2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Equações Diofantinas Lineares e Equação de Pell:
uma abordagem via Frações Contínuas

Bruno Alves Marques [1]
José Angel Dávalos Chuquipoma[2]

Resumo: Este trabalho apresenta uma análise da existência de soluções de uma classe de equações diofantinas lineares e não lineares (Equação de Pell). O estudo da existência das soluções é abordado de forma diferente do método clássico. Todas as soluções propostas estão relacionadas diretamente às frações contínuas. Problemas de aplicação são formulados e verificados através da teoria apresentada.

Palavras-chave: Equações Diofantinas, Frações Contínuas e Equações de Pell.

1 Introdução

O método clássico de resolução das equações diofantinas lineares envolve o algoritmo euclidiano utilizado de trás para frente. A proposta deste trabalho é apresentar uma análise da existência de soluções de certas equações diofantinas lineares, assim como mostrar a existência de soluções da equação de Pell (equação diofantina não linear) a partir do ponto de vista das frações contínuas e das equações de diferenças.

Basicamente, provamos resultados que dão resposta ao problema de encontrar soluções para as equações diofantinas $mx \pm ly = c$ e para as equações de Pell $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

Diversos autores têm realizado estudos neste campo. Kenneth H. Rosen (1984) desenvolveu as soluções da equação de Pell $x^2 - dy^2 = \pm 1$ utilizando frações contínuas. Na atualidade, Delfim Dias Bonfim e Gilmar Pires Novaes (2015) abordam a existência de soluções de equações diofantinas lineares com a utilização de frações contínuas simples, além disso, apresentam a fórmula do determinante, a qual, em particular, mostra que o máximo divisor comum de dois convergentes consecutivos é 1.

Carlos Gustavo T. de A. Moreira (2011) faz uma representação de números reais por meio de frações contínuas e apresenta as condições para obtenção de aproximações diofantinas. Por sua parte Saber Elaydi (2004) apresenta o enquadramento teórico de equações de diferenças aplicadas às frações contínuas e às equações diofantinas lineares e não lineares.

Neste trabalho, seguimos as ideias dadas por Saber Elaydi (2004), para provar a caracterização de frações contínuas, através de uma equação de diferença de segunda ordem, para posteriormente provar o primeiro resultado (Teorema 5.2), que mostra a existência de soluções de equação diofantina linear $mx - ly = c$. Similarmente, o segundo resultado (Teorema 5.4) nos fornece a existência de soluções no caso $mx + ly = c$.

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, kisamikiako@yahoo.com.br
[2]Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, jadc13@ufsj.edu.br

Por último, para mostrar a existência das soluções da equação de Pell $x^2 - dy^2 = \pm 1$ (Teorema 5.5), analisamos as soluções propostas utilizando os Teoremas 4.2 e 4.3 como referências, por meio dos quais verificamos quando uma fração é uma convergente da fração contínua simples.

Além disso, utilizamos uma equação importante para demonstrar a proposta e, por fim, verificamos a unicidade dessas soluções com o resultado do lema 4.1.
Todas as propostas de soluções abordadas estão diretamente relacionadas com as frações contínuas.

2 Frações Contínuas

Nesta seção apresentaremos uma introdução sobre as frações contínuas com teoremas importantes. A partir daí temos uma estrutura matemática suficiente para desenvolver a proposta do trabalho. Veremos posteriormente que as frações contínuas estão intimamente ligadas com algumas equações de diferenças de segunda ordem. Iniciamos com a definição de frações contínuas abordada em [3].

Definição 2.1. *Dados os números inteiros* $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...,$ *uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + ...}}} \tag{1}$$

é chamada de fração contínua. Quando $b_k = 1,\ k = 1, 2, ...,$ *e* $a_k, k = 1, 2, 3, ...$ *são inteiros positivos a fração contínua é dita simples, isto é,* (1) *têm a forma:*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}} \tag{2}$$

Uma fração contínua simples é dita finita, se (1) *admite a forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Uma forma alternativa de definir uma fração contínua simples é através do uso de recorrência. Denotamos por $\lfloor a \rfloor$ a *parte inteira* de a, como sendo o maior inteiro menor do que ou igual a a, isto é, $\lfloor a \rfloor$ é o único inteiro tal que $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ e a *parte fracionária* de a como $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1)$. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \quad a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$$

$$\text{e se} \quad \alpha_k \notin \mathbb{Z}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} = \frac{1}{\{\alpha_k\}}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Se, para algum $k, \alpha_k = a_k$ temos

$$x = \alpha_0 = [a_0, a_1, a_2, ..., a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Caso contrário, denotamos

$$x = \alpha_0 = [a_0, a_1, a_2, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}}$$

Os termos $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ são chamados *quocientes parciais* da fração contínua simples. A $k-$*ésima aproximação* ou $k-$*ésima reduzida* de uma fração contínua simples $x = [a_0, a_1, a_2, ...]$ é definida como $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, a_2, ..., a_k]$, $k \geq 0$, onde $p_k \in \mathbb{Z}$ e $q_k \in \mathbb{N} > 0$ são primos entre si. $\frac{p_k}{q_k}$ denotará a *sequência de reduzidas* da fração contínua simples de x.

Dado um número racional $x = \frac{p}{q}$, em que $q > 0$, sua representação será finita, e seus coeficientes a_k são obtidos através do algoritmo de euclidiano, onde:

$$\begin{array}{lcll} p & = & a_0 q + r_1, & 0 \leq r_1 < q, \\ q & = & a_1 r_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 & = & a_2 r_2 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_3, \\ & \vdots & \vdots & \\ r_{k-1} & = & a_k r_k & r_{k+1} = 0 \end{array}$$

Portanto,

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Antes da demonstração da Proposição 2.1 definiremos as equações de diferença de segunda ordem, segundo o autor [2].

Definição 2.2. *Uma equação linear de diferença de segunda ordem tem uma expressão geral da forma:*

$$\begin{cases} y_k = a y_{k-1} + b y_{k-2}, \\ y_0 \ e \ y_1 \end{cases}$$

Onde y_0 e y_1 são informados e a e b são constantes.

A proposição 2.1 demonstrada por indução será de grande importância para a demonstração da proposta deste trabalho.

Proposição 2.1. *Dada uma sequência (finita ou infinita)* $a_0, a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_k > 0$, *para todo* $k > 1$, *definimos sequências* (p_k) *e* (q_k) *por*

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \ \text{com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \ \text{com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \quad k = 2, 3, 4, ...$$

Então temos, $[a_0, a_1, a_2, ..., a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}} = \dfrac{p_k}{q_k}$, $\forall k \geq 0$.

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \ \forall k > 1.$$

Demonstração. A prova será por indução em k. Para $k = 0$ temos $[a_0] = a_0 = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_k}{q_k}$.
Para $k = 1$, temos $[a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$.
Para $k = 2$, temos;

$$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$
$$= \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}.$$

Suponha que a afirmação seja válida para k. Para $k + 1$ em lugar de k, temos;

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}] &= [a_0; a_1, a_2, ..., a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] \\ &= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} \\ &= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar, por indução, a segunda afirmação. Temos;

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0 \text{ e, se } p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k,$$

$$\begin{aligned} p_{k+2} q_{k+1} - p_{k+1} q_{k+2} &= (a_{k+2} p_{k+1} + p_k) q_{k+1} - (a_{k+2} q_{k+1} + q_k) p_{k+1} \\ &= -(p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1}) \\ &= -(-1)^k \\ &= (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

□

2.1 Convergentes

Como qualquer número racional pode ser representado sob a forma de uma fração contínua simples,

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k]$$

onde a_0 é um inteiro positivo, negativo ou zero, e $a_1, a_2, ..., a_k$ são inteiros positivos.

Consideremos as frações

$$c_1 = \frac{a_1}{1}, \quad c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, ...$$

Tais frações são chamadas de primeiro, segundo, terceiro, ..., convergentes respectivamente, da fração contínua $[a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k]$ com o k-*ésimo* convergente igual a própria fração contínua.
Consideramos,

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1} \text{ onde } p_1 = a_1 \text{ e } q_1 = 1,\ c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2},$$

onde $p_2 = a_1a_2 + 1$ e $q_2 = a_2$. Se calcularmos c_3, c_4, c_5, obtemos, respectivamente:

$$c_3 = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}, \ c_4 = \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2} = \frac{p_4}{q_4}, \ c_5 = \frac{a_5p_4 + p_3}{a_5q_4 + q_3} = \frac{p_5}{q_5}, \cdots$$

Observando estes resultados podemos conjecturar que os numeradores p_k's e os denominadores q_k's dos convergentes c_k's satisfazem as seguintes relações:

$$p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2} \text{ e } q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}$$

O Corolário 2.1 mostra que o $mdc(p_k, q_k)$ de todo convergente é igual a 1.

Corolário 2.1. *Para todo convergente* $c_k = \frac{p_k}{q_k}$*, temos que* $mdc(p_k, q_k) = 1$.

Demonstração. Pela Proposição 2.1 temos que $p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^k$. Isto nos diz que qualquer divisor comum de p_k e q_k deve ser um divisor de 1 ou -1. Logo o $mdc(p_k, q_k) = 1$ □

2.2 Aproximações Sucessivas

Aqui descreveremos um processo de obtenção de aproximações sucessivas, por racionais, para um número irracional.
Seja α um irracional e seja $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, isto é, a_1 é o maior inteiro menor que α. Logo,

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

e, claramente, $x_1 = \frac{1}{\alpha - a_1}$ é irracional e $x_1 > 1$. Podemos, pois escrever x_1 na forma

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$$

onde $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor$, x_2 irracional e $x_2 > 1$. Podemos repetir este processo, obtendo:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1}, x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}, \cdots, x_k = a_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1}}, \tag{3}$$

onde todos os $a'_{ks} \geq 1$ são inteiros com $(k > 1)$ e todos os $x'_{ks} > 1$ são irracionais. O fato de cada x_k ser irracional nos garante que este processo pode ser repetido um número qualquer de vezes. Utilizando (3), vemos que

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_3}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{x_4}}}}$$

Definição 2.3. *A fração contínua (2) é dito convergente ao limite L se $\lim_{k\to\infty} c_k = L$, caso contrário será dito divergente. Neste caso denotamos*

$$[a_1, a_2, a_3, ...] = \lim_{k\longrightarrow\infty} [a_1, a_2, ..., a_k].$$

2.3 Propriedades dos Convergentes

O Teorema 2.1 seguinte demonstrado em [5] será útil para determinar algumas propriedades dos convergentes de uma fração contínua simples.

Teorema 2.1. *As sequências $c_1, c_2, c_3, ...$ dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < ... < c_{2k+1}$
(ii) $c_2 > c_4 > c_6 > ... > c_{2k}$
(iii) $c_{2k+1} < c_{2k+2} < c_{2k}$.

O Teorema 2.2 requer conhecimentos de demonstração por indução, onde a demonstração se encontra em [5].

Teorema 2.2. *Para qualquer número real α temos:*

$$[a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha q_{k-1} + q_{k-2}} \tag{4}$$

onde $a_1, a_2, a_3, ...$ é uma sequência infinita de inteiros positivos com a possível exceção de a_1 e as sequências p_k e q_k são dadas por

$$p_0 = 1, \quad p_{-1} = 0, \quad q_0 = 0, \quad q_{-1} = 1$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad e \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, k \geq 1.$$

São necessárias algumas definições de [8] para o desenvolvimento dos teoremas seguintes.

Definição 2.4. *O número real α é dito ser um quadrático irracional se α é irracional e se α é uma raíz do polinômio quadrado com coeficientes inteiros, isto é,*

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0,$$

onde A, B, e C são inteiros.

Definição 2.5. *O quadrático irracional α é chamado reduzido se $\alpha > 1$ e $-1 < \alpha' < 0$, onde α' é o conjugado de α.*

Definição 2.6. *A fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ...]$ é chamada de puramente periódica se existe um número inteiro tal que $a_k = a_{n+k}$, onde $k = 1, 2, 3, ...$, de modo que*

$$[a_0; a_1, a_2, ...] = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}}].$$

Definição 2.7. *O comprimento n do período de uma fração contínua puramente periódica é o número de algarismos da parte periódica da fração contínua.*

O Teorema 2.3 está demonstrado em [8]

Teorema 2.3. *A fração contínua simples do quadrado irracional α é puramente periódica se, e somente se, α é reduzido. Além disso se α é reduzido e $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$, então a fração contínua de $\frac{-1}{\alpha}$ é $[a_k; \overline{a_{k-1}, ..., a_0}]$.*

Considerando, agora, a sequência $a_1, a_2, a_3, ...$ dada por (3) e a sequência dos convergentes $c_k = \dfrac{p_k}{q_k}$. Sabemos que,

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + \frac{1}{x_1} = [a_1, x_1] = [a_1, a_2 + \frac{1}{x_2}] \\ &= [a_1, a_2, x_2] = [a_1, a_2, a_3 + \frac{1}{x_3}] \\ &= [a_1, a_2, a_3, x_3] = [a_1, a_2, ..., a_{k-1} + \frac{1}{x_{k-1}}] \\ &= [a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, x_{k-1}] \end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.2 temos

$$\alpha = [a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, x_{k-1}] = \frac{x_{k-1}p_{k-1} + p_{k-2}}{x_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Tomando a diferença

$$\begin{aligned} \alpha - c_{k-1} &= \frac{x_{k-1}p_{k-1} + p_{k-2}}{x_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \\ &= \frac{-(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}qk - 1)}{q_{k-1}(x_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2})} \\ &= \frac{(-1)^k}{q_{k-1}(x_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2})} \end{aligned} \tag{5}$$

podemos concluir que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} (\alpha - c_{k-1}) = 0$ uma vez que a sequência q_k é crescente e os números x'_{ks} são positivos. Portanto $\alpha = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} c_k = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} [a_1, a_2, ..., a_k] = [a_1, a_2, a_3, ...]$, ou seja, o limite da sequência dos convergentes da representação do irracional α sob a forma da fração contínua é igual ao próprio α.

O Teorema 2.4 mostra que toda fração contínua representa um irracional e o Teorema 2.5 demonstra que todo convergente de α satisfaz $\left|\alpha - \dfrac{p_k}{q_k}\right| < \dfrac{1}{q_k^2}$. As demonstrações será apresentadas em [5].

Teorema 2.4. *Toda fração contínua simples infinita $[a_1, a_2, a_3, ...]$ representa um irracional.*

Teorema 2.5. *Todo convergente* $c_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ *de* α *satisfaz*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2}.$$

Teorema 2.6. *Seja* α *um irracional e* $\dfrac{p_k}{q_k}$ *os convergentes da expansão da fração contínua de* α*. Se* $\dfrac{a}{b}$ *for um racional com* $b > 0$ *tal que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$$

para algum $k \geq 1$*, então* $b > q_k$*. Mais ainda, se* $|\alpha b - a| < |\alpha q_k - p_k|$ *para algum* $k \geq 0$*, então* $b \geq q_{k+1}$*.*

O Teorema 2.6 é demonstrado em [5] por contradição.
O Teorema 2.7 mostra quando um irracional definido por uma sequência recursiva é um valor da fração contínua simples infinita, a demonstração está em [8].

Teorema 2.7. *Seja* $\alpha = a_0$ *um irracional e definir a sequência recursiva por*

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor,\ \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \text{ para } k = 0, 1, 2, ...$$

Então α *é o valor da fração contínua simples infinita* $[a_0, a_1, ...]$*.*

3 Equações Diofantinas Lineares

Nesta seção apresentaremos uma noção básica sobre as equações diofantinas da forma $mx \pm ly = c$, onde procuramos soluções inteiras com coeficientes inteiros, com m e l não sendo simultaneamente nulos.

3.1 O Caso $mx - ly = c$

Há vários problemas de aritmética cuja a resolução está representada pela solução da equação $mx - ly = c$ no conjunto dos inteiros. Assim, temos a definição de uma solução particular abordada em [7] .

Definição 3.1. *Uma solução particular arbitrária de* $mx \pm ly = c$ *é um par ordenado* (x_0, y_0) *de números inteiros tal que* $mx_0 \pm ly_0 = c$*. .*

A solução geral da equação $mx - ly = c$ será apresentada na Proposição 3.1.

Proposição 3.1. *Seja* (x_0, y_0) *a solução particular da equação* $mx - ly = c$*, onde* $mdc(m, l) = 1$*. Então, a solução geral* $(x, y) \in \mathbb{Z}$ *da equação é:*

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Seja x, y uma solução de $mx - ly = c$, logo,

$$mx_0 - ly_0 = mx - ly = c.$$

Consequentemente,

$$m(x - x_0) = l(y - y_0).$$

Como $mdc(m, l) = 1$, segue-se que $l|(x - x_0)$. Logo, $x - x_0 = lt, t \in \mathbb{Z}$.
Substituindo a expressão de $x - x_0$, temos $y - y_0 = mt$, o que prova que as soluções são do tipo exibido. Como no enunciado (x, y) é solução, então;

$$mx - ly = m(x_0 + lt) - l(y_0 + mt) = mx_0 - ly_0 = c.$$

□

3.2 O Caso $mx + ly = c$

Na Proposição 3.2 o autor [1] apresenta a solução geral da equação $mx + ly = c$ no conjunto dos inteiros.

Proposição 3.2. *Suponha que a equação $mx + ly = c$, com $mdc(m, l) = 1$, tenha solução e seja $x_0 = n, y_0 = k$ a solução particular. A solução geral $(x, y) \in \mathbb{Z}$ da equação é dada por:*

$$x = n + lt, \text{ e } y = k - mt.$$

Demonstração. Temos que $mn + lk = mx + ly = c$. Logo,

$$m(x - n) = l(k - y),$$

que, de modo totalmente análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.1, implica no resultado. □

4 Equação de Pell

A equação de Pell é um caso particular das equações diofantinas não lineares. Nesta seção trataremos apenas as equações da forma $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

4.1 O Caso $x^2 - dy^2 = 1$

Denota-se por d um inteiro positivo. Estamos interessados na equação $x^2 - dy^2 = 1$, com x e y inteiros. Se d é um quadrado perfeito, digamos $d = k^2$, temos que $x^2 - dy^2 = (x - ky)(x + ky) = 1$ admite apenas as soluções triviais $y = 0, x = \pm 1$. O caso interessante é quando d não é um quadrado perfeito, e portanto $\sqrt{d}$ é um irracional (de fato, se $\sqrt{d} = \frac{p}{q}$, com $mdc(p, q) = 1$ e $q > 1$, teríamos $d = \frac{p^2}{q^2}$ o que é um absurdo, pois $mdc(p, q) = 1 \implies mdc(p^2, q^2) = 1$, donte $\frac{p^2}{q^2}$ não pode ser inteiro). Nesse caso a equação é conhecida como equação de Pell.
O Teorema 4.1 demonstrado em [6] mostrará que a equação $x^2 - dy^2 = 1$, com d diferente de um quadrado perfeito, possui solução não trivial em inteiros positivos.

Teorema 4.1. *A equação $x^2 - dy^2 = 1$, com d diferente de um quadrado perfeito, possui solução não trivial em inteiros positivos, isto é, com $x + y\sqrt{d} > 1$.*

4.2 O Caso $x^2 - dy^2 = -1$

Se d não é um quadrado perfeito. A equação $x^2 - dy^2 = -1$ nem sempre possui solução, de fato se p é um divisor primo de d temos que $x^2 - dy^2 \equiv x^2 \equiv -1 (mod\ p)$, assim uma condição necessária para a existência de solução é que todo divisor primo de d seja 2 ou da forma $4k+1$. Porém, esta condição ainda não é suficiente. O seguinte teorema da uma relação entre as soluções fundamentais das equações $x^2 - dy^2 = 1$ e $x^2 - dy^2 = -1$ (como antes, a solução fundamental de $x^2 - dy^2 = -1$, quando esta equação tem solução inteira, é o menor número da forma $a + b\sqrt{d}$ com a e b inteiros positivos tais que $a^2 - db^2 = -1$).

Os Teoremas 4.2 e 4.3 demonstrados em [8] é referenciado no Teorema 5.5.

Teorema 4.2. *Seja d e m inteiros tal que $d > 0$, d não é um quadrado perfeito, e $|m| < \sqrt{d}$. E se $x^2 - dy^2 = m$, então $\frac{x}{y}$ é uma convergente da fração contínua simples de $\sqrt{d}$.*

Teorema 4.3. *Seja d um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Definimos $\alpha_k = \frac{(p_k + \sqrt{d})}{Q_k}$, $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$, $p_{k+1} = a_k Q_k - p_k$, e $Q_{k+1} = \frac{(d - p_{k+1}^2)}{Q_k}$, para $k = 1, 2, 3, ...$ quando $a_0 = \sqrt{d}$. Além disso, $\frac{p_k}{q_k}$ denota o k-ésimo convergente da expansão da fração contínua simples de $\sqrt{d}$. Então*

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1} Q_{k+1}.$$

O resultado do Lema de 4.1 será utilizado na demonstração do teorema 5.5.

Lema 4.1. *Se n é o comprimento do período da expansão em fração contínua simples de $\sqrt{d}$, então $Q_k = 1$ se, e somente se, $k = nj$, com $j = 1, 2, 3, ...$*

Demonstração. Se Q_{k+1} então $Q_k = \sqrt{d} + p_k = Q_0 + p_k$ portanto $a_k = a_0 + p_k$. Consequentemente;

$$p_{k+1} = a_k Q_k - p_k = a_0 = p_1,\ Q_{k+1} = \frac{d - p_{k+1}^2}{Q_k} = d - p_0^2 = Q_1$$

Como n é o comprimento do período de $\sqrt{d}$, $k+1 = 1+nj$, onde $j \geq 1$. Agora se $k = nj$, então $Q_{nj} = Q_0$, uma vez que o período de $\{Q_k\}$ é também n. □

5 Proposta

5.1 A Equação $mx - ly = c$

Para determinar as soluções da equação $mx - ly = c$ a dificuldade está relacionada em encontrar solução para a equação $mx - ly = 1$, pois para determinar a solução devemos verificar algumas hipóteses.

Assim basta multiplicar por uma constante $c \in \mathbb{N}^*$ e aplicar a Proposição 3.1 que obtemos a solução geral para $mx - ly = c$.

Diante da dificuldade de encontrar a solução para a equação $mx - ly = 1$. Este trabalho propõe uma forma de resolver este problema, onde utilizaremos frações contínuas para determinar as soluções. Inicialmente temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Todas equações diofantinas da forma $mx - ly = 1$, possuem as seguintes soluções inteiras:*

$$\begin{cases} x = q_{k-1} + q_k t \\ y = p_{k-1} + p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \text{ ímpar e } t \in \mathbb{Z} \text{ e } \begin{cases} x = -q_{k-1} + q_k t \\ y = -p_{k-1} + p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \text{ par e } t \in \mathbb{Z}$$

em que,

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \\ p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \end{cases}, k > 1.$$

Demonstração. Para a equação $mx - ly = 1$ ter solução é preciso que $mdc(m, l)|1$, ou seja, $mdc(m, l) = 1$, assim m e l são primos entre si, então podemos representar $\frac{m}{l}$ como uma fração contínua, onde $\frac{p_k}{q_k} = \frac{m}{l}$. Em uma fração contínua p_k e q_k são primos entre si, como $\frac{p_k}{q_k} = \frac{m}{l}$, assumimos que $p_k = m$ e $q_k = l$. ou seja,

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{m}{l} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Pela Proposição 2.1, temos as equações de diferença:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \quad k = 2, 3, 4, ...$$

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \text{ para todo } k > 1,$$

Portando segue que:

I) Para todo inteiro $k > 0$ ímpar

$$\begin{cases} x = q_{k-1} + q_k t \\ y = p_{k-1} + p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Fazendo as substituições, obtemos;

$$\begin{aligned} mx - ly = p_k x - q_k y &= p_k(q_{k-1} + q_k t) - q_k(p_{k-1} + p_k t) \\ &= p_k q_{k-1} + p_k q_k t - q_k p_{k-1} - q_k p_k t = p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} = 1. \end{aligned}$$

II) Para todo inteiro $k > 0$ par

$$\begin{cases} x = -q_{k-1} + q_k t \\ y = -p_{k-1} + p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Fazendo as substituições, obtemos;

$$\begin{aligned} mx - ly &= p_k x - q_k y = p_k(-q_{k-1} + q_k t) - q_k(-p_{k-1} + p_k t) \\ &= -p_k q_{k-1} + p_k q_k t + q_k p_{k-1} - q_k p_k t = -(p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}) \\ &= -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^{k-2} = 1. \end{aligned}$$

Para demonstrar as soluções usaremos a equação $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ da Proposição 2.1. Como concluímos $p_k = m$ e $q_k = l$, assim

$$mq_{k-1} - lp_{k-1} = (-1)^{k-1} \tag{6}$$

Portanto:

I) Para todo inteiro $k > 0$ ímpar

A partir de (6), temos $mq_{k-1} - lp_{k-1} = 1$, assim (q_{k-1}, p_{k-1}) é uma solução particular. Logo pela Proposição 3.1 a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = q_{k-1} + q_k t \\ y = p_{k-1} + p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

II) Para todo inteiro $k > 0$ par

A partir de (6), temos $mq_{k-1} - lp_{k-1} = -1$ multiplicando por (-1), resulta $m(-q_{k-1}) - l(-p_{k-1}) = 1$, assim $(-q_{k-1}, -p_{k-1})$ é uma solução particular. Logo pela Proposição 3.1 a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = -q_{k-1} + q_k t \\ y = -p_{k-1} + p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

□

Do Teorema 5.1 temos para todo inteiro $k > 0$ ímpar ou par, as soluções particulares, respectivamente:

$$\begin{cases} x_0 = q_{k-1} \\ y_0 = p_{k-1} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = -q_{k-1} \\ y_0 = -p_{k-1} \end{cases}$$

Diante disso, temos o teorema.

Teorema 5.2. *As equações diofantinas da forma $mx - ly = c$, possuem as seguintes soluções inteiras:*

$$\begin{cases} x = cq_{k-1} + q_k t \\ y = cp_{k-1} + p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \textit{ ímpar e } t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -cq_{k-1} + q_k t \\ y = -cp_{k-1} + p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \textit{ par e } t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Como (x_0, y_0) é solução particular da equação $mx - ly = 1$, temos $mx_0 - ly_0 = 1$. Multiplicando por $c \in \mathbb{N}^*$ na última igualdade obtemos,

$$cmx_0 - cly_0 = c \Longrightarrow m(cx_0) - l(cy_0) = c.$$

Logo (cx_0, cy_0) é a solução particular para a equação $mx - ly = c$, assim a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = cq_{k-1} + q_k t \\ y = cp_{k-1} + p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \text{ ímpar e } t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -cq_{k-1} + q_k t \\ y = -cp_{k-1} + p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \text{ par e } t \in \mathbb{Z}.$$

□

5.1.1 Aplicação

Exemplo 5.1. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação* $34x - 6y = 8$.

Solução: A equação tem solução pois $mdc(34,6)|8$, e é equivalente a $17x - 3y = 4$. Determinando a solução particular (x_0, y_0) para a equação $17x - 3y = 1$. Como $mdc(17,3) = 1$, podemos escrever a fração $\dfrac{17}{3}$ na forma da fração contínua simples. Pela divisão euclidiana temos:

$$\begin{aligned} 17 &= 3 \times 5 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{17}{3} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = [5,1,2] = [a_0, a_1, a_2].$$

Pela Proposição 2.1, temos as equações de diferença:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & \text{com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & \text{com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \qquad k = 2, 3, 4, ...$$

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \qquad \text{para todo } k > 1,$$

ou seja,

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 = 5 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 = 5 + 1 = 6 & q_1 = a_1 = 1 \\ p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 2 \times 6 + 5 = 17 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 2 \times 1 + 1 = 3. \end{array}$$

Substituindo os valores na equação $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$, para todo $k > 1$.
Obtemos;
Para $k = 2$ temos, $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 17 \times 1 - 3 \times 6 = -1$. Multiplicando por -1 obtemos $17(-1) - 3(-6) = 1$. Para determinar a solução da equação $17x - 3y = 4$, basta multiplicar por 4 a última equação, obtendo $17(-4) - 3(-24) = 4$, onde a solução particular é $x_0 = -4$ e $y_0 = -24$. Logo a solução geral será:

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -24 + 17t \end{cases} t \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x = c(-q_1) + q_2 t \\ y = c(-p_1) + p_2 t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.2. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação* $120x - 21y = 6$.

Solução: A equação possui solução pois $mdc(120,21)|6$, e é equivalente a $40x - 7y = 2$. Determinando a solução particular (x_0, y_0) para a equação $40x - 7y = 1$. Como $mdc(40,7) = 1$, podemos escrever a fração $\dfrac{40}{7}$ na forma da fração contínua simples. Pela divisão euclidiana temos:

$$\begin{aligned} 40 &= 7 \times 5 + 5 \\ 7 &= 5 \times 1 + 2 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{40}{7} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = [5, 1, 2, 2].$$

Pela Proposição 2.1, temos as equações de diferença:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & \text{com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & \text{com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \qquad k = 2, 3, 4, ...$$

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \quad \text{para todo } k > 1.$$

ou seja,

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 = 5 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 = 5 + 1 = 6 & q_1 = a_1 = 1 \\ p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 2 \times 6 + 5 = 17 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\ p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 2 \times 17 + 6 = 40 & q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 2 \times 3 + 1 = 7. \end{array}$$

Substituindo os valores na equação $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$, para todo $k > 1$.
Obtemos:
Para $k = 3$ temos, $p_3 q_2 - p_2 q_3 = 40 \times 3 - 7 \times 17 = 1$. Para determinar a solução da equação $40x - 7y = 2$, basta multiplicar por 2 a última equação, obtendo $40(6) - 7(34) = 2$, onde a solução particular é $x_0 = 6$ e $y_0 = 34$. Logo a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = 6 + 7t \\ y = 34 + 40t \end{cases} t \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x = cq_2 + q_3 t \\ y = cp_2 + p_3 t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

5.2 A Equação $mx + ly = c$

Para determinar as soluções da equação $mx + ly = c$ a dificuldade também está relacionada em encontrar a solução para $mx + ly = 1$, como comentado na subseção 5.1. Assim basta multiplicar por uma constante $c \in \mathbb{N}^*$ que temos a solução para $mx + ly = c$.

Teorema 5.3. *todas equações diofantinas da forma $mx + ly = 1$, possuem as seguintes soluções inteiras:*

$$\begin{cases} x = q_{k-1} + q_k t \\ y = -p_{k-1} - p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \textit{ ímpar e } t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -q_{k-1} + q_k t \\ y = p_{k-1} - p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \textit{ par e } t \in \mathbb{Z}.$$

em que,

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \textit{ com } p_0 = a_0 \textit{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \textit{ com } q_0 = 1 \textit{ e } q_1 = a_1 \\ p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \end{cases}, k > 1.$$

Demonstração. Para a equação $mx + ly = 1$ ter solução é preciso que $mdc(m, l)|1$, ou seja, $mdc(m, l) = 1$, assim m e l são primos entre si, então podemos representar $\frac{m}{l}$ como uma fração contínua, onde $\frac{p_k}{q_k} = \frac{m}{l}$. Em uma fração contínua o p_k e q_k são primos entre si, como $\frac{p_k}{q_k} = \frac{m}{l}$, assumimos que $p_k = m$ e $q_k = l$. Ou seja,

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{m}{l} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Pela Proposição 2.1, temos as equações de diferença:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & \text{com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & \text{com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \qquad k = 2, 3, 4, ...$$

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \qquad \text{para todo } k > 1,$$

Portando segue que:

I) Para todo inteiro $k > 0$ ímpar

$$\begin{cases} x = q_{k-1} + q_k t \\ y = -p_{k-1} - p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} mx + ly = p_k x + q_k y &= p_k(q_{k-1} + q_k t) + q_k(-p_{k-1} + -p_k t) \\ &= p_k q_{k-1} + p_k q_k t - q_k p_{k-1} - q_k p_k t = p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} = 1. \end{aligned}$$

II) Para todo inteiro $k > 0$ par

$$\begin{cases} x = -q_{k-1} + q_k t \\ y = p_{k-1} - p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Temos,

$$\begin{aligned} mx + ly = p_k x + q_k y &= p_k(-q_{k-1} + q_k t) + q_k(p_{k-1} - p_k t) \\ &= -p_k q_{k-1} + p_k q_k t + q_k p_{k-1} - q_k p_k t = -(p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}) \\ &= -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^{k-2} = 1. \end{aligned}$$

Para exibirmos as soluções usaremos a equação $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ da Proposição 2.1. Como concluímos $p_k = m$ e $q_k = l$, assim

$$m q_{k-1} - l p_{k-1} = (-1)^{k-1} \tag{7}$$

Portanto:

I) Para todo inteiro $k > 0$ ímpar

A partir de (7), temos $mq_{k-1} - lp_{k-1} = 1$ equivalente a $mq_{k-1} + l(-p_{k-1}) = 1$ assim $(q_{k-1}, -p_{k-1})$ é uma solução particular. Logo pela Proposição 3.1 a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = q_{k-1} + q_k t \\ y = -p_{k-1} + p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

II) Para todo inteiro $k > 0$ par

A partir de (6), temos $mq_{k-1} - lp_{k-1} = -1$, multiplicando por (-1), resulta $m(-q_{k-1}) + lp_{k-1} = 1$, assim $(-q_{k-1}, p_{k-1})$ é uma solução particular. Logo pela Proposição 3.1 a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = -q_{k-1} + q_k t \\ y = p_{k-1} + p_k t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

□

Do Teorema 5.3 obtemos para todo inteiro $k > 0$ ímpar ou par, as soluções particulares, respectivamente:

$$\begin{cases} x_0 = q_{k-1} \\ y_0 = -p_{k-1} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = -q_{k-1} \\ y_0 = p_{k-1} \end{cases}.$$

Diante disso temos o seguinte teorema:

Teorema 5.4. *As equações diofantinas da forma $mx + ly = c$, possuem as seguintes soluções inteiras:*

$$\begin{cases} x = cq_{k-1} + q_k t \\ y = -cp_{k-1} - p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \textit{ ímpar e } t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -cq_{k-1} + q_k t \\ y = cp_{k-1} - p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \textit{ par e } t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Como (x_0, y_0) é solução particular da equação $mx + ly = 1$, temos $mx_0 + ly_0 = 1$. Multiplicando por $c \in \mathbb{N}^*$ obtemos,

$$cmx_0 + cly_0 = c \Longrightarrow m(cx_0) + l(cy_0) = c.$$

Logo (cx_0, cy_0) é a solução particular para a equação $mx + ly = c$, assim a solução geral é dada como:

$$\begin{cases} x = cq_{k-1} + q_k t \\ y = -cp_{k-1} - p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \text{ ímpar e } t \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -cq_{k-1} + q_k t \\ y = cp_{k-1} - p_k t \end{cases}, \forall k > 0 \text{ par e } t \in \mathbb{Z}.$$

□

5.2.1 Aplicação

Exemplo 5.3. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação $48x + 7y = 5$.*

Solução: A equação possui solução pois $mdc(48,7)|5$. Determinando a solução particular (x_0, y_0). Como $mdc(48,7) = 1$, podemos escrever a fração $\dfrac{48}{7}$ na forma da fração contínua simples. Pela divisão euclidiana temos:

$$\begin{aligned} 48 &= 7 \times 6 + 6 \\ 7 &= 6 \times 1 + 1 \\ 6 &= 1 \times 6 + 0, \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{48}{7} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}} = [6, 1, 6].$$

Pela Proposição 2.1, temos as equações de diferença:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{array} \right. , k = 2, 3, 4, ...$$

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \text{para todo } k > 1,$$

ou seja,

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 = 6 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 = 6 + 1 = 7 & q_1 = a_1 = 1 \\ p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 6 \times 7 + 6 = 48 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 6 \times 1 + 1 = 7 \end{array}$$

Substituindo os valores na equação $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$, obtemos:
Para $k = 2$ temos, $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 48 \times 1 - 7 \times 7 = -1 = 48 \times (-1) + 7 \times 7 = 1$. Para determinar a solução da equação $48x - 7y = 5$, basta multiplicar por 5 a equação $48(-1) + 7(7) = 1$, obtendo $48(-5) + 7(35) = 5$, onde a solução particular é $x_0 = -5$ e $y_0 = 35$. Logo a solução geral é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -5 + 7t \\ y = 35 - 48t \end{array} \right. \text{ com } t \in \mathbb{Z}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -cq_1 + q_2 t \\ y = cp_1 - p_2 t \end{array} \right. \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.4. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação* $54x + 21y = 906$.

Solução: A equação possui solução pois $mdc(54, 21)|906$. A equação $54x + 21y = 906$ é equivalente a $18x + 7y = 302$. Determinando a solução particular (x_0, y_0). Como $mdc(18, 7) = 1$, podemos escrever a fração $\dfrac{18}{7}$ na forma da fração contínua simples. Pela divisão euclidiana temos:

$$\begin{aligned} 18 &= 7 \times 2 + 4 \\ 7 &= 4 \times 1 + 3 \\ 4 &= 3 \times 1 + 1 \\ 3 &= 1 \times 3 + 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{18}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [2, 1, 1, 3].$$

Pela Proposição 2.1, temos as equações de diferença:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases}, k = 2, 3, 4, ...$$

Além disso,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \quad \text{para todo } k > 1.$$

ou seja,

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 = 2 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 & q_1 = a_1 = 1 \\ p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 1 \times 3 + 2 = 5 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\ p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 3 \times 5 + 3 = 18 & q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 3 \times 2 + 1 = 7 \end{array}$$

Substituindo os valores na equação $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$, para todo $k > 1$.
Obtemos;
Para $k = 3$ temos, $p_3 q_2 - p_2 q_3 = 18 \times 2 - 7 \times 5 = 18 \times 2 + 7 \times (-5) = 1$. Para determinar a solução da equação $18x + 7y = 302$, basta multiplicar por 302 a equação $18(2) + 7(-5) = 1$, obtendo $48(604) + 7(-1510) = 302$, onde a solução particular é $x_0 = 604$ e $y_0 = -1510$. Logo a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = 604 + 7t \\ y = -1510 - 18t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = cq_2 + q_3 t \\ y = -cp_2 - p_3 t \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

5.3 Equação de Pell $x^2 - dy^2 = \pm 1$

Aqui mostraremos uma proposta de resolução da equação de Pell utilizando frações contínuas.

Teorema 5.5. *Seja d um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Seja $\frac{p_k}{q_k}$ o k-ésimo convergente da fração contínua simples de $\sqrt{d}$, com $k = 2, 3, 4, ...$ e seja n o comprimento do período desta fração contínua. Então temos:*

- *Para a equação $x^2 - dy^2 = 1$ e $j = 1, 2, 3, ...$ as seguintes soluções positivas:*

$$\begin{cases} x = p_{jn-1} \quad y = q_{jn-1}, \quad \textit{caso } n \textit{ par} \\ x = p_{2jn-1} \quad y = q_{2jn-1}, \quad \textit{caso } n \textit{ ímpar.} \end{cases}$$

- *Para a equação $x^2 - dy^2 = -1$ e $j = 1, 2, 3, ...$ as seguintes soluções positivas:*

$$\begin{cases} \textit{Não existe solução, caso } n \textit{ seja par, ou} \\ x = p_{(2j-1)n-1} \quad y = q_{(2j-1)n-1}, \textit{caso } n \textit{ ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. A partir do Teorema 4.2, temos que $\frac{x}{y}$ é uma convergente da fração contínua simples de $\sqrt{d}$, ou seja, $x = p_k$ e $y = q_k$ e utilizaremos a equação $p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1} Q_{k+1}$ do Teorema 4.3, para analisar os casos;

I) Equação $x^2 - dy^2 = 1$

i)Para n par temos;

$$\begin{aligned} x^2 - dy^2 &= p_{jn-1}^2 - dq_{jn-1}^2 \\ &= (-1)^{jn} Q_{jn} \\ &= (-1)^{jn} \\ &= 1. \end{aligned}$$

ii) Para n ímpar temos;

$$\begin{aligned} x^2 - dy^2 &= p_{2jn-1}^2 - dq_{2jn-1}^2 \\ &= (-1)^{2jn} Q_{2jn} \\ &= (-1)^{2jn} \\ &= 1. \end{aligned}$$

II) Equação $x^2 - dy^2 = -1$

i) Para n ímpar temos;

$$\begin{aligned} x^2 - dy^2 &= p_{(2j-1)n-1}^2 - dq_{(2j-1)n-1}^2 \\ &= (-1)^{(2j-1)n} Q_{(2j-1)n} \\ &= (-1)^{2jn}(-1)^{-n} \\ &= (-1)^n \\ &= -1. \end{aligned}$$

Para mostrar que as equações $x^2 - dy^2 = \pm 1$ não têm outras soluções, utilizaremos novamente a equação

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1} Q_{k+1},$$

do Teorema 4.3.

Assim para $Q_{k+1} = 1$, temos a equação $p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1}$. O Lema 4.1 mostra que $Q_{k+1} = 1$, se, e somente se, $n|(k+1)$.

Portanto;

• Para equação $x^2 - dy^2 = 1$, $(k+1)$ será par, assim:

◦ Se n for par, temos $k+1 = nj$, com $j = 1, 2, 3, ...$ Consequentemente, $k = nj - 1$.

◦ Se n for ímpar, temos $k+1 = ns$, onde $s = 2j$, $j = 1, 2, 3, ...$ Consequentemente, $k = sn - 1 = 2nj - 1$.

• Para equação $x^2 - dy^2 = -1$, $(k+1)$ será ímpar, assim:

◦ Se n for par, temos $k+1 = nj$, impossível $(k+1)$ ser ímpar, pois se n é par $k+1$ será par para $j = 1, 2, 3, ...$

◦ Se n for ímpar, temos $k+1 = nt$, com $t = 2j - 1$ para $j = 1, 2, 3, ...$ (como n é ímpar t tem que ser ímpar para $k+1$ ser ímpar). Consequentemente, $k = tn - 1 = (2j-1)n - 1$.

Assim provamos que as soluções propostas são soluções para as equações $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

$\square$

5.3.1 Aplicação

Exemplo 5.5. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação* $x^2 - 15y^2 = 1$.

Solução: Como 15 não é um quadrado perfeito, podemos escrever $\sqrt{15}$ como uma fração contínua. Ou seja,

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{x_1} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\sqrt{15}+3}{6} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{15}+3}{6}}$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_2}} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \sqrt{15}+3 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{15}+3}}$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{x_3}}} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{\sqrt{15}+3}{6} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{15}+3}{6}}}} \cdots$$

Assim, pela Definição 2.6 os x_{ks} com $k = 2, 3, 4, ...$ irão repetir,

$$\sqrt{15} = [3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, ...] = [3; \overline{1, 6}].$$

Portanto o comprimento do período dessa fração contínua é $n = 2$. Utilizando as equações do Proposição 2.1 obtém-se:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{n-k}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \quad k = 2, 3, 4, ...$$

Temos

$$\begin{array}{ll} p_0 = 3 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_1 a_0 + 1 = 1 \times 3 + 1 = 4 & q_1 = a_1 = 1 \\ p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 6 \times 4 + 3 = 27 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 6 \times 1 + 1 = 7 \\ p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 1 \times 27 + 4 = 31 & q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 1 \times 7 + 1 = 8 \\ p_4 = a_4 p_3 + p_2 = 6 \times 31 + 27 = 213 & q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 6 \times 8 + 7 = 55 \\ p_5 = a_5 p_4 + p_3 = 1 \times 213 + 31 = 244 & q_5 = a_5 q_4 + q_3 = 1 \times 55 + 8 = 63 \\ p_6 = a_6 p_5 + p_4 = 6 \times 244 + 213 = 1677 & q_6 = a_6 q_5 + q_4 = 6 \times 63 + 55 = 433 \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Logo, as soluções para a equação $x^2 - 15y^2 = 1$ são

$$(p_1, q_1) = (4, 1), \text{ pois } 4^2 - 15 \times 1^2 = 1$$

$$(p_3, q_3) = (31, 8), \text{ pois } 31^2 - 15 \times 8^2 = 1$$

$$(p_5, q_5) = (244, 63), \text{ pois } 244^2 - 15 \times 63^2 = 1$$

$$\cdots$$

$$(p_{jn-1}, q_{jn-1}) \text{ para } j = 1, 2, 3, ...$$

Exemplo 5.6. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação* $x^2 - 2y^2 = 1$.

Solução: Como 2 não é um quadrado perfeito, podemos escrever $\sqrt{2}$ como uma fração contínua. Ou seja,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{2}+1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \sqrt{2}+1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3}}} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \sqrt{2}+1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}\cdots}}}$$

Assim, pela Definição 2.6 os x_{ks} com $k = 1, 2, 3, ...$ irão repetir,

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...] = [1; \overline{2}].$$

Portanto o comprimento do período dessa fração contínua é $n = 1$. Utilizando as equações da Proposição 2.1 obtem-se:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \quad k = 2, 3, 4, ...$$

Temos

$$\begin{array}{ll}
p_0 = 1 & q_0 = 1 \\
p_1 = a_1 a_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 & q_1 = a_1 = 2 \\
p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 2 \times 3 + 1 = 7 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 2 \times 2 + 1 = 5 \\
p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 2 \times 7 + 3 = 17 & q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 2 \times 5 + 2 = 12 \\
p_4 = a_4 p_3 + p_2 = 2 \times 17 + 7 = 41 & q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 2 \times 12 + 5 = 29 \\
p_5 = a_5 p_4 + p_3 = 2 \times 41 + 17 = 99 & q_5 = a_5 q_4 + q_3 = 2 \times 29 + 12 = 70 \\
p_6 = a_6 p_5 + p_4 = 2 \times 99 + 41 = 239 & q_6 = a_6 q_5 + q_4 = 2 \times 70 + 29 = 169 \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

Logo, as soluções para a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ são

$$(p_1, q_1) = (3, 2), \text{ pois } 3^2 - 2 \times 2^2 = 1$$

$$(p_3, q_3) = (17, 12), \text{ pois } 17^2 - 2 \times 12^2 = 1$$

$$(p_5, q_5) = (99, 70), \text{ pois } 99^2 - 2 \times 70^2 = 1$$

$$\cdots$$

$$(p_{2jn-1}, q_{2jn-1}) \text{ para } j = 1, 2, 3, ...$$

Exemplo 5.7. *Utilizando frações contínuas resolveremos a equação* $x^2 - 82y^2 = -1$.

Solução:
Como 82 não é um quadrado perfeito, podemos escrever $\sqrt{82}$ como uma fração contínua. Ou seja,

$$\sqrt{82} = 9 + \frac{1}{x_1} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{82} + 9 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = 9 + \frac{1}{\sqrt{82} + 9}$$

$$\sqrt{82} = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{x_2}} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \sqrt{82} + 9 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{82} = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\sqrt{82} + 9}}$$

$$\sqrt{82} = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{x_3}}} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \sqrt{82} + 9 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{82} = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\sqrt{82} + 9} \cdots}}}$$

Assim, pela Definição 2.6 os x_{ks} com $k = 1, 2, 3, ...$ irão repetir,

$$\sqrt{82} = [9; 18, 18, 18, ...] = [9; \overline{18}].$$

Portanto o comprimento do período dessa fração contínua é $n = 1$. Utilizando as equações da Proposição 2.1 obtem-se:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ com } p_0 = a_0 \text{ e } p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ com } q_0 = 1 \text{ e } q_1 = a_1 \end{cases} \quad k = 2, 3, 4, ...$$

Temos

$p_0 = 9$
$p_1 = a_1 a_0 + 1 = 18 \times 9 + 1 = 163$
$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 18 \times 163 + 9 = 2943$
$p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 18 \times 2943 + 163 = 53137$
$p_4 = a_4 p_3 + p_2 = 18 \times 53137 + 2943 = 959409$
$p_5 = a_5 p_4 + p_3 = 18 \times 959409 + 53137 = 17322499$
$p_6 = a_6 p_5 + p_4 = 18 \times 17322499 + 959409 = 312764391$
$\cdots$
$q_0 = 1$
$q_1 = a_1 = 18$
$q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 18 \times 18 + 1 = 325$
$q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 18 \times 325 + 18 = 5868$
$q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 18 \times 5868 + 325 = 105949$
$q_5 = a_5 q_4 + q_3 = 18 \times 105949 + 5868 = 1912950$
$q_6 = a_6 q_5 + q_4 = 18 \times 1912950 + 105949 = 34539049$
$\cdots$

Logo, as soluções para a equação $x^2 - 82y^2 = -1$ são

$$(p_0, q_0) = (9, 1), \text{ pois } 9^2 - 82 \times 1^2 = -1$$
$$(p_2, q_2) = (2943, 325), \text{ pois } 2943^2 - 82 \times 325^2 = -1$$
$$(p_4, q_4) = (959409, 105949), \text{ pois } 959409^2 - 82 \times 105949^2 = -1$$
$$\cdots$$
$$(p_{(2j-1)n-1}, q_{(2j-1)n-1}) \text{ para } j = 1, 2, 3, ...$$

6 Considerações Finais

Qualquer tema dentro da Teoria dos Números desperta interesse nos matemáticos. Neste trabalho, foram desenvolvidos alguns tópicos como equações diofantinas lineares, equação de Pell e frações contínuas que poderão ser aprofundados de acordo com o interesse dos estudiosos ou necessidade acadêmica.

A abordagem deste trabalho está relacionada às soluções das equações diofantinas lineares e das equações de Pell.

Existem alguns métodos tradicionais para determinar estas soluções como o algoritmo euclidiano. No entanto, a proposta deste trabalho e diferenciada das tradicionais, uma vez que aborda soluções com a utilização das frações contínuas.

Para auxiliar no entendimento da resolução das equações diofantinas lineares e das equações de pell utilizando os conceitos e as propriedades das frações contínuas, este trabalho desenvolveu todo o conteúdo necessário, como definições, lemas, corolários, proposições, teoremas e outros para facilitar o entendimento da proposta.

Portanto, qualquer graduando em ciências exatas que despertar interesse pelo tema proposto, poderá utilizar este trabalho como objeto de estudo.

7 Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade ofertada, à família por mostrar que mesmo com as dificuldades é possível superar barreiras.

Um agradecimento especial ao meu pai o qual sempre me mostrou a importância de estudar; e à minha mãe, que mesmo não compreendendo as minhas conquistas, comemorava.

Aos meus amigos do mestrado, pela paciência e ajuda.
Às pessoas que de alguma forma me ajudaram a percorrer este caminho, em especial o Luiz Gustavo Perona.

A todos os professores que estavam presentes em minha vida estudantil.
Ao orientador José Angel Dávalos Chuquipoma, pela ajuda e compreensão das minhas dificuldades.

Referências

[1] HEFEZ, Aramo; **Elementos de Aritmética**: Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática(SBM), 2006.

[2] ELAYDI, Saber; **An Introduction To Difference Equations**: Texas, Springer, 2004.

[3] ANDRÉS, J.J.A; FERNANDES, C. M. S; **Anais da semana da matemática. VIII SEMAT**; Minas Gerais, 2013.

[4] GUSTAVO, C.T.A.M; **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas. Colóquio da Região Sudeste**: Rio de Janeiro(IMPA), 2011.

[5] Plínio, J.O.S; **Introdução à Teoria dos Números**:Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1998.

[6] Brochero, F.M; Gustavo, C.M; Saldanha, N; Tengan, E; **Teoria dos números(um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro)**: (IMPA), 2013.

[7] Dias, B; Pires, G; **Frações Contínuas, Determinantes e Equações Diofantinas Lineares**: Tocantins, 2015.

[8] Kenneth.H; **Elementary Number Theory and Its Applications**: United States of America, Reading, 1984.

[9] H. Sergey; **Orthogonal Polynomials and Continued Fractions**: United States of America, University Press, 2008.