

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Rangel Calmon de Almeida ¹
José Angel Dávalos Chuquipoma ²

Resumo: Este trabalho visa auxiliar o professor da educação básica na introdução da *Otimização* no ensino médio. Aqui abordamos a otimização por programação linear e a resolução de problemas do ponto de vista da modelagem matemática. Apresentamos diversas ferramentas matemáticas assim como problemas de aplicação e fazemos ênfases na *programação linear* com o objetivo que o aluno de ensino médio se familiarize com os conceitos de otimização.

Palavras-chave: Otimização. Desigualdades Lineares. Programação Linear.

1 Introdução

A otimização é um tema muito utilizado nas áreas de *Engenharia, Matemática Computacional, Administração, Finanças, Marketing, Economia* e até *Medicina*. Sua continuidade no ensino superior se encontra em conteúdos de *Cálculo* e em estudos de *Lagrange* (Método de Lagrange e Lagrangeano Aumentado) e é a base da *pesquisa operacional*.

Os conteúdos de Conjuntos, Funções e Geometria Analítica são pré-requisitos necessários para se estudar Programação Linear e por isso sugerimos que a otimização seja aplicada para estudantes do terceiro ano do ensino médio. Para facilitar, o professor deve trabalhar com problemas que envolvam a realidade do aluno, utilizar uma linguagem simples, o uso de tecnologias como o *software Geogebra*, a *modelagem matemática* e constantes exemplos.

¹Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: rangelcalmon@yahoo.com.br

²Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: jadc13@ufsj.edu.br

Bregalda (1988) define: "A tarefa da Programação Linear consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada Função Objetivo, respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades que recebem o nome de Restrições do modelo. As restrições representam normalmente limitações de recursos disponíveis (capital, mão de obra, recursos minerais ou fatores de produção) ou então, exigências e condições que devem ser cumpridas no problema. Essas restrições do modelo determinam uma região à qual damos o nome de Conjunto das Soluções Viáveis. A melhor das soluções viáveis, isto é, aquela que maximiza ou minimiza a função objetivo denomina-se Solução Ótima. O objetivo da programação linear consiste na determinação da solução ótima".

Helsângela Ramos da Costa do Departamento de Matemática da Universidade do Estado do Amazonas (UEA), em Manaus, em seu artigo científico publicado on-line em 30 de novembro de 2009 define: "a modelagem matemática é capaz de promover um ambiente estimulante de educação científica e tecnológica mobilizando o potencial criativo dos estudantes. Dessa forma, acredita-se que a proposta permite ao estudante utilizar a modelagem matemática como uma ferramenta para compreender os conceitos matemáticos e para resolver problemas de diversas áreas do conhecimento."

Não é tarefa fácil para o professor, neste contexto em que o aluno possui tanto acesso à informação, tornar a Matemática interessante e desafiadora. Utilizar problemas estimulantes, que desafiem sua curiosidade e sua capacidade de raciocínio pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em Matemática.

Rech (2008, pag 3)

Livros de Cálculo e Otimização dão continuidade a este estudo no Ensino Superior. Alguns matemáticos como IZMAILOV e SOLODOV (2009), BOLDRINI (1980), NOVAIS (1978) e LIMA (2006) completam e enfatizam este tema em seus livros.

2 Definições Básicas

Dado uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de n variáveis definida no conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, onde $n = 1, 2, 3$ e um subconjunto $D \subset \Omega$. Um dos problemas principais na área de otimização consiste em encontrar um ponto $x_0 \in D$, onde a função f admite o valor mínimo. Este problema pode ser escrito como: encontrar $x_0 \in D$ tal que

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Definição 2.1 *O conjunto D onde o ponto do mínimo se encontra é chamado de conjunto viável do problema de minimização (1), os pontos de D serão chamados pontos viáveis, e f será denominada função objetivo.*

Definição 2.2 Dizemos que um ponto $x_0 \in D$ é

a) *mínimo global* de (1), se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D; \quad (2)$$

b) *mínimo local* de (1), se existe uma vizinhança V de x_0 tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D \cap V. \quad (3)$$

Uma outra forma equivalente de definir um ponto de mínimo local pode ser dado, se verificamos a existência de um número real $\varepsilon > 0$, tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in \{x \in D / \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

Da Definição 2.2, vemos que todo ponto de mínimo global é um ponto de mínimo local, mas não reciprocamente. De outro lado, se $x \neq x_0$ a desigualdade (2) ou (3) é estrita, neste caso x_0 será chamado um ponto de mínimo estrito global ou local respectivamente.

Definição 2.3 Dizemos que o número real $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ definido por

$$\alpha = \inf_{x \in D} f(x)$$

é o valor ótimo do problema de minimização (1).

Observe que $\inf f(x)$ é o limite inferior também chamado de limite ínfimo, ou seja, o valor mínimo do qual se pode aproximar a função no intervalo determinado. De modo análogo também existe $\sup f(x)$ que é o limite superior também chamado de limite supremo.

É importante ressaltar que uma função pode admitir vários pontos de mínimos locais, mas o valor ótimo (global) do problema, claro, é sempre o mesmo valor α .

Há também problemas envolvendo o maior valor que uma função pode assumir, isto pode ser analisado sabendo que todo problema de maximização consiste em encontrar $x_0 \in D$ tal que

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0) \quad (4)$$

o qual pode ser transformado em um problema de minimização (1) equivalente da forma

$$\min_{x \in D} [-f(x)] = [-f(x_0)].$$

Isto implica de forma particular, que os pontos de máximo ou mínimo local e global de ambos os problemas são os mesmos, mas os valores ótimos tem sinais opostos. Assim todos os resultados obtidos para o problema de minimização (1) podem ser estendidos sem dificuldade para o problema de maximização (4).

Muitas vezes, o conjunto viável D de um problema de minimização é definido por um sistema de igualdades e/ou desigualdades da forma

$$D = \left\{ x \in \Omega \mid \begin{array}{l} h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\}, \quad (5)$$

onde $h_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, l$; $j = 1, 2, \dots, m$; são funções dadas. Em notação mais simplificada o conjunto viável (5) pode ser escrito

$$D = \{x \in \Omega \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0, \},$$

$h = (h_1, h_2, \dots, h_l) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, são funções vetoriais e $g(x) \leq 0$ indica que cada componente g_j de g é menor ou igual a zero.

O conjunto Ω onde a função f esta definida é chamada o conjunto das *restrições diretas* e as restrições de igualdade e desigualdades que definem D são chamadas *restrições funcionais*.

Quando o conjunto viável $D = \mathbb{R}^n$, dizemos que o problema (1) é *irrestrito*, e quando $D \neq \mathbb{R}^n$ dizemos que o problema (1) é um problema de *otimização com restrições*. É importante indicar que o problema irrestrito pode ser considerado um caso particular de (1), (5), se tomamos $\Omega = \mathbb{R}^n$ e eliminamos as restrições funcionais, isto é, $l = m = 0$.

Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $l \neq 0, m = 0$, falamos sobre um problema de *otimização com restrições de igualdade*.

Definição 2.4 Dizemos que um conjunto $D \in \mathbb{R}^n$ é *poliedral* quando ele pode ser representado como o conjunto das soluções de um sistema finito de equações e inequações lineares.

Por exemplo, o conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = a, Bx \leq b\},$$

onde $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ são matrizes de ordem $l \times n$ e $m \times n$ respectivamente, $a \in \mathbb{R}^l, b \in \mathbb{R}^m$. Neste contexto, dizemos que $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $h(x) = Ax - a$, é uma *função afim*.

Definição 2.5 Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle, \quad (6)$$

onde $Q = (q_{ij})$ é uma matriz de ordem n^2 , $q \in \mathbb{R}^n$, e \langle, \rangle representa o produto interno usual do \mathbb{R}^n , é chamada de *função quadrática*.

Uma classe especial de problemas de otimização se refere ao caso em que D é um conjunto poliedral. Além disso se a função f for uma função quadrática, então o problema (1) é chamado de problema de *programação quadrática*, e se f for uma função linear ($Q = 0$ em (6)), o problema é chamado problema de *programação linear*.

3 Programação Linear

A Programação Linear é uma disciplina dentro da otimização que tem por objetivo estudar e resolver determinados problemas ligados a decisões de encontrar um valor ótimo (máximo ou mínimo). O termo linear significa que todas as funções que descrevem o problema são lineares, na verdade desigualdades lineares, motivo pelo qual o estudante deve ter conhecimento de Geometria Analítica. A idéia parte do pressuposto que existe um conjunto solução para certas desigualdades lineares do problema no espaço \mathbb{R}^n (aqui analisaremos $n = 1, 2, 3$), e a análise deste conjunto junto a uma função objetivo nos dará este valor ótimo. Para um melhor conhecimento do tema é necessária algumas definições:

3.1 Existência de Soluções

Definição 3.1 *Um subconjunto D do \mathbb{R}^n é chamado convexo se para quaisquer dois pontos A e B de D o segmento AB está inteiramente contido em D .*

A Figura 1 abaixo é a visão geométrica de um conjunto convexo e de um conjunto não convexo no espaço \mathbb{R}^2 .

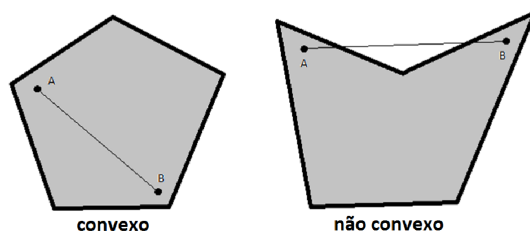


Figura 1: Conjunto Convexo e Conjunto Não Convexo

Definição 3.2 *Dado uma reta r de equação $y = ax + b$ em um plano π , esta reta divide o plano π em dois semi-planos α e β . As inequações $y \leq ax + b$ e $y \geq ax + b$ são chamadas de desigualdades lineares que definem os semi-planos α e β .*

Por exemplo, quando queremos encontrar os pontos $p = (x, y)$ que satisfazem a desigualdade $y < 2x + 4$ procedemos da seguinte maneira.

Em primeiro lugar analisamos a reta $y = 2x + 4$, e percebemos que a mesma corta o eixo das abscissas em $A = (-2, 0)$ e o eixo das ordenadas em $B = (0, 4)$, dividindo o plano π em dois semi-planos: α e β , conforme a figura 2.

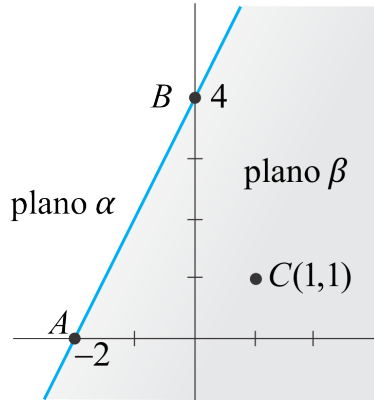


Figura 2: Semi-planos definidos pela reta $y = 2x + 4$.

Observamos da Figura 2, que ao tomar um ponto arbitrário no plano β , por exemplo $C = (1, 1)$, vemos que ele satisfaz a desigualdade $y < 2x + 4$; pois

$$y = 1 < 2(x) + 4 = 2(1) + 4 = 6$$

Logo, como o ponto $C \in \beta$ foi arbitrário e ele verifica a desigualdade, o plano β será o conjunto de todos os pontos $p = (x, y)$ que satisfazem a desigualdade $y < 2x + 4$. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada em LIMA (2006).

Teorema 3.1 *Um conjunto de interseções não vazias de inequações lineares em \mathbb{R}^2 sempre formam um conjunto convexo poliedral.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em BREGALDA (1988).

Definição 3.3 *Um conjunto convexo é dito conjunto viável na programação linear se ele é definido pelas interseções de um sistema de equações e inequações lineares. Cada ponto deste conjunto é denominado de ponto viável e cada desigualdade é uma restrição do problema de programação linear.*

Observação 3.1 *Dado algumas inequações e analisando suas interseções teremos um conjunto convexo de pontos que serão as soluções destas inequações. Caso duas desigualdades formem uma interseção vazia, então o problema não tem solução.*

Por exemplo, o conjunto de soluções do sistema:

$$\begin{cases} y \leq -x + 2; \\ y \leq x + 2; \\ y \geq 0; \end{cases}$$

é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, limitados pela interseção dos semi-planos determinados por cada uma das desigualdades, conforme Figura 3:

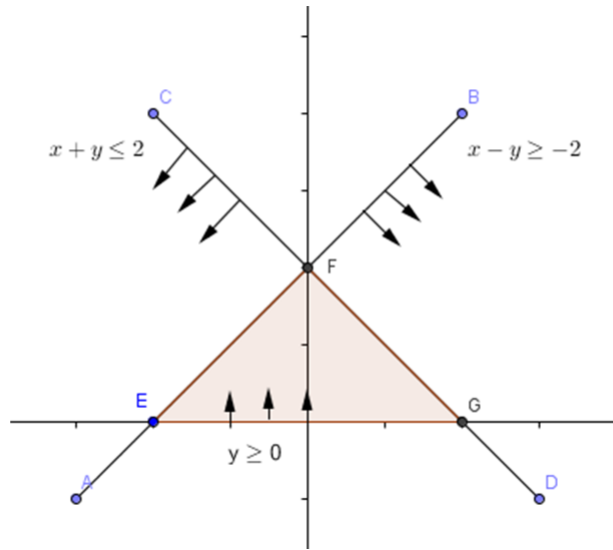


Figura 3: Conjunto de pontos viáveis formado por inequações

Definição 3.4 Dada uma região D poliedral convexa fechada do \mathbb{R}^n (determinada por um sistema de equações e inequações lineares), os vértices desta região D são os pontos da região que satisfazem um dos possíveis sistemas de n equações lineares independentes, obtidas substituindo-se as desigualdades por igualdades. Estes vértices são pontos extremos da região D e portanto possíveis soluções dos problemas de programação linear.

Definição 3.5 Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual procuramos o valor máximo ou mínimo no conjunto $D \in \Omega$ é chamada de função objetivo.

Para problemas relacionados com a programação linear, o conjunto D representará um conjunto viável. Dado um problema de programação linear, estamos interessados na existência de soluções de dito problema, nesse sentido, o Teorema Fundamental da Programação Linear, fornece as condições necessárias para a existência de um máximo ou mínimo de uma função em uma região poliedral convexa D (conjunto viável). Os seguintes lemas serão importantes na demonstração do Teorema Fundamental da Programação Linear.

Lema 3.1 Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$ e seja P um ponto interior ao segmento $AB \subset \Omega$ do \mathbb{R}^n , isto é, $P = \lambda A + (1-\lambda)B$, $0 < \lambda < 1$. Então teremos $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ ou $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$.

Lema 3.2 Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$. Se dentre os valores que f assumir num segmento AB do \mathbb{R}^n , o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto P interior deste segmento, então f será constante em AB .

A prova deste lemas podem ser encontradas em BOLDRINI (1980).

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Programação Linear)

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida na região poliedral convexa D do \mathbb{R}^n por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se D possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.

Demonstração: A demonstração será feita para $n = 2$.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido em um ponto P de D , considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis de \mathbb{R}^2 podemos ter:

i) P é um vértice. (Neste caso o teorema já está provado).

ii) P está numa aresta. Do Lema 3.2, f assumirá este valor máximo (mínimo) em toda a aresta. Como a região D possui vértice(s) esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente, portanto, $f(P) = f(v)$.

iii) P está no interior de D . Neste Caso, f será constante em toda região D .

De fato, seja Q um outro ponto de interior de D . Como D é poliedral convexa, o segmento QP está contido em D ; além disso, como P é interior podemos considerar um prolongamento QQ' que contém P deste ainda contido em D . Do Lema 3.2 segue que f é constante em QQ' e portanto, $f(P) = f(Q)$.

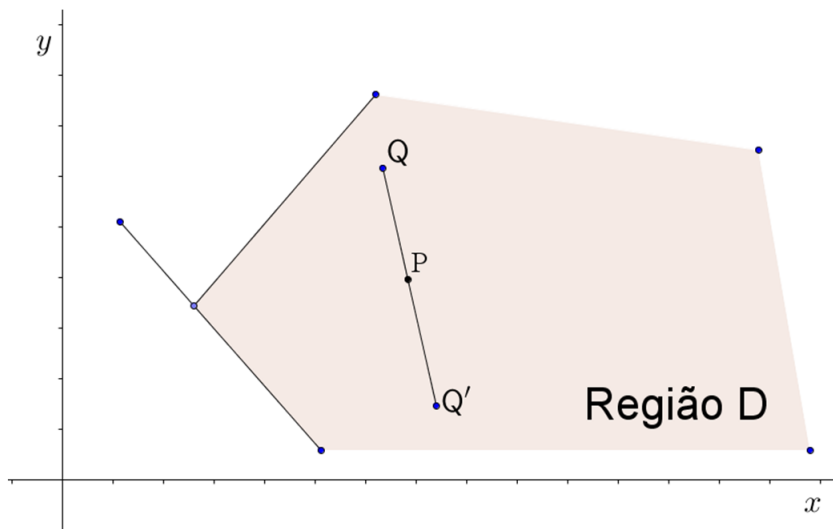


Figura 4: Ponto máximo no interior de uma região viável D

4 Otimização e Modelagem Matemática no Ensino Médio

É importante que o professor conheça a modelagem para adequar sua aplicação à realidade da turma, considerando vários aspectos como: conceitos prévios dos educandos, conteúdo programático a ser desenvolvido, objetivos conceituais, de atitudes e habilidades, tempo para sua aplicação e a experiência com o conteúdo e atividades de modelagem. Portanto sugerimos sempre trabalhar com a modelagem seguindo os passos de Helsângela (2009):

(a) Escolha do tema: com base no diagnóstico, o(s) tema(s) pode(m) ser escolhido(s) pelo professor, pelos alunos ou em conjunto.

(b) Interação com o tema: faz-se um estudo (coleta de informações) sobre o tema escolhido através de visitas técnicas a órgãos e profissionais, pesquisa na internet, livros, revistas, entrevistas, reportagens de jornais ou experimentos.

(c) Formulação do problema: o professor deve auxiliar os estudantes na formulação do(s) problema(s) matemático(s) relacionado(s) ao tema, das hipóteses utilizando a simbologia adequada e descrevendo as relações em termos matemáticos, uma vez que a transferência da linguagem verbal para linguagem matemática é na maioria das vezes uma tarefa que exige esforço dos alunos.

(d) Elaboração dos modelos matemáticos: o professor deve orientar os estudantes na construção do modelo devido sua natureza conceitual e abstrata. Deve-se indicar porque algumas características do modelo foram consideradas e outras rejeitadas.

(e) Resolução de problemas: nesta etapa, os conceitos matemáticos que foram identificados na elaboração dos modelos matemáticos devem ser sistematizados.

(f) Interpretação e validação da solução: cada grupo/estudante deve avaliar e interpretar a solução, verificando a adequação da solução obtida ao modelo utilizado. A interpretação da solução envolve uma retomada dos conceitos matemáticos que estão relacionados ao problema.

(g) Validação da solução: o resultado obtido pelo modelo matemático é comparado com o sistema real.

(h) Exposição escrita e oral do trabalho: esta etapa é importante, pois muitas vezes, os alunos não possuem um registro escrito organizado daquilo que fizeram e têm muitas limitações na comunicação matemática oral.

(i) Avaliação: devem ser avaliados critérios como organização, clareza e criatividade.

4.1 Modelagem Matemática do Problema da produção de garrafas

A seguir abordaremos o problema principal deste trabalho, utilizando a programação linear como ferramenta matemática segundo as etapas do processo da modelagem.

1ª Parte. Escolha do tema: Problema de otimização da produção de garrafas em uma fábrica.

2ª Parte. Formulação do Problema: Uma fábrica produz garrafas de licor e de aguardente. Uma máquina automatiza parte do processo de fabricação. Para produzir uma caixa de 12 garrafas de licor utiliza-se a máquina por 3 horas, mais 2 horas para que um operário faça o acabamento. A produção de uma caixa de 12 garrafas de aguardente necessita da máquina por apenas 1 hora, mas o seu acabamento por um operário demora 3 horas. No período de uma semana a fábrica dispõe de 58 horas de trabalho manual e de 45 horas de uso da máquina. O lucro na venda de uma caixa de licor é de R\$ 50,00 e o lucro da caixa de aguardente é de R\$ 40,00. Sabendo que toda produção já tem comprador, qual deve ser a produção semanal de cada tipo de caixa de modo que o lucro seja o máximo possível?

3ª Parte. Modelando, interpretando e resolvendo o problema: Nesta parte ordenamos as idéias para organizar o raciocínio:

a) Inicialmente montamos e analisamos uma tabela com os dados:

GARRAFAS	HORAS		Lucro por Caixa (R\$)
	MÁQUINAS	OPERÁRIOS	
LICOR (X)	3	2	50
AGUARDENTE (Y)	1	3	40
TEMPO MÁXIMO POR SEMANA	45	58	$f(x,y)$

Figura 5: tabela de dados

observe que há duas restrições:

- i. O uso da máquina está limitado a 45 horas semanais.
- ii. O tempo de trabalho de um operário está limitado a 58 horas semanais.

b) Montamos o sistema:

Representando Licor com a variável x e a Aguardente com a variável y , obtemos as seguintes inequações:

$$\begin{cases} 3x + 1y \leq 45; \\ 2x + 3y \leq 58; \\ x > 0; \\ y > 0. \end{cases}$$

c) Construímos e analisamos o gráfico:

Cada uma das quatro desigualdades acima corresponde a um semi-plano. Com as interseções destes semiplanos obtemos uma Região D convexa de vértice M, N, O e P. Esta Região D é o conjunto de todas as soluções viáveis ou possíveis do problema, por exemplo: o ponto

$A = (5, 5)$ está em D, o que indica que a fábrica pode produzir 5 caixas de licor e 5 caixas de aguardente sem violar qualquer uma das 4 restrições, observe o gráfico da Figura 6.

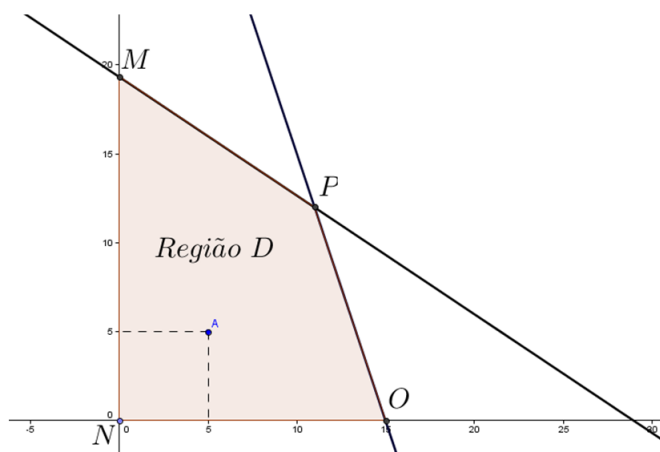


Figura 6: Conjunto das soluções viáveis do problema

d) Inserimos a função objetivo e re-analisamos o gráfico:

Introduzimos agora a função objetivo $f(x, y) = 50x + 40y$, que é a função relacionada ao lucro que se pretende obter. Veja que $f(A) = 450$, indica que o lucro na venda de 5 caixas de cada tipo de garrafa gera um lucro de R\$ 450,00 (vide Figura 7). É visível que $A = (5, 5)$ não é a melhor solução para o problema, já que há outros pontos na região D, com maior número de produção de caixas de garrafas, o ponto $B = (10, 10)$ por exemplo.

e) Aplicamos o Teorema Fundamental da Programação Linear:

Agora analisamos a função objetivo e utilizamos o Teorema da Programação Linear para obtermos a solução.

Na Figura 7 o vértice $P = (11, 12)$, em relação a função f é o ponto que procuramos. Portanto a solução ótima para a fábrica será produzir 11 caixas de garrafas de licor e 12 caixas de garrafa de aguardente por semana, o que gerará um lucro de R\$ 1.030,00 semanais.

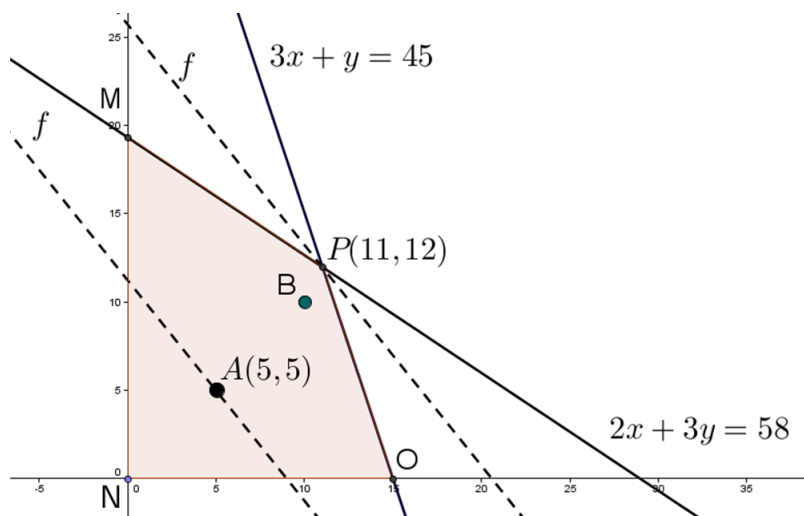


Figura 7: Localização do ponto máximo

5 Considerações finais

O presente trabalho teve o objetivo de utilizar definições, lemas e teoremas e a modelagem matemática com situações problemas para orientar o professor e introduzir a otimização com programação linear para estudantes do ensino médio. É claro que existem outros caminhos para se trabalhar a otimização como por exemplo: funções do 2º grau ou desigualdade de médias, bem como o cálculo e suas derivadas e integrais, mas dentre estas a programação linear é a mais interessante. A utilização de modelagem matemática é indispensável pois guia o estudante e o prepara para novas técnicas de aprendizagem.

6 Agradecimentos

Agradecer pode não ser tarefa fácil, nem justa. Para não correr o risco da injustiça, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram neste dois anos de caminhada.

A minha esposa Rosimeiry e a minha filha Laura por existirem, a meus pais e irmãos que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Aos professores da UFSJ que com muita dedicação e afincos foram os pilares desta conquista.

Ao meu mestre e orientador José Angel Dávalos Chuquipoma por seu apoio e inspiração no amadurecimento dos meus conhecimentos e conceitos que me levaram a execução e conclusão deste TCC.

Agradeço a cooperação, dedicação, consideração e a paciência do professor Jorge Andrés

Julca Avila

Aos amigos e colegas pelos incentivos, colaborações e todo apoio recebidos.

E principalmente a Deus, sem o qual nada existiria.

Referências Bibliográficas

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006

IZMAILOV, Alexey e SOLODOV, Mikhail. **Otimização - volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade**. Rio de Janeiro: IMPA 2009

BOLDRINI, José Luiz. **Algebra Linear** 3. ed. São Paulo: Haper e Row do Brasil 1980

BREGALDA, Paulo F., OLIVEIRA, Antônio A. F. e BORNTTEIN, Cláudio T. **Introdução à programação Linear** 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus 1988

NOVAIS, Antônio Galvão. **Métodos de Otimização: Aplicação aos transportes**. São Paulo: Editora Edgard Blucher: Transesp, 1978

<<http://www.geogebra.org>>. acesso em 12 de dezembro de 2012

<http://www.cienciasecognicao.org/pdf/v14_3/m197.pdf>. Acesso em 13 de fevereiro de 2013