

Thiago Cordeiro

Nanovigas: quantização da equação da viga

Ouro Branco
2023

Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento de Física e Matemática

Thiago Cordeiro

Estados normais de vibrações de nano vigas

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Cesar Fernandes Lemos

Coorientador: Prof. Dr. Adélcio Carlos de Oliveira

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno e orientada pelo Prof. Dr. Humberto Cesar Fernandes Lemos

Ouro Branco
2023

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C794n Cordeiro, Thiago.
Nanovigas: quantização da equação da viga / Thiago
Cordeiro ; orientador Humberto Cesar Fernandes
Lemos; coorientador Adélcio Carlos de Oliveira. --
Ouro Branco, 2023.
51 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Física) -- Universidade Federal de São João del-Rei,
2023.

1. nanovigas. 2. quantização. 3. oscilador
harmônico quântico. 4. modos normais de vibração. I.
Lemos, Humberto Cesar Fernandes, orient. II. de
Oliveira, Adélcio Carlos, co-orient. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - UNIFAL/MG-UFSJ

HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 20 / 2023 - PPGF (13.29)

Nº do Protocolo: 23122.033508/2023-16

São João del-Rei-MG, 28 de agosto de 2023.

A dissertação de mestrado "Nanovigas: quantização da equação da viga" elaborada por **Thiago Cordeiro** e aprovada por todos os membros da banca examinadora, foi aceita pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito parcial à obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

(Assinado digitalmente em 28/08/2023 10:52)

HUMBERTO CESAR FERNANDES LEMOS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1671316

(Assinado digitalmente em 29/08/2023 20:34)

MAURICIO REIS E SILVA JUNIOR
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DEFIM (12.30)
Matrícula: 1681260

(Assinado digitalmente em 28/08/2023 14:02)

ANTONIO FRANCISCO NETO
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 003.651.216-81

Visualize o documento original em <https://sipac.ufsj.edu.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **20**, ano: **2023**, tipo: **HOMOLOGAÇÃO DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**, data de emissão: **28/08/2023** e o código de verificação: **5d25dac49d**

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus por ter me permitido ingressar nesse projeto de Mestrado, por ter colocado pessoas comprometidas e dispostas a compartilhar seus conhecimentos comigo.

Aos meus avós maternos, Jair Agostinho Cordeiro e Elvira Alves Barros que sempre me apoiaram em todas as escolhas que eu fiz e principalmente por ter me dado suporte para seguir o curso de Física, e principalmente minha mãe Cely Cordeiro por nunca ter me deixado desistir dos meus sonhos e objetivos, por sempre ter me animado quando tudo parecia não ter uma solução.

Aos meus amigos da república bodega de São João del Rei que sempre me incentivaram a não parara de estudar.

Queria agradecer ao meu orientador Humberto Cesar Fernandes Lemos, por ter tido uma grande paciência comigo, por me convencer que apesar das minhas falhas e dificuldades isso tudo poderia ser superado com estudo e dedicação, que mesmo com todos os empecilhos estava sempre me motivando a terminar nossa pesquisa sobre nanovigas e sempre quando eu pensava em desistir ele me animava mostrando o caminho certo a seguir, gostaria de agradecer também a ele por ter acreditado e confiado em mim.

Agradeço também ao meu coorientador Adélcio Carlos de Oliveira, por disponibilizar parte do seu tempo para trazer a mim conhecimento que deram continuidade ao nosso trabalho.

Aos meus amigos Mariane por ter me recebido em sua casa para fazer a prova de admissão do curso de Mestrado, Gabryele, Maria e Matheus por ter escutado meus lamentos nas horas difíceis e me ajudar com os cálculos intermináveis em todo processo. A Westerlayne por sempre me cobrar o término dos afazeres relacionados ao curso, a Stephania por sempre me direcionar palavras motivadoras me incentivando a não desistir.

A Universidade Federal de São João del Rei (UFSJ), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de

Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Aos professores do projeto de Mestrado que compartilharam comigo parte do seu conhecimento. Aos professores e equipe do programa de pós-graduação em física (ppgf-UFSJ), e aos integrantes das bancas tanto da qualificação quanto da defesa de Mestrado por tirarem uma parte do seu tempo para compor a banca, e a todas as pessoas que colaboraram para que esse trabalho fosse executada de concluído com sucesso.

Sumário

1	Introdução	1
2	Vigas Clássicas	5
2.1	Dedução da Equação da Viga	5
2.2	Solução fundamental da equação de uma viga isolada	12
2.3	Vigas acopladas	20
3	Oscilador Harmônico Quântico	26
4	Quantização da equação da viga	33
5	Conclusões	38
	Bibliografia	41

Lista de Figuras

1.1	a) NOEMS combina eletrônica, mecânica e óptica. Os efeitos diretos e inversos entre esses três graus de liberdade são medidos por deformações mecânicas. Em particular, os NOEMS permitem melhorar os efeitos eletro-ópticos através de graus de liberdade mecânicos. b) Visão esquemática do NOEMS. Forças eletrostáticas entre dois eletrodos e forças ópticas em guias de comprimento de ondas acoplando cargas, deslocamento mecânico e campo óptico. Figura e descritores retirados de [1].	2
1.2	Dois pares de nano dispositivos conhecido como nano vigas. Figura retirada de [2].	3
2.1	Viga apoiada numa fundação elástica, sob a ação de cargas axial e transversal e com elementos discretos nos contornos. Figura retirada de [3].	6
2.2	Deformação de um elemento de uma viga submetida a uma carga transversal. Figura retirada de [3].	9
2.3	As primeiras quatro soluções da parte espacial da viga $\xi_k(x)$, dadas por (2.54), para $k = 1$ (linha azul), $k = 2$ (traço e ponto laranja), $k = 3$ (traço verde) e $k = 4$ (ponto vermelho).	18
2.4	As quatro primeiras funções $\tau_k(t)$, soluções de (2.57). Novamente temos: $k = 1$ (linha azul), $k = 2$ (traço e ponto laranja), $k = 3$ (traço verde) e $k = 4$ (ponto vermelho).	19

Resumo

Começamos demonstrando rapidamente a dedução da equação da viga clássica de um modo geral, aplicando as condições de contorno apropriadas. Ao final notamos que essa expressão continha os termos das energias cinéticas e potencial, que foram usadas para a quantização da equação da viga. Como nosso objetivo é estudar as vibrações normais das nanovigas, foi encontrada a solução fundamental da viga através da equação diferencial parcial homogênea que, após ser resolvida, nos deu os modos normais de vibrações de uma viga isolada, achamos uma parte espacial e uma parte temporal da equação da viga. A parte espacial nos mostrou os possíveis valores dos modos normais λ_k e a parte temporal nos deu a frequência ω_k para cada modo de k e nos mostrou que é exatamente o oscilador harmônico. Logo após, com a intenção de estudar um sistema um pouco mais complexo, porém ainda clássico, estudamos as duas vigas acopladas. De acordo com a forma canônica de resolver a equação da viga clássica isolada no capítulo 3, partindo do oscilador harmônico clássico, essa forma de quantização de um modo geral, Sabendo que a energia total de um sistema é a soma das energias cinética e potencial, foram utilizadas as equações dessas energias mencionadas no final do capítulo 2. Agora como reunimos todas as ferramentas para resolver as nano vigas, vamos realizar a quantização das vigas. Partindo das equações das energias cinéticas e potencial usadas para encontrar a expressão do hamiltoniano que ficará em função de $\tau_k(t)$ pois ainda não é conhecida, é importante chamarmos a atenção para o hamiltoniano e certificar que ele esteja na forma do oscilador harmônico o que já é padrão dos nossos estudos.

Capítulo 1

Introdução

Há muitos anos, as vibrações existentes nas vigas se tornaram objeto de estudos devido a sua grande utilização na área da engenharia, da aeronáutica e em outras áreas que necessitam do uso de vigas. Como sabemos, as vibrações nas vigas podem trazer sérios problemas para os dispositivos em que elas são usadas. Com isso, os estudos sobre as vigas têm o intuito de melhorar suas condições e aproveitar ao máximo seus pontos positivos [3]. Do ponto de vista dinâmico, as vigas são dispositivos ricos sendo estudadas em vários regimes, desde a aplicação e estudo de sistemas caóticos [4], de métodos matemáticos [5], a aplicações em Biologia [6] e até possíveis implicações na Neurociência [1].

Com a descoberta da nanotecnologia no século 20 e a capacidade de regular as proporções em nanoescalas, novas perspectivas surgiram para os osciladores nanomecânicos [7]. A redução no tamanho dos osciladores os tornou pequenos e rígidos o bastante para serem utilizados em aparelhos eletrônicos portáteis, como giroscópios e acelerômetros que são utilizados em computadores e telefones celulares. Com esses avanços da tecnologia, a partir do início do século 21 apareceram novas oportunidades envolvendo os osciladores mecânicos, dentre elas o conceito de misturar “mecânica com a mecânica quântica” e contemplar os resultados quânticos desses osciladores clássicos rígidos [8].

Os nano dispositivos conhecidos como nanovigas (ou nanofios) possuem uma característica especial, pois confinam tanto modos ópticos como modos mecânicos na parte central, facilitando a operação optomecânica [8]. A figura 1.1 ilustra como é possível fazer a interação entre os diferentes graus de liberdade: mecânico, elétrico e ótico através dos sistemas nano-ótico-eletromecânicos conhecidos como NOEMS (nano-opto-electro-mechanical systems, em inglês).

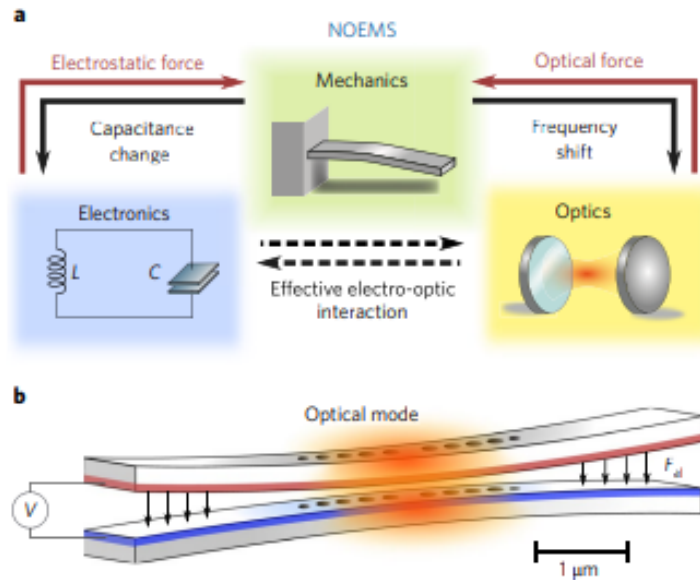


Figura 1.1: a) NOEMS combina eletrônica, mecânica e óptica. Os efeitos diretos e inversos entre esses três graus de liberdade são mediados por deformações mecânicas. Em particular, os NOEMS permitem melhorar os efeitos eletro-ópticos através de graus de liberdade mecânicos. b) Visão esquemática do NOEMS. Forças eletrostáticas entre dois eletrodos e forças ópticas em guias de comprimento de ondas acoplando cargas, deslocamento mecânico e campo óptico. Figura e descritores retirados de [1].

Experimentalmente, utilizam pares de nano vigas quase idênticas, de modo que possam trocar excitações, e dessa forma efeitos de interação entre as vibrações são observáveis. Esse tipo de processo já pode ser facilmente realizado experimentalmente [9]. Entretanto, esses experimentos são realizados em temperatura ambiente e portanto não há efeitos quânticos envolvidos: para fugirmos do regime clássico é necessário que se use baixa temperatura e excelente precisão experimental [10]. O estudo de nanos dispositivos tem grande interesse do ponto de vista teórico conceitual, na tentativa de mostrar como resultados do mundo macroscópico e microscópico podem ser compreendidos simultaneamente, mas com o atual sucesso do programa de descoerência [11, 12, 10] o grande foco agora é tentar entender esses dispositivos como potenciais para obtenção de vantagem computacional, o que chamamos de

computação quântica [13, 14].

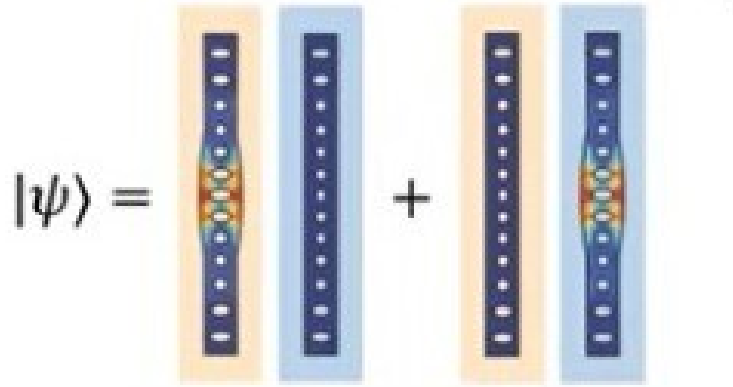


Figura 1.2: Dois pares de nano dispositivos conhecido como nano vigas. Figura retirada de [2].

Sistemas de nano vigas acopladas já são uma realidade experimental, sendo que em um trabalho recente publicado na revista “Nature Photonics” [2] foi feita a primeira demonstração experimental de teletransporte quântico utilizando dispositivos optomecânicos.

Ainda que não seja o foco desse trabalho, é indispensável ressaltar que a possibilidade de acoplar modos de vibração mecânica com modos ópticos e elétricos é muito útil no ponto de vista tecnológico, gerando assim grandes chances de acoplar dispositivos quânticos de natureza distintas, como acoplado dispositivos ópticos a pontos quânticos semicondutores normalmente cotados como memória de dispositivos quânticos [15].

Para entender a dinâmica de sistemas quânticos normalmente inicia-se pelo estudo do sistema clássico análogo e depois é feito o procedimento matemático conhecido como quantização. Para quantizar o campo eletromagnético, escreve-se a energia do campo em termos do potencial vetor e , para cada modo do campo, temos uma expressão análoga à expressão da energia de um oscilador harmônico, assim cada modo do campo é tratado como um oscilador harmônico [16]. Utilizando-se de um procedimento análogo, é possível quantizar campos acoplados aprisionados em cavidades ópticas [17]. Já sistemas de íons armadilhados são mais simples de quantizar, já que sua hamiltoniana possui análogo clássico natural [18].

Tendo em vista como principal interesse desse trabalho o estudo dos modos normais de vibração das nano vigas, nas versões clássica e quântica, foi

apresentada no capítulo 2 uma rápida dedução da equação da viga seguindo [3], onde existe um sistema formado por uma força externa que atua transversalmente na viga. Usando as condições de contorno de maneira apropriada encontraremos a equação da viga de modo geral onde estão embutidas as energias cinética e potencial que serão usadas no capítulo 4 para quantização da viga. Ainda naquele capítulo, encontraremos a solução da equação generalizada e o desacoplamento de duas vigas que estão ligadas entre si. No capítulo 3, mostraremos a quantização do oscilador harmônico clássico de um modo geral usando a equação de Hamilton cuja a energia total nesse sistema é a somatória da energia cinética com a potencial. No capítulo 4 teremos posse de todas as ferramentas necessárias para o estudo das nanovigas, sendo assim, esse capítulo será dedicado exclusivamente a quantização específica da viga usando os termos de energia cinética e potencial, partindo da solução geral da viga isolada.

Capítulo 2

Vigas Clássicas

2.1 Dedução da Equação da Viga

Nesse trecho iremos estudar a dedução da equação geral da viga, citada no livro [3]. Esse sistema é formado por uma força externa aplicada transversalmente, que chamaremos de $f(x, t)$. Para generalização usaremos uma força conservativa $f_c(x, t)$ e uma força não conservativa $f_{nc}(x, t)$, dada por:

$$f(x, t) = f_c(x, t) + f_{nc}(x, t). \quad (2.1)$$

O carregamento gravitacional está relacionando à parte conservativa do sistema, conforme a equação citada no livro [3] que fala da energia potencial, energia cinética e sobre o trabalho, sendo assim:

$$f_c(x, t) = \rho(x)A(x)g. \quad (2.2)$$

No qual a carga da base elástica tem uma rigidez de k_f por comprimento unitário é uma carga conservativa e, por concordância, adota-se que a carga em decorrência da carga do eixo $p(x, t)$ é uma carga conservativa. Na extremidade esquerda da viga representada na figura 2.1 existe uma mola de translação linear com uma rigidez k_1 e uma mola com linear com rigidez k_{t1} . Analogamente, na extremidade direita existe uma mola de translação linear com rigidez k_2 e uma mola de torção linear com rigidez k_{t2} . Nesse exemplo existe também um elemento de inércia com massa M_1 e inércia de rotação J_1 na extremidade esquerda e um elemento de inércia com massa M_2 e inércia de rotação J_2 na outra extremidade. Há também amortecedores lineares com coeficientes de amortecimento c_1 em $x = 0$ e c_2 em $x = L$. Devido ao fato do

2.1. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA VIGA

sistema não ser conservativo utilizaremos as equações a seguir para encontrar as condições e contorno e as equações de movimento:

Interior do elemento contínuo ($0 < x < L$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_B}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G_B}{\partial w'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial G_B}{\partial w''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G_B}{\partial \dot{w}} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial G_B}{\partial \dot{w}'} \right) + f_{nc} = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

A expressão (2.3) é conhecida como equação diferencial de Lagrange para movimento em sistemas contínuos unidimensionais espaciais.

$$\frac{\partial G_L}{\partial w'_L} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G_L}{\partial \dot{w}'_L} \right) + \left(\frac{\partial G_B}{\partial w''} \right)_{x=L} = 0. \quad (2.4)$$

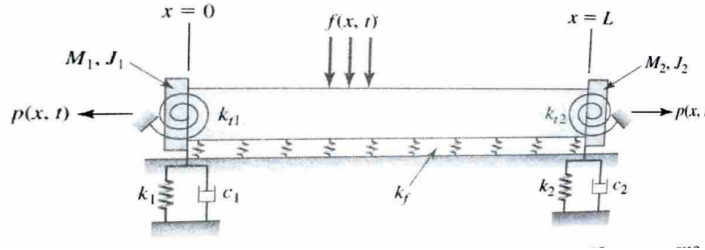


Figura 2.1: Viga apoiada numa fundação elástica, sob a ação de cargas axial e transversal e com elementos discretos nos contornos. Figura retirada de [3].

Sendo G_B uma função do trabalho onde w é a deflexão vertical da viga, \dot{w} representa a velocidade da viga, w' representa a inclinação da viga, \dot{w}' representa a velocidade angular da e w'' representa a curvatura da viga

$$G_B(x, t, w, \dot{w}, w', \dot{w}', w'') = \frac{1}{2} [\rho A \dot{w}^2 - EI w''^2 - p w^2 - k_f w^2] + f_c w, \quad (2.5)$$

G_0 é uma função da energia cinética e potencial do sistema para o contorno $x = 0$, onde a primeira parte é a energia cinética de translação, a segunda parte a energia cinética de rotação, a terceira parte a energia potencial da mola de translação e a quarta parte a energia potencial de torção da mola.

$$G_0(t, w_0, \dot{w}_0, w'_0, \dot{w}'_0) = \frac{1}{2} M_1 \dot{w}_0^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{w}'_0^2 - \frac{1}{2} k_1 w_0^2 - \frac{1}{2} k_{t1} w_0'^2, \quad (2.6)$$

e da mesma forma G_L é uma função da energia cinética e potencial que corresponde ao contorno onde $x = L$.

$$G_L(t, w_L, \dot{w}_L w'_L, \dot{w}'_L) = \frac{1}{2} M_2 \dot{w}_L^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{w}'_L^2 - \frac{1}{2} k_2 w_L^2 - \frac{1}{2} k_{t2} w'_L{}^2, \quad (2.7)$$

como os amortecedores viscosos estão nos contornos, existem forças não conservativas que são dadas pelas equações abaixo:

$$f_{nc0}(t) = -c_1 w_0 \quad \text{e} \quad f_{ncL}(t) = -c_2 \dot{w}_L. \quad (2.8)$$

De acordo com a equação (2.3), usando G_B para calcular cada termo separadamente, resultará em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_B}{\partial w} &= -k_f w(x, t) + f_c, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G_B}{\partial w'} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial G_B}{\partial w''} \right) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G_b}{\partial \dot{w}} \right) &= \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial G_b}{\partial \dot{w}'} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para chegarmos na equação do movimento da viga no intervalo de $0 < x < L$, juntaremos a equação (2.5) e a equação (2.3) usaremos a equação (2.1).

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + K_f w(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (2.10)$$

onde a primeira parcela da nossa equação é a força por comprimento unitário que se dá devido a rigidez flexional da viga $EI(x)$. A segunda parcela da nossa equação do movimento da viga é constituída pela força por comprimento unitário que vem da força axial da tração $p(x, t)$, existe também a parcela que é a força por comprimento unitário devido a fundação elástica com a

2.1. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA VIGA

rigidez por área unitária k_f . A quarta parcela é a força por comprimento unitário em decorrência da massa da viga por comprimento unitário $\rho A(x)$. Ao lado direito da equação, temos o carregamento transversal externo por comprimento unitário, onde $f(x, t)$ é a somatória da parte conservativa com a parte não-conservativa

$$f(x, t) = f_c(x, t) + f_{nc}(x, t). \quad (2.11)$$

Usaremos a equação do trabalho realizado pela carga aplicada conservativa na direção transversal por comprimento unitário $f_c(x, t)$ e (2.1), caso o carregamento gravitacional seja o único conservativo que atua sobre o sistema em questão. Sendo assim o carregamento transversal será:

$$f(x, t) = \rho(x)A(x)g + f_{nc}(x, t). \quad (2.12)$$

A carga estática é uma carga conservativa que independe do tempo, e está relacionada a gravidade. Se houver a presença de amortecimento distribuído, onde o coeficiente de amortecimento é c , assim essa força que não é conservativa será:

$$f_{nc}(x, t) = -c \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2.13)$$

nessa equação as unidades de medidas são força/comprimento, e seu sinal negativo quer nos dizer que essa força se opõe ao movimento.

As duas condições de contorno em $x = 0$ são alcançadas usando as equações (2.5) e (2.6) nas equações $w(0, t) = 0$ e $w'(0, t) = 0$, e as outras duas condições de contorno em $x = L$ são atingidas pelas equações (2.5) e (2.7) nas equações $w(L, t) = 0$ e $w'(L, t) = 0$. Seguindo as instruções acima temos, para $x = 0$,

$$w(0, t) = 0, \quad (2.14)$$

ou

$$\left[k_1 w + c_1 \dot{w} + M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad (2.15)$$

e

$$w'(0, t) = 0, \quad (2.16)$$

ou

$$\left[-k_{t1} \frac{\partial w}{\partial x} - J_1 \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0. \quad (2.17)$$

Para $x = L$, temos:

$$w(L, t) = 0, \quad (2.18)$$

ou

$$\left[k_2 w + c_2 \dot{w} + M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + p \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=L} = 0, \quad (2.19)$$

e

$$w'(L, t) = 0, \quad (2.20)$$

ou

$$\left[k_{t2} \frac{\partial w}{\partial x} + J_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0. \quad (2.21)$$

Como w' é a inclinação da viga em relação a base x ou a rotação linear da linha neutra da viga na base y , mostrada na figura (2.2) seguir. A força de deformação V e o momento torção M estão ligados às condições de contorno de acordo com as equações a seguir:

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.22)$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.23)$$

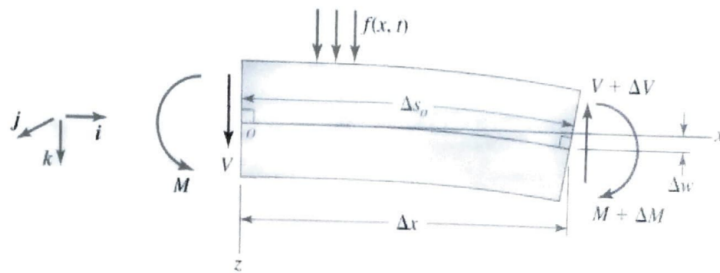


Figura 2.2: Deformação de um elemento de uma viga submetida a uma carga transversal. Figura retirada de [3].

Sendo assim, as equações (2.15) e (2.19) formam o equilíbrio de forma em uma das extremidades da viga e as equações (2.17) e (2.21) representam o

2.1. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA VIGA

equilíbrio do momento em uma extremidade da viga. Com as equações (2.14) e (2.21) usando as condições de contorno, prova-se que a intensidade dos elementos de rigidez e inércia não são iguais a zero, portanto o deslocamento e a inclinação tem que ser diferentes de zero em todas as extremidades da viga. Então, no caso geral da viga, as quatro condições de contorno do sistema da figura (2.1) são: $x = 0$, as equações (2.15) e (2.17), e para $x = L$ são as equações (2.19) e (2.21).

Das equações (2.15) a (2.21), está claro que as condições de contorno são encontradas em termos do deslocamento, a força de inclinação ou do momento. Condições geométricas de contorno são as condições que se manifestam em torno do deslocamento ou da inclinação, e condições dinâmicas de contorno são as que envolvem força de torção e momento fletor. Consequentemente, o equilíbrio de forças e o equilíbrio de momentos são alcançados através das condições de contorno.

Vamos considerar nesse trabalho as condições de contorno para um eixo embutido em uma das extremidades. Escreve-se essas condições de contorno levando em conta a sua geometria, ou seja, na extremidade embutida tanto o deslocamento quanto a inclinação medem zero. Dividindo as equações (2.15) e (2.17) pela rigidez de translação k_1 , temos:

$$\left[w + \frac{c_1}{k_1} \dot{w} + \frac{M_1}{k_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{p}{k_1} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad (2.24)$$

$$\left[-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{J_1}{k_{t1}} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{EI(x)}{k_{t1}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0. \quad (2.25)$$

Tomando os limites de $k_1 \rightarrow \infty$ e $k_{t1} \rightarrow \infty$, essas equações nos levam para as condições de contorno dadas pelas equações (2.14) e (2.16), mostrando que o deslocamento e a inclinação são iguais a zero. Dessa forma, se usássemos as equações (2.19) e (2.21), e levássemos em conta os limites da rigidez de translação $k_2 \rightarrow \infty$ e de rigidez de torção $k_{t2} \rightarrow \infty$, encontraríamos as condições de contorno das equações (2.18) e (2.20). Desse modo, pensamos em uma extremidade embutida como uma fronteira com rigidez de translação e rigidez de rotação infinitas. Consideramos várias possibilidades que simplificariam a álgebra nas resoluções. Inicialmente, imaginamos que a viga seja homogênea e que sua seção transversal seja uniforme ao longo de sua dimensão, ou seja,

$$EI(x) = EI, \quad \rho(x) = \rho \quad \text{e} \quad A(x) = A. \quad (2.26)$$

Se considerarmos que a parte elástica e a carga axial sejam inexistentes,

$$p(x, t) = 0 \quad \text{e} \quad k_f = 0. \quad (2.27)$$

As condições de contorno resultam em simplificações de forma apropriada. Considerando as opções apresentadas pelas equações (2.26) e (2.27), a expressão (2.10) resume-se a :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t). \quad (2.28)$$

Como podemos notar, encontramos a equação da viga de um modo geral e se repararmos bem, a primeira parcela da somatória é a energia potencial e a outra parcela é a energia cinética que usaremos mais tarde para quantizar a viga clássica. A seguir temos as equações da energia cinética (2.30) e da energia potencial (2.29) que foi mencionado no livro [3].

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.29)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.30)$$

Essas equações serão importantes no capítulo 4, onde as usaremos para realizar a quantização das vigas clássicas.

2.2 Solução fundamental da equação de uma viga isolada

Na seção anterior encontramos a equação da viga para um modo geral, agora precisamos encontrar a sua solução para em breve quantizá-la. Então vamos determinar a equação (2.28), levando em conta como força externa a carga gravitacional (2.2)

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho A g. \quad (2.31)$$

Em razão do nosso objetivo ser estudar as nano vigas, queremos achar a solução fundamental da equação da viga, encontrada resolvendo a equação diferencial parcial homogênea, isto é, transformando a força externa em zero. Pois para encontrarmos o resultado da equação diferencial parcial (2.31), precisamos achar a solução da homogênea mais uma solução particular, mas não queremos necessariamente a resolução da EDP, necessitamos mesmo de uma solução fundamental desta homogênea, com a finalidade de obtermos os modos normais e, mais tarde, fazer a quantização.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.32)$$

Conforme já discutido, usaremos as condições de contorno:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.33)$$

tanto em $x = 0$ quanto em $x = L$. Resolvendo a equação por separação de variáveis

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.34)$$

supondo que $w(x, t)$ seja dada por, onde $\xi(x)$ é a parte espacial e $\tau(t)$ a parte real:

$$w(x, t) = \xi(x)\tau(t), \quad (2.35)$$

e substituindo em (2.34):

$$EI \xi''''(x)\tau(t) = -\rho A \xi(x)\ddot{\tau}(t), \quad (2.36)$$

onde a linha indica a derivada com relação à variável x , enquanto o ponto indica a derivada em relação ao tempo t . Separando a parte espacial da parte temporal, temos:

$$\frac{\xi''''(x)}{\xi(x)} = -\frac{\rho A \ddot{\tau}(t)}{EI \tau(t)}. \quad (2.37)$$

Para facilitar nossos cálculos, definiremos uma nova constante θ por:

$$\frac{\rho A}{EI} = \theta. \quad (2.38)$$

Igualando as funções que dependem de x e t a uma constante C ,

$$\frac{\xi''''(x)}{\xi(x)} = -\theta \frac{\ddot{\tau}(t)}{\tau(t)} = C \quad (2.39)$$

o que nos dá duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \xi''''(x) - C\xi(x) = 0, \\ \ddot{\tau}(t) + \frac{C}{\theta} \tau(t) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Começamos resolvendo a parte espacial, uma vez que para ela temos as condições de contorno (2.33). Considerando $C \leq 0$, ao usarmos as condições de contorno, obtemos somente a solução trivial $\xi(x) = 0$, para todo $0 \leq x \leq L$. Tomando então $C > 0$, vamos definir, a fim de facilitar nossos cálculos, $C = \lambda^4$ com $\lambda > 0$

$$\frac{\xi''''(x)}{\xi(x)} = \lambda^4 \Rightarrow \xi''''(x) = \lambda^4 \xi(x) \Rightarrow \xi''''(x) + \lambda^4 \xi(x) = 0. \quad (2.41)$$

Supondo a solução $\xi(x) = e^{qx}$, seguem as derivadas $\xi'(x) = qe^{qx}$, $\xi''(x) = q^2 e^{qx}$, $\xi'''(x) = q^3 e^{qx}$, e $\xi''''(x) = q^4 e^{qx}$. Resolvendo a parte espacial, temos:

$$\xi''''(x) + \lambda^4 \xi(x) = 0. \quad (2.42)$$

Substituindo as derivadas na equação espacial:

$$e^{qx}(q^4 + \lambda^4) = 0 \Rightarrow q^4 + \lambda^4 = 0 \Rightarrow q^4 = -\lambda^4. \quad (2.43)$$

Possui quatro raízes, duas raízes reais e duas imaginárias, $q^4 e^{qx} - \lambda^4 e^{qx} = 0$.

$$q = \pm \lambda \quad \text{e} \quad q = \pm \lambda i, \quad (2.44)$$

representando assim as seguintes soluções para $\xi(x)$:

2.2. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE UMA VIGA ISOLADA

$$\xi_1 = \gamma e^{\lambda x}; \xi_2 = \delta e^{-\lambda x}; \xi_3 = \alpha e^{\lambda x i}; \text{ e } \xi_4 = \beta e^{-\lambda x i}. \quad (2.45)$$

Sendo assim, $\xi(x)$ é representada pela combinação linear:

$$\xi(x) = (\gamma e^{\lambda x} + \delta e^{-\lambda x}) + (\alpha e^{\lambda x i} + \beta e^{-\lambda x i}). \quad (2.46)$$

Transformando exponenciais reais em seno e cosseno hiperbólicos, e exponenciais imaginárias em seno e cosseno, para facilitar a resolução:

$$\xi(x) = [\gamma(\cosh \lambda x + \sinh \lambda x) + \delta(\cosh \lambda x - \sinh \lambda x) + \alpha(\cos \lambda x + i \sen \lambda x) + \beta(\cos \lambda x - i \sen \lambda x)]. \quad (2.47)$$

Logo:

$$\xi(x) = (\gamma + \delta) \cosh(\lambda x) + (\gamma - \delta) \sinh(\lambda x) + (\alpha + \beta) \cos(\lambda x) + i(\alpha - \beta) \sen(\lambda x).$$

Vamos definir: $(\gamma + \delta) = A$; $(\gamma - \delta) = B$; $(\alpha + \beta) = C$; $i(\alpha - \beta) = D$, assim:

$$\xi(x) = [A(\cosh \lambda x) + B(\sinh \lambda x) + C(\cos \lambda x) + D(\sen \lambda x)]. \quad (2.48)$$

Aplicando as condições de contorno, comecemos por:

$$\xi(0) = 0,$$

que nos leva a:

$$\xi(0) = [A(\cosh \lambda 0) + B(\sinh \lambda 0) + C(\cos \lambda 0) + D(\sen \lambda 0)],$$

$$\xi(0) = [A(\cosh \lambda 0) + C(\cos \lambda 0)],$$

$$\xi(0) = [A + C] = 0 \Rightarrow A = -C.$$

Para: $\xi''(0) = 0$, que vem da condição de contorno $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$,

$$\xi''(0) = [A(\lambda^2 \cosh \lambda 0) + B(\lambda^2 \sen \lambda 0) - C(\lambda^2 \cos \lambda 0) - D(\lambda^2 \sen \lambda 0)] = 0,$$

$$\xi''(0) = [A(\lambda^2) - C(\lambda^2)] = 0,$$

colocando λ^2 em evidência, visto que $\lambda > 0$,

$$\xi''(0) = \lambda^2(A - C) = 0 \Rightarrow A - C = 0 \Rightarrow A = C.$$

Resolvendo o sistema 2×2 , conseguimos $A = 0$ e $C = 0$.

Agora para $\xi(L) = 0$:

$$\xi(L) = [B(\sinh \lambda L) + D(\sin \lambda L)]X(L) = [B(\sinh \lambda L) + D(\sin \lambda L)] = 0.$$

E para $\xi''(L) = 0$, temos:

$$\xi''(L) = [B\lambda^2(\sinh \lambda L) - D\lambda^2(\sin \lambda L)] = 0$$

$$\xi''(L) = \lambda^2[B(\sinh \lambda L) - D(\sin \lambda L)] = 0.$$

Para resolver o sistema 2×2 , somaremos as duas equações:

$$\begin{cases} B(\sinh \lambda L) + D(\sin \lambda L) = 0 \\ B(\sinh \lambda L) - D(\sin \lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$2B(\sinh \lambda L) = 0,$$

Sabemos que $\sinh(\lambda L) \neq 0$ pois $(\lambda L) > 0$, devido a termos $\lambda > 0$ e $L > 0$.
Então:

$$B = 0.$$

Subtraindo as duas equações:

$$\begin{cases} B(\sinh \lambda L) + D(\sin \lambda L) = 0 \\ B(\sinh \lambda L) - D(\sin \lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$2(\sin \lambda L)D = 0,$$

A solução $D = 0$ nos leva à uma solução trivial $\xi(x) = 0, \forall (0 \leq x \leq L)$.
Por isso, com a finalidade de assegurar que tenhamos uma solução não-trivial,
obtemos:

$$\sin \lambda L = 0.$$

2.2. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE UMA VIGA ISOLADA

As raízes do seno são obtidas se tivermos:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L}, k = 1, 2, 3... \quad (2.49)$$

Substituindo λ_k em (2.48), temos

$$\xi_k(x) = \text{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right). \quad (2.50)$$

Lembrando que λ deve ser maior que zero, ($\lambda > 0$)

$$C_k < 0 \Rightarrow C_k = -\lambda_k^4 \Rightarrow \lambda_k(x) = \left(\frac{k\pi}{L} \right),$$

$$\xi_k(x) = (\text{sen } \lambda_k L), \quad (2.51)$$

e por hora a solução de (2.32) é dessa forma:

$$w_k(x, t) = \tau(t) \text{sen}(\lambda_k x) = \tau(t) \text{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right). \quad (2.52)$$

Conhecidos os possíveis valores de λ_k , vamos resolver a parte temporal do sistema (2.40):

$$\begin{cases} \xi_k''''(x) - \lambda_k^4 \xi_k(x) = 0 \\ \theta \ddot{\tau}_k(t) + \lambda_k^4 \tau_k(t) = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Separando a parte temporal do sistema, temos:

$$\theta \ddot{\tau}_k(t) + \lambda_k^4 \tau_k(t) = 0. \quad (2.54)$$

Como já conhecemos o valor de λ_k , vamos substituí-lo na equação acima para podermos prosseguir na resolução da parte que depende de t

$$\theta \ddot{\tau}_k(t) + \left(\frac{k\pi x}{L} \right)^4 \tau_k(t) = 0.$$

$$\ddot{\tau}_k(t) + \frac{\lambda_k^4 \tau_k(t)}{\theta} = 0. \quad (2.55)$$

Definindo, para cada modo normal $k \geq 1$, a frequência

$$\omega_k^2 = \frac{\lambda_k^4}{\theta} = \frac{EI}{\rho A} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 \Rightarrow \omega_k = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}}, \quad (2.56)$$

podemos ver que a equação da parte temporal representa, na verdade, um oscilador harmônico

$$\ddot{\tau}_k(t) + \omega_k^2 \tau_k(t) = 0. \quad (2.57)$$

Esse fato será importante no capítulo 4, no qual quantizaremos a parte temporal da solução da viga clássica, que está demonstrada aqui, para estudarmos as nano vigas.

Sendo $\tau_k(t) = e^{pt}$, $\dot{\tau}_k(t) = pe^{pt}$ e $\ddot{\tau}_k(t) = p^2e^{pt}$,

$$\ddot{\tau}_k(t) + \frac{\lambda_k^4 \tau_k(t)}{\theta} = 0 \Rightarrow p^2 e^{pt} + \frac{\lambda_k^4}{\theta} e^{pt} = 0.$$

$$e^{pt} \left(p^2 + \frac{\lambda_k^4}{\theta} \right) = 0 \Rightarrow \left(p^2 + \frac{\lambda_k^4}{\theta} \right) = 0.$$

$$p = \sqrt{\frac{-\lambda_k^4}{\theta}} \Rightarrow p = \pm \frac{i\lambda_k^2}{\sqrt{\theta}},$$

Possui duas raízes imaginárias, nos levam às soluções:

$$\tau_k(t) = A \exp\left(+\frac{\lambda_k^2 i}{\sqrt{\theta}} t\right) + B \exp\left(-\frac{\lambda_k^2 i}{\sqrt{\theta}} t\right),$$

que podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_k(t) &= A \left[\cos\left(\frac{\lambda_k^2 t}{\sqrt{\theta}}\right) + \text{sen}\left(\frac{\lambda_k^2 t}{\sqrt{\theta}}\right) \right] + B \left[\cos\left(\frac{\lambda_k^2 t}{\sqrt{\theta}}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_k^2 t}{\sqrt{\theta}}\right) \right]. \\ \tau_k(t) &= \left[A' \cos\left(\frac{\lambda_k^2 t}{\sqrt{\theta}}\right) + B' \text{sen}\left(\frac{\lambda_k^2 t}{\sqrt{\theta}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Lembrando que a frequência é $\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\theta}}$, conforme equação (2.56), a solução para k -ésimo modo normal é:

$$w_k(x, t) = \xi_k(x) \tau_k(t) = \left[A_k \cos(\omega_k t) + B_k \text{sen}(\omega_k t) \right] \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (2.59)$$

O resultado da solução geral da equação (2.32), com as condições de contorno (2.33), é $w(x, t) = \sum_{k \geq 1} w_k(x, t)$. Os coeficientes A_k e B_k poderão ser encontrados pela série de Fourier caso as condições iniciais sejam conhecidas.

2.2. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE UMA VIGA ISOLADA

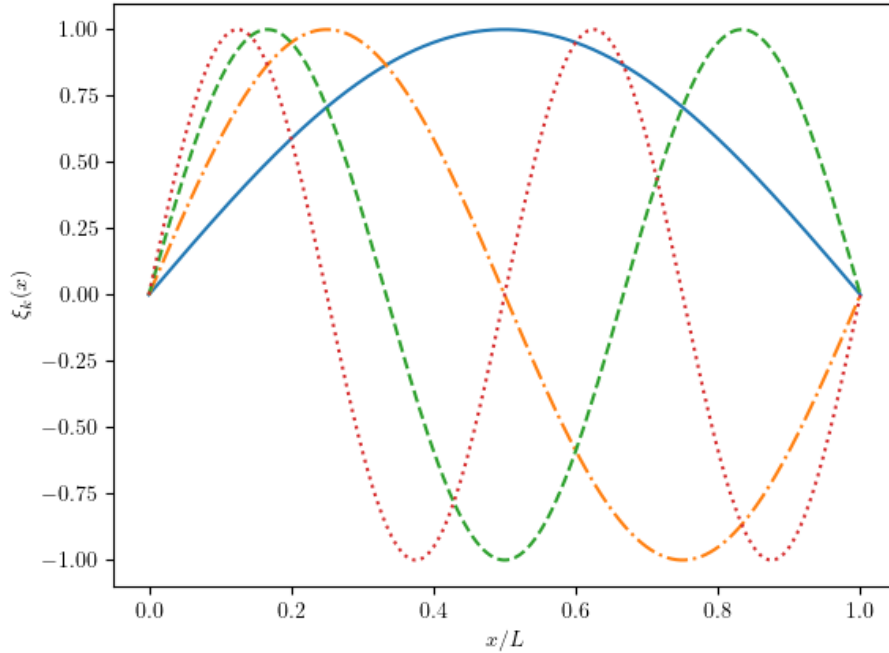


Figura 2.3: As primeiras quatro soluções da parte espacial da viga $\xi_k(x)$, dadas por (2.54), para $k = 1$ (linha azul), $k = 2$ (traço e ponto laranja), $k = 3$ (traço verde) e $k = 4$ (ponto vermelho).

As figuras 2.3 e 2.4, mostram respectivamente, as quatro primeiras soluções da parte espacial $\xi_k(x)$ e da parte temporal $\tau_k(t)$.

Detalhadamente, na figura 2.3, mostramos as funções $\xi_k(x)$, que são soluções da parte espacial da nossa equação da viga (2.32). As funções são plotadas no intervalo definido pela viga, que é $0 \leq x \leq L$. A solução correspondente a $k = 1$ corresponde à meia-onda da função seno, enquanto que as demais correspondem a $k/2$ ondas de seno. Resumidamente, os modos normais crescem linearmente com k . Já na figura 2.4, mostramos as funções $\tau_k(t)$, soluções da parte temporal de (2.32). A fim de compararmos o comportamento das funções, plotamos também as primeiras quatro soluções, i.e. variamos de $k = 1$ a $k = 4$. Além disso, olhamos apenas para a parte senoidal da solução (2.58), e ajustamos o gráfico de modo a vermos, para a primeira função $\tau_1(t)$, apenas meia-onda. Novamente, visamos comparar o comportamento dos modos normais λ_k e suas respectivas frequências ω_k : enquanto os

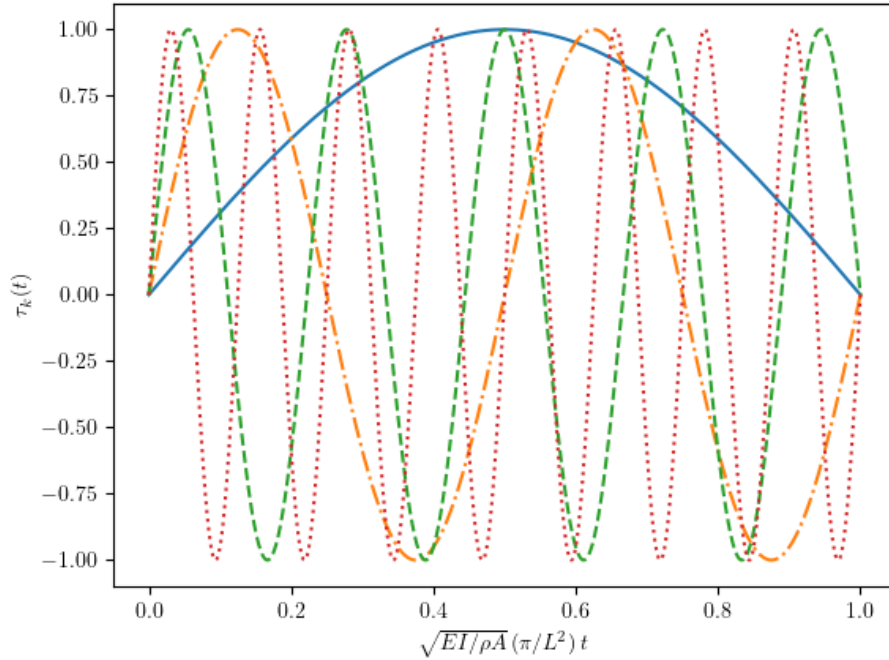


Figura 2.4: As quatro primeiras funções $\tau_k(t)$, soluções de (2.57). Novamente temos: $k = 1$ (linha azul), $k = 2$ (traço e ponto laranja), $k = 3$ (traço verde) e $k = 4$ (ponto vermelho).

modos normais crescem linearmente com k , as frequências dependem de k^2 , o que fica evidente nos gráficos. De todo modo, devemos ressaltar que para cada modo normal espacial λ_k , há uma única frequência ω_k , todas distintas entre si.

Sendo essa a solução da EDP homogênea da viga. Diante disso se desejar encontrar a solução de (2.31), precisamos adicionar uma solução particular à solução (2.57) para posteriormente encontrarmos os coeficientes A_k e B_k em (2.59). Mas nosso foco não é este nesse trabalho: para estudar as nano vigas, partiremos da equação (2.52) para podermos quantizar a parte temporal da viga. Assim, tendo isso em mente, no capítulo 3 iremos recordar como é realizada a quantização do oscilador harmônico, visto que a parte temporal da nossa viga é dada pela EDO de um oscilador harmônico (2.55).

2.3 Vigas acopladas

Para estudarmos as vigas acopladas tivemos o artigo [19] como referência. Aqui temos quase todas as ferramentas para resolver uma nano viga, os modos normais que encontramos na equação da viga e ainda teremos que achar o oscilador harmônico quântico que será discutido no próximo capítulo. Como desejamos estudar um sistema um pouco mais complicado, começamos por um modelo clássico que são duas vigas acopladas, assim vamos ver o que acontece com os modos normais de vibrações da viga.

A seguir mostraremos as equações diferenciais de acoplamento das vigas.

$$EIV_1'''' + k(v_1 - v_2) + r(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + \mu\ddot{v}_1 = f(x, t), \quad (2.60)$$

$$EIV_2'''' + k(v_2 - v_1) + r(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) + \mu\ddot{v}_2 = 0, \quad (2.61)$$

onde $f(x, t)$ é a força externa aplicada na primeira viga, EI é a rigidez flexional da viga, E é o módulo de elasticidade da viga, I é o momento de inércia da área transversal, m é a massa por unidade de comprimento e k é a constante da mola, r é o coeficiente de amortecimento e $v_1(x, t)$ é a deflexão transversal da viga na posição x e no tempo t .

Usando as mesmas condições de contorno utilizadas na solução da viga isolada em, $x = 0$ e $x = L$ temos:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t) = 0, \quad (2.62)$$

$$v_1(L, t) = v_2(L, t) = 0, \quad (2.63)$$

$$EIv_1''(0, t) = EIv_2''(0, t) = 0, \quad (2.64)$$

$$EIv_1''(L, t) = EIv_2''(L, t) = 0. \quad (2.65)$$

Com o objetivo de desacoplar as duas vigas, vamos definir uma nova variável:

$$v(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t). \quad (2.66)$$

Isolando a primeira viga (v_1) chegaremos na seguinte equação:

$$v_1(x, t) = v(x, t) - v_2(x, t). \quad (2.67)$$

Agora somaremos a equação da primeira viga (2.60) com a equação da segunda viga (2.61), obtendo:

$$EIv'''' + \mu\ddot{v} = f(x, t). \quad (2.68)$$

Fazendo a substituição de (2.66) em (2.61), chegaremos a próxima equação:

$$EIv_2'''' + K(v_2 - v + v_2) + r(\dot{v}_2 - \dot{v} + \dot{v}_2) + \mu\ddot{v}_2 = 0. \quad (2.69)$$

Resolvendo a equação acima, chegaremos na seguinte equação:

$$EIv_2'''' + 2Kv_2 + 2r\dot{v}_2 + \mu\ddot{v}_2 = f^*(x, t). \quad (2.70)$$

onde $f^*(x, t)$ é a perturbação externa presente na segunda viga, causada pela vibração da primeira viga.

Assim são obtidos duas equações diferenciais parciais de desacoplamento, sendo elas as equações (2.68) e (2.70).

Na forma normal, $v(x, t)$ pode ser dado como:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)Y_k(t), \quad (2.71)$$

onde $Y_k(t)$ é a deflexão generalizada do modo k e $X_k(x)$ é a n -ésima função de uma simples viga definido como:

$$X_k(x) = \text{sen } \lambda_k x, \quad (2.72)$$

com $\lambda_k = \frac{k\pi}{L}$.

Usando a solução (2.71) na equação diferencial, temos

$$EI \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j(x)Y_j(t) \right)'''' + \mu \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j(x)Y_j(t) \right)'' = f(x, t). \quad (2.73)$$

Sabendo que a quarta derivada de v é:

$$v'''' = \lambda_k^4 \text{sen}(\lambda_k x) Y_k(t), \quad (2.74)$$

e que $\ddot{v} = \sum_{k \geq 1} X_k(x) \ddot{Y}_k(t) = f(x, t)$, então substituindo v'''' em (2.73) obtemos

2.3. VIGAS ACOPLADAS

$$EI \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 \text{sen}(\lambda_k x) Y_k(t) + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}(\lambda_k x) \ddot{Y}_k(t) = f(x, t). \quad (2.75)$$

Agora vamos aproveitar que as funções $\{X_k(x)\}_{k \geq 1}$ formam um conjunto ortogonal tomando o produto interno dado pela integral em x de 0 a L . Multiplicando toda a equação por $X_j(x)$ e tomando a referida integral, segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} EI \lambda_k^4 Y_k(t) \int_0^L X_k(x) X_j(x) dx + \sum_{j \geq 1}^{\infty} \mu \ddot{Y}_j(t) \int_0^L X_k(x) X_j(x) dx = \int_0^L f(x, t) X_j(x) dx$$

A ortogonalidade das funções $X_k(x)$ é expressa na forma abaixo

$$\int_0^L X_k(x) X_j(x) dx = \frac{L}{2} \delta_{k,j},$$

logo segue a equação de oscilador harmônico para as funções $Y_k(t)$ dada por

$$\mu \ddot{Y}_k(t) + EI \lambda_k^4 Y_k(t) = \int_0^L f(x, t) X_k(x) dx, \quad (2.76)$$

onde a frequência angular de cada modo normal k será dada por

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \lambda_k^2. \quad (2.77)$$

Substituindo (2.72) e (2.74) em $\lambda_k = \int_0^L EI X_k'''' X_k dx$ teremos:

$$\lambda_k = \int_0^L EI \lambda_k^4 \text{sen}(\lambda_k x) \text{sen}(\lambda_k x) dx = \frac{\lambda_k x}{2} - \frac{\text{sen}^2(\lambda_k x)}{4}. \quad (2.78)$$

Integrando dos dois lados de 0 a L :

$$EI \frac{\lambda_k L}{2} - \frac{\text{sen}(2\lambda_k L)}{4}. \quad (2.79)$$

Sabendo que m_n é a rigidez do k -ésimo modo. Esta é a massa generalizada da k -ésima modalidade:

$$m_k = \mu \int_0^L (\text{sen } \lambda_k x)^2 dx = \frac{L}{2} = \text{sen } \frac{2\lambda L}{4\lambda}. \quad (2.80)$$

Uma força constante P_0 que atravessa a viga do lado esquerdo com velocidade constante de modo que a carga $f(x, t)$ é definida como:

$$f(x, t) = P_0 \delta_0(x - ct).$$

A força generalizada associada ao k -ésimo modo será:

$$Q_k(t) = \frac{1}{m_k} \int_0^L X_k(x) f(x, t) dx, \quad (2.81)$$

que nos leva a:

$$Q_k(t) = \frac{2P_0}{\mu L} \text{sen } (\lambda_k ct). \quad (2.82)$$

Assumindo que as vigas estão em repouso, ou seja, $v_1(x, 0) = v_2(x, 0) = \dot{v}_1(x, 0) = \dot{v}_2(x, 0) = 0$, então a solução de $\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = Q_k(t)$, é

$$y_k(t) = \int_0^t h_k(t - \tau) Q_k(\tau) d\tau, \quad (2.83)$$

onde $h_k(t)$ é um função de resposta ao impulso definida como:

$$h_k(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \omega_k t}{\omega_k}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

Substituindo $Q_k(t)$ da equação (2.82) e $h_k(t)$ com $t \geq 0$, na expressão (2.83), chegaremos em

$$y_k(t) = \frac{2P_0}{\mu L \omega_k} \left[\frac{\text{sen } \omega_k (c\lambda_k t - \text{sen } (c\lambda_k t))}{c^2 \lambda_k^2} \right], \quad (2.85)$$

esse resultado incluiremos em (2.71). Então a deflexão da primeira viga será:

$$v(x, t) = \frac{2P_0}{\mu L} \sum_{k \geq 1}^{\infty} \frac{\text{sen } (\lambda_k x)}{(\lambda_k c) - \omega_k^2} \left[\frac{\lambda_k c}{\omega_k} \text{sen } (\omega_k t) - \text{sen } (\lambda_k ct) \right], \quad (2.86)$$

nota-se que $v(x, t)$ independe do amortecimento.

2.3. VIGAS ACOPLADAS

Agora encontraremos a deflexão da segunda viga desse acoplamento utilizando os mesmos passos que foram feitos para a deflexão da primeira viga. Primeiro vamos substituir a equação (2.86) e sua derivada temporal por $f^*(x, t) = kv + r\dot{v}$.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\lambda_k c}{\omega_k} \text{sen}(\omega_k t) - \text{sen}(\lambda_k c t) \right] = \lambda_k c \cos(\omega_k t) - c \lambda_k \cos(\lambda_k c t). \quad (2.87)$$

Colocando $\lambda_k c$ em evidência chegamos à:

$$f^*(x, t) = \frac{2P_0}{\mu L} \sum_{k \geq 1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda_k x)}{(\lambda_k c)^2 - \omega_k^2} \lambda \left[\frac{\lambda_k c}{\omega_k} \text{sen} \omega t - \text{sen}(\lambda_k c t) \right] + r \lambda_k c [\cos(\omega_k t) - \cos(\lambda_k c t)] \quad (2.88)$$

Substituindo $f^*(x, t) = \frac{2P_0}{\mu L} \sum_{k \geq 1}^{\infty} \text{sen}(\lambda_k x) q_k t$. em (2.70).

$$EI v_2'''' + 2Kv + 2r\dot{v}_2 + \mu\ddot{v}_2 = \frac{2P_0}{\mu L} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \text{sen}(k_n x) q_n t. \quad (2.89)$$

A resolução dessa equação produz a deflexão $v_2(x, t)$ da segunda viga que pode ser dada por:

$$v_2(x, t) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} X_{2k}(x) Y_{2k}(t), \quad (2.90)$$

onde $Y_{2k}(t)$ é a deformação generalizada do n -ésimo modo e $X_{2k}(x)$ é o k -ésimo modo normal

$$X_{2k}(x) = \text{sen}_k x, \quad (2.91)$$

no qual $\lambda_k x = \frac{k\pi}{L}$ já conhecido.

Fazendo mais uma substituição de (2.90) em (2.89), multiplicando por $X_j(x)$ e integrando de 0 a L , obtemos:

$$\ddot{y}_{2k}(t) + 2\Omega_k \Xi_k \dot{y}_{2k}(t) + \Omega_k^2 y_{2k}(t) = Q_k^*(t), \quad (2.92)$$

onde:

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{EI\lambda_k^4 + 2\lambda}{\mu}}, \quad (2.93)$$

é a frequência angular do n -ésimo modo e:

$$\Xi_k = \frac{r}{\mu\Omega_k}, \quad (2.94)$$

é a relação de amortecimento do n -ésimo modo. Assim a força geral relacionada ao n -ésimo modo Q_k^* é dada por:

$$Q_k^* = \frac{1}{m_k} \int_0^L X_{2j}(x) \frac{2P_0}{\mu L} \sum_{k \geq 1}^{\infty} \text{sen}(\lambda_k x) q_k(t) dx, \quad (2.95)$$

onde m_n é a massa generalizada, que já foi definida na equação (2.80). Realizando a integração e utilizando a relação de ortogonalidade, temos:

$$\int_0^L X_n X_k dx = 0, n \neq k, \quad (2.96)$$

nos levando a:

$$Q_k^*(t) = \frac{2P_0}{\mu^2 L} q_k(t), \quad (2.97)$$

no qual $q_k(t)$ está definido na equação (2.88). Assim que as vigas estão originalmente em repouso, a solução da equação (2.92).

$$y_{2k}(t) = \int_0^t h_k^*(t - \tau) Q_k^*(\tau) d\tau \quad (2.98)$$

onde $h^*(t)$ é a função de resposta do impulso definida em $0 \leq \Xi_k < 1$, como :

$$h_k^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_{dk}} e^{-\Xi_k \Omega_k t} \text{sen} \Omega_{dk} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.99)$$

no qual $\Omega_{dk} = \Omega_k \sqrt{1 - \Xi_k^2}$, é a frequência circular amortecida do n -ésimo modo. Substituindo (2.97) e (2.99) em (2.98).

A realização da integral nos dá a equação (42) que esta citada no artigo [19].

Capítulo 3

Oscilador Harmônico Quântico

O oscilador harmônico quântico é o análogo quântico do oscilador harmônico clássico, no sentido que o quântico obtido do clássico usando certas correspondências descritas a seguir. Um dos sistemas mais importantes na mecânica quântica. Esse tipo de oscilador tem uma grande importância na engenharia e na física, sendo muito utilizado no estudo de vários modelos. Partindo do oscilador harmônico clássico, um sistema físico que possui uma massa sofre uma força restauradora onde possui um ponto de equilíbrio em $x = 0$. Uma análise mais detalhada do oscilador harmônico quântico é possível ser encontrada em [20]. Nesse capítulo iremos relembrar a quantização usando a equação de Hamilton, onde a energia total do sistema é sua energia cinética somada a sua energia potencial. A energia total do sistema em termos do momento p e da posição x :

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (3.1)$$

Para melhor estudarmos o oscilador harmônico quântico, fazendo as mudanças das grandezas clássicas para os operadores quânticos. A saber

$$E \rightarrow \hat{H}$$

$$p \rightarrow \hat{p}$$

$$x \rightarrow \hat{x}.$$

A partir desses operadores de posição \hat{x} e momento \hat{p} , surgem as relações abaixo que pode ser estudadas em [20].

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle, \quad (3.2)$$

$$\hat{p} |x\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} |x\rangle, \quad (3.3)$$

onde \hat{x} é o operador autoadjunto da posição e \hat{p} é o operador autoadjunto do momento, $|x\rangle$ é o ket que representa um vetor de estado e x é o escalar. Aplicando o comutador $[\hat{x}, \hat{p}]$ ao ket $|\Phi\rangle$, temos:

$$[\hat{x}, \hat{p}] |\Phi\rangle = \hat{x}\hat{p} |\Phi\rangle - \hat{p}\hat{x} |\Phi\rangle, \quad (3.4)$$

mostrando no espaço das posições:

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] |\Phi\rangle = \langle x | \hat{x}\hat{p} |\Phi\rangle - \langle x | \hat{p}\hat{x} |\Phi\rangle. \quad (3.5)$$

Considerando as equações (3.1) e (3.3) e usando o fato que os operadores de posição e momento são autoadjuntos chegamos a:

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] |\Phi\rangle = -x \left(i\hbar \frac{d}{dx} \right) \langle x | \Phi\rangle + i\hbar \left[\langle x | \Phi\rangle + x \frac{d}{dx} \langle x | \Phi\rangle \right], \quad (3.6)$$

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] |\Phi\rangle = \langle x | i\hbar |\Phi\rangle, \quad (3.7)$$

então o comutador é:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (3.8)$$

Como a energia total do oscilador harmônico quântico \hat{H} é a soma da energia cinética \hat{V} com a energia potencial \hat{T} representada por

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}. \quad (3.9)$$

Sendo assim, o oscilador harmônico quântico será representado pelo operador

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2. \quad (3.10)$$

Uma vez que o Hamiltoniano independe do tempo, a função de onda $\Psi(x, t)$ é separável e pode ser escrita como

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{EI}{\hbar} t} \langle x | \Phi(x) \rangle. \quad (3.11)$$

Usando as equações de autovetores e autovalores de energia ($\hat{H}|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$), podemos descrever a função $\Phi(x)$ usando a representação das posições

$$E\Phi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] \Phi(x). \quad (3.12)$$

Ao resolvermos a equação (3.12), podemos obter algumas características do Hamiltoniano (\hat{H}) do oscilador harmônico quântico: primeiro, os autovalores de (\hat{H}) são positivos ou iguais a zero. Além disso, os autovetores de energia não são degenerados. Não iremos demonstrar tais propriedades aqui, o leitor interessado pode encontrar detalhes em [20].

Faremos algumas manipulações algébricas com \hat{x} e \hat{p} , usando a equação dos autovalores e autovetores:

$$E|\Phi\rangle = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \right] |\Phi\rangle. \quad (3.13)$$

Dividindo a equação (3.13) por $(\omega\hbar)$, onde ω é a frequência angular e \hbar é a constante de Plank reduzida.

$$\frac{E}{\hbar\omega} |\Phi\rangle = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m\hbar\omega \hat{x}^2} + \frac{m\omega}{2\hbar} \right] |\Phi\rangle. \quad (3.14)$$

Assim podemos definir dois operadores adimensionais associados ao momento e à posição

$$\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}, \quad \text{e} \quad \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}.$$

Uma vez que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, então

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \sqrt{\frac{m\omega}{m\omega\hbar^2}} i\hbar,$$

desse modo:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (3.15)$$

Procurando facilitar a obtenção das autofunções do oscilador harmônico quântico, define-se o operador de aniquilação como $\frac{(\hat{X}+i\hat{P})}{\sqrt{2}} = \hat{a}$, e o operador de criação como seu adjunto, a saber $\frac{(\hat{X}-i\hat{P})}{\sqrt{2}} = \hat{a}^\dagger$. Sendo assim:

$$\hat{H} = \omega\hbar \left[\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.16)$$

Observa-se que \hat{a}^\dagger é operador adjunto de \hat{a} , mostrado no livro [21], e que sua relação de comutação é

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.17)$$

Definindo o operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, podemos reescrever o Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \omega \hbar \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.18)$$

Assim, as soluções para o Oscilador Harmônico quântico são os autoestados de \hat{N} . Calculando os comutadores, temos:

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a},$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger.$$

É possível mostrar, como feito por exemplo em [20], que para todo inteiro não-negativo $n \geq 0$, existe o ket $|n\rangle$ que é o autovetor do operador número associado ao autovalor n , ou seja $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$. A relação dos autovetores $|n\rangle$ com os operadores de criação \hat{a}^\dagger e de aniquilação \hat{a} são dadas por

$$\hat{a}^\dagger |\phi\rangle = c |n+1\rangle,$$

e

$$\hat{a} |\phi\rangle = c |n-1\rangle.$$

Novamente não estamos demonstrando tais fatos, que podem ser consultados em textos referência em Mecânica Quântica [20]. É possível demonstrar a ação final de \hat{a} e \hat{a}^\dagger nos autovetores $|n\rangle$, que são

$$(\hat{a} |\phi\rangle) = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.19)$$

e

$$(\hat{a}^\dagger |\phi\rangle) = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (3.20)$$

Uma vez que o operador número é autoadjunto por definição, e como seus autovalores são não degenerados, temos que $\{|n\rangle\}_{n \geq 0}$ é um conjunto ortonormal

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \quad (3.21)$$

Mais ainda, os vetores $\{|n\rangle\}_{n \geq 0}$ formam uma base, isto é, eles satisfazem a relação de completeza

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I,$$

onde I é a identidade. Como eles são uma base, todo vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos autovetores $|n\rangle$. Em particular, uma condição inicial $|\phi(0)\rangle$ pode ser dada por

$$|\phi(0)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad (3.22)$$

representando o estado por meio de uma superposição de vetores de bases que são autoestados do operador número \hat{N} e também de \hat{H} . Portanto:

$$\hat{H} |\phi(0)\rangle = \sum_n \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n |n\rangle. \quad (3.23)$$

A evolução temporal do sistema é dada pela equação (3.11). Uma vez que são conhecidas as autoenergias E_n do Hamiltoniano do oscilador harmônico

$$e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} = e^{-i\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t}. \quad (3.24)$$

Portanto, dado nosso estado inicial $|\phi(0)\rangle$, temos que sua evolução temporal é

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n C_n e^{-i\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t} |n\rangle. \quad (3.25)$$

A fase global é representada pela exponencial imaginária $e^{-i\omega \frac{t}{2}}$, assim podemos reescrever a solução acima como

$$|\phi\rangle = e^{-i\omega \frac{t}{2}} \sum_{n \geq 0} C_n e^{-i\omega n t} |n\rangle. \quad (3.26)$$

Visando escrever as soluções na representação das posições, podemos obter os estados $|n\rangle$ aplicando repetidamente o operador de aniquilação (\hat{a}^\dagger) ao estado fundamental $|0\rangle$, isto é

$$\hat{a}^\dagger |0\rangle = \sqrt{1} |1\rangle,$$

$$(\hat{a}^\dagger)^2 |0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2} |2\rangle,$$

$$(\hat{a}^\dagger)^3 |0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3} |3\rangle.$$

De forma geral:

$$(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle,$$

consegue-se chegar a outros estados, partindo do estado fundamental, ou seja,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (3.27)$$

usando a equação a cima, o estado fundamental é determinado, sendo assim, $\hat{a}|0\rangle = 0$. Considerando:

$$\langle x | \hat{a} | 0 \rangle = 0,$$

obteremos a função de onda $\phi(x)$ do oscilador harmônico quântico. Sendo assim:

$$\langle x | n \rangle = \phi_n(x),$$

e recordando que:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + \hat{P}i),$$

substituindo $\hat{X} = x$ e $\hat{P} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, teremos:

$$\langle x | \hat{a} | 0 \rangle = \frac{d\phi_0}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x \phi_0 = 0.$$

Resolvendo a equação separável $\langle x | \hat{a} | 0 \rangle = 0$ obtemos

$$\int \frac{d\phi_0}{\phi_0} = \int \frac{-m\omega}{\hbar} x' dx',$$

encontra-se:

$$\phi_0(x) = \phi(0) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (3.28)$$

Uma vez que a probabilidade de se encontrar a partícula em algum lugar no espaço deve ser igual a 100%, podemos obter a constante de normalização:

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^* \phi_0 dx = 1, \quad (3.29)$$

escrevendo a relação de completeza para estados de posição, resolveremos a equação (3.29).

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x| dx$$

$$\langle 0| 1 |0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle 0|x\rangle \langle x|0\rangle dx = 1, \quad (3.30)$$

sendo ϕ_0 igual a C , com C real, assim:

$$C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} dx,$$

com a solução do oscilador harmônico quântico em seu estado fundamental, teremos:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (3.31)$$

Usando a normalização do vetor:

$$C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.32)$$

a fim de obter os demais estados:

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \right) \langle x|(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (3.33)$$

$$\langle x| \hat{a}^\dagger |0\rangle = (-1)^n \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar} x \right)^n \psi_0,$$

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar} x \right)^n e^{-\frac{\omega x^2}{2\hbar}} \quad (3.34)$$

Sabemos que os autoestados do oscilador harmônico quântico estão relacionados com os polinômios de Hermite que são encontrados através da expansão de uma exponencial em série de Taylor [20].

Capítulo 4

Quantização da equação da viga

No capítulo 3, mostramos uma das formas de quantização do oscilador harmônico quântico de maneira geral. Agora, como temos todas as ferramentas necessárias para resolver as nano vigas, vamos quantizar especificamente a nossa viga.

Partindo da equações (2.29) e (2.30), que são respectivamente as energias cinética e potencial da viga, usando a solução geral $w(x, t)$ da viga (2.52) para podermos quantizar a viga. Ou seja, antes de determinarmos a forma da parte temporal $\tau_k(t)$, usaremos a solução geral nas expressões das energias cinética e potencial para encontrarmos a expressão para o hamiltoniano. Observe que este estará em função de $\tau_k(t)$ uma vez que ainda não é conhecido. Tendo encontrado o hamiltoniano, iremos quantizá-lo como foi feito no capítulo 3. É importante que o hamiltoniano seja exatamente um oscilador harmônico quântico, o que não é nada fora do esperado, pois a parte temporal da equação da viga é uma equação diferencial de um oscilador harmônico (2.57). Assim, temos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{k \geq 1} \lambda_k^2 \tau_k(t) \text{sen}(\lambda_k x). \quad (4.1)$$

Como pede na equação (2.29), temos que elevar essa segunda derivada ao quadrado

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} -\lambda_k^2 \tau_k(t) \text{sen}(\lambda_k x) (-\lambda_l^2 \tau_l(t) \text{sen}(\lambda_l x)). \quad (4.2)$$

Como mencionando anteriormente na equação (2.50), $\text{sen}(\lambda_k x) = \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$,

temos:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \lambda_k^2 \lambda_l^2 \tau_k(t) \tau_l(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right). \quad (4.3)$$

Integrando (4.3), acabamos novamente em algo semelhante ao delta de Kronecker:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{k,l}. \quad (4.4)$$

De acordo com a definição, se $k \neq l$, nossa solução se anulará. Voltando então à energia potencial:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} EI \lambda_k^2 \lambda_l^2 \tau_k(t) \tau_l(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.5)$$

Como a integral (4.4) para $k \neq l$ vai se anular, temos:

$$U(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{EIL}{4} \lambda_k^4 \tau_k^2(t). \quad (4.6)$$

Encontramos a energia potencial calculada com a solução da parte espacial da nossa equação. Agora vamos proceder da mesma maneira com energia cinética que levará em conta a parte temporal da nossa equação da viga. Para isso vamos primeiro encontrar a derivada de w em relação a t e depois elevar ao quadrado como esta escrito na equação (2.30) para depois integrarmos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k \geq 1} \tau_k(t) \operatorname{sen}(\lambda_k x) = \sum_{\lambda \geq 1} \dot{\tau}_k(t) \operatorname{sen}(\lambda_k x). \quad (4.7)$$

Agora temos:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} (\dot{\tau}_k(t) \operatorname{sen} \lambda_k x) (\dot{\tau}_l(t) \operatorname{sen}(\lambda_l x)) \quad (4.8)$$

Onde novamente, usamos $(\lambda_k x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \dot{\tau}_k(t) \dot{\tau}_l(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \quad (4.9)$$

Novamente temos a integral (4.4) que nos conduzirá a expressão para a energia cinética. Então usaremos mais uma vez o delta de Kronecker igual a 1

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \rho A \dot{\tau}_k(t) \dot{\tau}_l(t) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.10)$$

Resolvendo a integral, teremos o seguinte resultado:

$$T(t) = \frac{\rho A}{2} \sum_{k \geq 1} \dot{\tau}_k^2(t) \frac{L}{2} = \sum_{k \geq 1} \frac{\rho AL}{4} \dot{\tau}_k^2(t) \quad (4.11)$$

Utilizando a equação de Hamilton $H = U + T$, onde já sabemos que a energia total do sistema é a soma das energias cinética e potencial. Substituindo as energias na equação de Hamilton, teremos:

$$H = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2} \frac{EIL}{2} \lambda_k^4 \tau_k^2(t) + \frac{1}{2} \frac{\rho AL}{2} \dot{\tau}_k^2(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2} \frac{\rho AL}{2} \dot{\tau}_k^2(t) + \frac{1}{2} \frac{EIL}{2} \lambda_k^4 \tau_k^2(t), \quad (4.12)$$

No qual, o $\frac{1}{2}$ foi colocado em evidência, na última passagem para ajustarmos tudo para a efetuarmos a quantização. Efetivamente, o hamiltoniano acima é bem similar à expressão (3.10), o que já estávamos esperando, sendo que a parte temporal da solução da viga é de fato um oscilador harmônico (2.57) que possui frequência dada pela equação (2.56). Iniciamos com a identificação do τ_k com a posição¹ q_k , sendo assim $\tau_k = q_k$. Essa escolha nos conduzirá a $\dot{\tau}_k = \dot{q}_k = v_k$. Necessitamos determinar quem será a massa e a frequência. Para esta última, naturalmente usaremos a frequência (2.56), assim o hamiltoniano ficará:

$$H = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2} \frac{\rho AL}{2} \dot{\tau}_k^2(t) + \frac{1}{2} \frac{\rho AL}{2} \left(\frac{EI}{\rho A} \lambda_k^4 \right) \tau_k^2(t), \quad (4.13)$$

onde a frequência ω_k^2 é claramente a expressão entre parênteses. Definindo deste modo nossa massa $m = \rho AL/2$, e assim temos o hamiltoniano (4.12) na forma do do oscilador harmônico: agora estamos aptos a determinar o momento $p_k = mv_k = (\rho AL/2) \dot{\tau}_k(t)$. Perceba no entanto que, ao contrário

¹Aqui escolhemos usar a letra q para a posição, uma vez que x está sendo usada para a parte espacial da solução da viga $w(x, t)$.

de (3.10), a nossa expressão (4.13) acima possui uma soma sobre o índice k correspondente aos modos normais (2.49) de vibração de nossa viga.

Continuamos com quantização de acordo com o representado no capítulo 3, quantizando os operadores de posição e momento e usando a relação de comutação canônica. Assim, de maneira completamente equivalente, podemos definir os operadores destruição \hat{a}_k e criação \hat{a}_k^\dagger por

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{q}_k + \frac{i}{m\omega_k} \hat{p}_k \right) = \sqrt{\frac{\rho AL\omega_k}{4\hbar}} \left(\hat{\tau}_k + \frac{i}{\omega_k} \hat{\dot{\tau}}_k \right), \quad (4.14)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{q}_k - \frac{i}{m\omega_k} \hat{p}_k \right) = \sqrt{\frac{\rho AL\omega_k}{4\hbar}} \left(\hat{\tau}_k - \frac{i}{\omega_k} \hat{\dot{\tau}}_k \right), \quad (4.15)$$

em que os operadores $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ obedecem as relações de comutação

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}. \quad (4.16)$$

Continuando, podemos definir o operador número $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, cujos comutadores são

$$[\hat{N}_k, \hat{a}_{k'}] = -\hat{a}_k \delta_{k,k'}, \quad [\hat{N}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \hat{a}_k^\dagger \delta_{k,k'}. \quad (4.17)$$

Dessa maneira, temos o hamiltoniano (4.12) quantizado da viga como

$$\hat{H} = \sum_{k \geq 1} \hbar\omega_k \left(\hat{N}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (4.18)$$

Destacamos a existência de uma soma sobre os modos normais da viga indicados por k . Para cada modo normal $k \geq 1$, o operador número \hat{N}_k possui uma conjunto de autoestados $|n_k\rangle$, com $n \geq 0$, tais que $\hat{N}_k |n_k\rangle = n |n_k\rangle$. Sendo assim, as autoenergias do hamiltoniano (4.13) são

$$E_{k,n} = \hbar\omega_k \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.19)$$

para todo $k \geq 1$ e para todo $n \geq 0$.

Para cada modo normal indexado por $k \geq 1$, existem infinitos autoestados $|n_k\rangle$, cada um deles associado à autoenergia $E_{k,n}$ dada por (4.19). Uma pergunta natural é se existem pares de índices $(k, n) \neq (k', n')$ tais que $E_{k,n} = E_{k',n'}$? Em outras palavras, estamos procurando degenerescências no espectro de nosso hamiltoniano. Igualando as equações, temos

$$\hbar\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(\frac{k'\pi}{L} \right)^2 \left(n' + \frac{1}{2} \right).$$

Isolando n' e cancelando as constantes, obtemos

$$n' = \left(\frac{k}{k'}\right)^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \Rightarrow 2n' + 1 = \left(\frac{k}{k'}\right)^2 (2n + 1).$$

Voltando as atenções para a última equação, como os índices devem ser todos inteiros, então $(2n' + 1)$ é ímpar. Sendo assim a igualdade pode ser satisfeita se o lado direito também for ímpar. Claramente, como $(2n + 1)$ é ímpar, isso quer dizer que a razão (k/k') também deve ser ímpar para que tenhamos soluções. De fato, existem infinitas degenerescências. Por exemplo, para $k = 3$, $n = 0$ e $k' = 1$, temos que $n' = 4$, portanto $E_{3,0} = E_{1,4}$. Em outras palavras, o estado fundamental ($n = 0$) do terceiro modo normal ($k = 3$) tem a mesma energia do quarto estado excitado ($n' = 4$) do primeiro modo normal ($k = 1$). Mais ainda, considerando ainda $k = 3$ e $k' = 1$, temos infinitas soluções

$$E_{3,1} = E_{1,13}, \quad E_{3,2} = E_{1,22}, \dots \quad .$$

De modo mais geral, se $k = 3k'$, então $n' = 9n + 4$, o que mostra a existência de infinitas soluções. Já para uma razão $k/k' = 5$, temos $n' = 25n + 12$, o que também nos leva a infinitas soluções. Por exemplo

$$E_{5,0} = E_{1,12}, \quad E_{5,1} = E_{1,37}, \quad E_{5,2} = E_{1,62}, \dots \quad .$$

Capítulo 5

Conclusões

As vibrações em vigas vem sendo instrumento de estudos devido ao seu grande uso em diversos instrumentos nas áreas de engenharia, aeronáutica, etc. Essas vibrações podem causar problemas nos aparelhos que são constituídas por essas vigas, sendo assim um estudo mais detalhado nos ajudaria a entender melhor esses acontecimentos podendo assim aprimorar suas condições e usufruir com maior eficácia seus pontos positivos. Com a descoberta da nano tecnologia e a possibilidade de reduzir suas dimensões a nanoescalas, novas perspectivas surgiram para os osciladores harmônicos nano mecânicos, essa diminuição do tamanho dos osciladores facilitou a utilização deste em aparelhos eletrônicos transportáveis que são usado em câmeras, sensores e smartphones. Esses nano dispositivos ou nano fios, possuem uma característica especial que é o poder de confinar modos ópticos juntamente com modos mecânicos, ajudando assim a comunicação optomecânica. Na parte experimental são utilizados dois pares de nano vigas o mais idênticas possíveis, facilitando as transferências de excitações e assim podendo ser apreciadas todos os tipos de comunicação entre elas. Os experimentos são feitos em temperatura ambiente sendo assim não são notados efeitos quânticos envolvidos e como sabemos para mudar do ambiente clássico para o quântico é necessário que a temperatura seja baixa e que o grau precisão experimental seja o mais alto possível. Sendo os modos normais de vibrações de nano vigas o objetivo do nosso trabalho, apresentamos rapidamente a dedução da equação da viga, onde foram usadas as condições de contorno adequadas com o objetivo de encontrar a equação da viga de maneira generalizada onde estão contidas as energias cinética e potencial que posteriormente foram utilizadas na quantização da viga clássica, foi encontrada também a solução geral de desacoplamento de duas vigas. Usamos as equações de Hamilton para realizar

a quantização do oscilador harmônico clássico levando em conta que a energia total do sistema é a somatória das energias cinética e potencial.

Nas parte das vigas clássicas foi demonstrada a solução da viga que já é conhecida há muitos anos, facilitando assim nossos estudos em relação a esse tópico, onde temos como principal propósito encontrar uma solução fundamental para uma viga isolada que resultou em uma equação diferencial parcial homogênea onde suas soluções nos mostraram os modos normais de vibração da viga, que foi quantizada posteriormente. Para cada modo normal $k \geq 1$, existe uma frequência que depende de k^2 , sendo assim é visível notar que a parte temporal $\tau_k(t)$ dessa equação para cada modo normal é de fato a equação de um oscilador harmônico. Esse acontecimento é extremamente importante pois ele é uma peça fundamental para a realização da quantização da viga.

O oscilador harmônico quântico é uma similaridade do oscilador harmônico clássico, que por sinal é um dos sistemas mais importantes da mecânica quântica. Não é segredo que esse tipo de oscilador é de grande relevância na engenharia e na física. Sendo assim para cada modo normal de $k \geq 1$ temos a mesma frequência clássica dependente de k^2 e para cada autofunção existe um estado n que determina a energia do sistema E_n , para cada modo normal encontramos os operadores destruição a_k e criação a_k^\dagger , esses operadores representam estados de energia, eles descrevem uma grandeza que pode ser determinada, mesmo não podendo ser calculada. Assim os autoestados de diferentes modos normais conseguem ter as mesmas autoenergias, é o que chamamos de degenerescência. E como já mencionado várias vezes nesse trabalho, compreendendo que a energia total do sistema é a energia cinética e potencial somadas e que nossa quantização partirá da equação dessas duas energias.

Com o objetivo de estudar um sistema um pouco mais complicado, estudamos as vigas acopladas que se aproximam bastante dos pares de nano vigas. Para essa parte levamos como base o artigo [19], que mostra detalhadamente o desacoplamento de duas vigas. Como podemos ver, os modos normais das vigas acopladas e da viga isoladas são os mesmos, ambos possuem um estado de energia que depende do índice k , então para cada $k \geq 1$ existirá um estado de energia diferente. Esperamos de uma maneira mais intrínseca uma relação entre as autoenergias dos diferentes modos normais encontrados. Sendo assim a quantização das vigas acopladas seria feita da mesma maneira que fizemos para a viga clássica isolada, seguindo as mesmas regras, usando as mesmas condições de contorno. Após o desacoplamento das

vigas, seria necessário que quantizássemos essas nano vigas desacopladas para podermos comparar os modos normais, as frequências suas autoenergias e se com essas vigas desacopladas também estariam presente a degenerescência, para observamos quais seriam os seus comportamentos, se atuavam como as vigas isoladas ou se existiria algum diferença no seu comportamento.

Bibliografia

- [1] Stuart Hameroff and Roger Penrose. Consciousness in the universe: A review of the ‘orch or’ theory. *Physics of Life Reviews*, 11(1):39–78, 2014.
- [2] Rodrigo da Silva Benevides et al. Integrated optomechanics: classical and quantum experiments on massive oscillators. 2021.
- [3] Balakumar Balachandran and Edward B Magrab. *Vibrações mecânicas. São Paulo: Cengage Learning*, 2011.
- [4] G. V. Soares, D. G. Ladeira, and A. C. Oliveira. Dynamics of an euler-bernoulli beam on nonlinear viscoelastic foundations: a parameter space analysis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(2):608, 2021.
- [5] A. C. Oliveira. Using the parameter optimization method for solving differential equations with contour conditions: The nonlinear euler-bernoulli beam. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 8:447–458,, 2019.
- [6] R. Brito, D. L. Fabrino, and A. C. Oliveira. *DINCON 2015 45; Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2016.
- [7] Richard Feynman. Nanotechnology. *Caltechs Eng. Sci*, 23:22–36, 1960.
- [8] Leonardo Midolo, Albert Schliesser, and Andrea Fiore. Nano-opto-electro-mechanical systems. *Nature Nanotechnology*, pages 11–18, 2018.
- [9] Andrea V. Bragas, Stefan A. Maier, Hilario D. Boggiano, Gustavo Grinblat, Rodrigo Berté, Leonardo de S. Menezes, and Emiliano Cortés. Nanomechanics with plasmonic nanoantennas: ultrafast and local exchange between electromagnetic and mechanical energy. *J. Opt. Soc. Am.*, pages 1196–1211, 2023.

BIBLIOGRAFIA

- [10] Adécio C. Oliveira, J. G. Peixoto de Faria, and M. C. Nemes. Quantum-classical transition of the open quartic oscillator: The role of the environment. *Phys. Rev. E*, 73:046207, Apr 2006.
- [11] Wojciech Hubert Zurek. *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical — Revisited*, pages 1–31. Birkhäuser Basel, Basel, 2007.
- [12] A. C. Oliveira. Classical limit of quantum mechanics induced by continuous measurements. *Physica. A (Print)*, 392:655–668, 2014.
- [13] Eric Chitambar and Gilad Gour. Quantum resource theories. *Rev. Mod. Phys.*, 91:025001, 2019.
- [14] Mauricio Reis and Adécio C. Oliveira. A complementary resource relation of concurrence and roughness for a two-qubit state. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 608:128313, 2022.
- [15] Ziyu Lv, Yan Wang, Jingrui Chen, Junjie Wang, Ye Zhou*, and Su-Ting Han*. Semiconductor quantum dots for memories and neuromorphic computing systems. *Chem. Rev.*, 120:941–4006, 2020.
- [16] L. Mandel and E. Wolf. *Quantization of the free electromagnetic field. In Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [17] A.R. Bosco de Magalhães, S.G. Mocarzel, M.C. Nemes, and M.O. Terra Cunha. Decay rate and decoherence control in coupled dissipative cavities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 341:234–250, 2004.
- [18] K. Brown, C. Ospelkaus, Y. Colombe, and et al. Coupled quantized mechanical oscillators. *Nature*, 471:196–199, 2011.
- [19] M Abu-Hilal. Dynamic response of a double Euler–Bernoulli beam due to a moving constant load. *Journal of sound and vibration*, 297(3-5):477–491, 2006.
- [20] Darrell F Griffiths, David J e Schroeter. *Introdução à mecânica quântica*. 2018.
- [21] Eugene D Sakurai, Jun John e Commins. *Mecânica quântica moderna, edição revisada*. Associação Americana de Professores de Física, 1995.