2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Pascal, Fibonacci e Geometria

Dennis de Oliveira Ayres Junior [1]
Fábio Alexandre de Matos[2]

Resumo: O triângulo de Pascal possui propriedades interessantes, dentre as quais, as somas de seus termos em diagonais ou retas inclinadas resultam em números da sequência de Fibonacci. Atribuindo-se um sistema não ortogonal de coordenadas ao triângulo de Pascal, podem-se traçar retas, cujas soluções de suas equações resultam em somatórios de números binomiais que, por sua vez, fornecem os números da sequência de Fibonacci. Este trabalho apresenta o processo de obtenção destes resultados.

Palavras-chave: Fibonacci, Triângulo de Pascal, Geometria, Números binomiais.

1 Introdução

Os notáveis números de Fibonacci, presentes na natureza, foram descobertos por Leonardo de Pisa (Fibonacci), no século XII. Já no século XVII , Blaise Pascal descreveu uma apresentação tabular conveniente para os coeficientes binomiais, denominada triângulo de Pascal onde, curiosamente, aparecem os números da sequência de Fibonacci. Ainda, no século XVII, René Descartes sugeriu a fusão da álgebra com a geometria, fato que gerou a geometria analítica e o sistema de coordenadas cartesianas, mesma época em que Isaac Newton formulou o teorema hoje conhecido como binômio de Newton. O presente trabalho reune a genialidade destes talentosos e renomados matemáticos, relacionando o triângulo de Pascal, os números de Fibonacci e a geometria, através de um sistema não ortogonal de coordenadas.

O triângulo de Pascal, posto em forma de triângulo retângulo, possui propriedades interessantes. Dentre as quais podemos destacar que as somas de seus termos em diagonais ou retas inclinadas resultam em números da sequência de Fibonacci.

Nessa perspectiva, atribuindo-se um sistema não ortogonal de coordenadas ao triângulo de Pascal, podem-se traçar retas inclinadas, cujas soluções de suas equações resultam em

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, promat.dennis@gmail.com
[2]Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, fabio.ufsj@gmail.com

somatórios de números binomiais que, por sua vez, fornecem os números da sequência de Fibonacci. ¨

2 Números binomiais e Sequência de Fibonacci

Começaremos esta seção apresentando os números binomiais e uma forma particular de representá-los.

2.1 Número binomial

Considere inicialmente a expressão $(1+X)^n$, onde X é uma indeterminada e n é um número natural. O desenvolvimento dessa potência é um polinômio de grau n em X, cujos coeficientes são números naturais:

$$(1+X)^n = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$$

Os coeficientes a_i, $i = 0, \dots, n$, serão chamados de números binomiais e denotados, usualmente, pelos símbolos $a_i = \binom{n}{i}$. Se $i > n$, definimos $\binom{n}{i} = 0$.

Lema 2.1 (Relação de Stifel) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i \leq n$, tem-se que*

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Demonstração: Para $i = n$, a relação acima é trivialmente verificada. Para $0 \leq i \leq n$, as relações decorrem, imediatamente, das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}X + ... + \binom{n+1}{n}X^n + \binom{n+1}{n+1}X^{n+1} &= \\ (1+X)^{n+1} = (1+X)[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + ... + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n] &= \\ \binom{n}{0} + [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}]X + ... + [\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}]X^n + \binom{n}{n}X^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Lema 2.2 *Para todos $n, i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq n$, tem-se que*

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)...(n-i+1)}{i!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Demonstração: Vamos provar isto por indução sobre n. A igualdade é trivialmente verificada para $n = 1$. Suponha que as igualdades sejam válidas para algum $n \in \mathbb{N}$ e todo i com $1 \leq i \leq n$. Pela relação de Stifel, temos, para $i \leq n$, que

$$\begin{aligned}
i!\binom{n+1}{i} &= i(i-1)!\binom{n}{i-1} + i!\binom{n}{i} \\
&= in(n-1)...(n-i+2) + n(n-1)...(n-i+1) \\
&= n(n-1)...(n-i+2)(i+n-i+1) \\
&= (n+1)n(n-1)...(n+1-i+1),
\end{aligned}$$

o que prova a igualdade para $n+1$ e para todo i com $1 \leq i \leq n$. Uma verificação direta mostra que a fórmula também vale para $i = n+1$ e, consequentemente, vale o resultado para todo n e todo i com $1 \leq i \leq n$.

$\square$

Teorema 2.1 (Binômio de Newton) *Sejam a e b quaisquer números reais e $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução em n. Para $n = 1$, temos:

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1, \quad P(1) \text{ é verdadeira.}$$

Supondo que o resultado vale para n, temos que

$$\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Vamos provar que o resultado vale para $n+1$. E para este fim, usaremos que

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n.$$

Multiplicando todos os termos do desenvolvimento de $(a+b)^n$ por $a+b$, vem:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = \; & \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{0}b + \binom{n}{1}a^n b + \\
& \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + ... \\
& + \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + ... \\
& + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}
\end{aligned}$$

Os termos podem ser associados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1} &= \binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\ &= [\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}]a^{n+1-k}b^k \end{aligned}$$

Aplicado a relação de Stífel, 3.1, nos termos dentro dos colchetes, vem:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

Portanto, a proposição também é verdadeira para $n+1$, o que completa a demonstração.

$\square$

***Observação* 2.1** *Empregando-se o sinal de somatória, a fórmula do binômio de Newton pode ser assim escrita como*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Além disso, temos que

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (a-b)^n = [a+(-b)]^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-1b)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-1)^i(b)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}(b)^i \end{aligned}$$

3 Triângulo de Pascal e números de Fibonacci

Nesta seção apresentaremos o triêngulo de Pascal e sua relação com a sequencia de Fibonacci.

3.1 Triângulo de Pascal

Os números binomiais, apresentados na seção anterior, podem ser dispostos ordenadamente em uma tabela, denominada triângulo de Pascal (Figura 1).

Figura 1: Triangulo de Pascal

	0	1	2	3	4	5	6	...	n
0	$\binom{0}{0}$								
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$		...			$\binom{n}{n}$

No decorrer do texto, usaremos em alguns casos a notação $\binom{n}{r \quad s}$, onde $s = n - r$. Neste caso, temos pela simetria dos números binomais que

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{s} = \binom{n}{r \quad s} = \frac{n!}{r!s!},$$

onde $r + s = n \geq 0$.

Por convenção, adotaremos que

$$\binom{n}{r \quad s} = 0, \quad \text{se} \;\; r < 0 \;\; \text{ou} \;\; s < 0.$$

Diante do exposto no parágrafo anterior, temos que a relação de Stífel, fica agora representada da seguinte maneira:

$$\binom{n-1}{r-1 \quad s} + \binom{n-1}{r \quad s-1} = \binom{n}{r \quad s}.$$

3.2 Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

Considere (u_n), $n \in \mathbb{N}$ onde $n \geq 0$, a sequência definida pelas seguintes relações de recorrência:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \;\; u_0 = u_1 = 1$$

A sequência acima é chamada de sequência de Fibonacci.

Temos a seguir um resultado que relaciona a sequência de Fibonacci com o Triângulo de Pascal.

Teorema 3.1 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ onde $n \geq 0$, temos que*

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ... + \binom{n-k}{k},$$

onde

$$k \text{ é o maior inteiro tal que } k \leq \frac{n}{2}, \text{ isto é, } k = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Demonstração: Observe que se $n = 0$ ou $n = 1$, temos que $F_0 = F_1 = 1$. Precisamos então mostrar que vale a relação de recorrência para a sequência definida. Considere então

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ... + \binom{n-k}{k}$$

$$F_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n+1-p}{p}$$

$$F_{n+2} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n+2-s}{s}$$

onde k, p e s são os maiores números inteiros que satisfazem

$$\begin{cases} k \leq n-k \\ p \leq n+1-p \\ s \leq n+2-s \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} k \leq \frac{n}{2} \\ p \leq \frac{n+1}{2} \\ s \leq \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1 \end{cases}$$

Note que quando n é ímpar, temos $k = \frac{n-1}{2}$ e $p = \frac{n+1}{2} = k = \frac{n-1+2}{2} = k + 1$. E quando n é par temos que $k = \frac{n}{2} = p$. Ainda $s = k + 1$ independente da paridade de n. Iremos verificar que a soma de F_n e F_{n+1} é igual a F_{n+2}.

1º Caso: n é ímpar.

Temos:

$$\begin{aligned} F_{n+1}+F_n &= \binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+...+\binom{n+1-(k+1)}{k+1} \\ &\quad +\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+...+\binom{n-k}{k} \\ &= \binom{n+1}{0}+[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}]+[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}] \\ &\quad +...+[\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k+1}]. \end{aligned}$$

Aplicando a relação de *Stifel* aos números binomiais dentro dos colchetes, vem:

$$F_{n+1}+F_n = \binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n+1-k}{k+1}$$

Usando o fato de que $s=k+1$ e que todo número binomial com o denominador 0 tem o mesmo valor, 1, obtemos

$$F_{n+1}+F_n = \binom{n+2}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n+2-s}{s} = F_{n+2}$$

2º Caso: n é par.

Como $k=p$, F_{n+1} e F_n terão o mesmo número de parcelas. Então, como no caso anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} F_{n+1}+F_n &= \binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+...+\binom{n+1-k}{k} \\ &\quad +\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+...+\binom{n+1-k}{k-1}+\binom{n-k}{k} \\ &= \binom{n+1}{0}+[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}]+[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}] \\ &\quad +...+[\binom{n+1-k}{k-1}+\binom{n+1-k}{k}]+\binom{n-k}{k} \end{aligned}$$

Novamente, aplicando a relação de Stifel, 3.1, aos números binomiais dentro dos colchetes, concluímos que:

$$F_{n+1}+F_n = \binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n+2-k}{k}+\binom{n-k}{k}$$

Lembrando que $2k=n$ e $s=k+1$, obtemos $n+2-k=n+2-(s-1)$, $n-k=k$ e $n+2-s=2k+2-s=2s-s=s$. Dai:

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0}, \quad \binom{n+2-k}{k} = \binom{n+2-(s-1)}{s-1}$$

e

$$\binom{n-k}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{s}{s} = \binom{n+2-s}{s}.$$

$$\begin{aligned} F_(n+1) + F_n &= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + ... \\ &+ \binom{n+2-(s-1)}{s-1} + \binom{n+2-s}{s} \\ &= F_(n+2) \end{aligned}$$

Portanto, $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ também no caso em que n é par.

$\square$

4 Números de Fibonacci e Geometria

Nesta seção apresentaremos o principal resultado do trabalho. Este resultado foi extraído de [1] e relaciona a sequência de Fibonacci com soluções inteiras positivas de equações diofantinas lineares. Faremos uma breve apresentação das equações diofantinas lineares a seguir.

4.1 Equações Diofantinas Lineares

A resolução de vários problemas de aritmética, por vezes, depende da resolução de equações, nas variáveis X e Y, do tipo $aX + bY = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \cdot b \neq 0$. Tais equações são chamadas *equações diofantinas lineares* em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox. 300 DC). Nem sempre estas equações possuem solução. Por exemplo, a equação $2x + 4y = 7$ não possui nenhuma solução x_0, y_0 em números inteiros pois, caso contrário, teríamos $2x_0 + 4y_0$ par e, portanto, nunca igual a 7.

Para determinar uma solução da equação $aX + bY = c$, devemos encontrar números inteiros x_0 e y_0 que façam com que $aX + bY = c$ seja verdadeira. Vejamos em que condições tal equação possui soluções e, caso as tenha, como determiná-las.

Teorema 4.1 *A equação diofantina $aX + bY = c$ admite solução se, e somente se, $mdc(a, b)$ divide c.*

Demonstração: Suponha que a equação admita uma solução x_0, y_0. Então vale a igualdade $ax_0+by_0 = c$. Como $mdc(a, b)$ divide a e divide b, segue que ele divide ax_0+by_0, logo divide c.

Reciprocamente, suponha que $mdc(a, b)$ divida c, ou seja, $c = mdc(a, b)\cdot d$, para algum inteiro d. Por outro lado, sabemos que existem inteiros n e m tais que:

$$mdc(a, b) = a \cdot n + b \cdot m.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por d, obtemos:

$$c = mdc(a, b) \cdot d = a \cdot (n \cdot d) + b \cdot (m \cdot d).$$

Logo, a equação diofantina $aX + bY = c$ admite pelo menos a solução $x = n \cdot d$ e $y = m \cdot d$.

□

***Observação* 4.1** *Segue diretamente do resultado acima que se a e b são números inteiros tais que* $mdc(a, b) = 1$, *então toda equação diofantina* $aX + bY = c$ *possui solução, independentemente do valor de* c. *Portanto, podemos nos preocupar somente com as equações* $aX+bY = c$, *com* $mdc(a, b) = 1$, *uma vez que o conjunto solução da* $aX+bY = c$ *é igual ao da equação* $a_1X + b_1Y = c_1$, *onde* $a_1 = \dfrac{a}{mdc(a, b)}, b_1 = \dfrac{b}{mdc(a, b)}$ *e* $c_1 = \dfrac{c}{mdc(a, b)}$.

As soluções de uma equação diofantina como acima podem ser determinadas a partir da uma solução particular qualquer x_0, y_0, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.1 *Seja* x_0, y_0 *uma solução da equação* $aX + bY = c$, *onde* $mdc(a, b) = 1$. *Então, as soluções* x, y *em* $\mathbb{Z}$ *da equação são*

$$x = x_0 + tb, \;\; y = y_0 - ta; \;\; t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Seja x, y uma solução de $aX + bY = c$, logo,

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c$$

Consequentemente,

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y). \tag{1}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue-se que b divide $(x - x_0)$. Logo,

$$x - x_0 = tb, \;\; t \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo a expressão de $x - x_0$ acima em (1), segue-se que

$$y_0 - y = ta,$$

o que prova que as soluções são do tipo exibido.

Por outro lado, x, y, como no enunciado, é solução, pois

$$ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - ta) = ax_0 + by_0 = c$$

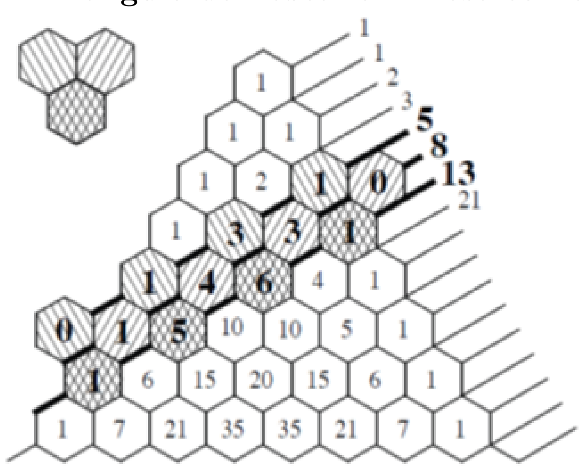
Segue-se da proposição acima que a equação diofantina $aX + bY = c$, com $mdc(a, b) = 1$, admite infinitas soluções em $\mathbb{Z}$.

$\square$

A partir de agora, vamos relacionar os números da sequência de Fibonacci com soluções positivas de equações diofantinas lineares. Para tanto, serão inseridas coordenadas para encontrar os elementos no triângulo de Pascal.

A Figura 2 mostra os números binomiais $\left(\begin{smallmatrix} & n & \\ r & & s \end{smallmatrix}\right)$, dados por seus valores, dispostos em um mosaico hexagonal, formando o triângulo de Pascal. Nesta figura, observa-se também que as somas dos termos que ocupam os centros dos hexágonos localizados nas retas inclinadas, resultam nos números de Fibonacci.

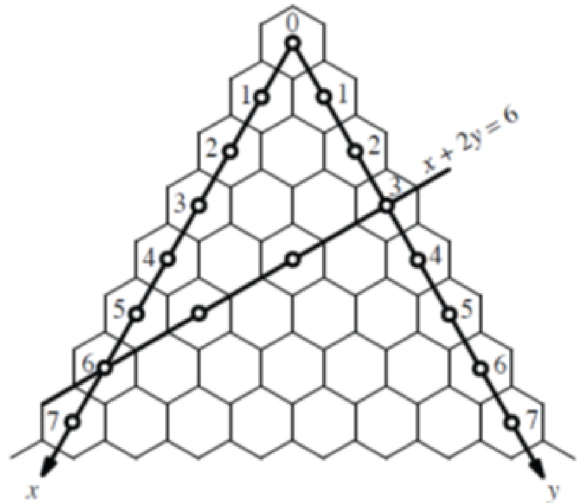
Figura 2: Triângulo de Pascal em mosaico hexagonal



É possível implementar um sistema não ortogonal de coordenadas (x, y), no triângulo de Pascal, conforme ilustra a Figura 3, onde se podem traçar retas inclinadas e obter suas respectivas equações.

Nesse sistema não ortogonal de coordenadas (x, y), as retas inclinadas da Figura 3 possuem a equação diofantina linear:

Figura 3: Sistema não ortogonal de coordenadas (x, y)



$$X + 2Y = k, \text{ onde } k \geq 0.$$

Sabemos que os hexágonos em mosaico possuem, em seu centro, números inteiros não negativos, pois são números binomiais. Obteremos, a partir desse fato, uma representação geométrica dos números da sequência de Fibonacci.

Antes de entrarmos em detalhes dos resultados, vamos apresentar algumas notações adicionais.

Para uma equação diofantina linear $X + 2Y = k, \text{ onde } k \geq 0$, denotaremos por $N(k)$ o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = k\}$, isto é, $N(k)$ é conjunto de pares de números naturais que são soluções da equação diofantina $X + 2Y = k, \text{ onde } k \geq 0$. Ainda, denotaremos por S_k a soma $\displaystyle\sum_{(x,y)\in N(k)} \binom{x+y}{y \quad x}$.

Considerando, por exemplo, $k = 6$, temos que $N(6) = \{(0, 3), (2, 2), (4, 1), (6, 0)\}$. E, além disso, temos que

$$S_6 = \sum_{(x,y)\in N(6)} \binom{x+y}{y \quad x} = \binom{3}{3 \quad 0} + \binom{4}{2 \quad 2} + \binom{5}{1 \quad 4} + \binom{6}{0 \quad 6} = 13.$$

Portanto, temos que $S_6 = F_6$, isto é, o sétimo elemento da sequência de Fibonacci.

Mais geralmente, temos

Teorema 4.2 *Para todo* $k \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$F_k = S_k = \sum_{(x,y)\in N(k)} \binom{x+y}{y \quad x}.$$

Demonstração:

Inicialmente, vamos caracterizar as soluções da equação diofantina $X + 2Y = k$, isto é, os elementos de $N(k)$. Observe inicialmente que se (x_0, y_0) é uma solução da equação diofantina, então $(x, y) \in N(k)$ se, e somente se, $x = x_0 - 2t \geq 0$ e $y = y_0 + t \geq 0$, com $t \in \mathbb{Z}$. Em todo caso, $(k, 0)$ é uma solução particular. Portanto as soluções da equação diofantina são da forma:

$$\begin{cases} x = k - 2t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{Z}.$$

Como queremos soluções que sejam elementos de $N(k)$, temos que x e y esão sujeitos às seguintes restrições:

$$x = k - 2t \geq 0 \ \text{ e } \ y = t \geq 0.$$

Daí,temos que os valores de t são tais que $0 \leq t \leq \dfrac{k}{2}$. Temos dois casos a analisar:

1º **Caso:** k é par.

Neste caso temos que t pode assumir os valores $t = 0, 1, \ldots, \dfrac{k}{2}$ e

$$N(k) = \{(k, 0), (k-2, 1), \ldots, (\frac{k}{2}, \frac{k}{2})\} = \{(k-t, t) \mid 0 \leq t \leq \frac{k}{2}.$$

Ainda, temos que

$$S_k = \sum_{(x,y)\in N(k)} \binom{x+y}{y \quad x} = \sum_{t=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k-t}{t \quad k-2t}.$$

Logo,

$$S_k = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \cdots + \binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}} = F_k,$$

pelo **Teorema 3.1**

2º **Caso:** k é ímpar.

Neste caso temos que t pode assumir os valores $t = 0, 1, \ldots, \dfrac{k-1}{2}$ e

$$N(k) = \{(k, 0), (k-2, 1), \ldots, (\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2})\} = \{(k-t, t) \mid 0 \leq t \leq \frac{k-1}{2}\}.$$

Ainda, temos que

$$S_k = \sum_{(x,y)\in N(k)} \binom{x+y}{y \quad x} = \sum_{t=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-t}{t \quad k-2t}.$$

Logo,

$$S_k = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \cdots + \binom{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2}} = F_k,$$

novamente pelo **Teorema 3.1**

□

5 Considerações finais

Este trabalho contempla assuntos relevantes para o ensino médio e pode ser explorado nas aulas, pois aborda temas relacionados a sequências numéricas, fórmulas de recorrências e de formação, binômio de Newton, análise combinatória e geometrias analítica e plana.

Mostra, ainda, a importância de descobertas matemáticas de séculos passados, sem, no entanto menosprezar descobertas recentes e vislumbra a possibilidade de se fazer matemática mediante resultados já conhecidos.

Espero contribuir, com este trabalho para incrementar o trabalho do professor em sala de aula e aguçar a curiosidade e a admiração pela matemática por parte dos discentes.

6 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Doutor Fábio Alexandre de Matos, pelo conhecimento e experiência transmitidos a mim. Aos meus colegas de curso, cujo apoio foi fundamental para a conclusão deste curso. Ao Prof. Sidney Pinheiro Duarte pela ajuda na digitação em Latex. À minha família, pelo apoio incondicional. Aos professores, funcionários e colaboradores da UFSJ por sua valiosa contribuição. À professora Simone Aparecida de Sousa, ao Doutor Henrique Patrus Mundim Pena e, em especial, à Dona Geraldina, grande responsável por ter-me feito vislumbrar esta oportunidade e abraçá-la com afinco e dedicação. A Deus, por permitir que tudo isso fosse possível.

Referências

[1] J. Pedersen and H. Walser (2016): Pascal, Fibonacci, and geometry. Elem. Math 71 (2016) pp. 1 – 6.

[2] J. Pedersen and P. Hilton (2012): Mathematics, Models, and Magz, Part I: Patterns in Pascal´s Triangle and tetrahedron. Mathematics Magazine, Vol. 85, N. 2 April 2012, pp. $97-109$.

[3] Lima, Elon Lages. A matemática do ensino médio - Volume 2/Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado - 6ª ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[4] HEFEZ, Abramo. Iniciação à Aritmética. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.