



Universidade Federal
de São João del-Rei



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF
ASSOCIAÇÃO AMPLA UFSJ/UNIFAL

ISTENIO NUNES DE MORAIS

Buracos Negros na formulação de Kerr-Schild

OURO BRANCO - MG

2023

ISTENIO NUNES DE MORAIS

Buracos Negros na formulação de Kerr-Schild

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, em associação ampla com a Universidade Federal de Alfenas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Érico Goulart O. Costa

OURO BRANCO - MG

2023



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - UNIFAL/MG-UFSJ

HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 15 / 2023 - PPGF (13.29)

Nº do Protocolo: 23122.028727/2023-75

São João del-Rei-MG, 24 de julho de 2023.

A dissertação de mestrado "**Buracos negros na formulação de Kerr-Schild**" elaborada por **Istênio Nunes de Morals** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

(Assinado digitalmente em 24/07/2023 20:34)

ERICO GOULART DE OLIVEIRA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 2351300

(Assinado digitalmente em 01/08/2023 11:58)

JOSE ELOY OTTONI
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1673925

(Assinado digitalmente em 26/07/2023 09:40)

EDUARDO HENRIQUE SILVA BITTENCOURT
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 073.405.966-31

Visualize o documento original em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **15**, ano: **2023**, tipo: **HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**, data de emissão: **24/07/2023** e o código de verificação: **852e649998**

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M827b Morais, Istenio Nunes de .
 Buracos Negros na formulação de Kerr-Schild /
Istenio Nunes de Moraes ; orientador Érico Goulart
de Oliveira Costa. -- Ouro Branco, 2023.
 81 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2023.

 1. cosmologia. 2. gravitação . 3. relatividade
geral. 4. solução de schwarzschild. 5. kerr-schild.
I. de Oliveira Costa, Érico Goulart, orient. II.
Título.

Este trabalho é dedicado a minha irmã Louene Nunes de Moraes (In Memoriam).
E a mim, por acreditar em mim mesmo, por nunca desistir, e por ser eu mesmo o tempo
inteiro.
Obrigado! De nada!

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio ao longo dessa caminhada na física.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Érico Goulart, pela assistência e incentivo na elaboração deste trabalho, e por auxiliar-me no começo de minha vida científica. Aos amigos que fiz durante esse período: Luciano, Elves e Daniel, que foram fundamentais nesse processo.

Agradeço também, à Universidade Federal de São João del-Rei pela oportunidade e à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

RESUMO

A utilização do chamado método de Kerr-Schild na obtenção de soluções exatas para as equações de Einstein vêm desempenhando papel de destaque na astrofísica e cosmologia relativista. O método foi formulado e publicado em 1965, quase meio século após a solução estática de Schwarzschild, por Roy P. Kerr, que estudava as propriedades do espaço-tempo procurando soluções para o campo gravitacional de um objeto em rotação. A métrica de Kerr-Schild pode ser expressa na forma $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_{\mu}l_{\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é uma métrica de fundo que satisfaz as equações de Einstein no vazio, H é uma função escalar e l_{μ} é um campo vetorial nulo. O objetivo deste trabalho é construir e apresentar as soluções das equações de Einstein para Buracos Negros, a partir da formulação de Kerr-Schild.

Palavras Chaves: Buracos Negros, Relatividade Geral, Kerr-Schild, Schwarzschild, Gravitação.

ABSTRACT

The so-called Kerr-Schild ansatz plays a prominent role in obtaining exact solutions of Einstein's field equations in the contexts of relativistic astrophysics and cosmology. The method was first formulated and published by Roy P. Kerr in 1965, almost half a century after the Schwarzschild static solution, while looking for solutions for the gravitational field of a spherical rotating object. The Kerr-Schild metric can be expressed in the form $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_{\mu}l_{\nu}$, where $g_{\mu\nu}$ is a background metric satisfying Einstein's equations in vacuum, H is a scalar function, and l_{μ} is a null vector field. The aim of this work is to build and present black hole solutions within the framework of the Kerr-Schild formulation.

Key-words: Black Holes, General Relativity, Kerr-Schild, Schwarzschild, Gravitation.

CONVENÇÕES MATEMÁTICAS

Assinatura da Métrica: $(+ - - -)$

Simetrizador: $A_{(\alpha\beta)} = A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$

Anti-simetrizador: $A_{[\alpha\beta]} = A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}$

Determinante da métrica: $g = \det(g_{\mu\nu})$

Símbolo de Levi-Civita: $[\alpha\beta\mu\nu]$ com $[0123] = +1$

Tensor de Levi-Civita: $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} [\alpha\beta\mu\nu]$

Dual de Hodge: $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$

Derivada simples: $\partial_\mu A_\nu$ ou $A_{\nu,\mu}$

Símbolos de Christoffel: $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$

Derivada covariante: $\nabla_\mu A_\nu$ ou $A_{\nu;\mu}$

Condição de compatibilidade: $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$

Tensor de Riemann: $R_{\mu\beta\nu}^\alpha = -\partial_\mu\Gamma_{\nu\beta}^\alpha + \partial_\nu\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha\Gamma_{\nu\beta}^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha\Gamma_{\mu\beta}^\rho$

Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$

Escalar de Curvatura: $R = R_{\mu}^\mu$

Tensor de Einstein: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$

Equação de Einstein: $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$

Transformação de Kerr-Schild: $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu$

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Comutador de duas derivadas covariantes.	31
Figura 4.1 – Diagrama de Penrose mostrando as possíveis degenerações do tipo Petrov.	58

SUMÁRIO

Lista de ilustrações	11
Sumário	12
1 Introdução	13
2 Preliminares Matemáticos	16
2.1 Campos tensoriais	16
2.1.1 Vetores e co-vetores	17
2.1.2 Tensores	19
2.1.3 Tensor métrico	22
2.1.4 Traço de um tensor	24
2.2 Tensor de Levi-Civita	25
2.3 Transporte Paralelo e Derivação Covariante	27
2.4 Tensor de Curvatura, Tensor de Ricci e Escalar de Ricci	30
2.5 Decomposição de Ricci	33
2.6 Propriedades do Tensor de Weyl	35
2.7 Dualidade do Tensor de Weyl	36
2.8 Campos Vetoriais de Killing	37
3 Campo de Einstein e Soluções Exatas	40
3.1 Equações de Einstein	40
3.2 Soluções exatas	41
3.2.1 A Solução de Schwarzschild	41
3.2.2 Testes clássicos	46
3.2.2.1 O avanço no periélio de Mercúrio	47
3.2.2.2 Deflexão da Luz	52
3.2.3 A Solução de Kerr	54
4 Congruências Nulas e o teorema de Goldberg-Sachs	56
4.1 Classificação de Petrov	56
4.2 Congruências Geodésicas Nulas	58
4.3 Teorema de Goldberg-Sachs	61
5 O Método de Kerr-Schild	63
5.1 O determinante de $\hat{g}_{\mu\nu}$	65
5.2 Propriedades básicas do tensor de Riemann	66
5.3 Propriedades adicionais do tensor de Riemann	72
5.4 Soluções de Kerr e Schwarzschild na formulação de Kerr-Schild	75
6 Considerações Finais	81
Bibliografia	83

1 INTRODUÇÃO

Dos grandes marcos para a Física do Séc. XX, o maior, dentre eles, foi o surgimento da Teoria da Relatividade Especial em 1905, com a publicação dos trabalhos de Albert Einstein, que mudou drasticamente nossa compreensão do universo, do espaço e do tempo. Em meio a esses novos conceitos, em 1915, Einstein publicou seu novo trabalho: “Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie” (Os Fundamentos da Teoria Geral da Relatividade)[1]; propondo uma nova teoria métrica da gravitação e trazendo uma maneira diferente de compreender a gravidade, definindo-a como uma consequência da curvatura no espaço-tempo causada pela presença de energia e matéria.

Einstein introduziu uma série de complicadas equações diferenciais parciais de segunda ordem, conhecidas como Equações de Campo de Einstein, que descrevem a maneira como a matéria deforma o espaço-tempo. Já em 1916, surgiram as primeiras soluções exatas para as equações de Einstein: a primeira delas, foi obtida pelo físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild [2], enquanto servia na linha de frente do exército alemão durante a Primeira Guerra Mundial. Essa é uma solução que descreve o campo gravitacional de uma distribuição esférica e homogênea de matéria sem carga, sendo uma solução de vácuo para um campo simetricamente esférico e estático. Da solução de Schwarzschild surge um limite onde a gravidade é tão intensa que a velocidade de escape é maior que a velocidade da luz, conhecido como raio de Schwarzschild (r_{sc}), que leva, naturalmente, à existência de objetos tipo buracos negros (BH's, a sigla para o inglês Black Holes).

Entre os anos de 1916 e 1918, uma solução exata que descreve o campo gravitacional em torno de um objeto eletricamente carregado foi descoberta de forma independente por Hans Reissner [3], Hermann Weyl [4] e Gunnar Nordström [5]. Reissner e H. Weyl encontraram a solução para o campo em torno de uma fonte pontual, enquanto Nordström expandiu essa solução para uma distribuição de massa, basicamente adicionando carga elétrica à solução de Schwarzschild. Essa solução ficou conhecida como solução de Reissner-Nordström. Por muito tempo se procurou uma solução que descrevesse a métrica para o campo gravitacional das estrelas, que naquela época já era de conhecimento ter momento angular, mas, somente quase cinquenta anos após a publicação de Einstein em 1915, foi encontrada a primeira solução para um campo gravitacional de um corpo massivo e sem carga, porém, com rotação. Está solução foi publicada em 1963 por Roy P. Kerr [6] um matemático neozelandês que estudava as propriedades do espaço-tempo. Kerr, trocou a condição de simetria esférica, adicionada por Schwarzschild, por uma simetria axial, além disso, adicionou a suposição de que a métrica é algebricamente especial. Em 1965, Kerr juntamente com o físico Alfred Schild, publicou um artigo fazendo uma sistematização

do método utilizado na obtenção da solução de 1963. O artigo foi republicado em 2009 com o título "Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations"[7].

Dentre todas as consequências das equações de Einstein da Relatividade Geral (RG), os buracos negros estão entre as soluções mais intrigantes. Em princípio, tais objetos descrevem o estágio final de algumas estrelas e são univocamente caracterizados por sua massa, carga e momento angular. Acredita-se que no centro de quase todas as galáxias exista um Buraco Negro Supermassivo (SMBH, a sigla para o inglês Supermassive Black Hole), acretando gases, poeira e matéria de estrelas. Além disso, BH's podem ser solitários, vagando sozinhos pelo espaço, e outros podem ser tão velhos como o próprio universo. A presença de horizontes de eventos e singularidades de diferentes tipos nas soluções de BH's atraiu a atenção de relativistas por décadas. O horizonte de eventos (ou ponto de não retorno) é uma região em torno de um BH onde qualquer evento que aconteça no seu limite não pode ser observado por alguém do lado de fora, nem mesmo a informação em forma de ondas eletromagnéticas consegue escapar; é a fronteira teórica do BH. A partir deste ponto só podemos especular sobre o que possa existir, tudo que o atravessa é perdido para sempre.

Uma abordagem particularmente útil na busca por novas soluções exatas e para o estudo de buracos negros e suas propriedades físicas é a formulação de Kerr-Schild [7]. Nesta formulação, o objeto central de interesse pode ser expandido em termos da métrica de Minkowski, de uma função escalar e de uma congruência nula. Recentemente, tal expansão vêm desempenhando papel de destaque nos chamados modelos análogos de gravitação. Neste trabalho, estudaremos tal formulação e sua aplicação nas duas principais soluções de interesse astrofísico: Solução de Schwarzschild e Solução de Kerr.

Seguindo este capítulo introdutório, o próximo capítulo faz uma breve revisão dos conceitos matemáticos necessários no contexto do cálculo tensorial. Demonstramos relações do cálculo tensorial importantes para a interpretação física do nosso problema, introduzindo o conceito de tensores, derivada covariante e os tensores importantes da relatividade geral.

No terceiro capítulo introduzimos a formulação da Relatividade Geral. Apresentando o desenvolvimento matemático para as equações de campo de Einstein, destacando algumas características e propriedades dos seus principais objetos matemáticos, tais como o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci; introduzimos também o tema de estudo, as soluções exatas das equações de Einstein, apresentando a Solução de Schwarzschild com alguns testes clássicos, e a Solução de Kerr.

No quarto capítulo, fazemos uma breve revisão sobre congruências nulas, a classificação de Petrov e o teorema de Goldberg-Sachs. Finalmente, no quinto capítulo discutimos a formulação de Kerr-schild, apresentando seus fundamentos e propriedades. E chegamos nas soluções de Kerr e Schwarzschild, a partir dessa formulação. O último capítulo resume os resultados apresentados nos capítulos anteriores.

2 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

O ingrediente básico da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) consiste em um par $(M, g_{\mu\nu})$, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão quatro, chamada de espaço-tempo, e o objeto geométrico $g_{\mu\nu}$ define uma certa noção de distância entre os pontos da variedade. As chamadas equações de campo de Einstein conectam a distribuição de momento-energia (matéria) no espaço-tempo com sua respectiva curvatura. Desta maneira, para tratar dos efeitos do campo gravitacional, devemos lidar com a matemática dos espaços curvos. Neste capítulo iremos revisar alguns elementos de álgebra linear, cálculo tensorial e geometria diferencial, bem como algumas definições, notações e convenções relevantes para a elaboração dos próximos capítulos. Para maiores detalhes, consultar as referências [8, 9, 10, 11].

2.1 Campos tensoriais

Nosso ponto de partida é a definição de uma variedade diferenciável, denotada por M , de dimensão $n \in \mathbb{N}$. *Grosso modo*, uma variedade é um espaço topológico onde as vizinhanças de todo ponto $p \in M$ se parecem (localmente) com o espaço euclidiano de mesma dimensão, isto é, \mathbb{R}^n . Em outras palavras, cada ponto possui uma vizinhança aberta *homeomorfa* aos abertos do espaço euclidiano. Dizemos que dois espaços são homeomorfos quando podemos transformar continuamente um espaço no outro, e a sua transformação inversa também é contínua. Em geral, para explicitarmos a dimensionalidade em questão escrevemos M^n , a qual chamamos de n -variedade.

Para descrevermos algebricamente os pontos de uma n -variedade, utilizamos um sistema de coordenadas, associando a cada ponto $p \in M$ um conjunto de n números reais. Desta maneira, podemos escrever:

$$p \mapsto (x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (2.1)$$

e uma forma abreviada de denotar as mesmas coordenadas é através da notação compacta x^a , onde o índice latino minúsculo a toma os valores $1, 2, \dots, n$. No entanto, uma vez que

a escolha do sistema de coordenadas é totalmente arbitrária, poderíamos também ter escolhido inicialmente um outro sistema \tilde{x}^a , tal que:

$$p \mapsto (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n) . \quad (2.2)$$

Tal procedimento implica na definição de uma transformação de coordenadas, de forma que devemos ter sempre relações funcionais do tipo:

$$x^a = x^a(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n), \quad \tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x^1, x^2, \dots, x^n) , \quad (2.3)$$

ou seja, as n funções do lado esquerdo devem ser invertíveis. Sabemos da análise matemática que isto será sempre possível desde que:

$$\det \left(\frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \right) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \det \left(\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \right) \neq 0 , \quad (2.4)$$

ou seja, o jacobiano da transformação não pode ser singular. Veremos adiante que tal fato é fundamental para a definição de certos objetos na variedade, chamados de campos tensoriais.

Campos tensoriais constituem o conjunto básico de elementos geométricos definidos pela estrutura de uma variedade diferenciável M^n : ou seja, são objetos que têm sentido absoluto independentemente do sistema de coordenadas. Um campo tensorial é equivalente a um tensor definido para cada ponto $p \in M$. Tensores são objetos matemáticos fundamentais na Física, possuem regras de transformação bem definidas e são utilizados para descrever quantidades físicas com magnitude e direção. Além da relatividade, eles têm sido amplamente utilizados em diversas áreas da física como mecânica clássica, eletromagnetismo, teoria quântica de campos e física estatística. Neste capítulo, discutiremos as propriedades matemáticas dos tensores, bem como suas aplicações na Física. Começamos nossa análise a partir da noção de um vetor em um dado ponto da variedade.

2.1.1 Vetores e co-vetores

Assim como uma curva no plano euclidiano pode ser obtida pela coleção de suas retas tangentes, uma variedade diferenciável M^n também pode ser arbitrariamente aproximada por um certo conjunto de hiper-planos de dimensão n . Tais hiper-planos são chamados

de espaços tangentes, têm estrutura de espaço vetorial e, portanto, podemos utilizar as regras da álgebra linear usual, sem grandes modificações.

Em geral, denotamos por T_pM o espaço vetorial tangente correspondente ao ponto $p \in M$. Os elementos de T_pM são objetos matemáticos que possuem magnitude e direção, e são representados por uma seta orientada no espaço tangente. Eles são utilizados para representar grandezas físicas vetoriais, aquelas que só podemos defini-las completamente se sabemos o seu valor numérico, a direção em que atuam, bem como o seu sentido. Tomando um conjunto de vetores linearmente independentes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ em T_pM , definimos naturalmente uma base, à qual denotamos compactamente por \vec{e}_a , com $a = 1, 2, \dots, n$. Desta maneira, podemos expandir um dado vetor $\vec{V} \in T_pM$, sob a forma:

$$\vec{V} = V^1\vec{e}_1 + V^2\vec{e}_2 + \dots + V^n\vec{e}_n = \sum_{a=1}^n V^a\vec{e}_a ,$$

onde V^a ($a = 1, 2, \dots, n$) são as componentes do dado vetor com respeito à base. Podemos, usando a notação de Einstein, suprimir o símbolo de somatório. A notação de Einstein é uma convenção usada para simplificar os somatórios, e diz que sempre que houver dois índices repetidos, está implícito uma soma, tal que:

$$\vec{V} = \sum_{a=1}^n V^a\vec{e}_a \equiv V^a\vec{e}_a .$$

Portanto, dada uma base arbitrária \vec{e}_a para o espaço tangente, podemos caracterizar um vetor simplesmente através de suas componentes V^a .

Pode-se mostrar que um dado sistema de coordenadas x^a cobrindo uma certa região de M^n induz naturalmente uma base \vec{e}_a para cada espaço tangente desta mesma região. Tais bases são chamadas de bases coordenadas e têm grande utilidade em geometria diferencial e na TRG. Em particular, sob uma dada transformação de coordenadas $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x)$, temos as seguintes leis de transformação:

$$\tilde{V}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} V^b, \quad \tilde{e}_a = \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} \vec{e}_c .$$

Note-se que as componentes do vetor e os elementos da base transformam-se de formas contrárias isto é, a matriz de transformação do segundo termo é simplesmente a inversa da matriz de transformação do primeiro termo. Chamamos de *vetor contravariante* um objeto cujas componentes transformam-se sob a primeira lei de transformação acima.

De forma semelhante, dizemos que um objeto é um *vetor covariante* se sob a transformação de coordenadas $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x)$, suas componentes transformarem-se sob a lei:

$$\tilde{A}_a = \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} A_c .$$

Tecnicamente, os vetores covariantes (ou co-vetores) pertencem à outro espaço vetorial em cada ponto $p \in M$, também de dimensão n , ao qual chamamos de espaço cotangente e denotamos por T_p^*M . Pode-se mostrar que o sistema de coordenadas também induz uma base para T_p^*M , a qual denotamos, usualmente pelas quantidades θ^a , com $a = 1, 2, \dots, n$.

Dados um vetor contravariante V^a e um co-vetor A_a em um dado ponto $p \in M$, podemos construir a quantidade escalar;

$$\Phi = A_a V^a , \tag{2.5}$$

é simples ver que tal objeto possui o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas. De fato, utilizando as leis de transformação acima, temos:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{A}_a \tilde{V}^a = \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} A_c V^b = \frac{\partial x^c}{\partial x^b} A_c V^b = A_c V^c = \Phi . \tag{2.6}$$

Como dissemos anteriormente, para se obter um campo vetorial ou co-vetorial a partir das construções puramente locais descritas acima, consideramos simplesmente os conjuntos de funções;

$$V^a(x), \quad A_a(x) , \tag{2.7}$$

onde omitimos os índices de coordenadas por simplicidade. Desta maneira obtemos dois tipos de objetos que variam de ponto a ponto na variedade M^n , e que possuem leis de transformação bem definidas.

2.1.2 Tensores

Os tensores são objetos matemáticos que podem ter mais de uma direção. Eles são representados por matrizes multidimensionais, em que cada elemento da matriz corresponde

a uma combinação de direções. Por exemplo, um tensor de segunda ordem possui “duas direções” e pode ser representado por uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$, onde n é o número de componentes em cada direção. Um tensor de ordem (q, r) , dito misto, é um objeto do tipo $T^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_r}$ com q componentes contravariantes e r componentes covariantes, definido como:

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_r} \hat{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{a_q} \otimes \hat{\theta}^{b_1} \dots \otimes \hat{\theta}^{b_r} ,$$

onde as quantidades $\{\hat{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{a_q} \otimes \hat{\theta}^{b_1} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{b_r}\}$ constituem uma base para o espaço de todos os (q, r) tensores. De modo geral, podemos mostrar que em uma transformação de coordenadas $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x)$, as componentes de um tensor misto arbitrário transformam-se sob a regra:

$$\tilde{T}^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_r} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^{a_1}}{\partial x^{c_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{a_q}}{\partial x^{c_q}} \right) \left(\frac{\partial x^{d_1}}{\partial \tilde{x}^{b_1}} \dots \frac{\partial x^{d_r}}{\partial \tilde{x}^{b_r}} \right) T^{c_1 \dots c_q}_{d_1 \dots d_r} .$$

Analogamente ao caso dos vetores e dos co-vetores discutidos anteriormente, um campo tensorial do tipo (q, r) é simplesmente um conjunto de funções

$$T^{a_1 \dots a_q}_{b_1 \dots b_r}(x) , \tag{2.8}$$

que se transformam da maneira descrita acima, em cada ponto de M^n . Os tensores podem ser adicionados, subtraídos e multiplicados entre si, de tal modo que o resultado produz um novo tensor.

Além disso, os tensores podem ser decompostos em suas componentes simétricas e antissimétricas. Tensores simétricos, por exemplo, são essenciais para se entender como a gravidade funciona em maiores detalhes. Define-se como simétrico, o tensor em que na permutação de dois de seus índices subscritos, ou sobrescritos, é invariante. Um exemplo deste tipo de permutação é o seguinte:

$$T^{i \dots j} = T^{j \dots i} ;$$

$$T_{i \dots j} = T_{j \dots i} .$$

Similarmente, define-se como antissimétrico, o tensor em que na permutação de dois de seus índices subscritos, ou sobrescrito, tem como efeito a troca de sinal no tensor.

$$T^{i\dots j} = -T^{j\dots i} ;$$

$$T_{i\dots j} = -T_{j\dots i} .$$

No caso particular de um tensor de ordem dois, podemos escrever a relação:

$$T^{ij} = \frac{1}{2!}(T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2!}(T^{ij} - T^{ji}) ,$$

de modo que, o primeiro termo depois da igualdade é a parte simétrica do tensor, e será indicado por $T^{(ij)}/2$. Enquanto o segundo termo é a parte antissimétrica e será indicado por $T^{[ij]}/2$, *i.e.*

$$T^{ij} = \frac{1}{2!}T^{(ij)} + \frac{1}{2!}T^{[ij]} .$$

.

Um exemplo importante de campo tensorial de ordem dois covariante simétrico é o tensor métrico. Tal campo satisfaz a relação:

$$g_{ab}(x) = g_{ba}(x) , \tag{2.9}$$

e descreve a geometria da variedade diferenciável. Outro exemplo importante de tensor antissimétrico em dimensão quatro é o tensor de Faraday. Tal tensor descreve o campo eletromagnético e satisfaz a relação:

$$F_{ab}(x) = -F_{ba}(x) . \tag{2.10}$$

Mais adiante, teremos a oportunidade de trabalhar com campos tensoriais envolvendo diferentes tipos de simetrias sob permutações de seus diferentes tipos de índices. Dois exemplos destes objetos são os tensores de Riemann e Weyl, denotados, respectivamente por $R_{abcd}(x)$ e $W_{abcd}(x)$.

2.1.3 Tensor métrico

Como mencionado anteriormente, o tensor métrico (ou simplesmente métrica) é um campo tensorial simétrico de segunda ordem não degenerado em M^n , que descreve a geometria da variedade. Em outras palavras, ele é usado para medir a distância entre dois pontos no espaço. O tensor métrico pode ser definido de maneiras diferentes em diferentes contextos da física ou da matemática, mas uma definição comum é a seguinte:

Em uma variedade diferenciável semi-riemanniana de dimensão n , o tensor métrico é definido como um campo tensorial simétrico de segunda ordem, $g_{ij}(x)$, que associa a cada par de vetores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p M$ um escalar (\vec{v}, \vec{w}) , dado por:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = g_{ij}(x)v^i w^j ,$$

de v^i e w^j são as componentes contravariantes dos vetores \vec{v} e \vec{w} , na base coordenada escolhida. Assim, o tensor métrico também pode ser definido como o produto interno (produto escalar) dos vetores da base coordenada, sob a forma:

$$g_{ij}(x) = \vec{e}_i(x) \cdot \vec{e}_j(x) .$$

Desta maneira, definimos a norma (comprimento) de um vetor $\vec{v} \in T_p M$ por:

$$\|\vec{v}\|^2 = g_{ij}(x)v^i v^j .$$

Tal norma induz uma noção de distância entre pontos infinitesimalmente próximos na variedade. De fato, considerando o módulo de um vetor infinitesimal $d\vec{x} \in T_p M$, temos o chamado elemento de linha:

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j , \tag{2.11}$$

que contém toda informação sobre a geometria da variedade semi-riemanniana e contém o caso euclidiano usual como caso particular.

Como o tensor métrico é não-degenerado por construção, tem-se que $\det(g_{ij}) \neq 0$. Desta maneira, existe um tensor contravariante, denotado por g^{ij} , tal que:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j . \quad (2.12)$$

onde

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j ; \\ 0, & \text{se } i \neq j . \end{cases}$$

é o delta de Kronecker (o análogo da matriz identidade). Em outras palavras, o tensor métrico é sempre invertível:

$$(g_{ij})^{-1} = g^{ij} .$$

Por conta desta propriedade, g_{ij} e g^{ij} podem ser usados para descer e subir índices em outros tensores, como por exemplo:

$$A^{abcd} = g^{ap} g^{bq} g^{cr} g^{ds} A_{pqrs} . \quad (2.13)$$

Ademais, pelo fato da métrica ser sempre não-degenerada, pode-se mostrar que sempre poderemos escolher uma base específica, $\vec{e}_a(x)$, em um dado ponto, tal que:

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} +1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & +1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Dito de outra maneira, sempre poderemos reduzir a métrica em um dado ponto à forma $g_{ij} = \text{diag}(+, +, \dots, -, -)$. A distribuição de auto-valores positivos e negativos define a chamada assinatura da métrica. Dizemos que a geometria é riemanniana se todos os autovalores são positivos, pseudo-riemanniana se um auto-valor é positivo e todos os outros são negativos e semi-riemanniana em todos os outros casos.

No caso particular de uma variedade quadri-dimensional, temos as seguintes possibilidades para a assinatura da métrica:

- assinatura riemanniana (elíptica): $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, +, +, +)$;
- assinatura pseudo-riemanniana (hiperbólica): $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$;
- assinatura semi-riemanniana (ultra-hiperbólica): $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, +, -, -)$;

A partir de agora, iremos nos concentrar no caso particular de uma variedade diferenciável quadri-dimensional $(M, g_{\mu\nu})$ de assinatura hiperbólica $(+, -, -, -)$. Tais variedades são aquelas que tem interesse no contexto da relatividade geral e, neste caso, o elemento de linha admite a forma local:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad , \quad c = 1 \quad (2.14)$$

2.1.4 Traço de um tensor

O traço de um tensor é uma operação algébrica envolvendo a métrica de tal maneira que produz um outro tensor de ordem menor. Um exemplo desta operação no caso de um tensor de ordem seis é o seguinte:

$$T^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv T^{\alpha\beta\mu\nu\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \quad ,$$

onde está implícita a notação de Einstein e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. De igual forma podemos tirar o traço de um tensor covariante contraindo-o com a inversa da métrica g^{ij} .

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv T_{\alpha\beta\mu\nu\gamma\delta} g^{\gamma\delta} \quad ,$$

ainda podemos tirar o traço de um tensor misto, por exemplo, tomemos um tensor de ordem quatro $T^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$:

$$T^{\beta}_{\nu} \equiv T^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta^{\mu}_{\alpha} \quad .$$

Podemos perceber que a contração reduz a ordem do tensor em um fator de 2. Assim, considerando um tensor de ordem dois, então o seu traço será uma quantidade escalar:

$$T = T_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} ,$$

que nada mais é do que um tensor de ordem 0 (não possui índices). Um exemplo deste tipo de objeto é o escalar de curvatura, que será abordado no próximo capítulo:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} .$$

Em outras palavras, o traço de um tensor pode ser obtido calculando a soma dos elementos da diagonal principal do tensor, onde cada elemento é multiplicado pelo elemento correspondente da diagonal principal do tensor métrico. O traço de um tensor é uma quantidade importante em cálculo tensorial, pois ele é invariante sob mudanças de coordenadas e é usado para definir invariantes tensoriais, que são grandezas que não mudam sob transformações coordenadas.

2.2 Tensor de Levi-Civita

O símbolo de Levi-Civita é também conhecido como símbolo de permutação, e pode ser definido em espaços de dimensões arbitrárias. O mesmo é usado para descrever “rotação” e “torção” nestes espaços. O símbolo de Levi-Civita é completamente antissimétrico, o que significa que muda de sinal quando dois índices adjacentes são trocados. Além disso, seu valor é zero se dois dos índices forem iguais. Em um espaço quadridimensional, ele é um objeto de rank quatro e pode ser definido como:

$$[\alpha\beta\mu\nu] = \begin{cases} +1, & \text{para qualquer permutação par de } (0, 1, 2, 3) ; \\ 0, & \text{se quaisquer dos índices tiverem o mesmo valor ;} \\ -1, & \text{para qualquer permutação ímpar de } (0, 1, 2, 3) . \end{cases}$$

O tensor de Levi-Civita é dado em função da métrica como:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} [\alpha\beta\mu\nu] , \tag{2.15}$$

onde

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) ,$$

de modo que:

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} [\alpha\beta\mu\nu]. \quad (2.16)$$

Definimos também os deltas generalizados de Kronecker por:

$$\delta^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_k} \equiv \det \begin{bmatrix} \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} & \delta^{\alpha_1}_{\beta_2} & \dots & \delta^{\alpha_1}_{\beta_k} \\ \delta^{\alpha_2}_{\beta_1} & \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} & \dots & \delta^{\alpha_2}_{\beta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\alpha_k}_{\beta_1} & \delta^{\alpha_k}_{\beta_2} & \dots & \delta^{\alpha_k}_{\beta_k} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Utilizando o método de Laplace, obtemos o seguinte padrão para os primeiros símbolos generalizados:

$$\begin{aligned} \delta^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \beta_2} &= \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2}_{\beta_2} - \delta^{\alpha_1}_{\beta_2} \delta^{\alpha_2}_{\beta_1} ; \\ \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} &= \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2 \alpha_3}_{\beta_2 \beta_3} + \delta^{\alpha_1}_{\beta_2} \delta^{\alpha_2 \alpha_3}_{\beta_3 \beta_1} + \delta^{\alpha_1}_{\beta_3} \delta^{\alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2} ; \\ \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} &= \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \delta^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}_{\beta_2 \beta_3 \beta_4} - \delta^{\alpha_1}_{\beta_2} \delta^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}_{\beta_3 \beta_4 \beta_1} \\ &\quad + \delta^{\alpha_1}_{\beta_3} \delta^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}_{\beta_4 \beta_1 \beta_2} - \delta^{\alpha_1}_{\beta_4} \delta^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} . \end{aligned}$$

Desta maneira, pode-se verificar as seguintes identidades algébricas:

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} = -\delta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} ; \quad (2.18)$$

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_4} = -\delta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} ; \quad (2.19)$$

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \alpha_3 \alpha_4} = -2\delta^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \beta_2} ; \quad (2.20)$$

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = -6\delta^{\alpha_1}_{\beta_1} ; \quad (2.21)$$

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = -24 . \quad (2.22)$$

Também é possível definir, para qualquer tensor antissimétrico, um objeto conhecido como mapa de Hodge, ou dual. No espaço-tempo da TRG, o dual de Hodge é um operador linear que transforma tensores de rank k em tensores de rank $(4 - k)$. De fato, dado um tensor anti-simétrico $F_{\alpha\dots\nu}$ num espaço-tempo quadrimencional $n = 4$, definimos seu dual de Hodge através do tensor de Levi-Civita, como:

$$\star F = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta\mu\nu} ; \quad (2.23)$$

$$\star F^\alpha = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\beta\mu\nu} ; \quad (2.24)$$

$$\star F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} ; \quad (2.25)$$

$$\star F^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{1!} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_\nu . \quad (2.26)$$

2.3 Transporte Paralelo e Derivação Covariante

Como vimos na Seção 2.1.1, em um espaço-tempo plano, é fácil construir tensores de ordem superior por diferenciação, desde que nos restrinjamos apenas às transformações lineares. Assim, se V_c é um tensor covariante de primeira ordem, então $\partial_a V_c$ é um tensor covariante de segunda ordem. No entanto, em um espaço-tempo curvo, a diferenciação simples não nos retorna uma quantidade tensorial. Por exemplo, dado o campo vetorial V^a , ao executarmos uma derivação parcial, obtemos um objeto totalmente novo, com termo extra.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{V}^a = \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} V^b \right) = \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^n} V^b + \dots$$

concluimos então, que o objeto acima não se transforma como um tensor.

Para entender a derivada de um objeto, é preciso compará-lo em pontos distintos. No entanto, em um espaço curvo, objetos geométricos em pontos diferentes pertencem a espaços tangentes distintos, e, por isso, é necessário um método de transporte para levá-los de um ponto a outro e compará-los dentro do mesmo espaço tangente. A derivada covariante é obtida através do transporte de tensores, que requer a introdução de uma nova quantidade chamada conexão, a qual conecta vetores de espaços tangentes distintos por meio de uma lei de transporte.

O transporte paralelo de um vetor V^a durante um pequeno deslocamento dx^α

provoca uma variação nas componentes deste vetor, denotada por δV^a . Esta variação deve ser linear em V^a e dx^a , logo, existe um fator multiplicativo $\Gamma^a{}_{bc}$, de tal forma que define-se o transporte paralelo como:

$$\delta V^a = -\Gamma^a{}_{bc} V^b dx^c . \quad (2.27)$$

onde $\Gamma^a{}_{bc}$ é a conexão.

Tomando a definição usual de derivada parcial, temos:

$$\frac{\partial V^a}{\partial x^c} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{V^a(x + dx) - V^a(x)}{dx^c} , \quad (2.28)$$

vemos agora claramente porque tal objeto não caracteriza um tensor. De fato, estamos comparando dois objetos pertencentes a dois espaços tangentes distintos. Para remediar tal situação, transportamos paralelamente o vetor e comparamos duas quantidades definidas em um mesmo ponto, da seguinte forma:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{V^a(x + dx) - (V^a(x) + \delta V^a)}{dx^c} , \quad (2.29)$$

e utilizando a definição da conexão acima, obtemos:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{V^a(x + dx) - V^a(x)}{dx^c} + \Gamma^a{}_{bc} V^b . \quad (2.30)$$

Portanto, observamos que tal objeto constitui-se das seguintes partes complementares:

$$\nabla_c V^a \equiv \frac{\partial V^a}{\partial x^c} + \Gamma^a{}_{bc} V^b , \quad (2.31)$$

que transforma-se como um tensor de ordem dois e define a chamada derivada covariante do vetor $V^a(x)$. Para simplificar a notação vamos indicar (quando conveniente) uma derivada covariante por um ponto e vírgula, em distinção à derivada ordinária que é representada por uma vírgula. Assim:

$$V^a{}_{;c} = V^a{}_{,c} + \Gamma^a{}_{bc} V^b , \quad (2.32)$$

de forma similar, construímos também a derivada covariante de um tensor covariante A_b com um sinal negativo:

$$V_{a;c} = V_{a,c} - \Gamma^b{}_{ac} V_b . \quad (2.33)$$

A operação matemática de derivada covariante pode ser generalizada para tensores de ordem maior. Por exemplo, as derivadas covariantes dos tensores $T^{\mu\nu}$ e $V_{\rho}^{\mu\nu}$ são, respectivamente,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\beta} = T^{\mu\nu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} T^{\mu\alpha} ; \quad (2.34)$$

$$V^{\mu\nu}{}_{\rho;\beta} = V^{\mu\nu}{}_{\rho,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} V^{\alpha\nu}{}_{\rho} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} V^{\mu\alpha}{}_{\rho} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\beta} V^{\mu\nu}{}_{\alpha} . \quad (2.35)$$

A conexão $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, recebe o nome de símbolo de Christoffel, e pode ser definida de forma simples em termos da $g^{\mu\nu}$ a partir do formalismo lagrangiano. De fato, considere a lagrangiana de um sistema onde não existe energia potencial, ou seja, uma lagrangiana definida apenas pela energia cinética $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v})$. As equações de Euler-Lagrange têm a forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0 , \quad (2.36)$$

onde x^i denotam as coordenadas generalizadas e \dot{x}^i sua derivação em relação ao tempo. Sabemos também que $\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$, de modo que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{1}{2}m \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j , \quad (2.37)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = m \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j + g_{ij} \ddot{x}^j \right) , \quad (2.38)$$

assim:

$$m \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j + g_{ij} \ddot{x}^j \right) \right] = 0 . \quad (2.39)$$

Agora, manipulando os índices mudos convenientemente, utilizando a propriedade de simetria de g_{ij} e a notação de derivada parcial $g_{ij,k}$ podemos reescrever a equação acima de forma mais conveniente:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^k\dot{x}^j(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) + g_{ij}\ddot{x}^j = 0, \quad (2.40)$$

multiplicando pelo inverso da métrica g^{li} ,

$$\frac{1}{2}g^{li}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i})\dot{x}^k\dot{x}^j + \ddot{x}^l = 0, \quad (2.41)$$

assim, o símbolo de Christoffel é definido como:

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2}g^{li}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{kj,i}) = \Gamma^l_{kj}. \quad (2.42)$$

Embora tenhamos escrito o símbolo de Christoffel em uma notação semelhante a de tensores de terceira ordem, o símbolo de Christoffel não é um tensor, pois ele não obedece à lei de transformação para um tensor de terceira ordem. Se fizermos que $V^a_{;c}$ seja um tensor do tipo $(1, 1)$, Γ^a_{bc} se transforma de acordo com:

$$\Gamma'^a_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \Gamma^d_{ef} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^b \partial x'^c}, \quad (2.43)$$

essa seria a lei de transformação de um tensor, se não fosse pelo segundo termo do lado direito. No entanto esse termo faz a lei de transformação ser linear e não-homogênea, ou seja, não é um tensor. Quantidades que se transformam de acordo com a lei acima são chamadas de conexão afim ou simplesmente conexão. Finalmente, temos a relação de compatibilidade válida para toda geometria (pseudo) Riemanniana:

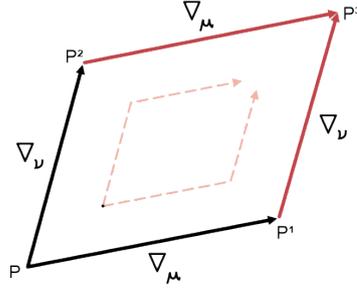
$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0. \quad (2.44)$$

2.4 Tensor de Curvatura, Tensor de Ricci e Escalar de Ricci

Precisamos caracterizar a curvatura do espaço-tempo com um novo objeto de natureza tensorial. Vamos definir um tensor que indique a mudança que ocorre nas

componentes de um vetor quando este é transportado por um caminho fechado; claro, se essa mudança for nula, a variedade não possuirá uma curvatura. Para tal, pensemos em um vetor P^α se movendo em um caminho fechado, primeiro do ponto p ao p^3 passando por p^1 , depois do ponto p ao p^3 passando por p^2 , como mostra na figura 2.1.

Figura 2.1 – Comutador de duas derivadas covariantes.



fonte: autor.

A derivada covariante é capaz de comparar tensores transportados em pontos ligeiramente diferentes em uma determinada curva. Considerando um campo vetorial P^α , temos pela Figura 2.1, que:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu P^\alpha = \partial_\mu (\nabla_\nu P^\alpha) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho P^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \nabla_\nu P^\gamma, \quad (2.45)$$

e, permutando os índices adequadamente, obtemos:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu P^\alpha = \partial_\nu (\nabla_\mu P^\alpha) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \nabla_\rho P^\alpha + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \nabla_\mu P^\gamma. \quad (2.46)$$

A diferença entre as Eqs. (2.45) e (2.46) é:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] P^\alpha &= \nabla_\mu \nabla_\nu P^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu P^\alpha = \partial_\mu (\nabla_\nu P^\alpha) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho P^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \nabla_\nu P^\gamma - \\ &\quad - \partial_\nu (\nabla_\mu P^\alpha) + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \nabla_\rho P^\alpha - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \nabla_\mu P^\gamma. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Abrindo os índices e organizando a expressão, chegamos que:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] P^\alpha = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\gamma}^\rho) P^\gamma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\alpha \partial_\nu P^\gamma. \quad (2.48)$$

Uma vez que os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices em questão, obtemos:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]P^\alpha = -R^\alpha_{\beta\mu\nu}P^\beta, \quad (2.49)$$

onde o objeto de quatro índices:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\beta}. \quad (2.50)$$

é o chamado tensor de Riemann associado à geometria $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$. O tensor de Riemann é uma ferramenta matemática muito utilizada na geometria diferencial e na teoria da relatividade geral e, grosso modo, mede o quanto o espaço-tempo em questão distingue-se do espaço-tempo plano de Minkowski, descrito pelo tensor constante $\eta_{\mu\nu}$.

Em particular, utilizando o tensor métrico para baixar o índice contra-variante, temos o objeto totalmente covariante:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\rho} R^\rho_{\beta\mu\nu}. \quad (2.51)$$

este tensor possui várias propriedades importantes, como a simetria cíclica e a identidade de Bianchi, que são utilizadas para simplificar os cálculos e estabelecer relações entre o tensor de Riemann e outras quantidades geométricas. Algumas dessas propriedades de simetria são:

- É antissimétrico em seus dois últimos índices;

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (2.52)$$

- É antissimétrico em seus dois primeiros índices;

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\nu\mu} \quad (2.53)$$

- É invariante diante de uma permutação entre o primeiro e o segundo par de índices;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.54)$$

- A soma das permutações cíclicas dos três últimos índices é nula;

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (2.55)$$

A expressão (2.55) recebe o nome de Primeira Identidade de Bianchi. Pode-se mostrar a partir das simetrias acima que o tensor de Riemann possui um total de 20 componentes independentes em quatro dimensões.

Agora, podemos obter novos tensores a partir de contrações do tensor de Riemann com a métrica. Assim, contraindo-se o primeiro com o terceiro índice, chegamos ao tensor de Ricci:

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu} , \quad (2.56)$$

o qual é simétrico, assim:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} . \quad (2.57)$$

e pode ser calculado em função dos símbolos de Christoffel como

$$R_{\beta\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} . \quad (2.58)$$

O tensor de Ricci é um tensor de segunda ordem que descreve a curvatura do espaço-tempo em termos de curvatura seccional e curvatura média, e por ser simétrico, o tensor de Ricci possui 10 componentes independentes. Logo, ele nos fornece metade das informações obtidas com o tensor de Riemann. Finalmente, contraindo o tensor de Ricci com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.59)$$

2.5 Decomposição de Ricci

Vimos na seção anterior que o tensor de Riemann é composto de 20 componentes independentes não nulas, e que o tensor de Ricci nos fornece apenas 10 dessas componentes. A parte restante da informação aparece de forma explícita na chamada decomposição irreduzível do tensor (decomposição de um tensor em seu traço somado com sua parte sem traço) envolvendo a métrica, de tal forma que em uma variedade diferenciável de dimensão $n \geq 3$, temos:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = S_{\alpha\beta\mu\nu} + E_{\alpha\beta\mu\nu} + W_{\alpha\beta\mu\nu} , \quad (2.60)$$

onde $S_{\alpha\beta\mu\nu}$, $E_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ são 4-tensores definidos como:

$$S_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{n(n-1)} R (g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) ;$$

$$E_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{n-2} (g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu}^* + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}^* - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu}^* - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}^*) ;$$

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - S_{\alpha\beta\mu\nu} - E_{\alpha\beta\mu\nu} ;$$

e o tensor simétrico de ordem dois:

$$R_{\alpha\beta}^* = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{n} R g_{\alpha\beta} , \quad (2.61)$$

é a parte sem traço do tensor de Ricci. Tal decomposição é um resultado matemático e existe independentemente de sua interpretação física. Note-se que todos os tensores acima possuem as mesmas simetrias do tensor de Riemann.

Assim, para um espaço-tempo quadridimensional, $n = 4$, obtemos a chamada decomposição de Ricci:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu}^* - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu}^* + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}^* - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}^*) + \frac{1}{12} R (g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) .$$

Equivalentemente, utilizando o símbolo de antissimetria, obtemos a expressão mais compacta:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} (g_{\alpha[\nu}R_{\mu]\beta}^* + g_{\beta[\mu}R_{\nu]\alpha}^*) + \frac{1}{12} R g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta} . \quad (2.62)$$

O tensor $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o chamado tensor de Weyl, e algumas de suas propriedades serão apresentadas na próxima seção.

2.6 Propriedades do Tensor de Weyl

Além do tensor de curvatura de Riemann, existe outro tensor importante na Relatividade Geral, chamado tensor de Weyl. O tensor de Weyl é obtido a partir do tensor de curvatura de Riemann, eliminando a parte que contém a conexão afim de Levi-Civita.

O tensor de Weyl, em um espaço quadrimensional, é definido como:

$$W^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \frac{1}{2}(g^{\alpha}_{\mu}R_{\beta\nu} - g^{\alpha}_{\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R^{\alpha}_{\nu} + g_{\beta\nu}R^{\alpha}_{\mu}) + \frac{1}{6}R(g^{\alpha}_{\mu}g_{\beta\nu} - g^{\alpha}_{\nu}g_{\beta\mu}) . \quad (2.63)$$

O tensor de Weyl tem, entre outras características, o fato de não possuir traço. Podemos mostrar da seguinte forma.

$$W^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{2}(g^{\alpha}_{\mu}R_{\alpha\nu} - g^{\alpha}_{\alpha}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R^{\alpha}_{\alpha} - g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu}) + \frac{1}{6}R(g^{\alpha}_{\alpha}g_{\mu\nu} - g^{\alpha}_{\nu}g_{\alpha\mu}) ; \quad (2.64)$$

$$W_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(R_{\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}) + \frac{1}{6}R(4g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) ; \quad (2.65)$$

realizando algumas operações e reorganizando os termos, temos:

$$W_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} , \quad (2.66)$$

ou seja:

$$W_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.67)$$

O tensor de Weyl tem as mesmas simetrias do tensor de Riemann e, portanto, contém informações importantes sobre as propriedades geométricas do espaço-tempo.

- $W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\alpha\beta\nu\mu}$;
- $W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\beta\alpha\nu\mu}$;
- $W_{\mu\nu\beta\alpha} = W_{\beta\alpha\mu\nu}$;
- $W_{\alpha\beta\mu\nu} + W_{\alpha\nu\beta\mu} + W_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$.

Por fim, podemos dizer que, no contexto da Relatividade Geral, o tensor de Weyl é a parte do tensor de Riemann que descreve a curvatura intrínseca da variedade que não é causada pela distribuição de massa e energia. Em outras palavras, o tensor de Weyl descreve a curvatura “pura” da variedade, que é causada apenas pela geometria intrínseca da mesma. Isso faz do tensor de Weyl um objeto matemático importante na teoria da relatividade geral, pois ele é utilizado para descrever as propriedades físicas dos buracos negros, ondas gravitacionais e outras soluções exóticas das equações de Einstein.

2.7 Dualidade do Tensor de Weyl

Como vimos na Seção 2.2, com o auxílio do tensor de Levi-Civita podemos definir três tipos de duais para um tensor qualquer de rank quatro. Dado o tensor de Weyl, podemos definir:

- Dual à esquerda

$${}^*W_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\lambda}W_{\rho\lambda\mu\nu} ; \quad (2.68)$$

- Dual à direita

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \frac{1}{2}W_{\rho\lambda\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\lambda} ; \quad (2.69)$$

- Duplo dual;

$${}^*W_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\lambda}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\theta\gamma}W_{\rho\lambda\theta\gamma} . \quad (2.70)$$

Devido à característica de W não possuir traço, ele apresenta as seguintes propriedades, que podem ser derivadas à partir da identidade de Ruse-Lanczos [12]:

- o duplo dual do tensor de Weyl tem o efeito de trocar o sinal do tensor :

$${}^*W_{\alpha\beta\mu\nu}^* = -W_{\alpha\beta\mu\nu} , \quad (2.71)$$

- de forma geral, para um tensor qualquer de rank 4, o dual à esquerda é sempre diferente do seu dual à direita, no entanto, quando aplicamos ao tensor de Weyl temos:

$${}^*W_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu}^* , \quad (2.72)$$

o qual passaremos a representar como $\dot{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$, e que possui todas as simetrias de $W_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Seja um vetor tipo tempo normalizado u^a , $u^a u_a = 1$. Utilizando a decomposição 3+1 podemos contrair o tensor de Weyl e o seu dual com o campo de observadores a fim de decompor o tensor em uma parte elétrica E e outra parte magnética B :

$$E_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta\mu\nu} u^\beta u^\nu ; \quad (2.73)$$

$$B_{\alpha\beta} = \dot{W}_{\alpha\beta\mu\nu} u^\beta u^\nu . \quad (2.74)$$

$E_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$ compartilham algumas características de simetria com o tensor de Weyl.

- i) $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$; $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$
- ii) $E_{\alpha\beta} u^\beta = 0$; $B_{\alpha\beta} u^\beta = 0$
- iii) $E^\alpha{}_\alpha = 0$; $E^\alpha{}_\alpha = 0$

Assim, podemos concluir que toda a informação contida no tensor de Weyl está nos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$

2.8 Campos Vetoriais de Killing

Para compreender o nosso universo, é necessário que modelemos o espaço-tempo através de varias aproximações apropriadas ao contexto da física que estamos estudando. Toda teoria física pode ser melhor compreendida quando conhecemos as simetrias por trás das suas soluções, e, no caso da Relatividade Geral, estamos estudando simetrias da métrica que são dadas por objetos conhecidos como tensores de killing.

Considere uma transformação de coordenadas infinitesimais [10]:

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha(x) , \quad (2.75)$$

onde ϵ é muito pequeno e $\xi^\alpha(x^\mu)$ é um campo vetorial. Para essa transformação, teremos:

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \epsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} . \quad (2.76)$$

Assim, a transformação do tensor métrico expresso como uma função de x , assume a forma:

$$g_{\mu\nu}(x) \cong g'_{\mu\nu}(x) + \epsilon \xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} + \epsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\nu}(x) + \epsilon \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\mu\beta}(x) , \quad (2.77)$$

onde descartamos todos os termo de ordem quadrática no parâmetro ϵ . Desta maneira, só teremos a condição de invariância da métrica, ou seja, só haverá simetria caso:

$$\xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\mu\beta}(x) = 0 . \quad (2.78)$$

Podemos escrever a Eq. (2.78) em termos das componestes covariantes de ξ^α , tal que $\xi_\nu = g_{\alpha\nu} \xi^\alpha$:

$$\xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \xi^\alpha \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \right) + \left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \xi^\beta \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \right) = 0 , \quad (2.79)$$

organizando os termos, encontramos:

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \left(\xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \xi^\alpha \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \xi^\beta \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \right) = 0 , \quad (2.80)$$

que pode ser reorganizado e combinado em um simbolo de Christoffel:

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - 2\xi_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.81)$$

ou, em termos de derivadas covariantes:

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0 . \quad (2.82)$$

A Eq. (2.82) é conhecida como equação de Killing, e os campos vetoriais ξ_μ que satisfazem essa equação são chamados de Campos Vetoriais de Killing, ou simplesmente vetores de Killing. Um conjunto de soluções das equações de Killing correspondem a um grupo de isometrias.

Dada uma determinada métrica $g_{\mu\nu}$, os vetores de Killing são determinados pelos valores de ξ_μ e $\xi_{\mu;\nu}$ em um dado ponto $p \in M$; esses fatores são obtidos a partir da equação de Killing e de uma propriedade obtida a partir da definição do tensor de Riemann:

$$\xi_{\gamma;[\mu\nu]} = -R_{\nu\gamma\mu}{}^\delta \xi_\delta . \quad (2.83)$$

Uma explicação mais aprofundada sobre o assunto pode ser encontrada nas referências [10] e [13].

3 CAMPO DE EINSTEIN E SOLUÇÕES EXATAS

Neste capítulo iremos apresentar a equação de Einstein e mostrar duas de suas soluções exatas, a Solução de Schwarzschild, que deu início ao conceito de buraco negro e que nos dá a solução para os principais testes clássicos da RG: o deslocamento de linhas espectrais na presença de campo gravitacional, a deflexão de um feixe de luz que passa perto de um corpo de massa M e conseqüentemente as lentes gravitacionais, e a precessão do periélio de Mercúrio; discutiremos também a Solução de Kerr que é a solução mais aceita para descrever um buraco negro real, uma vez que a carga não é um parâmetro astrofisicamente relevante.

3.1 Equações de Einstein

Após propor uma teoria métrica da gravitação, definindo a gravidade como uma consequência da curvatura no espaço-tempo causada pela presença de energia e matéria, Einstein precisava completar a teoria postulando uma lei que mostrasse como as fontes de campo gravitacional determinam a métrica. Generalizando a forma do campo gravitacional newtoniano para a relatividade, teremos a forma [14]:

$$O(g) = kT ,$$

onde O é um operador diferencial da métrica $g_{\alpha\beta}$, k é uma constante e T é o tensor energia-momento.

Como O deve ser um operador diferencial de segunda ordem e produzir um tensor simétrico, uma vez que ele é igualado a T , podemos escrever $O^{\alpha\beta}$ como:

$$O^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R , \tag{3.1}$$

sendo μ uma constante, onde $R^{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci.

Utilizando o princípio de equivalência de Einstein, princípio básico da Relatividade que exige a conservação local de energia e momento, temos:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 , \tag{3.2}$$

e

$$O^{\alpha\beta};_{\beta} = 0 ,$$

logo, como $g^{\alpha\beta};_{\beta} = 0$:

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R);_{\beta} = 0 , \quad (3.3)$$

assim, tomando $\mu = -\frac{1}{2}$ e $\frac{8\pi G}{c^4} = -k$ (mais detalhes podem ser encontrados nas referências [10],[11], [14]; temos a forma mais usual para as equações de Einstein (sem constante cosmológica), representada na sua forma covariante:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} . \quad (3.4)$$

3.2 Soluções exatas

Uma solução exata, em Relatividade Geral, é uma variedade lorentziana formada por certos campos tensoriais que servem para modelar campos gravitacionais e descrever o espaço-tempo ao redor de uma distribuição de massa, como por exemplo o Sol e o movimento dos planetas ao seu redor. Existe uma diversidade de soluções exatas das equações de Einstein, que têm desempenhado papel importante no desenvolvimento teórico e observacional da RG.

3.2.1 A Solução de Schwarzschild

A Solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata para as equações de Einstein da RG. É uma solução exata que descreve a geometria exterior a um buraco negro estático, ou seja, que não possui momento angular, sem carga elétrica e que é esfericamente simétrico. Essa é uma solução muito importante, pois acredita-se que o colapso gravitacional de qualquer estrela sem momento angular e eletricamente neutra resultará necessariamente na geometria de Schwarzschild. Devemos, portanto, resolver as Equações de Einstein no vácuo, ou seja, com tensor energia-momento igual a zero:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 . \quad (3.5)$$

A obtenção de uma solução para a mesma, requer a escolha de uma métrica que simule as simetrias da geometria do espaço-tempo exterior a um corpo esférico. O elemento de linha que descreve essa simetria é do tipo:

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2 , \quad (3.6)$$

onde A e B são funções de r , logo elas devem ir a 1 para grandes valores de r . Assim, vamos definir duas novas funções do tipo exponenciais, de modo que não inverta os sinais dos termos tipo tempo e tipo espaço.

$$A(r) = e^{v(r)} \quad e \quad B(r) = e^{\lambda(r)} .$$

De modo que o elemento de linha passa a ficar na forma:

$$ds^2 = e^{v(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2 . \quad (3.7)$$

Equivalentemente, na forma matricial, temos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu , \quad (3.8)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que para este elemento de linha corresponde a:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{v(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Definido o tensor métrico, podemos prosseguir com os cálculos. Primeiro o Símbolo de Christoffel, que é definido em função da métrica:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) . \quad (3.9)$$

As componentes não nulas do Símbolo de Christoffel são:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}v'(r); \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}v'e^{(v(r)-\lambda(r))}; \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda'(r); \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda(r)}; \quad \Gamma^1_{33} = -r\text{sen}^2(\theta)e^{-\lambda(r)}; \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma^2_{33} = -\text{sen}(\theta)\cos(\theta); \\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot(\theta) .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Todos outros Símbolo de Christoffel são zero, incluindo componentes onde aparecem derivadas de ϕ e componentes estáticas.

A partir dos símbolos de Christoffel podemos calcular o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = (-\partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) . \tag{3.11}$$

Tomando o traço da Equação de Einstein no vácuo, Eq. (3.5), temos que:

$$R_{\mu\nu} = 0 ,$$

apenas as componentes da diagonal principal de $R_{\mu\nu}$ são importantes para compor a solução, ou seja, as componentes 00, 11, 22 e 33. As componentes do tensor de Ricci são os seguintes:

$$R_{00} = \frac{1}{2}e^{(v-\lambda)} \left[(v'' + v'(v' - \lambda')) + v' \left(\frac{1}{2}v' + \frac{1}{2}\lambda' + \frac{2}{r} \right) - v'^2 \right] = 0 , \tag{3.12}$$

a exponencial não pode ser nula, logo temos que:

$$(v'' + v'(v' - \lambda')) + v' \left(\frac{1}{2}v' + \frac{1}{2}\lambda' + \frac{2}{r} \right) - v'^2 = 0 , \tag{3.13}$$

assim;

$$R_{00} = \frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}v'^2 - \frac{1}{4}v'\lambda' + \frac{v'}{r} = 0 , \tag{3.14}$$

as demais, são:

$$R_{11} = \frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}v'^2 - \frac{1}{4}v'\lambda' - \frac{\lambda'}{r} = 0 ; \quad (3.15)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{1}{2}r(v' - \lambda') \right] - 1 = 0 ; \quad (3.16)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2(\theta) \left\{ e^{-\lambda} \left[1 + \frac{1}{2}r(v' - \lambda') \right] - 1 \right\} = 0 . \quad (3.17)$$

O que queremos é encontrar os valores de e^v e e^λ , e para isso precisamos resolver o sistema de equações acima. Fazendo $R_{00} - R_{11}$, encontramos:

$$\begin{aligned} v' + \lambda' &= 0 ; \\ v' &= -\lambda' . \end{aligned}$$

substituindo esse resultado em R_{22} , temos:

$$R_{22} = e^v \left[1 + \frac{1}{2}r(2v') \right] - 1 = 0 ; \quad (3.18)$$

$$R_{22} = e^v(1 + rv') = 1 ; \quad (3.19)$$

$$R_{22} = (e^v r)' = 1 ; \quad (3.20)$$

integrando R_{22}

$$\int \frac{\partial}{\partial r}(e^v r) dr = \int 1 dr ; \quad (3.21)$$

$$e^{\nu} r = r - C; \quad (3.22)$$

logo, temos que:

$$e^{\nu} = 1 - \frac{C}{r} = e^{-\lambda}. \quad (3.23)$$

Substituindo os valores de e^{ν} e $e^{-\lambda}$ no elemento de linha ds^2 :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.24)$$

Agora, nos cabe interpretar essa solução, de modo a encontrar o valor da constante C e, para tal, vamos recorrer a uma aproximação de campo fraco no limite newtoniano. Num limite newtoniano, a métrica assume a forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação. Derivando $h_{\mu\nu}$ temos que $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}$, onde $\phi = -\frac{GM}{R}$ é o potencial newtoniano e $\eta_{\mu\nu} = 1$, de modo que:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{Rc^2}.$$

Como vimos anteriormente, $g_{00} = e^{\nu} = 1 + \frac{C}{r}$. Comparando com a métrica no limite newtoniano, com $r = R$, temos que:

$$1 - \frac{C}{r} = 1 - \frac{2GM}{rc^2},$$

logo:

$$C = \frac{2GM}{c^2}.$$

Assim, substituindo o valor encontrado para C , chegamos na solução de Schwarzschild mais usual:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) . \quad (3.25)$$

Esta é uma das soluções exatas das equações de Einstein mais importantes, e que descreve o espaço-tempo exterior a um buraco negro. Podemos perceber que nesta solução temos essencialmente duas singularidades, uma singularidade física em $r = 0$ e outra matemática quando $r = \frac{2GM}{c^2}$ no segundo termo que vai a infinito. $\frac{2GM}{c^2} = r_{sc}$ é chamado de Raio de Schwarzschild e define o horizonte de eventos do buraco negro, nada que adentra esse raio consegue sair, nem mesmo ondas eletromagnéticas como a luz.

Podemos notar, que, quando $r \rightarrow \infty$, a métrica de Schwarzschild retorna à métrica de Minkowski, ou seja, a métrica é assintoticamente plana. Sendo assim, suficientemente distante da fonte de curvatura, o espaço-tempo é plano. A fim de eliminar a singularidade em $r = r_{sc}$ que aparece, a expressão 3.25 pode ser escrita numa forma reduzida, se introduzirmos uma nova coordenada dada por:

$$t_* = t - 2m \log(r - m) , \quad (3.26)$$

onde $m = \frac{GM}{c^2}$, de modo que:

$$ds^2 = (dt_*^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{2m}{r} (dt_* - dr)^2 . \quad (3.27)$$

Essa é a formulação da métrica de Schwarzschild demonstrada em 1924 pelo astrofísico britânico Arthur S. Eddington [15], e que iremos encontrar a partir do método de Kerr-Schild.

3.2.2 Testes clássicos

Por meio da Solução de Schwarzschild podemos compreender melhor algumas questões observacionais importantes que não encontramos respostas com a teoria da gravitação newtoniana. Esses testes clássicos incluem o Avanço do Periélio de Mércurio, o Redshift Gravitacional e a Deflexão da Luz. Nesta seção, apresentaremos os cálculos

elementares de alguns testes experimentais da teoria da relatividade geral, iremos tratar do Periélio de Mercúrio e o desvio da luz por uma fonte de campo gravitacional.

3.2.2.1 O avanço no periélio de Mercúrio

Se tomarmos a gravitação newtoniana, Mercúrio, assim como todos os outros planetas, deveria ter uma trajetória elíptica fechada em torno do Sol. No entanto, do ponto de vista observacional, o que se verifica é que o seu periélio (o ponto da órbita do planeta em que está mais próximo do Sol) tem uma pequena variação.

Para estudar o avanço no periélio de Mercúrio, vamos considerar uma partícula se movendo livremente em um espaço-tempo curvo descrito pela métrica de Schwarzschild. O movimento de uma partícula em um campo gravitacional é descrito pela equação geodésica:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 . \quad (3.28)$$

O que temos que fazer aqui é abrir a equação da geodésica com os símbolos de Christoffel. Para a geometria de Schwarzschild, os símbolos de Christoffel são dados na Eq. (3.10). Assim, os componentes da equação geodésica são dados por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} + v' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} &= 0 \\ \frac{dt}{ds} &= k e^{-v} , \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} v' e^{(v-\lambda)} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 - r \text{sen}^2(\theta) e^{-\lambda} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 , \quad (3.30)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 , \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} - 2 \cot(\theta) \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} &= 0 \\ \frac{d\phi}{ds} &= \frac{h}{r^2} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como queremos encontrar uma equação de trajetória na métrica de Schwarzschild, assumimos que o movimento está confinado em um plano ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Dividindo todo o elemento de linha por ds^2 , temos:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1. \quad (3.33)$$

onde fazemos uso de unidades naturais ($G = c = 1$) e $m = GM/c^2$. Substituindo os resultados encontrados anteriormente;

$$\frac{dt}{ds} = ke^{-v}, \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{r^2}. \quad (3.34)$$

e fazendo;

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}. \quad (3.35)$$

o elemento de linha assume a forma

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) k^2 e^{-2v} - \frac{h^2}{r^4} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \left(\frac{h}{r}\right)^2 = 1. \quad (3.36)$$

Sabendo que

$$e^{-2v} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2}.$$

substituindo em (3.36), e reorganizando os termos, temos que:

$$\left(\frac{d}{d\phi} \frac{1}{r}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{k^2}{h^2}. \quad (3.37)$$

fazendo uma substituição $u = \frac{1}{r}$,

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = (2mu - 1) \left(\frac{1}{h^2} + u^2\right) + \frac{k^2}{h^2}. \quad (3.38)$$

e derivando a equação em ϕ , temos:

$$2 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) = 2u \frac{d}{d\phi} (2mu - 1) + \left(\frac{1}{h^2} + u^2 \right) 2m \frac{du}{d\phi} . \quad (3.39)$$

eliminando termos em comum e reorganizando os termos, chegamos na equação de trajetória:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{h^2} . \quad (3.40)$$

Quando comparamos esse resultado com a equação orbital prevista pela gravitação newtoniana;

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} . \quad (3.41)$$

vemos que essas equações diferem apenas pelo termo $3mu^2$, que representa a correção relativística do movimento. Para o caso de um planeta se movendo no campo de Schwarzschild do Sol, a correção relativística é extremamente pequena.

Uma vez que $3mu^2$ é tão pequeno em comparação com os outros termos, para resolvermos a Eq. (3.40), será suficiente usar um método de aproximação para a solução geral a partir da forma,

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots$$

A solução para $u^{(0)}$ será basicamente a solução newtoniana

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = \frac{m}{h^2} , \quad (3.42)$$

com solução:

$$u^{(0)} = \frac{m}{h^2} [1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)] . \quad (3.43)$$

Este resultado apresenta uma equação polar que é característica de uma seção cônica, onde o parâmetro ϵ corresponde à sua excentricidade. Caso $0 < \epsilon < 1$, a seção cônica assume a forma de uma elipse, na qual o ponto de aproximação máxima em relação à origem é denominado periélio.

A solução de ordem 1, $u^{(1)}$, será dada em função de $u^{(0)}$:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3m(u^{(0)})^2, \quad (3.44)$$

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3m \left\{ \frac{m}{h^2} [1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)] \right\}^2, \quad (3.45)$$

abrindo o termo do lado direito e desconsiderando excentricidades de segunda ordem, ϵ^2 , uma vez que a excentricidade de planetas é muito pequena, chegamos em;

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{h^4} \epsilon \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3m^3}{h^4}, \quad (3.46)$$

derivando este resultado, temos;

$$u^{(1)} = \frac{3m^3}{h^4} \phi \epsilon \sin(\phi). \quad (3.47)$$

Assim, a solução total, $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, fica:

$$u = \frac{m}{h^2} \left(1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3m^2}{h^2} \phi \epsilon \sin(\phi) \right), \quad (3.48)$$

que pode ser escrito numa forma aproximada fazendo $\frac{3m^2}{h^2} \phi = \Delta\phi \ll 1$, e considerando $\phi_0 = 0$ (a posição inicial do periélio)

$$u = \frac{m}{h^2} [1 + \epsilon \cos(\phi - \Delta\phi)]. \quad (3.49)$$

Que nada mais é do que a solução prevista pela gravitação newtoniana, com um acréscimo do termo $\Delta\phi$ que representa o avanço do periélio.

Assim, podemos calcular o termo $\Delta\phi$.

$$\Delta\phi = \frac{3m^2}{h^2}\phi .$$

Sabendo que a excentricidade ϵ é dada por;

$$\epsilon = \frac{h^2}{r_0 m} - 1 ,$$

logo

$$h^2 = (\epsilon + 1)r_0 m ,$$

e que;

$$m = \frac{MG}{c^2} , \quad \phi = 2\pi .$$

Assim:

$$\Delta\phi = \frac{3m^2}{(\epsilon + 1)r_0 m} 2\pi ,$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi MG}{(\epsilon + 1)r_0 c^2} .$$

O $\Delta\phi$ representa o avanço do periélio orbital, no qual planetas em órbita seguem uma trajetória elíptica, mas com o eixo de rotação se deslocando em uma quantidade de $2\pi \frac{3m^2}{h^2}$ a cada passagem pelo ponto de maior proximidade com o Sol. Em particular, o planeta Mercúrio tem o menor período orbital, resultando em um momento angular h bastante pequeno e, conseqüentemente, possibilitando a observação precisa da precessão de seu periélio. Para o caso de Mercúrio, $\Delta\phi$ equivale a aproximadamente 42,98 segundos de arco por século.

3.2.2.2 Deflexão da Luz

O próximo teste clássico que iremos analisar consiste no estudo da propagação de raios de luz na métrica de Schwarzschild. Essa situação difere do caso anterior apenas no fato de que a luz segue geodésicas nulas, ou seja, $ds = 0$, que implica em:

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) = 0 . \quad (3.50)$$

Todas as constantes de movimento que definimos anteriormente se mantêm, ou, seja todos os resultados obtidos anteriormente são válidos para este caso. Assim, o processo de obtenção da equação diferencial é o mesmo, logo, chegamos na seguinte equação de trajetória de um feixe de luz:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 . \quad (3.51)$$

Novamente vamos utilizar o mesmo método aproximativo que utilizamos no caso do periélio de Mercúrio para encontrar a solução dessa equação.

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots$$

Portanto, a equação de ordem zero, $u^{(0)}$ será;

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = 0 , \quad (3.52)$$

com solução:

$$u^{(0)} = \frac{1}{R} \sin(\phi) . \quad (3.53)$$

onde R representa a distância do feixe de luz no ponto de maior proximidade com a fonte gravitacional.

A solução de ordem 1, $u^{(1)}$, será dada em função de $u^{(0)}$

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3m \left(\frac{1}{R} \text{sen}(\phi) \right)^2, \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{3m}{R^2} (1 - \cos^2(\phi)) = \frac{3m}{2R^2} (1 - \cos(2\phi)), \quad (3.55)$$

cuja solução é:

$$u^{(1)} = \frac{3m}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right), \quad (3.56)$$

De forma que a solução geral, $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, é dada por:

$$u = \frac{1}{R} \text{sen}(\phi) + \frac{3m}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right). \quad (3.57)$$

A equação 3.57 mostra que um raio de luz, passando na vizinhança de uma fonte de campo gravitacional, sofrerá uma deflexão na sua trajetória original. Considerando o limite em que $r \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 0$) para valores do ângulo ϕ muito pequenos, temos que o desvio no angulo de incidência é:

$$\frac{1}{R} \phi + \frac{3m}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 0, \quad (3.58)$$

$$\phi \approx \frac{2m}{R}, \quad (3.59)$$

e, por tanto, o desvio total na trajetória será dado por $\delta \approx 2\phi$, logo:

$$\delta \approx \frac{4m}{R}. \quad (3.60)$$

A Eq. (3.60) nos dá o desvio de um feixe de luz que passa próximo a uma fonte de campo gravitacional (lembrando que $m = \frac{GM}{c^2}$). Esse valor foi medido experimentalmente pela primeira vez em 1919 nas famosas expedições lideradas por Arthur Eddington em Sobral, no Ceará, e na Ilha do Príncipe, no continente africano. Atualmente estes dados podem ser obtidos com maior precisão e mostram um desvio de aproximadamente $(1,76 \pm 0,02)''$. Substituindo os valores para o resultado encontrado acima, a previsão da teoria de Einstein é de aproximadamente $1,75''$.

3.2.3 A Solução de Kerr

A Solução de Kerr foi a terceira solução exata (do tipo buraco negro) encontrada, e é uma das soluções mais importantes das equações de campo de Einstein. Esta solução foi encontrada pelo matemático neozelandês Roy Kerr, em 1963, e também descreve a geometria exterior a um buraco negro. Mas, agora, inserimos rotação ao nosso objeto, ou seja, é uma solução exata para uma distribuição de massa que possui momento angular, sem carga (ou seja, uma solução de vácuo), em que sua simetria não é mais esférica, mas sim axial. Os cálculos para a solução serão apresentados no último capítulo deste trabalho.

A solução de Kerr é dada, em coordenadas de Boyer-Lindquist, por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2}\right)c^2dt^2 - \frac{4aGMr \sin^2(\theta)}{c^3\rho^2}c dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + \frac{a^2 2a^2Mr \sin^2(\theta)}{c^2 c^4\rho^2}\right) \sin^2(\theta)d\phi^2 \quad (3.61)$$

onde:

$$\rho^2 = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2(\theta)$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

na qual, a é o parâmetro que descreve a velocidade relativa da rotação, é o spin do buraco negro e que está relacionado ao momento angular J como:

$$a = \frac{J}{M}$$

Quando $a = 0$, ou seja, quando retiramos a rotação, temos que $\rho^2 = r^2$ e a métrica de Kerr retorna à métrica de Schwarzschild. Espera-se que, buracos negros de Kerr sejam produtos de colapso gravitacional de estrelas, uma vez que, no geral, objetos que sofrem colapso gravitacional possuem uma quantidade considerável de momento angular. Por conservação do momento angular, o produto do colapso também deverá possuir, naturalmente, momento angular. Uma característica do buraco negro de Kerr, provocada pela rotação, é o surgimento de uma região conhecida como ergosfera; uma região de formato elipsoidal e externa ao horizonte de eventos, onde o buraco negro exibe o efeito de arrasto de referenciais (frame-dragging em inglês, ou ainda efeito Lense-Thirring), onde o campo gravitacional rotaciona junto com ele, arrastando o espaço-tempo. Dentro dessa região não existe o repouso, ou seja, qualquer partícula que caia nela, mesmo sem momento angular orbital, irá se mover com o espaço-tempo.

4 CONGRUÊNCIAS NULAS E O TEOREMA DE GOLDBERG-SACHS

Estamos agora em condições de preparar o terreno para elaborar o método de Kerr-Schild. Para tal, nesta seção introduzimos três ingredientes importantes: a classificação de Petrov, a cinemática de congruências nulas e o teorema de Goldberg-Sachs. Na próxima seção utilizaremos todos estes ingredientes na nossa elaboração.

4.1 Classificação de Petrov

A classificação de Petrov consiste em um sistema de técnicas algébricas capaz de classificar o tensor de Weyl em diferentes tipos, através de um problema de auto-valor/auto-bivetor. Tal técnica foi inicialmente proposta por A.Z. Petrov e posteriormente desenvolvida por autores como Geheniau, F. Pirani, Debever, Bel, R. Penrose e outros. A classificação é, na verdade, um resultado da matemática pura que se aplica a qualquer variedade pseudo-Riemanniana quadri-dimensional, ou seja, existe independentemente do significado físico. No entanto, tal classificação facilita consideravelmente a obtenção de soluções exatas das equações de Einstein além de elucidar uma série de outras questões de interesse físico. Dentre estas, mencionamos a caracterização de configurações radiativas, os teoremas de Goldberg-Sachs, Peeling, o formalismo quasi-Maxwelliano e outras.

O ponto de partida para a classificação é o problema de auto-valor/auto-bivetor relacionado ao tensor de Weyl em um dado ponto da variedade

$$\frac{1}{2}W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} = \lambda X^{\mu\nu} , \quad (4.1)$$

onde o fator $1/2$ é introduzido para evitar a soma de termos repetidos, uma vez que um bi-vetor também satisfaz a relação de antissimetria

$$X^{\alpha\beta} = -X^{\beta\alpha} . \quad (4.2)$$

Através de uma notação matricial engenhosa, Petrov mostra que o polinômio característico associado ao problema deve ter a forma:

$$\lambda^6 - \lambda^5\sigma_1 + \lambda^4\sigma_2 - \lambda^3\sigma_3 + \lambda^2\sigma_4 - \lambda\sigma_5 + \sigma_6 = 0 , \quad (4.3)$$

onde σ_i , com $i = 1, \dots, 6$, são invariantes construídos com o tensor de Weyl. Em princípio, deveríamos calcular explicitamente todos os invariantes (polinômios simétrico-elementares) e posteriormente analisar o comportamento das raízes da equação para obter o espectro de auto-valores. No entanto, Petrov utiliza um método alternativo para estudar tal equação. Em particular, ele mostra que ela também pode ser obtida através do seguinte determinante em blocos:

$$\det \begin{pmatrix} P_{ij} & 0 \\ 0 & -\bar{P}_{ij} \end{pmatrix} = -\det(P_{ij})\det(\bar{P}_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

com

$$P_{ij} \equiv E_{ij} + iB_{ij} + \lambda\delta_{ij} .$$

Aqui, o símbolo i denota a unidade imaginária e $\bar{P}_{ij}(\lambda)$ o complexo conjugado do tensor. Portanto, vemos que parte do problema, eq. (4.1), reduz-se ao estudo dos auto-valores de uma única matriz 3×3 simétrica, complexa e sem traço, dada por:

$$Q_{ij} \equiv E_{ij} + iB_{ij} , \quad Q_{ij} = Q_{ji} , \quad Q^i_i = 0 . \quad (4.5)$$

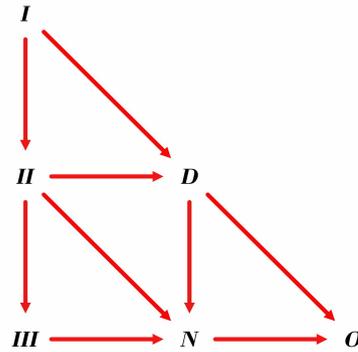
Nesta expressão, os objetos E_{ij} e B_{ij} denotam, respectivamente, as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl. Tais objetos também são simétricos e sem traço, tal como descritas na Seção (2.6).

Os distintos tipos estudados por Petrov são caracterizados pelos divisores elementares da matriz Q_{ij} , bem como a multiplicidade dos autovalores λ . Nós não iremos realizar tal dedução aqui, para isso indicamos consultar a referência [8] . Para os objetivos deste trabalho, enunciamos, de forma resumida, os seguintes tipos:

- Petrov tipo *I*: $(\mathbf{Q} - \lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda_3\mathbf{I}) = 0$,
- Petrov tipo *II*: $(\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{I})(\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = 0$,
- Petrov tipo *D*: $(\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = 0$,
- Petrov tipo *III*: $\mathbf{Q}^3 = 0$,
- Petrov tipo *N*: $\mathbf{Q}^2 = 0$,
- Petrov tipo *O*: $\mathbf{Q} = 0$.

Campos gravitacionais do tipo I (modelos realistas) são ditos algebricamente gerais enquanto todos os tipos *II*, *D* (objetos massivos com alguma simetria), *III*, *N* (ondas gravitacionais) e *O* (cosmologia de Friedmann) são ditos algebricamente especiais. Um tipo Petrov pode degenerar em outro tipo e essas possíveis transições são mostradas na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Diagrama de Penrose mostrando as possíveis degenerações do tipo Petrov.



Fonte: autor.

Pode-se mostrar que cada tipo acima está associado a um certo conjunto de vetores nulos, conhecidos como direções principais nulas (PNDs). A condição para que um vetor nulo seja uma PND é dada pela relação

$$k_{[\lambda} W_{\alpha]\beta\mu[\nu} k_{\rho]} k^{\alpha} k^{\nu} = 0 . \quad (4.6)$$

No caso algebricamente geral temos um total de quatro PNDs linearmente independentes. Já nos casos algebricamente especiais alguns destes PNDs podem coincidir, gerando uma certa degenerescência na distribuição dos vetores. Neste caso, a equação acima é simplificada para

$$k_{[\lambda} W_{\alpha]\beta\mu\nu} k^{\beta} k^{\nu} = 0 . \quad (4.7)$$

4.2 Congruências Geodésicas Nulas

Uma congruência é um família de curvas em uma região aberta do espaço-tempo, de modo que cada ponto nessa região esteja contido em uma única curva deste conjunto. Logo, congruências geodésicas são famílias de trajetórias que seguem as geodésicas do espaço-tempo, ou seja, caminhos que minimizam a distância entre dois pontos. Em geral, nos casos de interesse para a TRG, estes caminhos são do tipo-tempo ou nulos.

Nosso interesse nesta seção é estudar as congruências geodésicas nulas. No entanto, encontramos um problema quando estudamos a evolução de vetores em superfícies tridimensionais normais ao campo de vetores tangentes, pois o vetor tangente de uma curva nula é normal a si mesmo, isto é

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0 \quad \text{para } k^\mu \neq 0 . \quad (4.8)$$

Assim, para o caso de geodésicas nulas, podemos optar por estudar a evolução dos vetores em um subespaço bidimensional de vetores normais ao campo vetorial tangente de geodésicas nulas, sendo que a condição de ser geodésica é dada pela equação [11]

$$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0 , \quad (4.9)$$

Desse modo, vamos adotar um novo vetor nulo auxiliar l^μ que aponte na direção espacialmente oposta a k^μ , de modo que ele seja normalizado e transportado paralelamente da seguinte maneira [11]:

$$l^\mu l_\mu = 0 , \quad l^\mu k_\mu = +1 , \quad (4.10)$$

$$k^\mu \nabla_\mu l^\nu = 0 . \quad (4.11)$$

O espaço bidimensional, denotado por T_\perp , de vetores normais, consiste nos vetores V^μ que são simultaneamente ortogonais à k^μ e l^μ :

$$T_\perp = \{V^\mu \mid g_{\mu\nu}V^\mu k^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}V^\mu l^\nu = 0\} . \quad (4.12)$$

o tensor de projeção no subespaço T_\perp , denotado por $h_{\mu\nu}$, será dado por:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - k_\mu l_\nu - k_\nu l_\mu ,$$

de modo que fará o papel de métrica quando atuar nos vetores V^μ , W^μ em T_\perp e será nulo quando atuar em vetores proporcionais a k^μ ou l^μ . O tensor de projeção carrega algumas propriedades algébricas e diferenciais bem úteis, que incluem:

- $h_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$;
- $h^\mu{}_\nu V^\nu = V^\mu$;
- $h^\mu{}_\nu k^\nu = 0$;
- $h^\mu{}_\nu l^\nu = 0$;
- $h^\mu{}_\sigma h^\sigma{}_\nu = h^\mu{}_\nu$;
- $k^\mu \nabla_\mu h^\alpha{}_\beta = 0$;

O tensor que mede a falha de V^α ao sofrer um transporte paralelo ao longo de k^α é $B^\mu{}_\nu = \nabla_\nu k^\mu$. Porém, no caso em que estamos estudando (geodésicas nulas) é suficiente acompanhar a evolução das informações contidas na parte projetada, e não todo o tensor $B_{\mu\nu}$.

$$\hat{B}^\mu{}_\nu = h^\mu{}_\alpha h^\beta{}_\nu B^\alpha{}_\beta . \quad (4.13)$$

A fim de entender melhor essa evolução, decomparamos o tensor como:

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\theta H_{\mu\alpha} + \hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu} , \quad (4.14)$$

onde θ é o tensor de expansão (expansion), $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ é o tensor de cisalhamento (shear) e $\hat{\omega}_{\mu\nu}$ é o tensor de rotação (vorticity)

$$\begin{aligned} \theta &= h^{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu} = \hat{B}^\mu{}_\mu ; \\ \hat{\sigma}_{\mu\nu} &= \hat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\theta h_{\mu\nu} ; \\ \hat{\omega}_{\mu\nu} &= \hat{B}_{[\mu\nu]} . \end{aligned}$$

Assim, pode-se mostrar que a evolução de $\hat{B}_{\mu\nu}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{B}_{\mu\nu}}{d\lambda} &\equiv k^\sigma \nabla_\sigma \hat{B}_{\mu\nu} \\ &= k^\sigma \nabla_\sigma \left(h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha k_\beta \right) \\ &= h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu k^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\alpha k_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \left(B_\alpha^\sigma B_{\beta\sigma} + R_{\alpha\lambda\beta\sigma} k^\lambda k^\sigma \right) \\
&= -\hat{B}_\mu^\sigma \hat{B}_{\nu\sigma} - h^\alpha_\mu h^\beta_\nu R_{\alpha\lambda\beta\sigma} k^\lambda k^\sigma .
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, para encontrar a equação de evolução para a expansão de geodésicas nulas, tiramos o traço da Eq. (4.15), assim:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\omega}^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu , \tag{4.16}$$

pelo fato de k^μ ser nulo, a equação de Einstein contraída se reduz a [11]:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu &= \left(\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) k^\mu k^\nu ; \\
R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De modo que, para que o termo envolvendo $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$ seja negativo na Eq. (4.16), deve se cumprir a condição de energia nula, que estabelece que para qualquer vetor nulo k^a , $T_{ab}k^a k^b \geq 0$.

4.3 Teorema de Goldberg-Sachs

O teorema de Goldberg-Sachs é um resultado muito útil que relaciona as propriedades algébricas e geométricas do espaço-tempo no contexto da relatividade geral. Ele afirma que, se um espaço-tempo é estacionário e axissimétrico, também deve ser algebricamente especial, o que significa que pertence a uma classe específica de soluções das equações de campo de Einstein. O trabalho original apresenta a prova em dois teoremas [8]:

Teorema 4.3.1. *Se um campo gravitacional contém uma congruência geodésica nula sem cisalhamento (shear-free) \mathbf{k} ($k = 0 = \sigma$), e*

$$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = R_{\mu\nu}k^\mu m^\nu = R_{\mu\nu}m^\mu m^\nu = 0 , \tag{4.18}$$

onde m^μ é um vetor nulo complexo. Então o campo é algebricamente especial, e \mathbf{k} é uma autodireção degenerada.

$$W_{\mu\nu\alpha[\beta}k_{\lambda]}k^\nu k^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_0 = 0 = \Psi_1 \quad (4.19)$$

Teorema 4.3.2. *Se uma métrica de vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$) é algebricamente especial, então o vetor nulo principal múltiplo é tangente a uma congruência geodésica nula shear-free.*

O teorema final de Goldberg-Sachs é a combinação desses dois teoremas, e define que “a métrica de vácuo contém uma congruência geodésica nula e shear-free se e somente se o tensor de Weyl for algebricamente especial”, isto é:

$$k = 0 = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_0 = 0 = \Psi_1 \quad (4.20)$$

Em termos mais técnicos, o teorema de Goldberg-Sachs afirma que se um espaço-tempo tem dois vetores de Killing semelhantes e também é Petrov tipo D, então ele deve ser um membro da família Kerr de soluções, que descreve buracos negros em rotação no vácuo.

5 O MÉTODO DE KERR-SCHILD

A formulação de Kerr-Schild é uma sistematização do método utilizado para a obtenção da solução de Kerr de 1963, e foi publicada em 1965 por Kerr juntamente com o físico Alfred Schild. Esta formulação consiste em soluções das equações de Einstein que são capazes de descrever todos os buracos negros clássicos, além de outras soluções de interesse físico.

O método de Kerr-Schild é uma deformação do espaço-tempo de Minkowski, de modo que a métrica pseudo-riemanniana é dada pela transformação:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_{\mu}l_{\nu} , \quad (5.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski em qualquer sistema de coordenadas e a deformação da geometria é causada por uma função escalar H e pelo campo vetorial nulo l^{μ} . Tal vetor é definido de tal forma que vale, em todos os pontos do espaço-tempo, a relação algébrica:

$$g_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = l_{\mu}l^{\mu} = 0 . \quad (5.2)$$

Similarmente, combinando as Eqs. (5.1) e (5.2), obtemos:

$$\hat{g}_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = (g_{\mu\nu} + 2Hl_{\mu}l_{\nu})l^{\mu}l^{\nu} = 0 , \quad (5.3)$$

que nos mostra que o vetor l^{μ} é nulo com relação a ambas as métricas. Ademais, um cálculo direto permite mostrar que a inversa de $\hat{g}_{\mu\nu}$ é dada por um tensor contravariante $\hat{g}^{\mu\nu}$, tal que:

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - 2Hl^{\mu}l^{\nu} . \quad (5.4)$$

De fato, multiplicando matricialmente tais objetos e utilizando a Eq. (5.2), obtemos:

$$\hat{g}_{\mu\alpha}\hat{g}^{\alpha\nu} = (g_{\mu\alpha} + 2Hl_{\mu}l_{\alpha})(g^{\alpha\nu} - 2Hl^{\alpha}l^{\nu}) = \delta^{\nu}_{\mu} .$$

Uma das grandes vantagens do método de Kerr-Schild reside na relação simples entre as métricas covariantes e contravariantes. De fato, tal relação permitirá uma série de simplificações nos cálculos dos símbolos de Christoffel bem como do tensor de Riemann.

No que se segue, lidaremos com dois tipos de conexões compatíveis com as respectivas métricas. Tais conexões são definidas em termos dos tensores $g_{\mu\nu}$ e $\hat{g}_{\mu\nu}$ das formas usuais, isto é:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) , \quad (5.5)$$

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}(\hat{g}_{\beta\mu,\nu} + \hat{g}_{\nu\beta,\mu} - \hat{g}_{\mu\nu,\beta}) . \quad (5.6)$$

Tais conexões induzem dois tipos de derivações covariantes no espaço-tempo. Definindo “;” como a derivação covariante com relação à $g_{\mu\nu}$ e “||” como a derivação covariante com relação à $\hat{g}_{\mu\nu}$, temos:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad \hat{g}_{\mu\nu||\alpha} = 0 . \quad (5.7)$$

É bem conhecido o fato de que a subtração de duas conexões define um novo tensor [13] no espaço-tempo. Um cálculo simples permite mostrar que tal tensor é dado, no nosso caso, por:

$$C^\alpha_{\mu\nu} \equiv \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}(\hat{g}_{\beta\mu;\nu} + \hat{g}_{\nu\beta;\mu} - \hat{g}_{\mu\nu;\beta}) . \quad (5.8)$$

Nós utilizaremos tal tensor nos cálculos do tensor de curvatura e objetos associados, no que se segue. Veremos que tais cálculos simplificam-se drasticamente quando utilizamos a relação diferencial:

$$l_{\mu;\nu}l^\mu = 0 ,$$

que é consequência direta da Eq. (5.2). No entanto, antes de realizarmos tais cálculos, é conveniente inspecionarmos o comportamento do determinante de $\hat{g}_{\mu\nu}$.

5.1 O determinante de $\hat{g}_{\mu\nu}$

Em um dado ponto do espaço-tempo, podemos sempre escolher um sistema de coordenadas locais em torno do ponto, tal que

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) , \quad l^\mu = (l^0, 0, 0, l^3) . \quad (5.9)$$

Em outras palavras, podemos escolher o sistema de coordenadas de forma que o vetor nulo tenha apenas componentes l^0 e l^3 . De acordo com a Eq. (5.2) tais componentes devem satisfazer o vínculo

$$(l^0)^2 - (l^3)^2 = 0 . \quad (5.10)$$

Agora, utilizando a Eq. (5.1) temos que, na forma matricial, segue:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2H \begin{pmatrix} (l^0)^2 & 0 & 0 & -l^0 l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l^0 l^3 & 0 & 0 & (l^3)^2 \end{pmatrix} .$$

Portanto, a métrica de Kerr-Schild possui, no ponto em questão, a forma simples:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2H(l^0)^2 & 0 & 0 & -2Hl^0 l^3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2Hl^0 l^3 & 0 & 0 & -1 + 2H(l^3)^2 \end{pmatrix} .$$

Tomando o determinante de $\hat{g}_{\mu\nu}$, temos:

$$\det(\hat{g}_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} 1 + 2H(l^0)^2 & 0 & 0 & -2Hl^0 l^3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2Hl^0 l^3 & 0 & 0 & -1 + 2H(l^3)^2 \end{vmatrix} .$$

Aplicando o teorema de Laplace, tomando a segunda coluna, segue:

$$\det(\hat{g}_{\mu\nu}) = (-1)^{1+1} \hat{g}_{11} \begin{vmatrix} 1 + 2H(l^0)^2 & 0 & -2Hl^0 l^3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2Hl^0 l^3 & 0 & -1 + 2H(l^3)^2 \end{vmatrix} .$$

Um cálculo direto, então, nos dá:

$$\begin{aligned} \det(\hat{g}_{\mu\nu}) &= - \left[-(1 + 2H(l^0)^2)(-1 + 2H(l^3)^2) - (2Hl^0l^3)(-2Hl^0l^3) \right] \\ &= -1 \left[1 - 2H(l^3)^2 + 2H(l^0)^2 - \cancel{4H^2(l^0)^2(l^3)^2} + \cancel{4H^2(l^0)^2(l^3)^2} \right] . \end{aligned}$$

Finalmente, colocando $2H$ em evidência, obtemos:

$$\det(\hat{g}_{\mu\nu}) = (-1) * [1 - 2H(\cancel{(l^0)^2} - \cancel{(l^3)^2})] = -1 ,$$

uma vez que vale a relação $((l^0)^2 - (l^3)^2) = 0$. Portanto, podemos observar que

$$\det(\hat{g}_{\mu\nu}) = \det(g_{\mu\nu}) . \quad (5.11)$$

Pode-se mostrar que a relação acima permanece válida para qualquer escolha do sistema de coordenadas. Em outras palavras, conclui-se que a transformação de Kerr-Schild, dada pela Eq. (5.1), é uma transformação que preserva volumes. Embora a curvatura da nova métrica seja, em geral, diferente de zero, os elementos infinitesimais de volume são preservados.

5.2 Propriedades básicas do tensor de Riemann

Estamos agora em condições de estudar o comportamento do tensor de Riemann frente à transformação de Kerr-Schild, Eq. (5.1). Lembrando da definição do tensor $C^\alpha_{\mu\nu}$, dado pela Eq. (5.8), podemos escrever a seguinte relação envolvendo os respectivos tensores de curvatura

$$\hat{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} - R^\alpha_{\beta\mu\nu} = C^\alpha_{\beta\mu;\nu} - C^\alpha_{\beta\nu;\mu} + C^\alpha_{\epsilon\nu} C^\epsilon_{\beta\mu} - C^\alpha_{\epsilon\mu} C^\epsilon_{\beta\nu} . \quad (5.12)$$

Note-se que as derivadas covariantes acima devem ser tomadas com relação à métrica de Minkowski. Ademais, como esta última é plana, seu tensor de Riemann deve se anular identicamente, de forma que a curvatura de Kerr-Schild reduz-se à forma

$$\hat{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = C^\alpha_{\beta\mu;\nu} - C^\alpha_{\beta\nu;\mu} + C^\alpha_{\epsilon\nu} C^\epsilon_{\beta\mu} - C^\alpha_{\epsilon\mu} C^\epsilon_{\beta\nu} . \quad (5.13)$$

De forma análoga, o tensor de Ricci correspondente é dado por

$$\hat{R}_{\beta\nu} = \hat{R}^{\alpha}_{\beta\alpha\nu} = C^{\alpha}_{\beta\alpha;\nu} - C^{\alpha}_{\beta\nu;\alpha} + C^{\alpha}_{\epsilon\nu} C^{\epsilon}_{\beta\alpha} - C^{\alpha}_{\epsilon\alpha} C^{\epsilon}_{\beta\nu} , \quad (5.14)$$

de onde também podemos obter facilmente o escalar de curvatura correspondente à métrica de Kerr-Schild. Estamos interessados em encontrar condições sob a função H e o vetor nulo l^{μ} , de tal forma que a métrica de Kerr-Schild satisfaça as equações de Einstein no vazio, isto é, devemos impor que:

$$\hat{R}_{\beta\nu} = 0 . \quad (5.15)$$

Veremos após uma sequência simples de passos que, graças às equações acima, o vetor nulo l^{μ} deve ser necessariamente um vetor geodésico e shear-free.

Passo 1: O primeiro passo consiste em obter o tensor $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ em termos de H e l^{μ} e suas derivadas. Recordando a definição Eq. (5.8), temos:

$$C^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} (\hat{g}_{\beta\mu;\nu} + \hat{g}_{\nu\beta;\mu} - \hat{g}_{\mu\nu;\beta}) . \quad (5.16)$$

Utilizando o ansatz de Kerr-Schild, dado pela Eq. (5.1), nos termos entre parênteses, fica:

$$\hat{g}_{\beta\mu;\nu} = 2(Hl_{\beta}l_{\mu})_{;\nu} = 2(H_{;\nu}l_{\beta}l_{\mu} + Hl_{\beta;\nu}l_{\mu} + Hl_{\beta}l_{\mu;\nu}) ; \quad (5.17)$$

$$\hat{g}_{\nu\beta;\mu} = 2(Hl_{\nu}l_{\beta})_{;\mu} = 2(H_{;\mu}l_{\nu}l_{\beta} + Hl_{\nu;\mu}l_{\beta} + Hl_{\nu}l_{\beta;\mu}) ; \quad (5.18)$$

$$\hat{g}_{\mu\nu;\beta} = 2(Hl_{\mu}l_{\nu})_{;\beta} = 2(H_{;\beta}l_{\mu}l_{\nu} + Hl_{\mu;\beta}l_{\nu} + Hl_{\mu}l_{\nu;\beta}) , \quad (5.19)$$

uma vez que vale a condição de compatibilidade $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$. Multiplicando o primeiro termo pela métrica contravariante Eq. (5.4), obtemos:

$$\hat{g}^{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\mu;\nu} = 2(g^{\alpha\beta} - 2Hl^{\alpha}l^{\beta})(H_{;\nu}l_{\beta}l_{\mu} + Hl_{\beta;\nu}l_{\mu} + Hl_{\beta}l_{\mu;\nu}) \quad (5.20)$$

$$= 2(H_{;\nu}l^{\alpha}l_{\mu} + Hl^{\alpha}_{;\nu}l_{\mu} + Hl^{\alpha}l_{\mu;\nu}) , \quad (5.21)$$

uma vez que $l^{\beta}l_{\beta} = 0$ e $l_{\beta;\nu}l^{\beta} = 0$. Similarmente, multiplicando o segundo termo, temos:

$$\hat{g}^{\alpha\beta}\hat{g}_{\nu\beta;\mu} = 2(g^{\alpha\beta} - 2Hl^\alpha l^\beta)(H_{;\mu}l_\nu l_\beta + Hl_{\nu;\mu}l_\beta + Hl_\nu l_{\beta;\mu}) \quad (5.22)$$

$$= 2(H_{;\mu}l_\nu l^\alpha + Hl_{\nu;\mu}l^\alpha + Hl_\nu l^\alpha_{;\mu}) . \quad (5.23)$$

Agora, multiplicando o terceiro termo, resulta em:

$$\hat{g}^{\alpha\beta}\hat{g}_{\mu\nu;\beta} = 2(g^{\alpha\beta} - 2Hl^\alpha l^\beta)(H_{;\beta}l_\mu l_\nu + Hl_{\mu;\beta}l_\nu + Hl_\mu l_{\nu;\beta}) \quad (5.24)$$

$$= 2(H^{;\alpha}l_\mu l_\nu + Hl_\mu^{;\alpha}l_\nu + Hl_\mu l_\nu^{;\alpha}) \quad (5.25)$$

$$- 4Hl^\alpha(\dot{H}l_\mu l_\nu + H\dot{l}_\mu l_\nu + Hl_\mu \dot{l}_\nu) , \quad (5.26)$$

onde definimos, por conveniência, as seguintes derivadas projetadas ao longo do vetor l^μ

$$\dot{H} \equiv H_{;\alpha}l^\alpha , \quad \dot{l}_{\mu;\alpha}l^\alpha . \quad (5.27)$$

Finalmente, reagrupando os termos de forma adequada, segue a relação

$$\begin{aligned} C^\alpha{}_{\mu\nu} &= l^\alpha[H_{;(\mu}l_{\nu)} + Hl_{(\mu;\nu)} + 2H\dot{H}l_\mu l_\nu + 2H^2\dot{l}_{(\mu}l_{\nu)}] \\ &+ Hl_\mu l^\alpha_{;\nu]} + Hl_\nu l^\alpha_{;\mu]} - H^{;\alpha}l_\mu l_\nu , \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde utilizamos as convenções de simetrização e anti-simetrização

$$(\alpha\beta) = \alpha\beta + \beta\alpha , \quad [\alpha\beta] = \alpha\beta - \beta\alpha , \quad (5.29)$$

por questão de simplicidade.

Passo 2: Iremos agora mostrar que o tensor acima não possui traço. Veremos no próximo passo que tal propriedade simplifica drasticamente a expressão do tensor de Ricci. De fato, contraindo α com ν na expressão acima, obtemos sete termos do tipo:

$$l^\alpha H_{;(\mu} l_{\alpha)} = l^\alpha (H_{;\mu} l_\alpha + H_{;\alpha} l_\mu) = \dot{H} l_\mu ; \quad (5.30)$$

$$l^\alpha l_{(\mu;\alpha)} = l^\alpha (l_{\mu;\alpha} + l_{\alpha;\mu}) = \dot{l}_\mu ; \quad (5.31)$$

$$l^\alpha l_\mu l_\alpha = (l^\alpha l_\alpha) l_\mu = 0 ; \quad (5.32)$$

$$l^\alpha \dot{l}_{(\mu} l_{\alpha)} = l^\alpha (\dot{l}_\mu l_\alpha + \dot{l}_\alpha l_\mu) = 0 ; \quad (5.33)$$

$$l_\mu l_{;\alpha}^{[\alpha} = l_\mu (l_{;\alpha}^\alpha - l_\alpha^{;\alpha}) = 0 ; \quad (5.34)$$

$$l_\alpha l_{;\mu}^{[\alpha} = l_\alpha (l_{;\mu}^\alpha - l_\mu^{;\alpha}) = -\dot{l}_\mu ; \quad (5.35)$$

$$H^{;\alpha} l_\mu l_\alpha = \dot{H} l_\mu , \quad (5.36)$$

onde usamos novamente o fato de l^μ ser um vetor nulo e a propriedade de ortogonalidade trivial

$$\dot{l}^\mu l_\mu = l^\mu_{;\nu} l^\nu l_\mu = 0 . \quad (5.37)$$

Agora, comparando tais propriedades com a expressão (5.28) obtemos, após um cálculo direto

$$C^\alpha_{\mu\alpha} = C^\alpha_{\alpha\mu} = 0 , \quad (5.38)$$

uma vez que o tensor em questão é simétrico na troca de índices μ com ν .

Passo 3: O próximo passo consiste em mostrar que o vetor l^μ deve ser, necessariamente, um vetor geodésico. De fato, de acordo com as equações de Einstein Eq. (5.15), segue que a contração abaixo

$$\hat{R}_{\beta\nu} l^\beta l^\nu = 0 , \quad (5.39)$$

é trivialmente satisfeita. Agora, utilizando o fato de que o tensor $C^\alpha_{\mu\nu}$ não possui traço, segue da Eq. (5.14) a expressão simplificada

$$\hat{R}_{\beta\nu} = (-C^\alpha_{\beta\nu;\alpha} + C^\alpha_{\epsilon\nu} C^\epsilon_{\beta\alpha}) l^\beta l^\nu = 0 . \quad (5.40)$$

Iremos separar nossos cálculos em duas etapas complementares. Primeiramente, iremos calcular o termo quadrático. Da expressão (5.28), temos:

$$\begin{aligned}
C^\alpha{}_{\mu\nu}l^\nu &= l^\alpha[H_{;(\mu}l_{\nu)} + Hl_{(\mu;\nu)} + 2H\dot{H}l_\mu l_\nu + 2H^2\dot{l}_{(\mu}l_{\nu)}]l^\nu \\
&+ [Hl_\mu l^\alpha{}_{;\nu]} + Hl_\nu l^\alpha{}_{;\mu]} - H^{;\alpha}l_\mu l_\nu]l^\nu .
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Abrindo os termos devidamente, obtemos as equações

$$\begin{aligned}
[H_{;(\mu}l_{\nu)} + Hl_{(\mu;\nu)} + 2H\dot{H}l_\mu l_\nu + 2H^2\dot{l}_{(\mu}l_{\nu)}]l^\nu &= \dot{H}l_\mu + H\dot{l}_\mu ; \\
[Hl_\mu l^\alpha{}_{;\nu]} + Hl_\nu l^\alpha{}_{;\mu]} - H^{;\alpha}l_\mu l_\nu]l^\nu &= H\dot{l}^\alpha l_\mu .
\end{aligned}$$

Combinando com os cálculos anteriores, temos:

$$C^\alpha{}_{\mu\nu}l^\nu = l^\alpha(\dot{H}l_\mu + H\dot{l}_\mu) + H\dot{l}^\alpha l_\mu . \tag{5.42}$$

Utilizando esta equação e renomeando os índices de forma adequada, segue

$$C^\alpha{}_{\epsilon\nu}C^\epsilon{}_{\beta\alpha}l^\beta l^\nu = [l^\alpha(\dot{H}l_\epsilon + H\dot{l}_\epsilon) + H\dot{l}^\alpha l_\epsilon][l^\epsilon(\dot{H}l_\alpha + H\dot{l}_\alpha) + H\dot{l}^\epsilon l_\alpha] = 0 , \tag{5.43}$$

onde usamos novamente as propriedades algébricas e diferenciais do vetor l^μ . Agora, vamos calcular o outro termo na expressão resultante do tensor de Ricci. Passando l^β para dentro da derivada e usando a regra do produto na Eq. (5.40), segue:

$$-C^\alpha{}_{\beta\mu;\alpha}l^\beta l^\mu = -[(C^\alpha{}_{\beta\mu}l^\beta)_{;\alpha}l^\mu - C^\alpha{}_{\beta\mu}l^\beta{}_{;\alpha}l^\mu] . \tag{5.44}$$

Utilizando a Eq. (5.42), podemos escrever

$$\begin{aligned}
(C^\alpha{}_{\beta\mu}l^\beta)_{;\alpha}l^\mu &= (\dot{H}l^\alpha l_\mu + H\dot{l}^\alpha l_\mu + Hl^\alpha \dot{l}_\mu)_{;\alpha}l^\mu \\
&= (\dot{H}_{;\alpha}l^\alpha l_\mu l^\mu + \dot{H}l^\alpha{}_{;\alpha}l_\mu l^\mu + \dot{H}l^\alpha l_{\mu;\alpha}l^\mu) \\
&+ (H_{;\alpha}\dot{l}^\alpha l_\mu l^\mu + H\dot{l}^\alpha{}_{;\alpha}l_\mu l^\mu + H\dot{l}^\alpha l_{\mu;\alpha}l^\mu) \\
&+ (H_{;\alpha}l^\alpha \dot{l}_\mu l^\mu + Hl^\alpha{}_{;\alpha}\dot{l}_\mu l^\mu + Hl^\alpha \dot{l}_{\mu;\alpha}l^\mu) .
\end{aligned}$$

Novamente, usando as relações algébricas e diferenciais de l^μ , encontramos que:

$$(C^\alpha{}_{\beta\mu}l^\beta)_{;\alpha}l^\mu = Hl^\alpha \dot{l}_{\mu;\alpha}l^\mu .$$

Agora, passando l^μ para dentro da derivada do lado direito, resulta em

$$(C^\alpha_{\beta\mu} l^\beta)_{;\alpha} l^\mu = H l^\alpha [(l_\mu l^\mu)_{;\alpha} - \dot{l}_\mu l^\mu_{;\alpha}] = -H \dot{l}^\mu \dot{l}_\mu .$$

Agora, calcularemos o segundo termo em Eq. (5.44). Utilizando novamente a Eq. (5.42), obtemos a seguinte expressão simples:

$$\begin{aligned} (C^\alpha_{\beta\mu} l^\mu) l^\beta_{;\alpha} &= (\dot{H} l_\beta l^\alpha + H \dot{l}_\beta l^\alpha + H l_\beta \dot{l}^\alpha) l^\beta_{;\alpha} \\ &= H \dot{l}_\beta l^\beta_{;\alpha} l^\alpha \\ &= H \dot{l}_\mu \dot{l}^\mu . \end{aligned}$$

Combinando os últimos resultados na expressão Eq. (5.40), obtem-se, finalmente

$$R_{\beta\mu} l^\beta l^\mu = 2H \dot{l}_\mu \dot{l}^\mu ,$$

de onde obtemos, em conjunto com as equações de Einstein, a condição

$$\dot{l}_\mu \dot{l}^\mu = 0 . \quad (5.45)$$

Uma vez que vale também a relação algébrica

$$\dot{l}_\alpha l^\alpha = 0 , \quad (5.46)$$

que é consequência direta da relação de ortogonalidade, conclui-se que

$$\dot{l}^\alpha = \mu l^\alpha , \quad (5.47)$$

onde μ é uma função de ponto arbitrária. É bem conhecido da geometria diferencial o fato de que tal comportamento só é possível para o vetor \dot{l}^α se e somente se o vetor nulo l^α for geodésico. Podemos, sem perda de generalidade re-escalar o vetor nulo de tal forma que $\mu = 0$. Em outras palavras: o vetor nulo no ansatz de Kerr-Schild deve satisfazer $\dot{l}^\alpha = 0$ para que a métrica seja solução das equações de Einstein. Veremos no próximo capítulo que o mesmo vetor também deve satisfazer outras condições diferenciais adicionais.

5.3 Propriedades adicionais do tensor de Riemann

Nesta seção, estudaremos algumas condições adicionais que o vetor nulo deve satisfazer para que a métrica de Kerr-Schild seja solução das equações de Einstein. De fato, mostraremos aqui que o tensor de Riemann associado deve ser algebricamente especial, no sentido da classificação de Petrov discutida anteriormente. Começamos por escrever o tensor de Riemann na forma Eq. (5.13)

$$\hat{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = C^{\alpha}_{\beta\mu;\nu} - C^{\alpha}_{\beta\nu;\mu} + C^{\alpha}_{\epsilon\nu}C^{\epsilon}_{\beta\mu} - C^{\alpha}_{\epsilon\mu}C^{\epsilon}_{\beta\nu} , \quad (5.48)$$

utilizando os resultados da seção anterior, buscamos pela contração

$$\hat{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu}l^{\beta}l^{\nu} = (C^{\alpha}_{\beta\mu;\nu} - C^{\alpha}_{\beta\nu;\mu} + C^{\alpha}_{\epsilon\nu}C^{\epsilon}_{\beta\mu} - C^{\alpha}_{\epsilon\mu}C^{\epsilon}_{\beta\nu})l^{\beta}l^{\nu} , \quad (5.49)$$

iremos começar inspecionando os comportamentos de todos os termos acima de forma individualizada. Temos então:

Primeiro termo:

$$C^{\alpha}_{\beta\mu;\nu}l^{\beta}l^{\nu} = (C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta}l^{\nu})_{;\nu} - C^{\alpha}_{\beta\mu}(l^{\beta}l^{\nu})_{;\nu} . \quad (5.50)$$

Utilizando a Eq. (5.42) e o fato do vetor ser geodésico, obtemos que:

$$C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta} = \dot{H}l^{\alpha}l_{\mu} , \quad (5.51)$$

desta maneira, temos, para o primeiro termo:

$$\begin{aligned} (C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta}l^{\nu})_{;\nu} &= (\dot{H}l^{\alpha}l_{\mu}l^{\nu})_{;\nu} \\ &= \ddot{H}l^{\alpha}l_{\mu} + \dot{H}l^{\nu}_{;\nu}l^{\alpha}l_{\mu} , \end{aligned}$$

desenvolvendo o outro termo, temos:

$$\begin{aligned}
C^{\alpha}_{\beta\mu}(l^{\beta}l^{\nu})_{;\nu} &= (C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta}_{;\nu}l^{\nu} + C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta}l^{\nu}_{;\nu}) \\
&= (C^{\alpha}_{\beta\mu}\dot{l}^{\beta} + C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta}l^{\nu}_{;\nu}) \\
&= C^{\alpha}_{\beta\mu}l^{\beta}l^{\nu}_{;\nu} ,
\end{aligned}$$

Utilizando novamente a Eq. (5.51), resulta em:

$$C^{\alpha}_{\beta\mu;\nu}l^{\beta}l^{\nu} = -\dot{H}l^{\nu}_{;\nu}l^{\alpha}l_{\mu} . \quad (5.52)$$

Finalmente, combinando as equações obtemos:

$$C^{\alpha}_{\beta\mu;\nu}l^{\beta}l^{\nu} = \ddot{H}l^{\alpha}l_{\mu} . \quad (5.53)$$

Segundo termo:

$$C^{\alpha}_{\beta\nu;\mu}l^{\beta}l^{\nu} = (C^{\alpha}_{\beta\nu}l^{\beta}l^{\nu})_{;\mu} - C^{\alpha}_{\beta\nu}(l^{\beta}l^{\nu})_{;\mu} . \quad (5.54)$$

Sabemos que o primeiro termo acima se anula identicamente, graças à expressão simplificada Eq. (5.51). Similarmente, o segundo termo adquire a forma

$$\begin{aligned}
C^{\alpha}_{\beta\nu}(l^{\beta}l^{\nu})_{;\mu} &= C^{\alpha}_{\beta\nu}l^{\beta}_{;\mu}l^{\nu} + C^{\alpha}_{\beta\nu}l^{\beta}l^{\nu}_{;\mu} \\
&= \dot{H}l^{\alpha}l_{\beta}l^{\beta}_{;\mu} + \dot{H}l^{\alpha}l_{\nu}l^{\nu}_{;\mu} \\
&= 0 ,
\end{aligned}$$

combinando as relações, obtemos

$$C^{\alpha}_{\beta\nu;\mu}l^{\beta}l^{\nu} = 0 . \quad (5.55)$$

Terceiro termo:

$$\begin{aligned}
C^{\alpha}_{\epsilon\nu} C^{\epsilon}_{\beta\mu} l^{\beta} l^{\nu} &= (\dot{H} l^{\alpha} l_{\epsilon})(\dot{H} l^{\epsilon} l_{\mu}) \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Quarto termo:

$$\begin{aligned}
C^{\alpha}_{\epsilon\mu} C^{\epsilon}_{\beta\nu} l^{\beta} l^{\nu} &= (C^{\alpha}_{\epsilon\mu})(\dot{H} l^{\alpha} l_{\nu}) l^{\beta} l^{\nu} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Finalmente, combinando todos os passos anteriores com a equação contraída do tensor de Riemann Eq. (5.49), obtemos a expressão desejada

$$\hat{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} l^{\beta} l^{\nu} = \ddot{H} l^{\alpha} l_{\mu} . \quad (5.56)$$

Agora estamos em condições de mostrar que, além do campo l^{μ} ser geodésico, ele também deve ser shear-free. De fato, baixando o índice α utilizando a métrica de Kerr-Schild Eq. (5.1), tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} l^{\beta} l^{\nu} &= \hat{g}_{\alpha\epsilon} \hat{R}^{\epsilon}_{\beta\mu\nu} l^{\beta} l^{\nu} \\
&= \hat{g}_{\alpha\epsilon} \ddot{H} l^{\epsilon} l_{\mu} \\
&= (g_{\alpha\epsilon} + 2H l_{\alpha} l_{\beta}) \ddot{H} l^{\epsilon} l_{\mu} \\
&= \ddot{H} l_{\alpha} l_{\mu} .
\end{aligned}$$

Lembrando que, no caso analisado, como o tensor de Ricci $\hat{R}_{\alpha\beta}$ deve se anular, o tensor de Riemann completo deve coincidir com o tensor de Weyl, isto é

$$\hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \hat{W}_{\alpha\beta\mu\nu} . \quad (5.57)$$

portanto, obtemos

$$\hat{W}_{\alpha\beta\mu\nu} l^{\beta} l^{\nu} = \ddot{H} l_{\alpha} l_{\mu} . \quad (5.58)$$

Nesta forma, é direto mostrar que l^μ é uma direção principal nula (PND) do tensor de Weyl. De fato, sabemos da Seção (4.1) que a condição para que um vetor nulo seja uma PND é dada pela relação

$$l_{[\lambda} \hat{W}_{\alpha] \beta \mu [\nu} l_{\rho]} l^\alpha l^\nu = 0 , \quad (5.59)$$

que é trivialmente satisfeita como consequência da Eq. (5.58). Na verdade, uma inspeção mais detalhada da Eq. (5.58) nos revela que l^μ é uma PND degenerada e que, portanto, o tensor de Weyl associado à métrica de Kerr-Schild é algebricamente especial por construção. De fato, comparando a equação acima com a definição equação (4.7), obtemos

$$l_{[\lambda} \hat{W}_{\alpha] \beta \mu \nu} l^\beta l^\nu = \ddot{H} l_{[\lambda} l_{\alpha]} l_\mu = 0 . \quad (5.60)$$

Tal relação nos permite obter um novo resultado profundo sobre a cinemática do campo vetorial nulo. Sabemos da Seção (4.3) que o teorema de Goldberg-Sachs nos garante o seguinte: se uma métrica de vácuo é algebricamente especial, então o vetor nulo principal múltiplo é tangente à uma congruência geodésica nula shear-free (sem cisalhamento). Um cálculo direto também permite mostrar que uma congruência geodésica e shear-free com relação à métrica de Kerr-Schild $\hat{g}_{\mu\nu}$ também satisfaz tais propriedades com relação à métrica de Minkowski $g_{\mu\nu}$. Portanto, para se obter uma solução das equações de Einstein no formalismo de Kerr-Schild, devemos ser capazes de construir uma congruência geodésica e shear-free no espaço de Minkowski.

5.4 Soluções de Kerr e Schwarzschild na formulação de Kerr-Schild

Para se produzir uma congruência nula que seja simultaneamente geodésica e shear-free no espaço de Minkowski, é conveniente introduzirmos o seguinte sistema de coordenadas $x^\mu = (u, v, \zeta, \bar{\zeta})$. Em termos das coordenadas cartesianas usuais, temos:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + t) , \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - t) , \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) , \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) ,$$

onde “ i ” representa a unidade imaginária e a barra significa conjugação complexa. Um cálculo direto permite mostrar que a transformação inversa é dada por:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v), \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\zeta + \bar{\zeta}), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2i}(\zeta - \bar{\zeta}), \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v).$$

Sabemos que o elemento de linha do espaço de Minkowski em coordenadas cartesianas é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (5.61)$$

e, diferenciando adequadamente a transformação inversa, podemos escrever, no novo sistema de coordenadas, a expressão:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -2(dudv + d\zeta d\bar{\zeta}). \quad (5.62)$$

Escrevendo o tensor métrico e sua inversa em forma matricial, temos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Pelo fato de tais tensores não possuírem elementos na diagonal principal, tal sistema de coordenadas é também chamado de coordenadas nulas. Veremos no próximo parágrafo que tais coordenadas simplificam consideravelmente a descrição do vetor nulo em questão l^μ .

De fato, é simples mostrar que qualquer campo vetorial real nulo no espaço de Minkowski pode ser escrito sob a forma:

$$l_\mu = (1, -Y\bar{Y}, \bar{Y}, Y), \quad (5.64)$$

onde Y é uma função complexa arbitrária a ser determinada posteriormente. Para mostrar que a forma acima implica em l_μ ser nulo, basta realizar a contração:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}l_\mu l_\nu &= g^{01}l_0l_1 + g^{10}l_1l_0 + g^{23}l_2l_3 + g^{32}l_3l_2 \\
&= 2g^{01}l_0l_1 + 2g^{23}l_2l_3 \\
&= -2l_0l_1 - 2l_2l_3 \\
&= -2(l_0l_1 + l_2l_3) ,
\end{aligned}$$

substituindo as componentes do vetor em função de Y , temos:

$$g^{\mu\nu}l_\mu l_\nu = -2(-Y\bar{Y} + \bar{Y}Y) = 0 ,$$

que é a expressão desejada. Uma conclusão importante a ser retirada daqui é que um campo vetorial nulo no espaço de Minkowski é caracterizado univocamente por apenas dois graus de liberdade: a parte real e a parte imaginária da função Y .

Agora, iremos relembrar a forma covariante da métrica de Kerr-Schild, dada pela Eq. (5.1)

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu . \quad (5.65)$$

Tal equação induz o seguinte elemento de linha:

$$\begin{aligned}
d\hat{s}^2 &= \hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\
&= (g_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu)dx^\mu dx^\nu \\
&= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2H(l_\mu dx^\mu)^2 .
\end{aligned}$$

Agora, utilizando as Eqs. (5.62) e (5.64), podemos reduzir o elemento de linha acima à forma sugestiva

$$ds^2 = -2(dudv + d\zeta d\bar{\zeta}) + 2H(l_\mu dx^\mu)^2 , \quad (5.66)$$

onde

$$l_\mu dx^\mu = du + Y d\bar{\zeta} + \bar{Y} d\zeta - Y\bar{Y} dv . \quad (5.67)$$

Portanto, para determinar completamente a métrica de Kerr-Schild, basta especificar a função real H e a função complexa Y . No entanto, sabemos do capítulo anterior que a congruência l^μ deve ser geodésica e shear-free no espaço de Minkowski para que a métrica seja solução das equações de Einstein no vázio. Claramente, tais condições sob a cinemática da congruência também implicam em condições sob o comportamento da função Y . Discutiremos abreviadamente tais condições e depois indicaremos como se determina a função H .

É possível mostrar, através de um longo processo envolvendo tetradas nulas e o formalismo de Newman-Penrose, que a função Y deve satisfazer três equações diferenciais parciais de primeira ordem (não-lineares e acopladas) para que a congruência tenha as propriedades cinemáticas desejadas. Para os fins deste trabalho, é suficiente enumerar tais equações

$$\frac{\partial Y}{\partial v} + Y \frac{\partial Y}{\partial \bar{\zeta}} = 0 , \quad \frac{\partial Y}{\partial \bar{\zeta}} - Y \frac{\partial Y}{\partial u} = 0 , \quad \frac{\partial Y}{\partial u} - Y \frac{\partial Y}{\partial v} = 0 . \quad (5.68)$$

A solução geral para tal sistema é conhecida e pode ser dada pela forma implícita

$$F(Y, \zeta, \bar{\zeta}, u + v) \equiv \Phi(Y) + [Y^2 \bar{\zeta} - \zeta + Y(u + v)] = 0 , \quad (5.69)$$

onde $\Phi(Y)$ é uma função arbitrária analítica da variável complexa Y . Vale ressaltar que, em geral, é difícil trabalhar com a função $\Phi(Y)$ sendo arbitrária. No entanto, no caso particular onde $\Phi(Y)$ é uma função linear, o procedimento simplifica-se consideravelmente. Tal situação corresponde exatamente aos caso de Schwarzschild e Kerr, como veremos adiante.

Até aqui, ainda não estudamos as restrições sob a função H . Pode-se mostrar que as condições sob a congruência l^μ correspondem a apenas 5 de um total de 10 das Equações de Einstein. Algumas das outras 5 são satisfeitas automaticamente, e as restantes implicam que:

$$H = \frac{4\sqrt{2}m}{(1 + Y\bar{Y})^2} \text{Re}[1/F_Y] , \quad (5.70)$$

onde m é um parâmetro real arbitrário e F_Y denota a derivada parcial de F com relação à Y , por concisão. Desta maneira, escrevemos a métrica de Kerr-Schild sob a forma:

$$ds^2 = -2(dudv + d\zeta d\bar{\zeta}) + 4\sqrt{2}m \text{Re} \left[\frac{1}{F_Y} \right] \left[\frac{du + Y d\bar{\zeta} + \bar{Y} d\zeta - Y\bar{Y} dv}{1 + Y\bar{Y}} \right]^2 . \quad (5.71)$$

Claramente, tal métrica será solução exata das equações de Einstein no vázio desde que a função complexa Y seja dada pela Eq. (5.69).

Como mencionado, as métricas de Schwarzschild e Kerr correspondem a dois casos particulares da métrica acima. Em termos das coordenadas cartesianas iniciais, a Eq. (5.69) reduz-se a:

$$F = 2^{-1/2}[(x - iy)Y^2 + 2(z - ia)Y - (x + iy)] . \quad (5.72)$$

No que se segue, é conveniente definir uma função real auxiliar ρ por:

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 + a^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1 . \quad (5.73)$$

de modo que a solução de $F = 0$ fica:

$$Y = \frac{(\rho - z)(\rho + ia)}{\rho(x - iy)} . \quad (5.74)$$

Assim, também obtemos a derivada parcial necessária

$$F_Y = \sqrt{2}[(x - iy)Y + (z - ia)] = \frac{\sqrt{2}(\rho^2 - ia z)}{\rho} , \quad (5.75)$$

e o módulo ao quadrado

$$Y\bar{Y} = \frac{\rho - z}{\rho + z} . \quad (5.76)$$

Finalmente, substituindo esses resultados na Eq (5.71), obtemos o campo gravitacional exterior a um corpo de massa m em rotação:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \quad (5.77)$$

$$+ \frac{2m\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2} \left[dt + \frac{z}{\rho}dz + \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}(xdx + ydy) + \frac{a}{\rho^2 + a^2}(xdy - ydx) \right]^2 .$$

Essa é essencialmente a solução de Kerr para as equações de campo de Einstein. Como vimos anteriormente, a é o parâmetro que descreve a velocidade relativa da rotação do objeto, dado em função do momento angular, e quando assumimos $a = 0$, temos que, pela Eq. (5.73), $\rho = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, e tal procedimento reduz a métrica de Kerr para a métrica de Schwarzschild dada na formulação demonstrada em 1924 por Arthur S. Eddington.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2m}{r}(dr + dt)^2 . \quad (5.78)$$

Em coordenadas esféricas a equação acima assume a forma da eq. (3.27).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma abordagem para encontrar soluções exatas das equações de Campo de Einstein. O propósito deste estudo foi fornecer uma revisão aprofundada do método de Kerr-Schild, juntamente com suas várias propriedades que fundamentam sua aplicação no contexto da Relatividade Geral. Iniciamos com uma revisão dos conceitos matemáticos essenciais para o entendimento do que se segue no desenvolvimento do trabalho. Num primeiro momento discorremos sobre o campo tensorial na construção de objetos como vetores e tensores, que é essencialmente a linguagem da Teoria da Relatividade Geral, mostrando um pouco de suas características algébricas. Apresentamos e discutimos os tensores da teoria que são os responsáveis por determinar as características geométricas do espaço-tempo, como o Tensor de Curvatura, Tensor de Ricci e Tensor de Weyl e suas propriedades, e os campos de Killing

Em seguida apresentamos a formulação da Relatividade Geral. Aqui, o movimento de partículas é baseado nos postulados da geodésica e do tempo próprio. Dessa forma, Einstein geometriza a gravitação ao demonstrar que ela é simplesmente uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, e a teoria é construída matematicamente com base no tensor métrico. Neste ponto, apresentamos também as soluções exatas das equações de campo; essencialmente, demonstramos a Solução de Schwarzschild e a Solução de Kerr. Na Relatividade Geral, uma solução exata é um tipo de estrutura geométrica chamada de variedade lorentziana, que é construída a partir de campos tensoriais específicos utilizados para representar os campos gravitacionais e descrever as propriedades do espaço-tempo nas proximidades de uma distribuição de massa. A solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional ao redor de uma distribuição de massa sem momento angular e sem carga elétrica, enquanto a solução de Kerr descreve o campo ao redor de um objeto com massa em rotação, mas sem carga elétrica.

Por fim, apresentamos a formulação de Kerr-Schild como demonstrado por Kerr em 1965, e chegamos na soluções exatas de Kerr e de Schwarzschild. O método de Kerr-Schild pode ser compreendido como uma deformação na métrica resultante de uma transformação do espaço-tempo. Essa deformação, por sua vez, cria um conjunto contínuo de transformações que uma métrica específica pode assumir, denominadas grupos de Kerr-Schild (ou grupo de movimentos) [16] [17], que são novos tipos de grupos de transformações métricas. A investigação desses grupos pode contribuir para uma compreensão aprimorada da natureza matemática do método, bem como para a construção de um conjunto de objetos invariantes em relação a tais transformações.

A nível prático, o método descrito neste trabalho é um dos métodos mais úteis

para a obtenção de novas soluções das equações de campo de Einstein. Como vimos, a primeira solução que descrevesse um campo gravitacional de um objeto com momento angular só foi encontrada, por Kerr, quase cinquenta anos após a publicação dos trabalhos de Einstein em 1915, devido a quão complexas são as equações de campo introduzidas na teoria. A formulação de Kerr-Schild consiste em soluções das equações de Einstein que são capazes de descrever todos os buracos negros clássicos, além de outras soluções de interesse físico. O método apresenta ainda, uma grande vantagem que está no fato de as equações de campo resultantes serem lineares na perturbação tensorial, o que acaba por facilitar drasticamente sua solução. A versatilidade desse método tem impulsionado pesquisas com o intuito de buscar generalizações em um maior número de dimensões como a inclusão de vetor tipo-espaço, assim como modificações na forma do Ansatz. Além disso, esse método tem demonstrado sucesso em aplicações na cosmologia de branas e outras linhas de estudo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Albert Einstein. “Die Grundlage der allgemeinen relativitätstheorie”. Em: *Annalen der Physik* 49 (1915), pp. 769–822.
- [2] Karl Schwarzschild. “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”. Em: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (jan. de 1916), pp. 189–196.
- [3] Hans Reissner. “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie”. Em: *Annalen der Physik* 355.9 (1916), pp. 106–120.
- [4] Hermann Weyl. “The theory of gravitation”. Em: *Annalen Phys* 54 (1917), p. 117.
- [5] G Nordstrom. “On the Energy of the Gravitation field in Einstein’s Theory”. Em: *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*. Vol. 20. 1918, p. 1238.
- [6] Roy P Kerr. “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”. Em: *Physical review letters* 11.5 (1963), pp. 237–238.
- [7] Roy Kerr e A. Schild. “Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations (Reprinted)”. Em: *General Relativity and Gravitation* 41 (out. de 2009), pp. 2485–2499. DOI: [10.1007/s10714-009-0857-z](https://doi.org/10.1007/s10714-009-0857-z).
- [8] Hans Stephani et al. *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*. 2^a ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003. DOI: [10.1017/CB09780511535185](https://doi.org/10.1017/CB09780511535185).
- [9] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. 2^a ed. Editora Livraria da Física, 2007.
- [10] Hans C Ohanian e Remo Ruffini. *Gravitation and spacetime*. Cambridge University Press, 2013.
- [11] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [12] Wytler Cordeiro dos Santos. “Notes on the Weyl tensor, decomposition of Riemann tensor, Ruse-Lanzos identity and duality of the curvature tensor”. Em: *Zenodo*. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3814369> (2020).
- [13] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN: 9780226870335. URL: <https://books.google.com.br/books?id=FQgAmQEACAAJ>.
- [14] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.
- [15] Arthur S Eddington. “A comparison of Whitehead’s and Einstein’s formulæ”. Em: *Nature* 113.2832 (1924), pp. 192–192.

- [16] Bartolomé Coll, Sergi R Hildebrandt e José MM Senovilla. “Kerr–schild symmetries”. Em: *General Relativity and Gravitation* 33 (2001), pp. 649–670.
- [17] Sergi R Hildebrandt. “A physical application of Kerr-Schild groups”. Em: *General Relativity and Gravitation* 34 (2002), pp. 159–174.