TURMA 2012 Trabalho de Conclusão de Curso
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT 2014

Grafos Eulerianos e Aplicações em Sala de Aula

Célio da Silva Cardoso [1]

Fábio Alexandre de Matos[2]

Resumo: Apresentaremos neste trabalho um pequeno estudo sobre Grafos com o objetivo de desenvolver atividades para aplicação em sala de aula para alunos do 3º Ciclo do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Grafo. Grafo Euleriano. Grafo Semi-euleriano. Algoritmo de Dijkstra. Homomorfismo. Caminho. Matrizes. *Graph*. YEd GRadph Editor. Geogebra.

[1] Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
e-mail: tannuscardoso@yahoo.com.br

[2] Professor Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
e-mail: fabio.ufsj@gmail.com

1 Introdução

O primeiro contato com Grafo aconteceu na graduação da disciplina de matemática discreta, matéria optativa que envolvia o estudo de algoritmos de computação. A turma era composta em sua maioria por alunos da computação e na época não foi dada a devida importância pois, dedicava várias horas a estudo de Cálculo III e Física II.

Depois de 14 anos de formado, o contato com grafos se deu a partir de um desafio proposto por um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental na Escola da Rede de Contagem onde trabalhava como regente de aula de matemática.

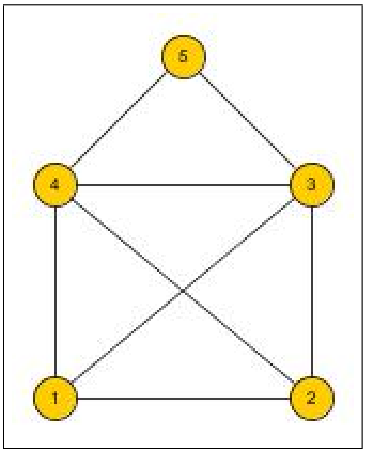

Figura 1: Exemplo Passa tempo Grafo Euliano

O desafio foi o seguinte: "Professor o senhor consegue passar o lápis por todos os pontos da figura sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho? "
Olhando para a figura, percebemos era necessário passar por 5 pontos. Então, sem dar a devida atenção, começamos pelo primeiro ponto. Apontamos o lápis para o ponto 5, e para a minha surpresa não conseguimos. A cada tentativa que fracassavamos, o aluno ria e falava que conseguiu elaborar um problema em que eu não conseguiria resolver. Fui testando por todos os pontos da figura, até que pela quarta tentativa a solução foi encontrada.

O aluno trazia consigo várias outras atividades em uma revista de passa tempo e em todas as figuras expostas, era necessário encontar uma maneira de contornar a figura sem levantar o lápis do papel passando pelo caminho uma única vez.

Fiquei surpreso com o desafio que o aluno propôs, na qual as atividades usavam grafos e todas as respostas podiam ser encontradas na última folha da revista. Buscamos a resposta e vimos que a solução começava por um ponto específico. Caso a pessoa começasse em outro ponto não encontraria a solução. Na figura acima os pontos eram 1 e 2. Se partisse por outro ponto não conseguiríamos resolver o problema. Todas as figuras possuíam apenas um par de pontos (será chamado de vértices) do qual saiam uma quantidade ímpar de linhas (que será chamado de arestas). Em todos os desafios propostos pela revista, existia uma problemática que consiste basicamente em começar por vértices com arestas pares. Caso isto aconteça o desafio não será vencido.

Um problema clássico envolvendo um dos matemáticos mais famosos, Euler. Em 1856, Euler foi visitar um amigo na cidade de Königsberg, na Prússia, hoje, com o nome de Kaliningrado. Na época a cidade possuía uma ilha rodeada pelo rio Prega com 7 pontes. Os habitantes da cidade perguntavam-se se existia um modo de atravessar as 7 pontes uma única vez sem passar duas vezes pela mesma ponte,

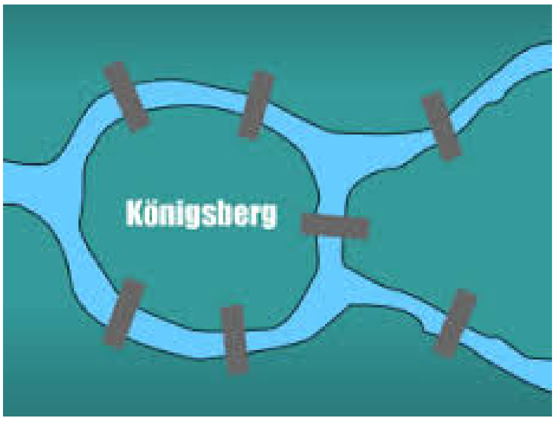

Figura 2: As pontes de Königsberg

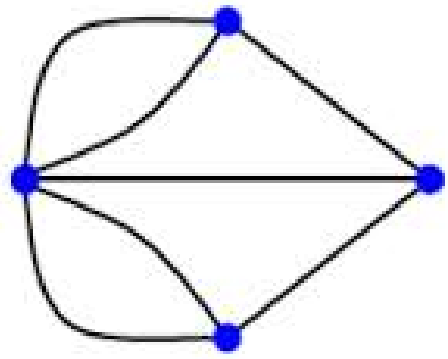

Figura 3: Representação em Grafo

retornando sempre ao ponto de partida. Esse problema antigo possui as mesmas descrições do desafio do meu aluno.

Euler, para tentar encontrar a solução, usou um modelo simplificado das ligações das regiões, como mostra a figura 3 e estabeleceu uma teoria que se aplica a vários problemas deste tipo. Este foi o primeiro problema envolvendo Grafo.

Para podermos entender melhor é necessário conhecer os conceitos básicos de grafos como: vértices, arestas, caminhos, grau de cada vértice, laço, vértices adjacentes, etc. Veremos que a aplicabilidade de grafos hoje em dia é bastante divulgada nos vários ramos da engenharia. Na engenharia de transportes em estudos de rotas de transporte, aviação e linhas de transmissão de energia. Na engenharia elétrica usado em construções de placas de circuitos e circuitos elétricos.

Em redes sociais, as pessoas se interligam entre si através da amizade. Se A é amigo de B e B é amigo de C, indiretamente, A está "conectado"a C. O "Facebook "é um exemplo de rede de amigos que, no fim das contas, é um grafo. As pessoas possuem amigos e está "conectado"a eles. Estes, eventualmente estão conectados a outras pessoas. podemos notar que quando se entra no perfil de alguém que não é conhecido (diretamente), o "Facebook"mostra um "caminho"de pessoas, que te liga a outra pessoa. Isto é um clássico problema de grafos. Devemos partir de uma pessoa (você) e, percorrendo seus relacionamentos, encontrar um "caminho"até outra pessoa.

Num sistema de distribuição de água, as casas estão relacionadas entre si e entre as centrais de distribuição através de tubulações de água. Neste exemplo, consideramos as casas como vértices e as tubulações como arestas.

Um outro exemplo é um mapa, onde as cidades são interligadas por rodovias. Para sair de uma cidade, com o auxílio de um "GPS", fica muito mais fácil, pois ele mostra todos os caminhos possíveis que ligam a cidade ao seu destino. Podemos enxergar o mapa como um grafo, onde as cidades são vértices e as rodovias de arestas.

Daqui para frente explicaremos cada conceito e a sua visualização, em seguida esclareceremos alguns problemas que envolvem Grafos e por último, uma aplicação em sala de aula para alunos com idade de 11 a 13 anos.

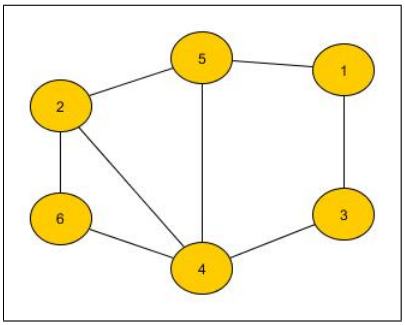

Figura 4: Grafo com 6 vértices, 8 arestas, simples, conexo, planar e semi-euleriano

2 Grafos

Grafo é conjunto de pontos e linhas. A estes pontos nós chamamos de **vértice** e as linhas denominamos de **arestas**.

Pra não haver confusão, indicaremos um grafo pela letra G. Representaremos por $V(G)$ o conjunto dos vértices do grafo G, e por $A(G)$ o conjunto das arestas de G. O que realmente interessa é quem são esses vértices (ou seja quem representará o conjunto dos vértices), quem são as arestas e como esses dois conjuntos estão ligados. No problema das pontes Königsberg, os vértices são as margens do rio, e as pontes representam as arestas.

Vértice - Como foi dito anteriormente, são os pontos do grafo. Também, devemos considerar os chamados **vértices adjacentes**, aqueles vértices os quais estão ligados por uma aresta.
Na figura 4 por exemplo temos:

Vértices - $V(G) = \{ 1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 \}$

Arestas - $A(G) = \{$ (1,3) (1,5) (2,4) (2,5) (2,6) (3,4) (4,5) (4,6) $\}$

Vértice	Vértice adjacentes
1	$5, 3$
2	$4, 5, 6$
3	$1, 4$
4	$2, 3, 5, 6$
5	$1, 2, 4$
6	$2, 4$

Tabela 1: Vértices Adjacentes

Grau do vértice - É o número de vezes em que as **arestas incidem** sobre um determinado vértice. Podemos nomear de arestas incidentes no vértice. Na figura 4, por exemplo, temos:

Vértice	Grau do Vértice
1	2
2	3
3	2
4	4
5	3
6	2

Tabela 2: Grau de cada vértice

Vértice isolado - é um vértice que não está conectado a nenhum outro vértice do grafo. Não existe aresta incidente neste vértice. No grafo da Figura 5 o vértice 3 é um vértice isolado.

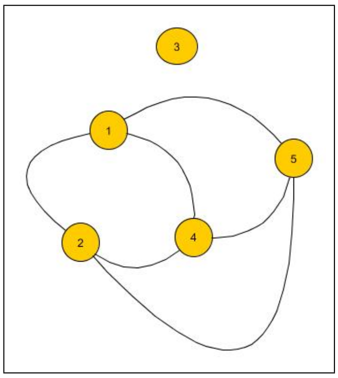

Figura 5: Grafo com vértice isolado

Laço - Quando uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo, chamamos de laço. Neste caso, para determinar o grau do cada vértice, contamos o laço duas vezes, uma para cada extremidade. Isto é necessário para haver uma coerência.

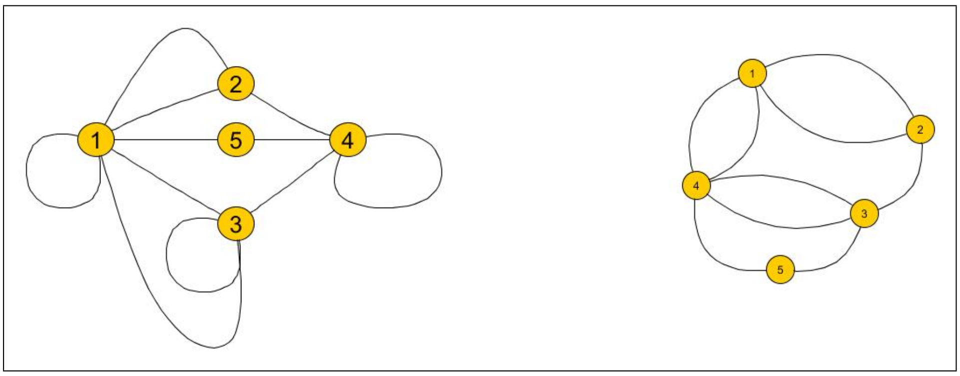

Figura 6: Grafo com laço e exemplo de multigrafo

O grafo acima possui laços nos vértices 1,3, e 4.

Multigrafos - Quando dois vértices estão ligados por mais de uma aresta. Veja figura acima os vértices 1 e 2 ; 1 e 4 ; 4 e 3 estão ligados por mais de uma aresta. Todos os vértices possuem duas ou mais ligações entre vértices.

Grafos em que não existem laços e nem arestas múltiplas são considerados **grafos simples**, ou seja, cada vértice é conectado apenas uma única vez a outro vértice e o grafo não possue vértices isolados.

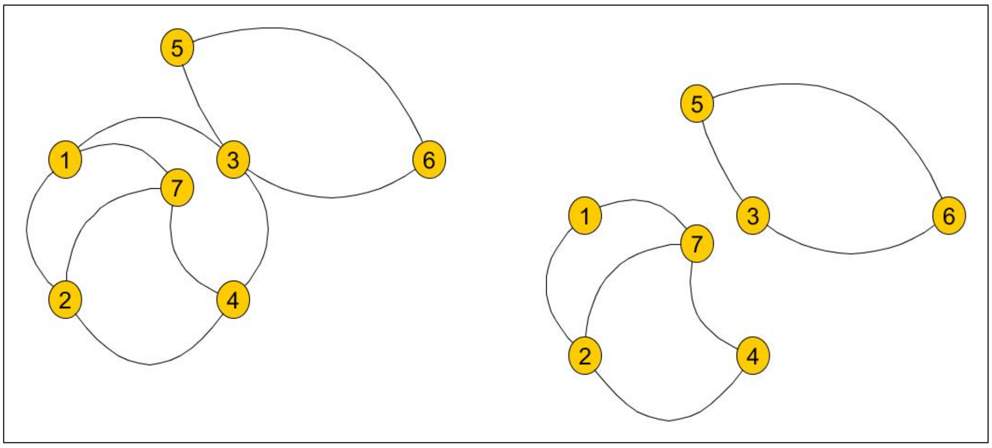

Figura 7: Grafo desconexo

Grafo Desconexo - Quando um grafo sofre um retalhamento (um corte). Os grafos são separados por um corte nas arestas, do qual o número de vértices é o mesmo, mas o número de arestas diminui.

Grafo bipartido - É o grafo cujos vértices podem ser divididos em dois subconjuntos, nos quais não há arestas entre vértices de um mesmo conjunto. Para um grafo ser bipartido ele não pode conter circuitos de comprimento ímpar. Se um grafo G é bipartido, todo o circuito de G possui comprimento par. Sejam $V1$ e $V2$ os dois conjuntos em que, de acordo com a definição de grafo bipartido, se particiona $V(G)$. Toda a aresta de G conecta um vértice em $V1$ com outro em $V2$. Assim sendo, se X for um vértice de $V1$, para 'voltar' a esse vértice terá de se ir a $V2$ e voltar a $V1$ um número indeterminado de vezes, e de cada vez serão percorridas duas arestas, uma de um vértice em $V1$ para um vértice em $V2$ e outra de um vértice em $V2$ para um vértice em $V1$. Logo, o número de arestas a percorrer será par, ou seja, o comprimento do circuito é par. Conclui-se que todo o circuito de um grafo G possui comprimento par, então o grafo é bipartido.

Para demonstrar, considere um grafo G em que todo o circuito tem comprimento par, e seja X um vértice de G. Denotemos por $V1$ o conjunto formado por X e por todos os vértices cuja distância a X é par. Seja $V2 = V(G) \setminus V1$ (isto é, o conjunto formado pelos vértices de G que não pertencem a $V1$). Pretendemos mostrar que não existe qualquer aresta que conecte vértices de $V1$ ou vértices de $V2$. Suponhamos por absurdo a existência de tal aresta, isto é, suponhamos a existência de dois vértices em $V1$ (ou $V2$), digamos Xi e Xj, conectados por uma aresta. Como existe um caminho de comprimento par entre Xi e Xj, já que existem caminhos, ambos de comprimento par (ou ímpar, no caso de Xi e Xj pertencerem a $V2$), entre Xi e X e entre X e Xj. Se a esse caminho juntarmos a aresta $\{Xi; Xj\}$ teremos um circuito de comprimento ímpar o que contraria a hipótese de apenas existirem circuitos de comprimento par.

Grafo Completo - É o grafo em que para cada vértice do grafo, existe uma aresta conectando este vértice a cada um dos demais. Ou seja, todos os vértices do grafo possuem mesmo grau. O grafo completo de n vértices é frequentemente denotado por K_n. Ele tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas (correspondendo a todas as possíveis escolhas de pares de vértices).

Caminho - É uma sequência de vértices $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tal que de cada um dos vértices existe uma aresta para o vértice seguinte. Um caminho é chamado simples se nenhum dos vértices no caminho se repete. O comprimento do caminho é o número de arestas que o caminho usa, contando-se arestas múltiplas vezes. Em relação ao grafo proposto pelo aluno os vértices $\{1, 2, 4, 3, 5\}$ representa um caminho simples. O custo de um caminho num grafo balanceado é a soma dos custos das arestas atravessadas. Dois caminhos são independentes se não tiverem nenhum vértice em comum, exceto o primeiro e o último, sendo o custo o tamanho da aresta.

Ciclo (ou circuito) - É um caminho que começa e acaba com o mesmo vértice. Ciclos de comprimento 1 são laços. Em relação ao grafo da introdução, figura 1, se todas as arestas valem 1 então $(1, 2, 3, 5, 4, 1)$ é um ciclo de comprimento 5. Um ciclo simples é um ciclo que tem um comprimento pelo menos de 3 e no qual o vértice inicial só aparece mais uma vez, como vértice final, e os outros vértices aparecem só uma vez. Em relação ao grafo da figura 1, $\{1, 2, 3, 1\}$ é um ciclo simples. Um grafo chama-se acíclico se não contém ciclos simples. Ciclo (ou circuito) é um caminho que começa e acaba com o mesmo vértice. Ciclos de comprimento 1 são laços. No grafo de exemplo, $\{1, 2, 3, 4, 5, 2, 1\}$ é um ciclo de comprimento 6.

2.1 Isomorfismo entre grafos

Observe os grafos G e H da figura abaixo.

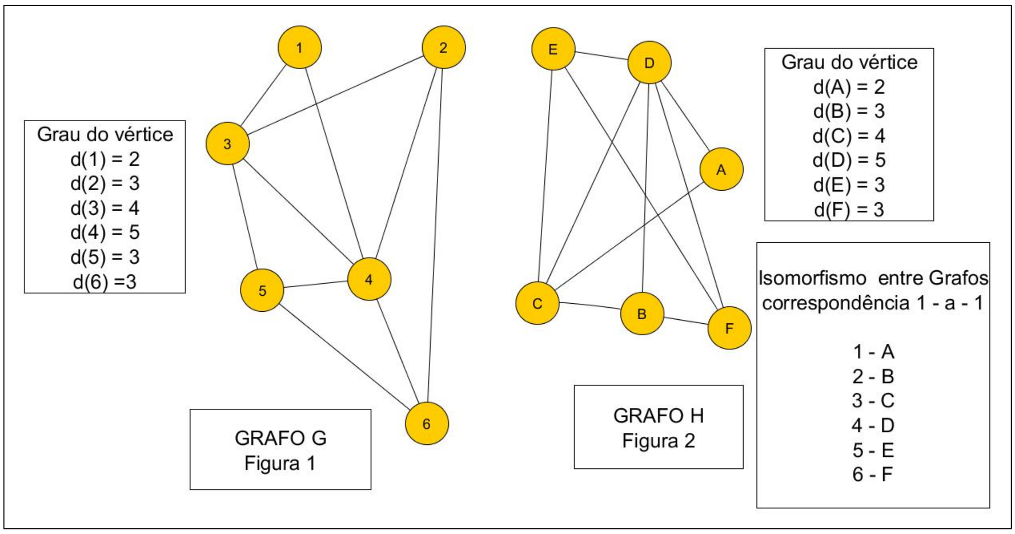

Figura 8: Grafos Isomorfos

A figura apresenta dois grafos diferentes mas que representam a mesma situação. Os dois grafos apresentam 6 vértices e 10 arestas. Os dois têm as mesmas quantidades de vértices e de arestas que preservam as correspondências.

Ao estabelecer uma relação entre os conjuntos dos vértices dos grafos G e H por uma função, temos uma relação de correspondência $1 - a - 1$. Ou seja, ao tomarmos o vértice 1 do grafo G, a função fará uma correspondência com o vértice A do grafo H. Assim como os vértices não adjacentes 1, 2, 5, e 4 do vértice 1, a função levará aos vértices não adjacentes B, D, E, F. do vértice A.

Em teoria dos grafos, um isomorfismo dos grafos G e H é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G e H, ou seja,

$$f : V(G) \to V(H)$$

de tal forma que quaisquer dois vértices u e v de G são adjacentes em G se, e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H. Este tipo de bijeção é comumente chamado de "bijeção com preservação de arestas". De acordo com a noção geral de isomorfismo, uma bijeção de preservação-de-estrutura. Na definição acima, os grafos são entendidos como grafos não dirigidos, não-rotulados e não ponderados. No entanto, a noção de isomorfismo pode ser aplicada a todas as outras variantes da noção de grafo, somando os requisitos necessários para preservar os elementos adicionais correspondentes da estrutura: as direções do arco, os pesos das arestas, etc, com a seguinte exceção: quando se fala em rótulo com rótulos exclusivos, geralmente tirados do intervalo inteiro $1, ..., n$, onde n é o número dos vértices do grafo, dois grafos rotulados são ditos isomórficos se os grafos subjacentes correspondentes não rotulados são isomórficos. Se um isomorfismo existe entre dois grafos, então, esses grafos são chamados de isomorfos e nós denotamos por $G \simeq H$. No caso, quando a bijeção é um mapeamento de um grafo em si mesmo, ou seja, quando G e H são um e o mesmo grafo, a bijeção é chamada de automorfismo de G. O isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência em grafos e, como tal, particiona as classes de todos os grafos em classes de equivalência. Um conjunto de grafos isomorfos entre si é chamado de classe de isomorfismo de grafos.

2.2 Matriz associada a um grafo

Podemos representar o Grafo por meio de matrizes, as quais possuem dois tipos diferentes: a **matriz de adjacência**, e **matriz de incidência**.

A **matriz de adjacência** é definida por :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad ij \in A(G) \\ 0 & \text{se} \quad ij \notin A(G) \end{cases},$$

onde $A(G)$ representa o conjunto de arestas do Grafo G. Podemos perceber que se houver uma aresta que liga os vértices i a j, então $x_{ij} = 1$, caso contrário $x_{ij} = 0$. como os elementos da linha e coluna são representados pelos seus vértices, é fácil perceber que a matriz de adjacênicia é uma matriz símétrica.

A **matriz de incidência** mostra como os **vértices** e seus respectivos **vértices adjacentes** estão relacionados. Caso o vértice não seja adjacente valerá 0 e se for valerá 1.
A matriz de incidência, é uma matriz do tipo $m\,x\,n$ definido por :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta} \quad e_j \quad \text{é incidente em} \quad v_i \\ 0 & \text{se a aresta} \quad e_j \quad \text{não é incidente em} \quad v_i \end{cases}$$

Por exemplo, no grafo abaixo, os vértices A, C e D são vértices adjacentes do vértice B. Então, na matriz de adjacência a segunda linha que corresponde ao vértice B possui valores 1 para vértices A, C e D, e 0 para o vértice B.

Enquanto que, na matriz de incidência, ao listarmos todas as arestas possíveis AB , AC , AD , BC , BD as arestas que possuem B como vértice atribuimos valor 1 como : AB , BC , BD e as outras valor 0 como AC e AD. Indicado na linha segunda linha dessa matriz.

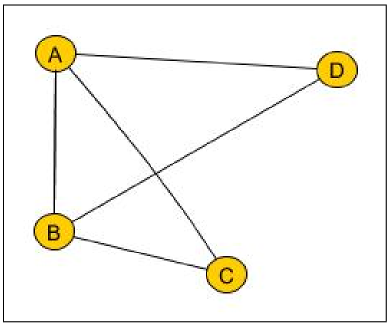

Figura 9: Grafo

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	0

Matriz de adjacência

Figura 10: Matriz Adjac.

	AB	AC	AD	BC	BD
A	1	1	1	0	0
B	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1

Matriz de incidência

Figura 11: Matriz incidência

2.3 Grafo e Alguns Teoremas

Seja o grafo G com n vértices, m arestas e $d(v_i)$ representa o grau do vértice v_i, então:

Teorema 2.1. *A soma dos graus de um grafo G é sempre igual ao dobro do número de arestas.*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \cdot m$$

Demonstração:

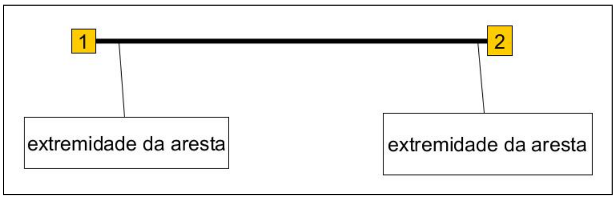

Figura 12: aresta do grafo G

Como o grau de um vértice é o número de arestas que incidem sobre o mesmo, e cada aresta incide sobre dois vértices, ao contarmos os graus dos vértices, contamos as extremidades das arestas que saem de um vértice e aquelas que chegam a outro vértice, deste modo, estamos contando a aresta duas vezes, pois ela apresenta duas extremidades.

Proposição 2.1. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração:

Considere um grafo G. Se ele possui um número ímpar de vértices de grau ímpar, a soma dos graus também seria impar. Mas, pelo teorema anterior, a soma dos graus de um grafo é o dobro do número de arestas e portanto é um número par. Logo, qualquer grafo, deve possuir um número par de vértices de grau ímpar.

Lema 2.2. *Se todo vértice de um grafo G (não necessariamente simples) tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração:

Se o grafo possui arestas múltiplas ou um laço o teorema está demonstrado. Vamos considerar então que G é um grafo simples no qual, escolhemos um vértice v_0 para começarmos a nossa trilha. Ao visitarmos o vértice v_i estamos visitando-o pela primeira vez e podemos continuar ou chegaremos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, em algum momento iremos visitar um vértice pela segunda vez (passar por ele pela segunda vez) produzindo assim um ciclo, demonstrando o lema.

Este lema é importante e necessário para demonstrar o Teorema de Euler sobre grafos.

3 Grafos Eulerianos

Voltando ao problema do grafo da introdução, dizemos que um grafo G com n vértices e m arestas é **Euleriano** se ele possui uma trilha **fechada** de mesmo comprimento m, começando e terminado no mesmo vértice. Ou seja, percorrer o grafo formando um **ciclo fechado** que utiliza cada aresta uma única vez. Com isso, o grafo da introdução, e os grafos de passa-tempo deixados pelo aluno, não são eulianos, pois conseguimos até um caminho mas, formando uma **trilha aberta** de comprimento m no grafo G, e sempre terminaremos em outro vértice daquele ao qual começamos. Euler considerou esses casos, e os chamou de grafos **semi-eulerianos**, por possuírem tal propriedade.

A diferença entre grafo **euleriano** e **semi - euleriano**, consistem em que no primeiro todos os vértices possuem graus pares e existe uma trilha fechada de mesmo comprimento m do grafo dado. No segundo caso, temos um par de vértices de grau ímpar e possui uma trilha aberta de comprimento m do grafo.

Teorema 3.1. *Um grafo conexo G (não necessariamente simples) é euleriano, se, e somente se, possuir vértices com graus pares.*

Demonstração:

Consideremos um grafo com trilha fechada de comprimento m. Ao passarmos por cada vértice, utilizamos duas arestas, uma para chegar outra para sair, e deste modo o grau do vértice é par.

Vamos demonstrar a recíproca do teorema utilizando indução sobre o número de arestas m com o auxílio do lema acima. O teorema é válido para um grafo G com número de arestas $m = 0$, por ser tratar de apenas um vértice.

Suponhamos agora que o teorema é válido para todo grafo com número de arestas menor do que m. Sendo G conexo, os vértices possuem graus maiores do que 2. Devemos considerar que um grafo com o número de graus maior do que 2 é um grafo com ciclo, pois temos duas possibilidades: ou ele apresenta laços ou arestas múltiplas que obrigatoriamente possui um ciclo, ou ele é um grafo simples. Caso seja um grafo simples, pelo lema 1, o grafo possui um ciclo. De todas a trilhas possíveis (T_1, T_2, T_3, $\cdots$, T_n) escolheremos a trilha máxima T_M de G; caso a trilha possua comprimento m o teorema então está demonstrado. Caso contrário, considere o grafo $H(T_m)$ resultante da retirada das arestas de T. Devemos perceber que ao retiramos uma quantidade par de arestas do grafo G, e pela hipótese os vértices possuem graus pares, então pelo menos uma das componentes do grafo $H(T_m)$ possui um vértice em comum com a trilha T_M e todos os vértices de grau par. Pela hipótese de indução o grafo $H(T_m)$ possui uma trilha fechada que passa por todos os vértices de $H(T_m)$ e podemos formar uma triha maior fechada agrupando a trilha T_M com o grafo $H(T_m)$, contrariando a maximalidade na escolha da trilha $H(T_m)$.

Proposição 3.1. *Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, possui no máximo um par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração:

Considere um grafo G de comprimento m semi-euleriano, ou seja G apresenta uma trilha máxima aberta de comprimento m que começa em v_k e termina em v_p. Como a trilha é aberta, temos que $v_k \not= vp$. Logo tanto v_k e v_p possuem graus ímpares, pois a trilha não volta por onde começou.

Demonstrando a recíproca, seja o grafo G conexo com um par de vértices de grau ímpar, digamos v_k e v_p. Pelo Teorema de Euler, acrescentando uma aresta v_k a v_p , os graus de todos os vértices se tornam pares, e existe uma trilha fechada de comprimento $m+1$ que começa e termina em v_k, e uma trilha aberta de comprimento m que começa em v_k e termina em v_p ao qual descreve um caminho semi-euleriano.

3.1 Problema do Menor Caminho

Vamos considerar um grafo valorizado positivamente, ou seja, as arestas possuem valores bem peculiares do qual descrevem situações problemas como distâncias, custo, tempo de percurso, etc. Este tipo de problema é muito comum no ramo de engenharia, em economia, para especialistas de trânsito, tendo como objetivo minimizar o percurso de ir de um ponto a outro. Em grafos, o problema é equivalente descrever um caminho que sai de uma aresta específica a outra. Usaremos uma ferramenta desenvolvida por um especialista em computação "O Algoritmo de Dijkstra (1959) ", um algoritmo computacional.

Seja o grafo G, com seus vértices $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ e considere $(v_i v_j)$ o comprimento da aresta v_i a v_j. Começamos destacando o vértice inicial v_1, por 0 e os outros vértices por ∞. Usaremos a notação $L(v_1) = 0$ e $L(v_i) = \infty(v_i)$ $i \not= 1$, para representar estes destaques. **Obs:** Será usado a notação ∞ referente a vértices não alcançados e não existentes.

Será construído o conjunto T, que representa todas as famílias de vértices que apresentam o menor caminho, ou seja, a partir de n interações, irá existir um conjunto $T = \{ v_1 v_2 v_3 v_4 ... v_n \}$ que formará o menor caminho de v_1 a v_n. A família de vértices T_k, forma-se a partir do T_{k-1}, acrescentado o vértice w com a menor etiqueta entre todos aqueles vértices que não pertencem a T_k, de modo que o destaque L_k (o destaque do vértice do k-ésimo passo) seja o comprimento mais curto de v_1 a v que contém somente vértices de T_k.

1. Passo 1. Façamos:

$$(v_i v_j) = \begin{cases} (v_i v_j) & \text{comprimento da aresta} \quad v_i \text{ a } v_j \\ \infty & \text{caso não exista este comprimento} \quad v_i \text{ a } v_j \end{cases}$$

2. Passo 2. Definiremos:

$$L(v_1) := 0; \qquad L(v_i) := \infty, \qquad i \not= 1$$

3. Passo 3. Enquanto que $v_n \not\in T$, realizaremos:

   (a) $w := v_k$, vértice em $V(G) \setminus T$ com mínimo.
   (b) $T := T \cup \{w\}$
   (c) Para vértices em $V(G) \setminus T$, se $L(w) + (wv) < L(v)$ faça $L(v) := L(w) + (wv)$

4. Passo 4. Concluiremos:
   Comprimento mais curto entre v_1 a v_n é dado por $L(v_n)$.

Exemplo:

Carlos é entregador de pizza e ele deve entregar a pizza na rua Buganville nº 450, ponto de referência, em frente a Escola Municipal José Ovidio Guerra. Para maximizar a entrega ele deve entregar no menor tempo possível. Como gosta de matemática ele fez um mapa com as principais ruas e suas referências e determinou o tempo de percurso, veja o mapa abaixo.

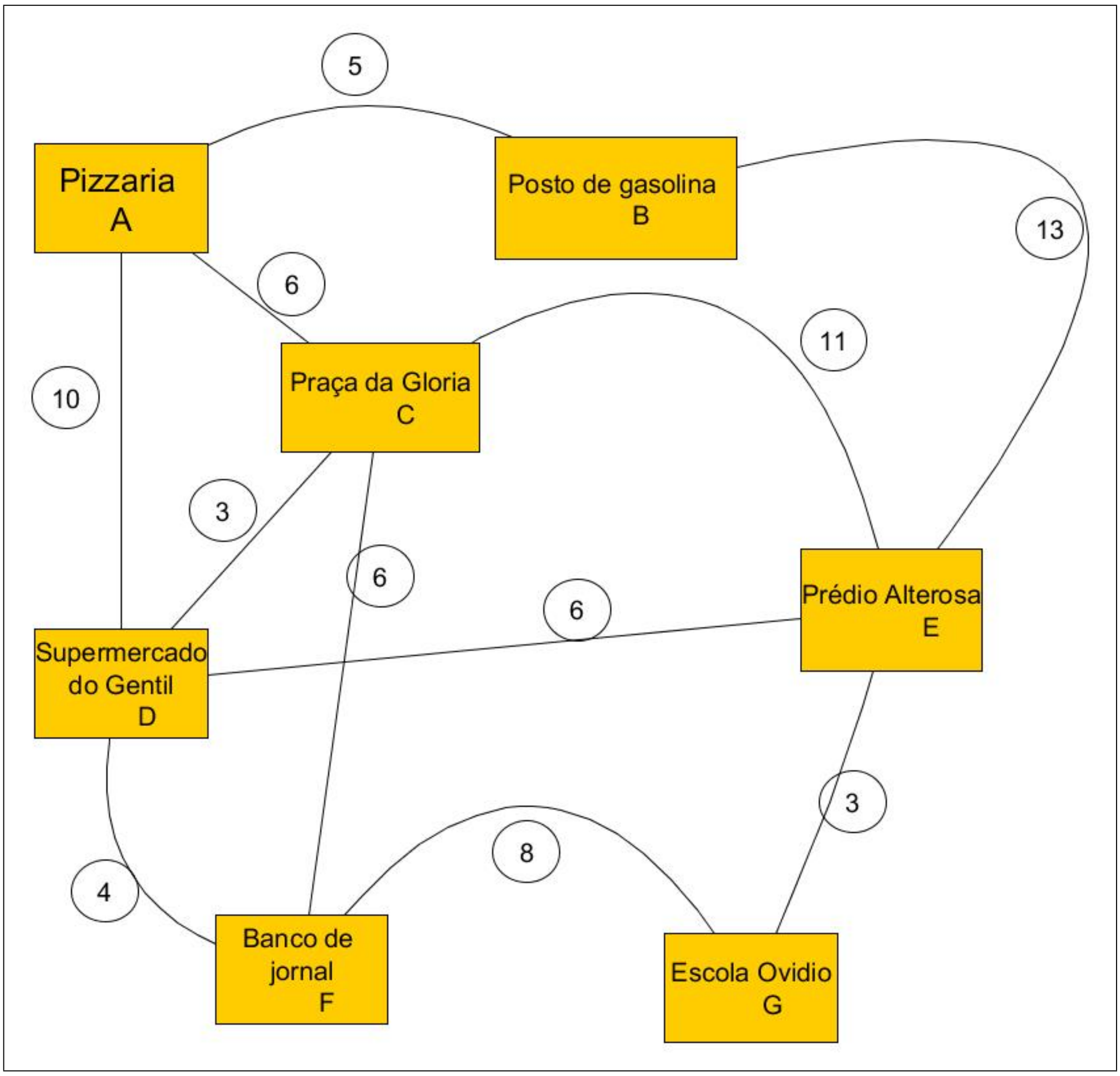

Figura 13: Grafos Menor Caminho

Descrevendo o algoritmo .

Começaremos pela pizzaria. Então:

1. Destaque o vértice A. A distância de A até A é 0 (zero) e todas as distâncias não alcançadas de ∞, $AA = 0$. Calculando as distâncias $AB = 5, AC = 6, AD = 10$, e todas as outras não alcançadas de ∞, $AB = 5$ é o menor caminho.

2. Destaque o vértice B. Saindo de B, podemos ir a E. Calcule $ABE = 5+13$. Como $5+13 = 18 < \infty$ a menor distância é $ABE = 18$.

3. Destaque agora C. Calcule $ACE = 6 + 11 = 17, ACD = 6 + 3 = 9, ACF = 6 + 6 = 12$. Como $AD = 10 < ACD = 9, ACE = 17 < ABE = 18$. Os menores caminhos são $ACE = 17$ e $ACD = 9$.

4. Destaque D. Assim, $ACDE = 9+6 = 15 < ACE = 16$ e $ACDF = 9+4 = 13 > ACF$. Os menores caminhos são $ACDE = 15$ e $ACF = 12$.

5. Destaque F, logo $ACFG = 20$, os menores caminhos são $ACFG = 20$ e $ACDE = 15$.

6. Destaque E e calcule $ACDEG = 15 + 3 = 18$. Como $ACDEG = 18 < ACFG = 20$, o melhor caminho é $ACDEG = 18$.

7. Destaque G. Como G é o último vértice então a melhor trilha é $ACDEG = 18$.

Em geral estamos construindo uma trilha aberta. Testando todos os menores caminhos possíveis, cada vértice é destacado e calcula-se a distância a todos os outros vértices. Caso exista um caminho, o valor é calculado, caso não exista, ou caso não seja alcançado o valor é atribuido a ∞. Os menores caminhos são marcados e podem ser substituídos desde que consigamos encontrar um caminho melhor. O processo se repete até chegar no vértice em questão.

3.2 Problema do Carteiro

Este problema foi eleborado pela primeira vez em 1962 por Mei-Ku Kwan, um matemático chinês. Ele aborda os grafos eulerianos com arestas valorizadas, ou seja, as arestas possuem valores que podem ser distância, tempo de percurso, custo, etc.

Suponhamos que temos um bairro em que o carteiro deverá entregar as cartas por todas as ruas que começa e termina no ponto de distribuição. Caso a descrição das ruas apresentar um grafo euleriano, é óbvio que o carteiro deverá percorrer as ruas passando pela trilha euleriana, caso o grafo não seja euleriano, poderemos acrescentar ruas (arestas ao problema de modo a minimizar o esforço do carteiro), ou até repetir ruas sempre descrevendo uma trilha euleriana. Como podemos encontrar várias trilhas eulerianas , usamos então o algoritmo de Dijkstra para descrever o melhor caminho.

Um dilema que devemos considerar é: qual aresta devemos incluir se o grafo não é euleriano? Qual de todas as arestas possíveis representa a melhor solução?

A resposta vai depender de quantos vértices ímpares temos no grafo. Caso o grafo G com m arestas apresentar apenas um par de vértices de grau ímpar, a aresta acrescentada será aquela que une estes dois vértices específicos. Com recursos computacionais e com o auxilio do "Algoritmo de Dijkstra (1959)"podemos calcular o menor valor para esta aresta. Depois de acrescentar a aresta, o nosso novo grafo G terá $m + 1$ arestas, tornando-se assim um grafo euleriano. Caso o grafo possua mais de um par de vértices ímpares, devemos sempre unir cada vértice ímpar a outro ímpar, sempre minimizando o valor da aresta pelo algoritmo.

Exemplificando, observe o grafo da figura 1. Podemos perceber que ele é semi-euleriano, as arestas serão valorizadas e queremos saber qual a melhor trajetória que o carteiro terá que fazer saindo e voltado ao ponto A de origem.

Acrescentamos uma nova aresta e calculamos o menor valor para ela. Utilizando "O Algoritmo de Dijkstra (1959)", percebemos que $AB = 25$ e $ACEB = 15$, a nova aresta valerá 15. Com isso, o nosso grafo passa a ser euleriano. Ver figura 14 a seguir.

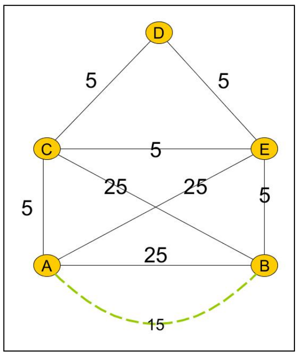

Figura 14: Exemplo Passa tempo Grafo Euleriano

4 Grafos Hamiltonianos e o Problema do Carteiro Viajante

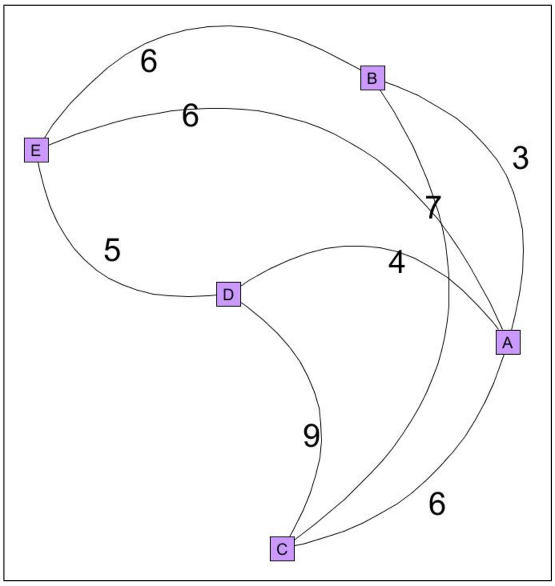

Figura 15: Grafo Carteiro Viajante

Paralelamente à idéia dos grafos eulerianos, de passar por cada aresta uma única vez, os grafos hamiltonianos consistem em passar por cada vértice uma única vez. Caminho hamiltoniano em um grafo é o caminho que visita cada vértice exatamente uma vez.

Um ciclo hamiltoniano é um ciclo que visita cada vértice uma só vez (uma trilha fechada que começa e termina no mesmo vértice). O grafo da figura 15 contém um caminho hamiltoniano. Enquanto determinar se um dado grafo contém um caminho ou ciclo euleriano é trivial, o mesmo problema para caminhos e ciclos hamiltonianos é extremamente árduo.

Recursos computacionais são necessários para testar todas as possíveis soluções. Caso o problema apresentar 20 vértices, o número de soluções possíveis é 20!. Caso tenhamos 300 vértices teremos 300! soluções para testar, ou seja, quanto maior o número de vértices maior será o tempo de verificar qual das trajetórias hamiltonianas é a melhor. Até hoje, não existe um algoritmo hamiltoniano capaz de minimizar a solução. Todos os esforços de estudiosos comprovam que isto não é possível. Ver referências 1 e 2.

O problema do carteiro viajante representa um problema Hamiltoniano, no qual um carteiro, viajando por várias cidades uma única vez e retornando à sua cidade de origem, percorrerá a menor distância possível.

Por exemplo, na Figura 15 existem 5 cidades possíveis A, B, C, D, E, e o caminho que forma o trajeto mais curto é: $A \to C \to B \to E \to D \to A$ e mede 29.

5 Atividades Aplicações de Grafos em sala de aula

Todas as atividades serão aplicadas em grupos de 4 alunos.

Passa Tempo: 1º. Atividade

Observe o grafo com bastante atenção e responda as questões abaixo:

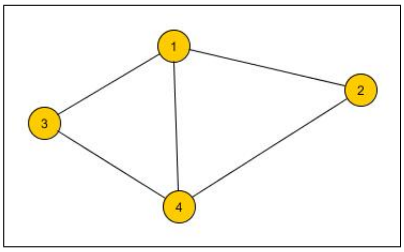

Figura 16: Atividades Grafos Eulerianos

1. Vocês conseguem passar o lápis por toda a figura sem levantar o lápis do papel e passar uma única vez por cada aresta?

2. Vocês começaram por qual vértice?

3. Agora, determine o grau de cada vértice.

4. Será que conseguem realizar a mesma atividade começando por outro vértice?

5. Podemos fazer a atividade partindo de qualquer vértice?

6. Por quê?

7. Discuta com o grupo todas as possíveis soluções.

8. Registre as conclusões do grupo.

Passa Tempo 2º. Atividade

Considerando a figura 15, faça o que se pede em cada item:

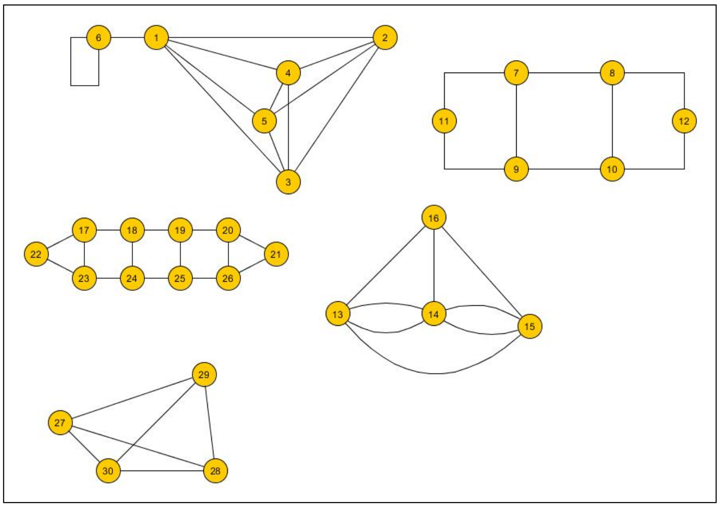

Figura 17: Grafos Desafios

1. Agora, da figura escolha um grafo e reproduza a figura. Determine o grau de cada vértice e tente refazer as questões da atividade anterior. Serão distribuídos um grafo distinto a cada grupo. O grupo que conseguir resolver escolhe um outro grafo.

2. Qual(is) grafos vocês conseguiram resolver ?

3. Existe alguma característica nestes grafos, como o número de graus ou de vértice ? Observação: todos os grafos que apresentam solução possuem uma caracterísca apenas deles.

Passa Tempo 3º. Atividade

João é entregador de pizza. Com sua moto ele calculou o tempo gasto (em minutos) para deslocar nos pontos principais do bairro, como mostra a Figura 16. Seu ganho é por entrega, ele tem que entregar uma pizza na Buganville n^o 32, referência em frente a Escola Ovidio.

1. Qual o melhor caminho que João terá que tomar? Ou seja, qual o trajeto que gasta menos tempo?

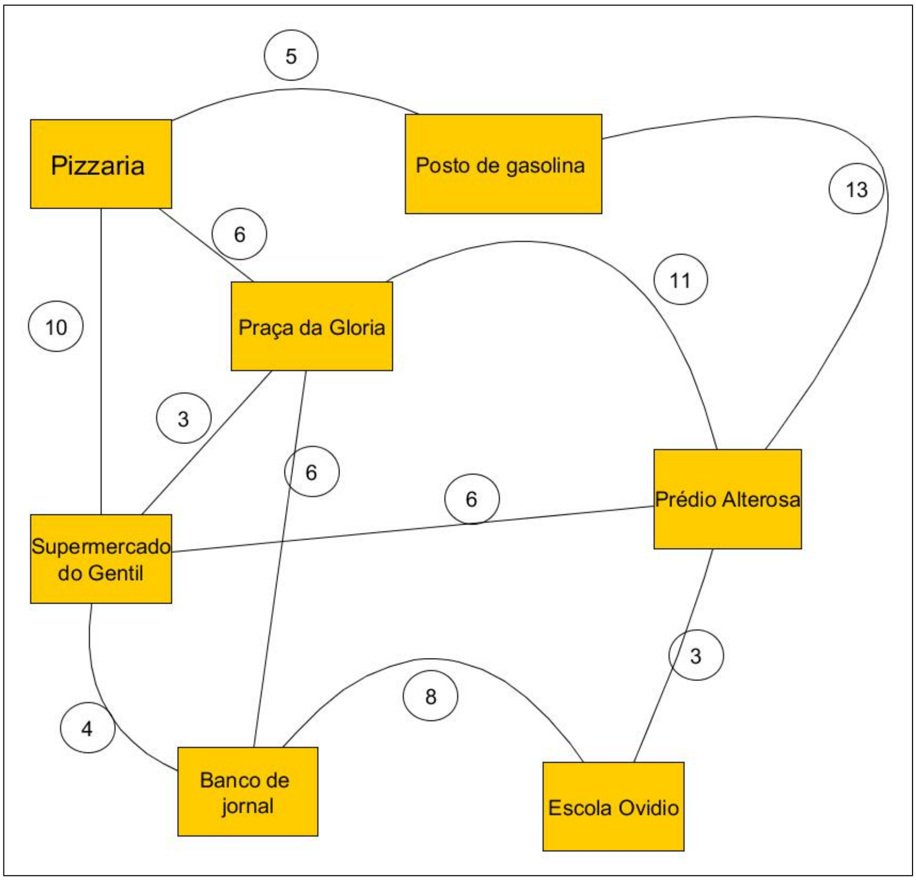

Figura 18: Mapa dos pontos principais

Passa Tempo 4º. Atividade

1. Esta atividade foi proposta por Hamilton em 1856. Este jogo tem o nome de "Icosain Game", que consiste em descobrir uma maneira de sair de Londres e viajar para as outras cidades do mundo uma única vez, diferente das atividades Eulerianas, que consiste em passar por cada aresta uma única vez, você deverá passar por cada vértice uma única vez, sempre retornando ao ponto de partida. Os vértices são representações das cidades e as arestas são como elas estam conectadas

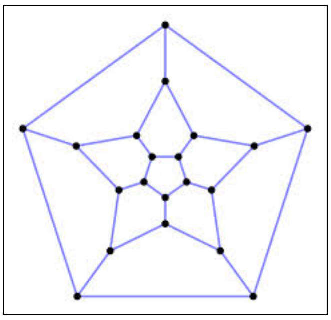

Figura 19: Icosain game

2. Partindo do mesmo princípio, encontre as respostas para as atividades abaixo.

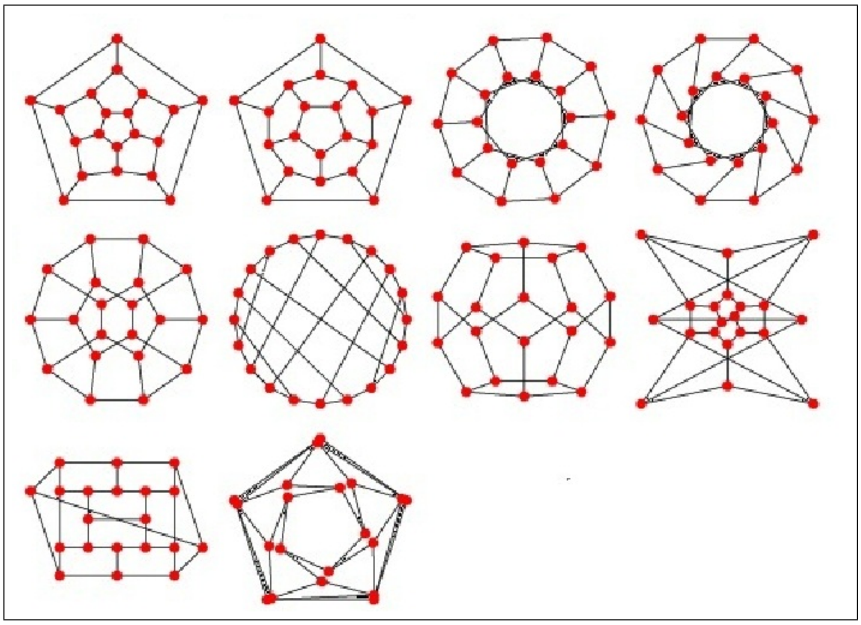

Figura 20: Grafos Games: Poliedros de Hamilton

6 Conclusão

Este projeto partiu de um desafio de um estudante de 9º ano da escola onde realizo meu trabalho como docente na Rede Municipal de Contagem. A partir do desafio de um jovem que não havia tido contato com o assunto fui instigado a pesquisá-lo e acrescentá-lo como conteúdo para o ensino fundamental II (5º ao 9ª ano). Assim, foram elaboradas várias atividades envolvendo grafos eulerianos, grafos semi-eulerianos e grafos hamiltonianos, dedicando cerca de duas semanas para desenvolver o tema.

Por serem pré-adolescentes e para estimulá-los, trouxe pequenos incentivos, como balas e bombons. Seriam vencedores dos desafios os primeiros a resolver grafos semi-eulerianos de poder contornar toda a figura passando pelas arestas uma única vez sem tirar o lápis do papel.

Após vários estudantes vencerem os desafios, passamos a construir conceitos que poderiam ser utilizados na matemática para a resolução de problemas.

Alguns conceitos foram formados pelos estudantes, usando uma linguagem simples, porém consistente. Para desafiá-los e instigá-los, acrescentei ao conteúdo graus de dificuldades crescentes como maior número de vértices e arestas. Na solução deveriam apresentar a trilha aberta ou fechada, descrever todas as soluções possíveis, e outras. Cada vez que eles construíam um desafio, construímos o conceito matemático, as regras, passos para solucioná-lo e partíamos para um novo desafio.

Um ponto importante foi o uso da linguagem matemática e sua adequação para pré-adolescentes, ainda muito infantis (idades de 11 a 13 anos). Além da relação professor - aluno, estabeleceu-se uma nova situação de amizade tornado a aprendizagem mais interessante para todos.

Considero que este trabalho pode trazer para o universo escolar, basicamente na área das ciências exatas uma porta a ser aberta por professores, pois Grafo Euleriano e Grafo Hamiltonianos não são trabalhado no ensino regular.

Matematicamente falando, corro o risco de ser criticado por colegas da área por inverter a forma de ensinar, pois espera-se fazer a parte formal como definições e propriedades dos grafos para depois passar pelos desafios e solucioná-los. Mas, por ser tratar de pré-adolescentes de 11 a 13 anos, o resultado da experiência foi ótimo.

Tal experiência aqui relatada vem mostrar que a construção de conceitos através de desafios concretos leva os estudantes a criar seus próprios conceitos que unidos ao colega tornam-se uma regra geral. A memorização e fixação por parte deles é mais marcante, podendo ajudá-los futuramente para passar nos vestibulares e engressar nas melhores faculdades.

Ao final do período de experimentação, professor e estudantes partiram para a formalização do conceito e aí então foi apresentado aos estudantes a linguagem matemática formal a ser utilizada como: pontos passaram a ser vértices, linhas passaram a ser arestas. Nas descrições de suas soluções, escreviam trilha aberta, trilha fechada , ciclo fechado (começava e terminava no mesmo vértice).

Devo considerar que em nenhum momento das atividades falei sobre o teorema de grafos eulerianos e semi-eulerianos, mas sempre enfatizava que existia uma relação nas soluções encontradas por eles. Um dos grupos dos alunos conseguiu chegar perto de determinar a solução geral e eles perceberam que para haver solução, o grafo deveria possuir um par de vértices ímpares, pelo qual começariam. E todos os grafos com vértices pares têm solução.

Percebe-se que Grafo é usado para resolver problemas simples ou complicados numa linguagem natural mas que leva uma sofisticada estrutura matemática. Um conteúdo explorado por matemáticos, físicos, engenheiros e especialistas em computação. Administrar um tema desconhecido e inexplorado para alunos com idades de 11 a 13 anos foi uma experiência prazerosa. Isto fez com que os alunos interagissem uns com os outros e fez também da aprendizagem um processo interessante e divertido.

Referências

[1] Jurkiewicz, SamuelBosch *Grafos Uma introdução.* . OBMEP ,2009.

[2] Carvalho, P.C.P. *Contagem . Apostila 2 de treinamento dos alunos premiados na OBMEP,* , 2006 .

[3] http://www.worldcommunitygrid.org/help/viewTopic.do?shortName=acah
Acesso em 26 de jan. de 2014.

[4] www.ime.usp.br/ pf/teoriadosgrafos.html
Acesso em 26 de jan. de 2014.

[5] http://www.obmep.org.br/docs/Apostila5-Grafos.pdf
Acesso em: 16 jan. 2014.

[6] http://www2.dcc.ufmg.br/livros/algoritmos-edicao2/cap7/transp/completo4/cap7.pdf
Acesso em: 16 jan. 2014.

[7] http://www.mat.uc.pt/ picado/ediscretas/apontamentos/cap2.pdf
Acesso em: 12 jan. 2014.