2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Fórmulas do Traço e o Cálculo de Matrizes Inversas

Marcílio Silva Andrade [1]
Carlos Alberto Raposo da Cunha[2]

Resumo: Neste trabalho utilizaremos a forma canônica de Jordan para provar o Teorema de Hamilton-Cayley e como aplicação introduziremos uma técnica para obter a inversa de operadores lineares utilizando um algoritmo recursivo, ver [1], para calcular os coeficientes do polinômio característico.

Palavras-chave: Jordan, Fórmulas do Traço, Hamilton-Cayley, Matrizes Inversas.

1 Introdução

Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbf{F}$ e $\mathcal{L}(\mathbf{V})$ o conjunto das transformações lineares $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. É bem conhecido da teoria de álgebra linear que $\mathcal{L}(\mathbf{V})$ é um espaço vetorial isomorfo ao espaço das matrizes $\mathbf{M} = M_{n\times n}(\Re)$. Neste sentido, constitui-se um importante problema obter, para cada $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$, um representante $\mathbf{A}$ no espaço $\mathbf{M}$. Também sabemos que matrizes semelhantes representam o mesmo operador linear $\mathbf{T}$ relativamente a distintas bases do espaço vetorial $\mathbf{V}$. A questão que se coloca é obter uma base especial do espaço $\mathbf{V}$ para a qual a matriz que representa o operador $\mathbf{T}$ seja diagonal. Se todas as raízes do polinômio característico estiverem no corpo $\mathbf{F}$ e forem distintas então a base do espaço na qual o operador é representado por uma matriz diagonal é exatamente a base constituída pelos autovetores associados aos respectivos distintos autovalores e portanto, a matriz que representa o operador linear possui em sua diagonal principal os distintos autovalores e zero nos demais elementos. Para o caso em que nem todos os autovalores são distintos o operador pode ou não possuir uma representação diagonal. No Caso de não ser possível obter uma base de autovetores, podemos obter uma decomposição em blocos, isto é, a diagonal principal será constituída de blocos "conhecido como blocos de Jordan"e os demais elementos serão blocos nulos. Considerando que sempre podemos extender o corpo básico através da adjunção de raízes até obter um corpo que possua todas as raízes do polinômio característico, em certo sentido o cálculo do Polinômio Característico é fundamental para a diagonalização de operadores lineares.

Questão relevante é obter a inversa de um operador linear. Para dimensões pequenas é possível obter a inversa de modo simples, entretanto para dimensões maiores o cálculo

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: marciliosandrade@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: raposo@ufsj.edu.br

se torna exaustivo. Neste trabalho aplicaremos o teorema de Hamilton-Cayley combinado com as fórmulas do traço e apresentamos uma técnica para calcular a inversa de operadores lineares. A técnica consiste em utilizar recursivamente as fórmulas do traço o que reduz o problema ao cálculo de potências da matriz que representa o operador linear.

Este trabalho está estruturado do seguinte modo:

Na seção 2 enunciamos a Forma Canônica de Jordan e referenciamos um texto que apresenta uma eficiente receita para o cálculo da Matriz de Jordan.

Na seção 3 provamos o Teorema de Hamilton-Cayley.

Na seção 4 apresentamos um algoritmo para o cálculo dos coeficientes do Polinômio Característico.

Na seção 5 mostramos a praticidade do algoritmo para o cálculo de Matrizes Inversas.

Finalmente na seção 6 deixamos ao leitor algumas atividades que complementam o conteúdo deste trabalho.

2 Forma Canônica de Jordan

Nesta seção enunciaremos o teorema de Jordan.

Definição 2.1 *Seja λ um autovalor associado a um Operador Linear $\mathbf{T}$, a multiplicidade algébrica de λ é definida como sendo a dimensão do subespaço gerado pelo autovetor associado a este autovalor.*

Definição 2.2 *O polinômio*

$$p(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \;\; = \;\; (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n)$$

é chamado o polinômio característico da matriz $\mathbf{A} = (a_{ii})_n$.

Teorema 2.1 *Seja $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ um Operador Linear cujos polinômios característico e minimal são respectivamente*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}, \\ m(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}. \end{aligned}$$

Então $\mathbf{T}$ possui uma representação matricial diagonal $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{12} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{r2} & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Os blocos J_{ij} satisfazem $J_{ij} = \lambda_i I + N_i$, isto é,

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_i I + N_i,$$

onde N_{ij} é uma matriz nilpotente e para cada autovalor λ_i os blocos J_{ij} correspondente tem as seguintes propriedades:

- *Existe ao menos um J_{ij} de ordem m_i, todos os outros são de ordem menor ou igual.*
- *A soma das ordens dos J_{ij} é igual a n_i.*
- *O número de blocos J_{ij} é igual a multiplicidade algébrica de λ_i.*
- *O número de blocos J_{ij} de cada ordem possível é determinado de modo único por* $\mathbf{T}$.

Demonstração: Para a demonstração deste teorema ver [1] e para calcular a matriz de Jordan ver [2]. □

3 Teorema de Hamilton-Cayley

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Hamilton-Cayley e aplicaremos este teorema para o cálculo de operadores inversos.

Teorema 3.1 *Toda matriz quadrada anula o seu polinômio característico.*

Demonstração: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada com o polinômio característico

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \tag{1}$$

e seja $\mathbf{J}$ uma matriz de Jordan semelhante a $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda n \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad * = 0 \text{ ou } 1.$$

Seja $\mathbf{J}_i = \mathbf{J} - \lambda i\mathbf{I}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ de modo que $P(\mathbf{J}) = (-1)^n\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\cdots\mathbf{J}_n$, desde que a fatoração de $P(\lambda)$ seja válida para o polinômio matricial $P(x)$. Mas a i-ésima linha $\mathbf{J}_i$ tem $*$ na coluna $i+1$ e zeros no restante. Portanto a n-ésima linha de $\mathbf{J}_n$ é uma linha de zeros, as duas últimas linhas $\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{J}_n$ são de zeros, as últimas três linhas de $\mathbf{J}_{n-2}\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{J}_n$ são de zeros e assim por diante, logo, a multiplicação sucessiva dos $\mathbf{J}_i$ dá $P(\mathbf{J}) = 0$. Como $P(\mathbf{A})$ é uma matriz semelhante a $P(\mathbf{J})$, podemos concluir que $P(\mathbf{A}) = 0$. □

Como aplicação deste teorema podemos calcular a inversa de uma matriz inversível $\mathbf{A}$, do seguinte modo: Seja

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n) \tag{2}$$

o polinômio característico de $\mathbf{A}$. Como $\mathbf{A}$ é não singular, $\lambda = 0$ não é um valor característico, e portanto $c_n \neq 0$. Temos então

$$\mathbf{A}^n + c_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\mathbf{A} + c_n\mathbf{I} = 0$$

isto é,

$$\mathbf{A}^n + c_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\mathbf{A} = -c_n\mathbf{I}$$

e operando com $\mathbf{A}^{-1}$ obtemos

$$\mathbf{A}^{-1} = -c_n^{-1}(\mathbf{A}^{n-1} + c_1\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\mathbf{I})$$

e portanto para obter a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ basta encontrar os coeficientes c_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

4 Fórmulas do Traço

Nesta seção utilizamos um algoritmo recursivo para calcular os coeficientes do polinômio característico o qual combinado com o teorema de Hamilton-Cayley fornece uma técnica simples e eficiente para calcular matrizes inversas. Este algoritmo é o núcleo matemático do trabalho de R. R. Silva [3].

Definição 4.1 *O traço de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, indicado por $tr\mathbf{A}$, é a soma dos n-valores característicos de $\mathbf{A}$;*

$$tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Lembrando que matrizes semelhantes possuem os mesmos valores característicos, podemos concluir que matrizes semelhantes possuem o mesmo traço. Podemos definir o traço de uma Transformação Linear $\mathbf{T}$ como sendo o traço de qualquer matriz que represente $\mathbf{T}$. A seguir provaremos que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal.

Teorema 4.1 *Seja*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então

$$tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Demonstração: Considere o polinômio característico de $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n) \\ &= (-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n). \end{aligned}$$

Pela forma do determinante, o coeficiente de λ^{n-1} é,

$$(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^n c_1,$$

enquanto que pela forma fatorada obtemos

$$(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n c_1.$$

Logo,

$$tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

□

Como uma consequência obtemos a equação

$$c_1 = -tr\mathbf{A}.$$

Os outros c_i podem ser determinados através do seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Os coeficientes do polinômio característico de uma matriz* $\mathbf{A}$ *são obtidos recursivamente por*

$$\begin{aligned} c_1 &= -tr\mathbf{A} \\ c_2 &= -2^{-1}[c_1 tr\mathbf{A} + tr\mathbf{A}^2] \\ c_3 &= -3^{-1}[c_2 tr\mathbf{A} + c_1 tr\mathbf{A}^2 + tr\mathbf{A}^3] \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ c_n &= -n^{-1}[c_{n-1}tr\mathbf{A} + c_{n-2}tr\mathbf{A}^2 + \cdots + c_1 tr\mathbf{A}^{n-1} + tr\mathbf{A}^n]. \end{aligned}$$

Demonstração: Para a prova deste teorema ver [3]. □

5 Aplicação das Fórmulas do Traço

5.1 Inversa de um Operador Linear

Considerando que existe uma bijeção entre a classe de operadores lineares definidos em um espaço vetorial de dimensão finita n e a classe das matrizes $M(n \times n)$, o cálculo da matriz inversa é importante para o cálculo de operadores inversos.

Vamos então calcular a inversa do Operador Linear $\mathbf{T} : \Re^{\mathbf{3}} \to \Re^{\mathbf{3}}$, definido por

$$T(x, y, z) = (y, z, -x + y + z).$$

Inicialmente obtemos $[T]_\beta$ onde β é a base canônica do $\Re^3$,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (0,0,-1) = 0e_1 + 0e_2 - 1e_3 & (3) \\ T(0,1,0) &= (1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 & (4) \\ T(0,0,1) &= (0,1,1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 & (5) \end{aligned}$$

e daí $[T]_\beta$ é dada pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é dado por $p(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1)$. Como $\mathbf{A}$ é um zero do seu polinômio característico teremos

$$\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

multiplicando a esquerda por $\mathbf{A}^{-1}$ obtemos

$$\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}$$

de onde segue que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

No cálculo da matriz inversa foi importante determinar os coeficientes do polinômio característico do Operador.

Para valores grandes de n pode ser difícil calcularmos diretamente estes coeficientes, e neste sentido o Teorema 4.2 fornece uma alternativa viável.

5.2 Cálculo da Matriz Inversa

Como uma aplicação do Teorema 4.2 vamos calcular a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em conformidade com (2), o polinômio característico desta matriz de ordem 3×3 tem a seguinte forma

$$p(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3).$$

Utilizando o Teorema de Hamilton-Cayley obtemos

$$\mathbf{A}^3 + c_1\mathbf{A}^2 + c_2\mathbf{A} + c_3\mathbf{I} = 0$$

e multiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^3 + c_1\mathbf{A}^2 + c_2\mathbf{A} + c_3\mathbf{I}) &= 0 \\ \mathbf{A}^2 + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{I} + c_3\mathbf{A}^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\mathbf{A}^{-1} = -c_3^{-1}(\mathbf{A}^2 + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{I}).$$

Agora calculamos as matrizes

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e portanto, utilizando as Fórmulas do Traço, calculamos os coeficientes do polinômio conforme abaixo

$$\begin{aligned} c_1 &= -tr\mathbf{A} = -1 \\ c_2 &= -2^{-1}[c_1 tr\mathbf{A} + tr\mathbf{A}^2] = -1 \\ c_3 &= -3^{-1}[c_2 tr\mathbf{A} + c_1 tr\mathbf{A}^2 + tr\mathbf{A}^3] = 1, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + I,$$

o que resulta, por substituição das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^2$ na última equação, a inversa de $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para finalizar deixamos ao leitor algumas atividades que complementam os resultados estudados neste trabalho.

6 Atividades

6.1 *Encontre $f(\mathbf{A})$ onde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 7.$

6.2 *Mostre que*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é um zero de $f(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$

6.3 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz triangular. Encontre o polinômio característico de* $\mathbf{A}$.

6.4 *Calcule o polinômio característico e a inversa de cada matriz abaixo.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.5 *Determine se as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

6.6 *Seja*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ *é semelhante a uma matriz diagonal? Se for encontre esta matriz.*

6.7 *Prove as seguintes propriedades do traço.*

(i) *Se* $\mathbf{A}$ *é nilpotente,* $tr\mathbf{A} = \mathbf{0}$

(ii) $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr\mathbf{A} + tr\mathbf{B}$

(iii) $tr\mathbf{AB} = tr\mathbf{BA}$

6.8 *Prove que qualquer matriz e sua transposta são semelhantes.*

6.9 *Se* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ *são os distintos autovalores de um operador* $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*, mostre que* $\det[\mathbf{T}] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

6.10 *Prove que uma Transformação Linear é inversível se, e somente se, nenhum dos seus autovalores é nulo.*

6.11 *Prove que uma condição suficiente para que um Operador Linear* $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *seja representado por uma matriz diagonal é que os autovalores de* $\mathbf{T}$ *sejam todos distintos.*

6.12 *Mostre com um exemplo que todos os autovalores distintos não é condição necessária para a diagonalização de operadores.*

6.13 *Determine a forma de Jordan das seguintes matrizes:*

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

6.14 *Seja* $\mathbf{T} : \Re^{\mathbf{4}} \to \Re^{\mathbf{4}}$*, definida por* $T(x, y, z, u) = (y, z, u, 4x - 4y - 3z + 4u)$*. Determine a matriz de Jordan de* $\mathbf{T}$.

6.15 *Suponha que os polinômios característico e minimal de um operador* $\mathbf{t}$ *sejam respectivamente* $p(\lambda) = (\lambda - 2)^4 (\lambda - 3)^3$ *e* $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$*. Quais as possíveis formas canônicas de Jordan para o Operador* $\mathbf{T}$.

Comentário e Agradecimento Final

O algoritmo recursivo apresentado neste trabalho, pode ser aplicado no ensino médio, na medida que basta definir polinômio característico de uma matriz inversível $\mathbf{A}$, enunciar o Teorema de Hamilton-Cayley e através do cálculo das potências da matriz $\mathbf{A}$, encontrarmos os coeficientes do polinômio característico e de forma prática e conclusiva, exibirmos a inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

Agradeço aos professores do DEMAT/UFSJ que ministraram as disciplinas no mestrado PROFMAT $2011 - 2013$, os quais com empenho e competência foram fonte de inspiração para lutarmos até concluirmos o programa. Agradeço o apoio e compreensão de minha esposa Sílvia, meus filhos Lucas e Rodrigo que se sacrificaram e nos momentos mais difíceis foram os grandes incentivadores. Aos companheiros do PROFMAT que participaram diretamente desta trajetória e aos familiares e amigos pelo apoio de sempre. Por fim a CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

[1] K. Hoffman & R. Kunzy; *Álgebra Linear.*, LTC, São Paulo, 1979.

[2] L. N. Andrade; *A forma canônica de Jordan.*, Texto, UFPB-CCEN-Departamento de Matemática, 1999. link: http://mat.ufpb.br/ lenimar/textos/index.html

[3] R. R. Silva; *The Trace Formulas Yield the Inverse Metric.* Journal of Mathematical Physics, 39, 6206, (1998).

[4] D. T. Finkbeiner; *Introdução às Matrizes e Transformações Lineares.*, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, 1970.