multiplicativos constantes, é dada por<sup>9</sup>

$$\rho(\omega) = \frac{2i}{\pi} \omega \frac{e^{-|1-\frac{4\omega^2}{q^2}|}}{q^2 - 4\omega^2} \quad (4.51)$$

e

$$e^2(\omega^2) = \frac{e_0^2}{\pi} \sqrt{1 - 4\frac{\omega^2}{q^2}}, \quad (4.52)$$

a ser integrado no referido contorno complexo  $C$ . O fator  $e^{-|1-\frac{4\omega^2}{q^2}|}$  foi incluído apenas para garantir que o integrando desapareça no limite  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

As condições (i) a (iv), ou seja, as equações (4.47) a (4.50) podem ser verificadas diretamente<sup>10</sup>. Na verdade, o produto  $\rho(\omega)e^2(\omega^2)$  não tem polo dentro do caminho complexo  $C$ , então  $\rho_e = \oint_C \rho(\omega)e^2(\omega^2)d\omega = 0$ , a equação (4.49) é satisfeita. O integrando de  $\rho_0$ , ou seja,  $\rho(\omega)$ , apresenta dois polos únicos localizados em  $\omega = \pm \frac{q}{2}$ , com  $q = \sqrt{q^2}$ . Os resíduos nesses pólos são ambos iguais a  $-\frac{i}{4\pi}$ , e considerando o deslocamento dos polos de uma quantidade infinitesimal  $i\epsilon$  para o contorno  $C$ , obtemos a equação (4.47).

O integrando da equação (4.48) possui dois polos únicos em  $\omega = \pm \frac{q}{2}$ . Obtemos dois pares de resíduos com sinais opostos e, portanto, a integral  $B(p^2)$ , (4.48), desaparece.

Finalmente, ficamos com  $\rho_{Z_0}$  para ser resolvido. Substituindo as equações (4.42), (4.51) e (4.52) na equação (4.50), obtemos

$$\rho_{Z_0}(q^2) = \frac{-8ie_0^2}{\pi^2} \oint \frac{\omega^3 e^{-|1-\frac{4\omega^2}{q^2}|}}{q^2(q^2 - 4\omega^2)} \operatorname{arctanh} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}}} \right) d\omega. \quad (4.53)$$

O integrando da equação acima possui dois polos localizados em  $\omega = \pm \frac{q}{2}$ . Nestes polos,

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm q/2} \operatorname{arctanh} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}}} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.54)$$

<sup>9</sup>A elaboração da solução particular para a densidade espectral (4.51) e o acoplamento espectral (4.52) foi dada por tentativa de acerto e erro, tendo em vista as características das condições espectrais, equações (4.47) a (4.50).

<sup>10</sup>Os cálculos encontram-se no Anexo D.

Realizando a integração por resíduos no contorno  $C$ , obtemos

$$\rho_{Z_0}(q) = -ie_0^2, \quad (4.55)$$

recuperando o resultado convencional exato para o TPV do modelo de Schwinger

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{e_0^2}{\pi} \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right). \quad (4.56)$$

Isto conclui nossa demonstração de que a solução particular para a densidade espectral, equação (4.51), e para o acoplamento espectral, equação (4.52), satisfaz as condições espectrais dadas pelas equações (4.47) a (4.50), garantindo a invariância de calibre e a consistência matemática (preservação da identidade de traço) dentro do modelo de Schwinger em exatas (1+1)D.

Para completar, vamos mostrar, como mencionado anteriormente, que embora  $\rho(\omega)$  e  $e^2(\omega^2)$  sejam implicitamente dependentes da escala de energia externa  $q^2$ , não compromete as relações independentes de escala dadas pelas equações (4.47) e (4.48).

Da equação (4.47), a condição de unitariedade é dada por

$$\rho_0 = \oint_C \rho(\omega) d\omega = \oint_C \frac{2i}{\pi} \omega \frac{e^{-|1-\frac{4\omega^2}{q^2}|}}{q^2 - 4\omega^2} d\omega = 1. \quad (4.57)$$

O resultado da equação (4.57) é de fato independente de  $q^2$ , pois, realizando a mudança de variável  $x = \frac{\omega}{q}$ , com  $q = \sqrt{q^2}$ , como antes, obtemos

$$\rho_0 = \oint_C \frac{2i}{\pi} x \frac{e^{-|1-x^2|}}{1-x^2} dx, \quad (4.58)$$

com os polos situados em  $x = \pm 1$ . Portanto, nem o integrando nem os polos da equação (4.58) são dependentes da escala. A mesma característica pode ser observada também na equação (4.49) com a mesma mudança de variável. Para  $B(p^2)$ , equação (4.48), esta independência na escala de energia externa  $q^2$  não é observada, pois, alterando  $\omega \rightarrow qx$ , obtemos dois dos polos em  $x = \pm \frac{p}{q}$ . Porém, como os polos possuem sinais opostos, eles se anulam no resultado final, ou seja,  $B(p^2) = 0$  para qualquer valor de  $q$ .

## 5 Modelo de Schwinger Quiral

O objetivo deste capítulo é analisar as consequências do emprego da regularização espectral no modelo de Schwinger Quiral.

O modelo de Schwinger Quiral (Jackiw e Rajaraman 1985), onde um campo de calibre U(1) acoplado a férmions quirais sem massa em (1+1)D, é definido pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + m)\psi - e_0\bar{\psi}\gamma_\mu(1 + \gamma^5)A^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde  $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$ . A quantidade de interesse, neste trabalho, é a função de dois pontos vetor/vetor axial para o bóson de calibre, devido à sua semelhança com a anomalia Adler-Bardeen-Bell-Jackiw da Cromodinâmica Quântica. As funções de dois pontos vetor/vetor axial para o bóson de calibre são dadas por

$$\Pi_{VA}^{\mu\nu}(q) = \oint_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega^2) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left\{ i\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \omega} i\gamma^\nu \gamma^5 \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - \omega} \right\}, \quad (5.2)$$

onde foi introduzida a regularização espectral. Neste ponto, é importante notar que, como já mencionado na Introdução, a álgebra de  $\gamma^5$  pode trazer sérios problemas ao correto tratamento de modelos quirais. Indicamos, novamente, que não existe uma extensão natural do objeto  $\gamma^5$  para dimensões não inteiras. Além disso, foi demonstrado por Viglioni (Viglioni et al. 2016) que a álgebra de  $\gamma^5$  é ambígua dentro de integrais divergentes, tanto em (1+1)D quanto em (3+1)D. A regularização espectral, entretanto, tem a característica de, pela escolha adequada das condições espectrais, eliminar qualquer integral divergente e/ou ambígua no cálculo das amplitudes quânticas, como foi mostrado nos capítulos anteriores. Restam apenas resultados convergentes e não ambíguos, e neste caso podemos empregar qualquer relação obtida da álgebra de  $\gamma^5$  em exatas (1+1)D. Então, vamos calcular os resultados e mostrar como a regularização espectral elimina os resultados ambíguos que potencialmente aparecem no cálculo de  $\Pi_{VA}^{\mu\nu}$ .

Racionalizando a expressão (5.2), temos

$$\frac{1}{\not{p} - \omega} = \frac{1}{\not{p} - \omega} \cdot \frac{\not{p} + \omega}{\not{p} + \omega} = \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\not{p} - \not{q} - \omega} = \frac{1}{(\not{p} - \omega) - \not{q}} \cdot \frac{(\not{p} + \omega) - \not{q}}{(\not{p} + \omega) - \not{q}} = \frac{\not{p} - \not{q} + \omega}{(p - q)^2 - \omega^2} \quad (5.4)$$

Substituindo (5.3) e (5.4) em (5.2), obtemos

$$\Pi_{VA}^{\mu\nu}(q) = \oint_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega^2) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} Tr \left\{ i^2 \gamma^\mu \frac{(\not{p} + \omega)}{(p^2 - \omega^2)} i^2 \gamma^\nu \gamma^5 \frac{\not{p} - \not{q} + \omega}{[(p - q)^2 - \omega^2]} \right\}, \quad (5.5)$$

onde  $\not{p} = p_\rho \gamma^\rho$  e  $\not{q} = p_\sigma \gamma^\sigma$ . Para o cálculo da integral em  $p$  de (5.5), é necessário calcular os traços das matrizes  $\gamma$  e  $\gamma^5$  em (1+1)D. Além das identidades de (3.5), também faremos uso das identidades envolvendo a matriz  $\gamma^5$ :

$$Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^5 \} = 0, \quad (5.6)$$

$$Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \} = -2\varepsilon^{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

$$\gamma^\nu \gamma^5 = 2\varepsilon_\alpha^\nu, \quad (5.8)$$

como consequência da equação (5.8),

$$Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\sigma \} = 2\varepsilon_\alpha^\nu (g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} - g^{\mu\alpha} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\rho\alpha}). \quad (5.9)$$

Nas expressões acima  $\varepsilon^{\mu\nu}$  é o tensor completamente antissimétrico, para o qual  $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$ .

Aplicando as identidades acima em (5.5), obtemos

$$\begin{aligned}
& Tr \{ \gamma^\mu (\not{p} + \omega) \gamma^\nu \gamma^5 (\not{p} - \not{q} + \omega) \} \\
&= Tr \{ \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \gamma^5 (\not{p} - \not{q}) \} + Tr \{ \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \gamma^5 \omega \} + Tr \{ \gamma^\mu \omega \gamma^\nu \gamma^5 (\not{p} - \not{q}) \} \\
&+ Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \omega^2 \} \\
&= p_\rho (p - q)_\sigma Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\rho \gamma^\sigma \} + \omega p_\rho \underbrace{Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \}}_{=0} + \omega (p - q)_\sigma \underbrace{Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\sigma \}}_{=0} \\
&+ \omega^2 Tr \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \} \\
&= 2\varepsilon'_\alpha \{ p^\mu (p^\alpha - q^\alpha) - g^{\mu\alpha} [p \cdot (p - q)] + p^\alpha (p^\mu - q^\mu) \} - 2\omega^2 \varepsilon^{\mu\nu}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Substituindo (5.10) em (5.5), temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{VA}^{\mu\nu}(q) &= \oint_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega^2) \left\{ 2\varepsilon'_\alpha \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu (p^\alpha - q^\alpha) + p^\alpha (p^\mu - q^\mu) - g^{\mu\alpha} [p \cdot (p - q)]}{(p^2 - \omega^2)[(p - q)^2 - \omega^2]} \right. \\
&\quad \left. - 2\varepsilon^{\mu\nu} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\omega^2}{(p^2 - \omega^2)[(p - q)^2 - \omega^2]} \right\} \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Nosso próximo passo é aplicar a parametrização de Feynman (3.8) na equação acima. Como é possível observar, os denominadores das integrais de (5.11) são parecidos com os da equação (3.7), exceto pelo fato de aqui estarmos considerando a massa espectral  $\omega$ . Logo, o resultado da parametrização de Feynman será o mesmo, dado por:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[(a-b)x + b]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(p - qx)^2 - \omega^2 + q^2x(x-1)]^2}, \tag{5.12}$$

onde definimos  $M^2 = \omega^2 + q^2x(x-1)$ . Assim, podemos reescrever (5.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Pi_{VA}^{\mu\nu}(q) &= \oint_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega^2) \left\{ 2\varepsilon'_\alpha \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{p^\mu (p^\alpha - q^\alpha) + p^\alpha (p^\mu - q^\mu) - g^{\mu\alpha} [p \cdot (p - q)]}{[(p - qx)^2 - M^2]^2} \right. \\
&\quad \left. - 2\varepsilon^{\mu\nu} \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\omega^2}{[(p - qx)^2 - M^2]^2} \right\}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Agora, faremos o shift:  $p \rightarrow p + qx$  e a equação (5.13) se torna:

$$\begin{aligned} \Pi_{VA}^{\mu\nu}(q) = & \oint_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega^2) \left\{ 2\varepsilon_\alpha^\nu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\alpha + 2q^\mu q^\alpha x(x-1) - g^{\mu\alpha}[p^2 + q^2 x(x-1)]}{[(p-qx)^2 - M^2]^2} \right. \\ & \left. - 2\varepsilon^{\mu\nu} \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\omega^2}{[(p-qx)^2 - M^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ao analisarmos a equação (5.14) identificamos termos logaritmicamente divergentes e termos convergentes. Separando esses dois termos, temos

$$\Pi_{VA_{conv}}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\varepsilon_\alpha^\nu [2q^\mu q^\alpha x(x-1) - g^{\mu\alpha} q^2 x(x-1)] - \varepsilon^{\mu\nu} \omega^2}{[(p-qx)^2 - M^2]^2} \right\}. \quad (5.15)$$

$$\Pi_{VA_{div}}^{\mu\nu} = 2\varepsilon_\alpha^\nu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\alpha}}{[(p-qx)^2 - M^2]^2}. \quad (5.16)$$

Começamos pela equação (5.15), a qual reescrevemos como:

$$\Pi_{VA_{conv}}^{\mu\nu} = 2 \int_0^1 dx \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu [(2q^\mu q^\alpha - g^{\mu\alpha} q^2)x(x-1)] - \varepsilon^{\mu\nu} \omega^2 \right\} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2}. \quad (5.17)$$

A integral em  $p$  da equação acima é a mesma de (3.15), logo utilizando o resultado (3.21), temos

$$\begin{aligned} \Pi_{VA_{conv}}^{\mu\nu} = & \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu (2q^\mu q^\alpha - g^{\mu\alpha} q^2) \int_0^1 dx \frac{x(x-1)}{[q^2 x(x-1) + \omega^2]} \right. \\ & \left. - \varepsilon^{\mu\nu} \omega^2 \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 x(x-1) + \omega^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde

$$\int_0^1 dx \frac{x(x-1)}{[q^2 x(x-1) + \omega^2]} = \frac{1}{q^2} - \frac{4\omega^2}{q^2} Z_0 \quad (5.19)$$

e

$$\int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 x(x-1) + \omega^2]} = 4Z_0, \quad (5.20)$$

O termo  $Z_0$  é o mesmo apresentado na seção 3.1. Levando os resultados (5.19) e (5.20) na equação (5.18), obtemos:

$$\Pi_{VA_{conv}}^{\mu\nu} = \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu \left[ (2q^\mu q^\alpha - q^2 g^{\mu\alpha}) \left( \frac{1}{q^2} - \frac{4\omega^2}{q^2} Z_0 \right) \right] - \varepsilon^{\mu\nu} \omega^2 4Z_0 \right\}. \quad (5.21)$$

Fazendo a análise da invariância de Gauge da equação (5.21)

$$\begin{aligned} q_\mu \Pi_{VA_{conv}}^{\mu\nu} &= \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu \left[ (2q_\mu q^\mu q^\alpha - q^2 q_\mu g^{\mu\alpha}) \left( \frac{1}{q^2} - \frac{4\omega^2}{q^2} Z_0 \right) \right] - \varepsilon^{\mu\nu} q_\mu \omega^2 4Z_0 \right\} \\ &= \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu (q^2 - 4\omega^2 q^\alpha Z_0) - 4\omega^2 Z_0 \varepsilon^{\mu\nu} q_\mu \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Calculando, agora, a equação (5.16):

$$\begin{aligned} \Pi_{VA_{div}}^{\mu\nu} &= 2\varepsilon_\alpha^\nu \int_0^1 dx \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\alpha}}{[(p - qx)^2 - M^2]^2} \\ &= 2\varepsilon_\alpha^\nu \Delta^{\mu\alpha}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

o termo  $\Delta^{\mu\alpha}$  (3.36) foi amplamente discutido na seção 3.1. Aqui ele exerce a mesma função, um termo superficial e logaritmicamente divergente, além de indeterminado.

A análise da invariância de Gauge de (5.23) resulta em

$$q_\mu \Pi_{VA_{div}}^{\mu\nu} = 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\mu \Delta^{\mu\alpha}. \quad (5.24)$$

Finalmente, das equações (5.21) e (5.23), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Pi_{VA}^{\mu\nu}(q) &= 2 \oint_C d\omega \rho(\omega) e^2(\omega) \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu \Delta^{\mu\alpha} + \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{2\pi} \left( \varepsilon_\alpha^\nu (2q^\mu q^\alpha - q^2 g^{\mu\alpha}) \left( \frac{1}{q^2} - \frac{\omega^2}{q^2} Z_0 \right) - \varepsilon^{\mu\nu} \omega^2 Z_0 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nosso interesse agora é no resultado espectral regularizado e, para isso, utilizaremos as definições das grandezas espectrais (4.43) e (4.44) respectivamente, obtemos

$$\Pi_{VA}^{\mu\nu} = 2\varepsilon_\alpha^\nu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu (2q^\mu q^\alpha - q^2 g^{\mu\alpha}) \left( \frac{\rho_e}{q^2} - \frac{\rho_{Z_0}}{q^2} \right) - \varepsilon^{\mu\nu} \rho_{Z_0} \right\}. \quad (5.26)$$

A anomalia quiral, no modelo de Schwinger, se expressa pela impossibilidade de se obter um resultado invariante de calibre, expresso na função de dois pontos vetor/vetor axial, pois não é possível satisfazermos simultaneamente as identidades de Ward vetor e vetor axial. Tendo isso em vista, calcularemos as identidades de Ward relativas a cada vértice (vetorial ou vetorial axial) a partir da função de dois pontos, equação (5.27):

- Identidade de Ward vetorial:

$$\begin{aligned}
q_\mu \Pi_{VA}^{\mu\nu} &= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\mu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu (2q_\mu q^\mu q^\alpha - q^2 q_\mu g^{\mu\alpha}) \left( \frac{\rho_e}{q^2} - \frac{\rho_{Z_0}}{q^2} \right) - q_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \rho_{Z_0} \right\} \\
&= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\mu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu \left( \frac{q^2 q^\alpha \rho_e}{q^2} - \frac{q^2 q^\alpha \rho_{Z_0}}{q^2} \right) - q_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \rho_{Z_0} \right\} \\
&= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\mu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \{ q_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha} (\rho_e - \rho_{Z_0}) - q_\alpha \varepsilon^{\alpha\nu} \rho_{Z_0} \} \\
&= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\mu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \{ q_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha} \rho_e - q_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha} \rho_{Z_0} + q_\alpha \varepsilon^{\nu\alpha} \rho_{Z_0} \}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$q_\mu \Pi_{VA}^{\mu\nu} = \left( 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\mu \Delta^{\mu\alpha} + \frac{i}{2\pi} q^\alpha \varepsilon_\alpha^\nu \right) \rho_e. \quad (5.27)$$

- Identidade de Ward axial:

$$\begin{aligned}
q_\nu \Pi_{VA}^{\mu\nu} &= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\nu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \left\{ \varepsilon_\alpha^\nu (2q_\nu q^\mu q^\alpha - q^2 q_\nu g^{\mu\alpha}) \left( \frac{\rho_e}{q^2} - \frac{\rho_{Z_0}}{q^2} \right) - q_\nu \varepsilon^{\mu\nu} \rho_{Z_0} \right\} \\
&= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\nu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \left\{ \underbrace{(2q_\nu q^\alpha \varepsilon_\alpha^\nu q^\mu - q^2 q_\nu \varepsilon_\alpha^\nu)}_{=0} \left( \frac{\rho_e}{q^2} - \frac{\rho_{Z_0}}{q^2} \right) - q_\nu \varepsilon^{\mu\nu} \rho_{Z_0} \right\} \\
&= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\nu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \left\{ -q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} q^2 \left( \frac{\rho_e}{q^2} - \frac{\rho_{Z_0}}{q^2} \right) - q_\nu \varepsilon^{\mu\nu} \rho_{Z_0} \right\} \\
&= 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\nu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e + \frac{i}{2\pi} \{ -q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} \rho_e + q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} \rho_{Z_0} + q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} \rho_{Z_0} \}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$q_\nu \Pi_{VA}^{\mu\nu} = 2\varepsilon_\alpha^\nu q_\nu \Delta^{\mu\alpha} \rho_e - \frac{i}{2\pi} (q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} \rho_e - 2q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} \rho_{Z_0}). \quad (5.28)$$

Vale ressaltar que a mesma condição espectral empregada para garantir a invariância de calibre no modelo de Schwinger,  $\rho_e = 0$ , também é suficiente para satisfazer a Identidade de Ward vetorial, equação (5.27), dando  $q_\mu \Pi_{VA}^{\mu\nu} = 0$ . Nesse caso, ficamos com a violação da conservação da corrente axial, ou seja,  $\frac{i}{\pi} q_\nu \varepsilon^{\nu\mu} \rho_{Z_0}$ . Ambas as equações (5.28) e (5.29) não podem desaparecer simultaneamente a menos que  $\rho_e = 0$  e  $\rho_{Z_0} = 0$ , implicando na trivialidade não física da função de dois pontos vetorial/vetor axial, equação (5.27). Esta é a manifestação bem conhecida da anomalia no modelo de Schwinger Quiral. Note que, ao optar por preservar a Identidade de Ward vetorial, ou seja,  $\rho_e = 0$ , ambos resultados das equações (5.28) e (5.29) tornaram-se independentes do termo ambíguo de regularização  $\Delta^{\mu\nu}$ . Porém, conforme discutido na seção 3, em uma regularização covari-



ante em exatas (1+1)D temos  $\Delta^{\mu\nu} = 0$ . Neste caso, se optarmos (ou se o modelo o impõe) por preservar a Identidade de Ward vetor axial, violando a vetorial, a condição espectral  $\rho_e = 2\rho_{Z_0}$  pode ser empregada, resultando em  $q_\mu \Pi_{VA}^{\mu\nu} = \frac{i}{\pi} q_\mu \varepsilon^{\nu\mu}$  e  $q_\nu \Pi_{VA}^{\mu\nu} = 0$ . Qualquer outra escolha específica para  $\rho_e \neq 0$  resultará, é claro, na violação de ambas as Identidades de Ward, e a liberdade esperada na qual a Identidade de Ward deve ser violada ou preservada (Jackiw e Rajaraman 1985, Viglioni et al. 2016), é observada, mesmo na ausência do termo ambíguo  $\Delta^{\mu\nu}$ . Esta característica também é observada no estudo da anomalia quiral da QCD dentro do modelo espectral de quarks (Ferreira e Mota 2009), onde a Identidade de Ward a ser preservada (ou violada) é determinada pela dependência do acoplamento axial com a massa espectral. Assim, concluímos que condições espectrais para a unitariedade da função espectral, equação (4.47) e férmions sem massa, equação (4.48), juntamente com a relação entre  $\rho_e$  e  $\rho_{Z_0}$  e a não trivialidade da função de dois pontos vetor/vetor axial constituem o conjunto de condições espectrais para orientar a escolha da densidade espectral  $\rho(\omega)$  e acoplamento espectral  $e^2(\omega^2)$  para o modelo de Schwinger Quiral.

## 6 Conclusão

Neste trabalho mostramos que a regularização espectral, um esquema de regularização não perturbativo previamente aplicado a modelos de quarks quirais, pode ser aplicado com sucesso ao modelo de Schwinger e ao modelo de Schwinger Quiral em exatas (1+1)D a fim de obter consistência matemática e resultados livres de ambiguidades, em contraste com outros resultados perturbativos anteriores. Os resultados são invariantes de calibre, no modelo de Schwinger, e exibem corretamente os resultados anômalos no modelo de Schwinger Quiral. A regularização espectral é desenvolvida em dimensões inteiras exatas e elimina divergências e ambiguidades por meio de uma escolha adequada das condições espectrais, de modo que a regularização espectral também evita as sutilezas da álgebra da matriz  $\gamma^5$  de Dirac que surgem em dimensões não inteiras ou dentro de integrais divergentes. Neste sentido, a utilização da regularização espectral poderá ser de fundamental importância no estudo de sistemas físicos onde o modelo de Schwinger (ou outros modelos fermiônicos em (1+1)D) emerge como um modelo eficaz, evitando a presença de ambiguidades e falta de consistência matemática em seu tratamento. Nossos resultados reforçam a regularização espectral como um esquema matemático consistente, livre de divergências e ambiguidades, e também de violação de simetria/simetria preservando o esquema de regularização. Além disso, nesse trabalho estendemos o uso da regularização espectral, previamente adotada no contexto de Modelos Quirais de Quarks, para outros modelos de gauge, ampliando o uso dessa ferramenta para outros modelos e teorias de gauge.

## Bibliografia

- Adler 1969 ADLER, S. L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. *Physical Review*, APS, v. 177, n. 5, p. 2426, 1969. 37
- Arriola e Broniowski 2003 ARRIOLA, E. R.; BRONIOWSKI, W. Spectral quark model and low-energy hadron phenomenology. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 7, p. 074021, 2003. 9, 49, 55
- Battistel, Mota e Nemes 1998 BATTISTEL, O.; MOTA, A.; NEMES, M. Consistency conditions for 4-d regularizations. *Modern physics letters A*, World Scientific, v. 13, n. 20, p. 1597–1610, 1998. 9
- Bell e Jackiw 1969 BELL, J. S.; JACKIW, R. W. A pcac puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$  model. *Nuovo cimento*, CM-P00057835, v. 60, n. CERN-TH-920, p. 47–61, 1969. 37
- Bessis, Itzykson e Zuber 1980 BESSIS, D.; ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. *Advances in Applied Mathematics*, Academic Press, v. 1, n. 2, p. 109–157, 1980. 49
- Bjorken e Drell 1965 BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum fields*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965. 14
- Delbourgo 1979 DELBOURGO, R. The gauge technique. *II Nuovo Cimento A*, v. 49, n. 4, p. 484, 1979. 51
- Delbourgo e West 1977 DELBOURGO, R.; WEST, P. A gauge covariant approximation to quantum electrodynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 10, n. 6, p. 1049, 1977. 51
- Dirac 1928 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. 11
- Dirac 1928 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. part ii. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 118, n. 779, p. 351–361, 1928. 11
- Dirac 1930 DIRAC, P. A. M. A theory of electrons and protons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, The Royal Society London, v. 126, n. 801, p. 360–365, 1930. 16
- Dyson 1949 DYSON, F. J. The s matrix in quantum electrodynamics. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 11, p. 1736, 1949. 37
- Ferreira e Mota 2009 FERREIRA, L.; MOTA, A. Axial-vector coupling and chiral anomaly in the spectral quark model. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 8, p. 085002, 2009. 69
- Feynman 1949 FEYNMAN, R. Feynman 1949b. *Phys. Rev*, v. 76, p. 769, 1949. 29

- Feynman 1949 FEYNMAN, R. P. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Physical Review*, APS, v. 76, n. 6, p. 769, 1949. 37
- Fukuda, Miyamoto e Tomonaga 1949 Fukuda, H.; Miyamoto, Y.; Tomonaga, S. A Self-Consistent Subtraction Method in the Quantum Field Theory. II-1. *Progress of Theoretical Physics*, v. 4, n. 1, p. 47–59, jan. 1949. 37
- Griffiths 2020 GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. 11, 12, 13, 20, 40
- Jackiw 2000 JACKIW, R. When radiative corrections are finite, but undetermined. *International Journal of Modern Physics B*, World Scientific, v. 14, n. 19n20, p. 2011–2021, 2000. 8
- Jackiw e Rajaraman 1985 JACKIW, R.; RAJARAMAN, R. Vector-meson mass generation by chiral anomalies. *Physical Review Letters*, APS, v. 54, n. 12, p. 1219, 1985. 63, 69
- Klein 1927 KLEIN, O. Electrodynamics and wave mechanics from the standpoint of the correspondence principle. *Z Phys*, v. 41, p. 407–442, 1927. 11
- Morais e Mota 2011 MORAIS, C.; MOTA, A. Momentum space regularizations and the indeterminacy in the schwinger model. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 26, n. 12, p. 1991–2006, 2011. 8
- O'Brien 1975 O'BRIEN, D. The wick rotation. *Australian Journal of Physics*, CSIRO Publishing, v. 28, n. 1, p. 7–14, 1975. 42
- Pauli e Weisskopf 1934 PAULI, W.; WEISSKOPF, V. 'uber die quantisierung der skalaren relativistischen. *Helv. Phys. Acta*, v. 7, p. 708–731, 1934. 12
- Scarpelli, Sampaio e Nemes 2001 SCARPELLI, A. B.; SAMPAIO, M.; NEMES, M. Consistency relations for an implicit n-dimensional regularization scheme. *Physical Review D*, APS, v. 63, n. 4, p. 046004, 2001. 9
- Schwinger 1951 SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, APS, v. 82, n. 5, p. 664, 1951. 37
- Schwinger 1962 SCHWINGER, J. Gauge invariance and mass. ii. *Physical Review*, APS, v. 128, n. 5, p. 2425, 1962. 8, 38
- Takahashi 1957 TAKAHASHI, Y. On the generalized ward identity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Società Italiana di Fisica Bologna, v. 6, n. 2, p. 371–375, 1957. 32
- Viglioni et al. 2016 VIGLIONI, A. et al.  $\gamma$  5 algebra ambiguities in feynman amplitudes: Momentum routing invariance and anomalies in d= 4 and d= 2. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 6, p. 065023, 2016. 63, 69
- Ward 1950 WARD, J. C. An identity in quantum electrodynamics. *Physical Review*, APS, v. 78, n. 2, p. 182, 1950. 32

## A Grau Superficial de Divergências

A análise de grau superficial de divergências desenvolvido neste texto permite (ainda de forma superficial) a possibilidade de a integral apresentar divergência.

O grau superficial de divergência é o número de potência de  $p$  (momento interno do diagrama), incluindo o elemento de integração, menos o número de potência de  $p$  no denominador, ou seja:

$$G \cdot D = P_{num} - P_{den}. \quad (\text{A.1})$$

1. Se  $G \cdot D \geq 0 \Rightarrow$  a integral é divergente.
  - Se  $G \cdot D = 2 \Rightarrow$  a integral (provavelmente) é quadraticamente divergente.
  - Se  $G \cdot D = 1 \Rightarrow$  a integral (provavelmente) é linearmente divergente.
  - Se  $G \cdot D = 0 \Rightarrow$  a integral é logaritmicamente divergente.
2. Se  $G \cdot D < 0 \Rightarrow$  a integral é convergente.

Divergências que ocorrem quando  $p \rightarrow \infty$  são ultravioletas, as que advém quando  $p \rightarrow 0$  são conhecidas como infravermelho (se encontram em teorias não massivas, ou de partículas sem massa).

## B Cálculo da integral (3.23)

Definimos

$$I' = \int_0^1 dx \frac{x^2}{m^2 + q^2 x(x-1)}. \quad (\text{B.1})$$

Com o auxílio de um programa de computação algébrica, encontramos

$$\begin{aligned} I' &= \frac{q[\underbrace{\log(m^2 + q^2(x-1)x)}_{=0} + 2x] - \frac{2(2m^2 - q^2)\tan^{-1}\left(\frac{q(2x-1)}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right)}{\sqrt{4m^2 - q^2}}}{2q^3} \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{2q - \left[ \frac{(4m^2 - 2q^2)\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right)}{\sqrt{4m^2 - q^2}} \right]}{2q^3} + \frac{\left[ \frac{(4m^2 - 2q^2)\tan^{-1}\left(\frac{-q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right)}{\sqrt{4m^2 - q^2}} \right]}{2q^3} \\ &= \frac{2q}{2q^3} - \frac{4m^2}{2q^3\sqrt{4m^2 - q^2}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) + \frac{2q^2}{2q^3\sqrt{4m^2 - q^2}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) \\ &\quad - \frac{4m^2}{2q^3\sqrt{4m^2 - q^2}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) + \frac{2q^2}{2q^3\sqrt{4m^2 - q^2}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) \\ &= \frac{1}{q^2} - \frac{4m^2}{q^3\sqrt{4m^2 - q^2}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) + \frac{2}{q\sqrt{4m^2 - q^2}}\tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) \\ &= \frac{1}{q^2} - \frac{4m^2}{q^2\sqrt{4m^2q^2 - q^4}}\arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}}\right) + \frac{2}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}}\arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}}\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$I' = \frac{1}{q^2} - \frac{4m^2}{q^2}Z_0 + 2Z_0. \quad (\text{B.2})$$

Onde

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}}\arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2 - q^4}}\right).$$

## C Cálculo da integral (3.30) e (3.31)

Definimos

$$I'' = \int_0^1 dx \frac{x}{m^2 + q^2 x(x-1)}. \quad (\text{C.1})$$

Com o auxílio de um programa de computação algébrica, encontramos

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{\underbrace{\log[(m^2 + q^2(x-1)x)]}_{=0} + \frac{(2q)\tan^{-1}\left(\frac{q(2x-1)}{\sqrt{4m^2-q^2}}\right)}{\sqrt{4m^2-q^2}}}{2q^2} \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{2q}{2q^2\sqrt{4m^2-q^2}} \tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2-q^2}}\right) + \frac{2q}{2q^2\sqrt{4m^2-q^2}} \tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2-q^2}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{4m^2q^2-q^4}} \arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2-q^4}}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$I'' = 2Z_0. \quad (\text{C.2})$$

Definimos

$$I''' = \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 + q^2(x-1)}. \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} I''' &= \frac{(2)\tan^{-1}\frac{q(2x-1)}{\sqrt{4m^2-q^2}}}{q\sqrt{4m^2-q^2}} \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{2}{q\sqrt{4m^2-q^2}} \tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2-q^2}}\right) + \frac{2}{q\sqrt{4m^2-q^2}} \tan^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{4m^2-q^2}}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{4m^2q^2-q^4}} \arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2-q^4}}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$I''' = 4Z_0. \quad (\text{C.4})$$

Onde

$$Z_0 = \frac{1}{\sqrt{4m^2q^2-q^4}} \arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4m^2q^2-q^4}}\right).$$

## D Cálculo da Solução Particular

Dada a solução particular

$$\rho(\omega) = \frac{2i}{\pi} \omega \frac{e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}}}{q^2 - 4\omega^2} \quad (\text{D.1})$$

e

$$e^2(\omega^2) = \frac{e_0^2}{\pi} \sqrt{1 - 4\frac{\omega^2}{q^2}}, \quad (\text{D.2})$$

o objetivo é demonstrar que (D.1) e (D.2) satisfaz simultaneamente as condições (i) a (iv) - equações (4.47) a (4.50).

i)

$$\rho_0 = \oint_C \rho(\omega) d\omega = 1. \quad (\text{D.3})$$

Calculando os polos de  $\rho(\omega)$

$$\begin{aligned} q^2 - 4\omega^2 &= 0 \\ q^2 &= 4\omega^2 \\ \omega^2 &= \frac{q^2}{4} \\ \omega &= \pm \frac{q}{2} + i\alpha, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária.

Integrando por resíduos

$$\oint \rho(\omega) d\omega = 2i\pi \sum_{i=+,-} \text{Res}(\rho(\omega_i)), \quad (\text{D.5})$$

onde

$$\text{Res}f(Z) = \lim_{Z \rightarrow Z_i} (Z - Z_i)f(Z)$$

é a expressão para obter os resíduos da função.



Obtendo os resíduos, temos

$$\begin{aligned}
Res_{\omega \rightarrow \omega_+} \rho(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow q/2} \left( \omega - \frac{q}{2} \right) \frac{1}{2 \left( \frac{q}{2} - \omega \right) (q + 2\omega)} \frac{2i\omega}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow q/2} \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(q + 2\omega)} \frac{2i\omega}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left( q + \frac{2q}{2} \right)} \frac{2iq}{2\pi} e^{1 - \frac{4q^2}{4q^2}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{2q} \frac{iq}{\pi} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{i}{\pi}.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
Res_{\omega \rightarrow \omega_-} \rho(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow -q/2} \left( \omega + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{2(q - 2\omega) \left( \frac{q}{2} + \omega \right)} \frac{2i\omega}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow -q/2} \left( \frac{1}{(q - 2\omega)} \frac{i\omega}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) = \frac{1}{(q - 2(-\frac{q}{2}))} \left( \frac{-iq}{2\pi} \right) e^{1 - \frac{4(-\frac{q}{2})^2}{q^2}} \\
&= -\frac{1}{2q} \frac{iq}{2\pi} e^0 \\
&= -\frac{1}{4} \frac{i}{\pi}.
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\oint_C \rho(\omega) d\omega &= 2i\pi \sum_{i=+,-} Res(\rho(\omega_{\pm})) \\
&= 2i\pi \left( -\frac{1}{4} \frac{i}{\pi} + \left( -\frac{1}{4} \frac{i}{\pi} \right) \right) \\
&= 2i \left( -\frac{1}{2} i \right) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

ii)

$$B(p^2) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i\omega}{p^2 - \omega^2} = 0. \tag{D.9}$$

Substituindo (D.1) em (D.9), fica

$$B(p^2) = \int \frac{2i^2 \omega^2}{\pi} \frac{1}{(q^2 - 4\omega^2)} \frac{1}{(p^2 - \omega^2)} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} d\omega. \tag{D.10}$$

Calculando os polos

$$\begin{aligned} q^2 - 4\omega^2 &= 0 \\ \omega &= \pm \frac{q}{2} + i\alpha \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

e

$$\begin{aligned} p^2 - \omega^2 &= 0 \\ \omega^2 &= p^2 \\ \omega &= \pm p + i\alpha, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

nesse caso há 4 polos.

Calculando os resíduos, temos

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\omega \rightarrow +q/2} \rho(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow q/2} \left[ \left( \omega - \frac{q}{2} \right) \left( \frac{1}{(q^2 - 4\omega^2)} \frac{-2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow q/2} \left[ \left( \omega - \frac{q}{2} \right) \left( -\frac{2\omega^2}{\pi} \frac{1}{(q - 2\omega)(q + 2\omega)} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow q/2} \left[ \left( \omega - \frac{q}{2} \right) \left( -\frac{2\omega^2}{\pi} \frac{1}{2(\frac{q}{2} - \omega)(q + 2\omega)} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow q/2} \left[ \left( \frac{\omega^2}{\pi} \right) \left( \frac{1}{(q + 2\omega)} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= \frac{q^2}{2\pi} \frac{e^0}{(q + \frac{2q}{2})} \\ &= \frac{q^2}{2q2\pi} \\ &= \frac{q}{4\pi}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\omega \rightarrow -q/2} \rho(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow -q/2} \left[ \left( \omega + \frac{q}{2} \right) \left( \frac{1}{(q - 2\omega)(q + 2\omega)} \frac{-2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow -q/2} \left[ \left( \omega + \frac{q}{2} \right) \left( \frac{1}{2(q - 2\omega)(\frac{q}{2} + \omega)} \frac{-2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow -q/2} \left[ \left( \frac{1}{(q - 2\omega)} \frac{-\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\ &= -\frac{q^2}{2\pi} \frac{e^0}{(q - 2(-\frac{q}{2}))} \\ &= -\frac{q^2}{4q\pi} \\ &= -\frac{q}{4\pi}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned}
Res_{\omega \rightarrow +p} \rho(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow +p} \left[ (\omega - p) \left( \frac{1}{(p - \omega)(p + \omega)} \frac{-2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow +p} \left[ \frac{1}{(p + \omega)} \frac{2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right] \\
&= \frac{2p^2}{\pi} \frac{e^{1 - \frac{4p^2}{q^2}}}{(p + p)} \\
&= \frac{p}{\pi} e^{1 - \frac{4p^2}{q^2}}.
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
Res_{\omega \rightarrow -p} \rho(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow -p} \left[ (\omega + p) \left( \frac{1}{(p - \omega)(p + \omega)} \frac{-2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right) \right] \\
&= \lim_{\omega \rightarrow -p} \left[ -\frac{1}{(p - \omega)} \frac{2\omega^2}{\pi} e^{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \right] \\
&= \frac{-2(-p)^2}{\pi} \frac{1}{p + p} e^{1 - \frac{4(-p)^2}{q^2}} \\
&= -\frac{2p^2}{\pi} \frac{e^{1 - \frac{4p^2}{q^2}}}{2p} \\
&= -\frac{p}{\pi} e^{1 - \frac{4p^2}{q^2}}.
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Substituindo os resultados de (D.13), (D.14), (D.15) e (D.16) em (D.10), obtemos

$$\begin{aligned}
B(p^2) &= \int d\omega \rho(\omega) \frac{i\omega}{p^2 - \omega^2} \\
&= 2i\pi \sum_{i=+,-} Res(\rho(\omega_{\pm})) \\
&= 2i\pi \left[ \frac{q}{4\pi} + \left( -\frac{q}{4\pi} \right) + \frac{p}{\pi} e^{1 - \frac{4p^2}{q^2}} + \left( -\frac{p}{\pi} e^{1 - \frac{4p^2}{q^2}} \right) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.17}$$

iii)

$$\rho_e = \int_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) d\omega = 0. \tag{D.18}$$

Fazendo o produto de (D.1) e (D.2), temos

$$\begin{aligned}
 \rho(\omega)e^2(\omega^2) &= \frac{2i\omega}{\pi} \frac{\exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right) e^2}{(q^2 - 4\omega^2)} \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{q^2}} \\
 &= \frac{2i\omega}{\pi} \frac{e^2}{\pi} \frac{\exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right) 1}{(q^2 - 4\omega^2)} \frac{1}{q} (q^2 - 4\omega^2)^{1/2} \\
 &= \frac{2i\omega}{\pi} \frac{e^2}{\pi} \frac{1}{q} \frac{\exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{\sqrt{q^2 - 4\omega^2}}.
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \rho_e &= \int_C \rho(\omega)e^2(\omega^2) d\omega \\
 &= \int_C \frac{2i\omega}{\pi} \frac{e^2}{\pi} \frac{1}{q} \frac{\exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{\sqrt{q^2 - 4\omega^2}} d\omega.
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Uma observação importante é que o termo da equação acima,  $\exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)$ , não possui polos para qualquer valor de  $\omega$ , ou seja, ela nunca divergirá.

Façamos uma análise da integral abaixo

$$\oint \frac{\omega}{\sqrt{q^2 - 4\omega^2}} d\omega, \tag{D.21}$$

onde

$$\omega = \varepsilon \exp(i\theta) + q/2 \tag{D.22}$$

e

$$d\omega = \varepsilon \exp(i\theta) i d\theta. \tag{D.23}$$

Assim,

$$\omega^2 = \varepsilon^2 \exp(2i\theta) + 2\varepsilon \exp(i\theta) \frac{q}{2} + \frac{q^2}{4} \tag{D.24}$$

e

$$\begin{aligned}
 q^2 - 4\omega^2 &= q^2 - 4\varepsilon^2 \exp(2i\theta) - 4\varepsilon \exp(i\theta) q - 4q^2 \\
 &= -4\varepsilon^2 \exp(2i\theta) - 4\varepsilon q \exp(i\theta).
 \end{aligned} \tag{D.25}$$

Substituindo (D.22), (D.23) e (D.24) em (D.21), fica

$$\oint \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{\varepsilon \exp(i\theta) + \frac{q}{2}}{\sqrt{-4q \exp(i\theta) - 4\varepsilon \exp(2i\theta)}} \right) \varepsilon \exp(i\theta) i d\theta. \quad (\text{D.26})$$

Tomando o limite da equação (D.26) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o resultado é nulo. Concluimos que não havendo polos, temos

$$\int_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) d\omega = 0. \quad (\text{D.27})$$

iV)

$$\rho_{Z_0} = \int_C \rho(\omega) e^2(\omega^2) \omega^2 Z_0(q^2, \omega^2) d\omega \neq 0. \quad (\text{D.28})$$

Substituindo (4.42) e (D.19) em (D.28), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{Z_0} &= \int_C \left[ \frac{2i\omega}{\pi} \frac{e^2 \exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{q \sqrt{q^2 - 4\omega^2}} \omega^2 \frac{4}{\sqrt{4\omega^2 q^2 - q^4}} \arctan\left(\frac{q^2}{\sqrt{4\omega^2 q^2 - q^4}}\right) \right] d\omega \\ &= \int_C \left[ \frac{2i\omega^3}{\pi^2} \frac{e^2 \exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{q \sqrt{q^2 - 4\omega^2}} \frac{4}{q \sqrt{4\omega^2 - q^2}} \arctan\left(\frac{q^2}{q \sqrt{4\omega^2 - q^2}}\right) \right] d\omega \\ &= \int_C \left[ \frac{8i\omega^3}{\pi^2} \frac{e^2 \exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{q^2 \sqrt{q^2 - 4\omega^2}} \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 - q^2}} \arctan\left(\frac{q}{\sqrt{4\omega^2 - q^2}}\right) \right] d\omega \\ &= \int_C \left[ \frac{8i\omega^3}{\pi^2} \frac{e^2 \exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{q^2 \sqrt{-(q^2 - 4\omega^2)^2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2}{q^2} - 1}}\right) \right] d\omega \\ &= \int_C \left[ \frac{8\omega^3}{\pi^2} \frac{e^2 \exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{q^2 (q^2 - 4\omega^2)} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2}{q^2} - 1}}\right) \right] d\omega. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Definindo

$$I = \int_C \left[ \frac{8\omega^3}{\pi^2} \frac{e^2 \exp\left(1 - \frac{4\omega^2}{q^2}\right)}{q^2 (q^2 - 4\omega^2)} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2}{q^2} - 1}}\right) \right] d\omega. \quad (\text{D.30})$$

O objetivo agora é analisar o último termo da equação (D.30). Aqui também temos

os mesmos polos das demonstrações anteriores. Então,

$$Res = \left\{ \left( \omega - \frac{q}{2} \right) I \right\} \Big|_{\omega=q/2} = 0. \quad (D.31)$$

Tomando o termo com  $\arctan$

$$\begin{aligned} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega^2}{q^2} - 1}} \right) &= \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{-1(1 - \frac{4\omega^2}{q^2})}} \right) \\ &= \arctan \left( \frac{-i}{\sqrt{(1 - \frac{4\omega^2}{q^2})}} \right) \\ &= -i \operatorname{arctanh} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{4\omega^2}{q^2})}} \right), \end{aligned} \quad (D.32)$$

Tomando o limite da equação (D.32),

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm q/2} \left[ -i \operatorname{arctanh} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{4\omega^2}{q^2})}} \right) \right] = -i \operatorname{arctanh} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{4q^2}{q^2})}} \right) = -\frac{i\pi}{2}. \quad (D.33)$$

Substituindo (D.33) em (D.30):

$$\frac{8e^2 \omega^3}{\pi^2 q^2} \left( -\frac{i\pi}{2} \right) \exp \left( 1 - \frac{4\omega^2}{q^2} \right) \frac{1}{(q^2 - 4\omega^2)}, \quad (D.34)$$

fazendo  $\omega \rightarrow q/2$ , temos

$$\frac{4e^2 q^3}{\pi^2 q^2} (-i) \exp \left( 1 - \frac{4\omega^2}{q^2} \right) \frac{1}{\left( q^2 - \frac{4q^2}{4} \right)} = -\frac{ie^2 q}{2\pi} \neq 0. \quad (D.35)$$