2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Análise da velocidade linear de um móvel medida por um observador em posição perpendicular ao movimento

Decarte Ferreira da Silva Paiva [1]
José Angel Dávalos Chaquipoma[2]

Resumo: Este trabalho tem por objetivo, a partir da modelagem matemática aplicada aos fenômenos físicos de cinemática, analisar a inter-relação da matemática com a física, através de um problema específico de medição de velocidade de um objeto, por um observador que se encontra em uma posição perpendicular à trajetória do mesmo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Cinemática. Velocidade.

1 Introdução

Neste artigo, descreveremos a solução de uma situação problema de cinemática física, cuja solução se deu a partir do uso de modelagem matemática.

O problema que será exposto, neste texto, explora conceitos físicos como: referencial, trajetória, deslocamento, velocidade e aceleração. Fugiremos à regra de um problema tradicional encontrado nos livros de física, uma vez que para solucioná-lo devemos considerar outros fatores que influenciam no evento físico a ser avaliado.

Veremos que um observador (no caso um policial) estanto em posição perpendicular a direção de deslocamento de um veículo pode estimar de modo errôneo a velocidade deste móvel usando apenas o sentido da visão, ou seja, sem dispor de um equipamento apropriado para este fim.

O trabalho deste agente de polícia ainda pode ser dificultado se existirem interferências de acontecimentos externos à situação física ideal. O caso aqui apresentado considera que o veículo foi desacelarado e acelerado bruscamente por um instante de tempo e além disso, a visão do policial foi brevemente obstruída por outro veículo que trafegava na mesma direção e sentido do veículo observado.

A fim de estudarmos o caso proposto, partiremos de um modelo, por exemplo, de uma fórmula matemática que representa uma situação física ideal. Faremos a adaptação desta fórmula considerando os fatores externos presentes na situação-problema, tentando assim aproximar a representação matemática ao máximo da realidade dos fatos. É neste contexto que se encaixa a modelagem matemática.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: debhbr@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: jadc13@ufsj.edu.br

A utilização da Modelagem Matemática como instrumento que motiva e facilita a aprendizagem tem aumentado consideravelmente. E a importância desta tendência em educação matemática se traduz ao permitir que a matemática contribua para outras áreas do conhecimento, ao aguçar no educando o senso investigativo.

A matemática e a física caminham juntas e a Modelagem Matemática é a melhor maneira de estabelecer uma ponte entre estas duas áreas do conhecimento. Esta forma de ensinar permite analisar dados coletados, examinar a veracidade dos modelos existentes e propor correções para situações específicas.

Com o propósito de permitir uma aprendizagem carregada de criticidade, onde os educandos são os sujeitos ativos e principais responsáveis pela formulação, discussão e solução de um problema físico, mostraremos por meio deste texto que o trabalho do professor, via Modelagem Matemática, é uma estratégia que permite o desenvolvimento destas competências.

2 Modelagem Matemática

Como propor aos alunos um aprendizado acessível e significativo? Buscando uma resposta a este questionamento, a educação matemática tem sido objeto de inúmeras discussões nas últimas décadas. Os debates sobre educação matemática no Brasil foram acalorados a partir da década de 80, principalmente após a fundação da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, no ano de 1988. Desde então a Matemática no aspecto de processo ensino-aprendizagem, tem se destacado nas pesquisas educacionais.

Com a finalidade de propor mudanças significativas no modo de se ensinar matemática, surgiram o que hoje conhecemos como novas tendências em Educação Matemática. Segundo FLEMMING:

> Portanto, para resumir, podemos dizer que a educação matemática é uma área de estudos e pesquisas que possui sólidas bases na Educação e na Matemática, mas que também está contextualizada em ambientes interdisciplinares. Por este motivo, caracteriza-se como um campo de pesquisa amplo, que busca a melhoria do processo ensino-aprendizagem de Matemática.(FLEMMING,2005,p.13).

Apesar de ser considerada uma nova tendência na educação matemática, em textos históricos com data aproximada de 1200 a.c, há indícios de aplicação de Modelagem Matemática. No entanto, FLEMMING (2005) afirma que somente no início do século XX, a modelagem foi efetivamente utilizada para se resolver problemas de Biologia e Economia. E somente a partir da década de 1980, encontramos inúmeros exemplos de utilização de modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem.

Mas afinal o que é Modelagem Matemática? De uma forma bem simplificada, Modelagem Matemática é uma forma de representar situações ou problemas por meio da linguagem matemática.

Para BASSANEZI (2004, p.17), "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real"e complementa dizendo que "é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la."

E segundo BIEMBENGUT e HEIN (2000) consiste em um processo que vem à tona da própria razão e se faz presente na nossa vida como forma de constituição do conhecimento.

Para FLEMMING (2005), a modelagem matemática é aplicada em duas vertentes, conforme a Figura 1:

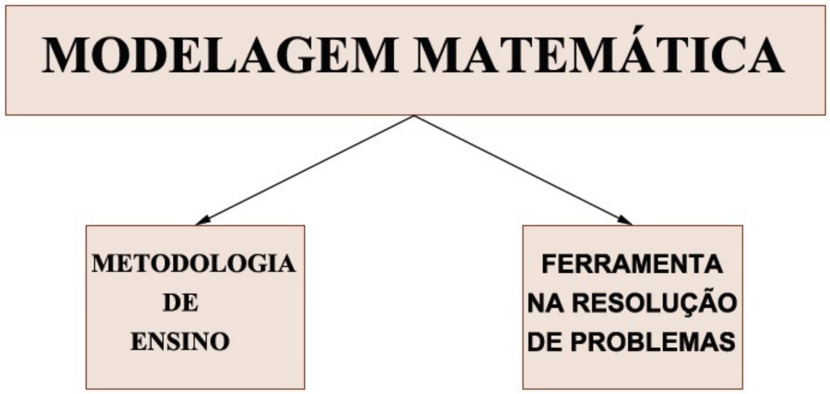

Figura 1: Vertentes da Modelagem Matemática - Adaptado de (FLEMMING, 2005, p.24).

Enquanto metodologia de ensino, a modelagem matemática parte de um modelo conforme BIEMBENGUT e HEIN (2000): A ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de argila, técnica, intuição e criatividade - faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa seja real ou imaginário.

Nesse aspecto, a modelagem matemática permite ao estudante representar um problema real a partir de um modelo que viabilize-se encontrar uma solução para o mesmo. Para que esse procedimento se concretize, o estudante utiliza-se de todo o potencial matemático que possui; concluído o modelo, o estudante terá que aplicá-lo para fazer a verificação, ou seja, se o modelo encontrado atenderá ao problema.

A importância da modelação matemática como ferramenta na resolução de problemas também é explicitado por BIEMBENGUT e HEIN:

> Trata-se de uma forma extremamente prazerosa e que confere significativo conhecimento, seja na forma de conceitos matemáticos, seja sobre o tema que se estuda. Com isso, se desperta nos alunos, a habilidade na resolução de problemas. A prática da resolução de problemas constitui o meio para a construção do conhecimento matemático, é a essência da atividade matemática, que proporciona ao aluno a participação de modo que ele comece a produzir seu conhecimento por meio da interação entre sentir e fazer. (BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p.28).

Na próxima seção, apresentaremos os conceitos básicos de cinemática que utilizaremos na construção do modelo que descreve a situação-problema que nos propusemos a estudar.

3 Conceitos de Cinemática

3.1 Movimento, Posição e Deslocamento

Entre um dos objetivos principais da física, destaca-se o estudo do *movimento* de objetos: analisar a distância percorrida em um dado intervalo de tempo nos dá a ideia de rapidez. Avaliar o desempenho de um veículo, o movimento das placas tectônicas visando prever terremoto, o fluxo sanguíneo de um paciente ao examinar uma artéria obstruída e até a tentativa de um motorista em reduzir a velocidade de seu veículo frente a existência de um radar de controle de velocidade são alguns exemplos da utilidade do estudo do movimento.

Quando queremos localizar um objeto se movimentando em linha reta, utilizamos a geometria analítica para poder interpretar ou representar a noção de ponto como um elemento do conjunto dos números reais, para poder assim, determinar a *posição* do objeto em relação a um referêncial, normalmente chamado de ponto de abscissa zero ou referencial de origem; este exemplo simples mostra a inter-relação que existe entre conceitos físicos e a matemática. Também determinamos o sentido positivo e o sentido negativo, conforme a Figura 2:

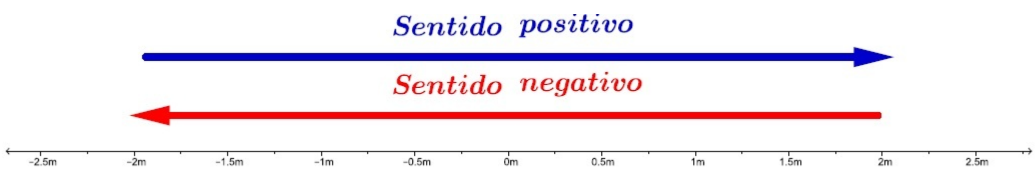

Figura 2: Posição de um objeto em relação a origem.

Chamamos *deslocamento* a mudança de um objeto de posição x_1 para uma posição x_2 e denotamos este deslocamento por Δx que é dado por:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{1}$$

Este deslocamento pode ser visto como uma função $x : [c, d] \to \mathbb{R}$, onde $x(t)$ depende da variação do tempo t no intervalo $[c, d]$.

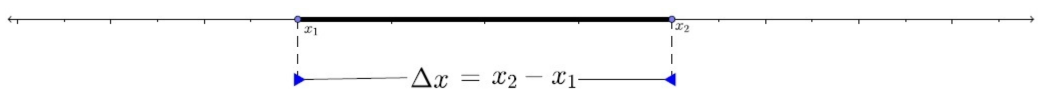

Figura 3: Deslocamento de um objeto.

3.2 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Sejam $t_1, t_2 \in [c, d] \subset \mathbb{R}$ e $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$. A *velocidade média* de um objeto do ponto x_1 ao ponto x_2,denotada por v_{med}, é definida como a razão entre o deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$ e o intervalo de tempo $\Delta t = t_2$ - t_1, durante a execução deste deslocamento:

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2}$$

Quando pensamos na ideia de rapidez de deslocamento de um objeto, na verdade, estamos interessados em aferir o movimento de um objeto em um certo instante, ou seja, em sua velocidade instantânea que denotamos por $v = v(t)$.

Esta velocidade pode ser medida a partir da ideia de velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt cada vez mais próximo de zero. Isto é, quando Δt diminui, a velocidade média se aproxima de um valor-limite, que denominamos *velocidade instantânea*:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta x) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

ou seja, $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ é a função tal que $v(t)$ representa a taxa com a qual a posição $x(t)$ está variando com o tempo em um dado instante, isto é interpretado matematicamente pela noção de derivada, assim, $v(t)$ é a derivada da função deslocamento $x(t)$ em relação a t. Vale ressaltar que $v(t)$ representa o módulo da velocidade em cada instante de tempo t.

3.3 Aceleração Instantânea, Aceleração Constante

Dizemos que um objeto foi acelerado quando há uma variação da sua velocidade em um conhecido intervalo de tempo. Definimos a *aceleração média* de um objeto no intervalo de tempo de t_1 a t_2, denotado por a_{med} em um intervalo de tempo Δt como:

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{4}$$

onde v_1 e v_2 representam a velocidade da partícula nos instantes t_1 e t_2 respectivamente. Logo a *aceleração instantânea* a é definida como a taxa com a qual a velocidade está variando com o tempo em um dado instante, ou seja:

$$a(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \tag{5}$$

Ao combinarmos a equação (3) com a equação (5), obtemos:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{6}$$

Concluímos, então, que a função aceleração (aceleração instantânea) $a : [c, d] \to \mathbb{R},\ a(t)$ de um objeto em qualquer instante é a derivada segunda da posição $x(t)$ em função do tempo.

Em determinados casos, a aceleração pode ser considerada constante ou quase constante; podemos, por exemplo, acelerar um veículo a uma taxa aproximadamente constante quando a luz de um sinal de trânsito muda de vermelho para verde. Analogamente, quando reduzimos a sua velocidade até parar, a desaceleração também pode ser considerada constante. Portanto, nessas situações a aceleração média pode ser dada pela aceleração instantânea e assim reescrevemos a equação (4) como:

$$a = a_{med} = \frac{v - v_0}{t - 0} \tag{7}$$

onde v_0 é a velocidade no instante $t = 0$ e v é a velocidade em um instante $t > 0$. Assim, a partir da equação (7) podemos escrever:

$$v(t) = v_0 + ta \tag{8}$$

Também podemos reescrever a equação (2) como:

$$v_{med} = \frac{x - x_0}{t - 0} \tag{9}$$

o que nos fornece:

$$x(t) = x_0 + t\, v_{med} \tag{10}$$

onde x_0 é a posição do objeto em $t = 0$ e v_{med} é a velocidade média entre $t = 0$ e um instante $t > 0$.

Podemos, assim, estabelecer que a velocidade média em qualquer intervalo de tempo nada mais é do que a média aritmética entre a velocidade inicial v_0 com a velocidade no final do intervalo considerado v, ou seja:

$$v_{med} = \frac{1}{2}(v_0 + v). \tag{11}$$

Substituindo (8) na equação (11), obtemos:

$$v_{med} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + t\ a) = v_0 + \frac{1}{2}t\ a, \tag{12}$$

de (12) e (10) vemos que:

$$x - x_0 = (v_0 + \frac{1}{2}t\ a)t = t\ v_0 + \frac{1}{2}t\ a^2. \tag{13}$$

Por outro lado, com ajuda do cálculo diferencial, podemos também obter o deslocamento $x(t)$ dado por (13) para uma aceleração constante. Com efeito, de (5) temos na forma diferencial $dv = adt$, aplicando a integral indefinida em ambos os lados dessa igualdade temos:

$$\int dv = \int adt = a \int dt,$$

ou seja:

$$v(t) = t\ a + C, \tag{14}$$

para alguma constante arbitrária C. Para encontrar C, fazemos $t = 0$, instante onde $v(0) = v_0$ e substituindo em (14), temos $C = v_0$, obtendo assim (8).

A partir da forma diferencial da equação (3), $dx = vdt$, temos ao integrar ambos os lados desta igualdade:

$$x(t) = \int dx = \int vdt.$$

Substituindo o valor de v dado por (8), temos:

$$x(t) = \int (v_0 + a\ t)dt = v_0 \int dt + a \int tdt$$

de onde, obtemos:

$$x(t) = v_0\ t + \frac{1}{2}a\ t^2 + C, \tag{15}$$

para alguma constante arbitrária C. Usando a condição $x(0) = x_0$ e substituindo na equação (15), temos $C = x_0$. Obtendo assim a equação (13).

3.4 Posição e deslocamento angular

Considere um objeto M descrevendo uma trajetória circular em torno de um certo eixo de rotação. A distância deste objeto ao eixo de rotação denominamos *raio* r da trajetória. Esta trajetória descreve um arco de comprimento S e a posição angular associada ao arco e ao raio é o ângulo θ (ver figura 4).

Assim, quando um corpo está em rotação ele varia a sua posição angular de modo que num dado instante t_1 esta posição é definida por um ângulo θ_1 e num instante superior t_2 é definida por um ângulo θ_2. Portanto, o *deslocamento angular* $\Delta\theta$ entre os instantes considerados é:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{16}$$

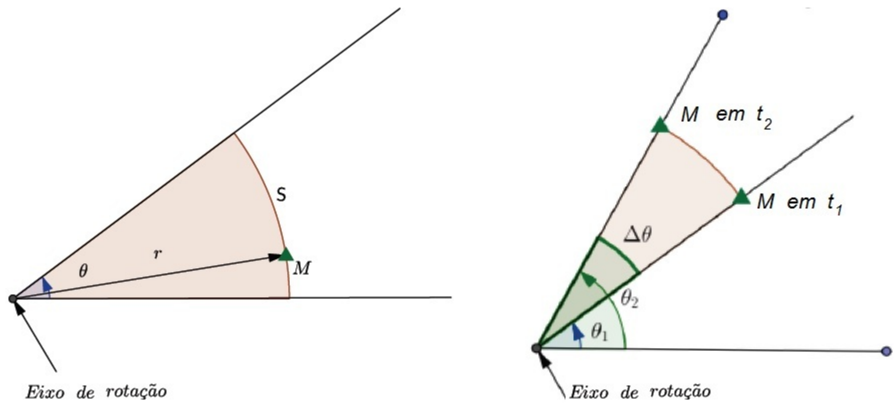

Figura 4: Posição angular / Deslocamento angular

3.5 Velocidade Angular Média e Velocidade Angular Instantânea

A *velocidade angular média* w_{med} de um objeto é definida como a razão entre o deslocamento angular $\Delta\theta$ e o intervalo de tempo em que ocorreu este deslocamento $\Delta t = t_2 - t_1$, ou seja:

$$w_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}. \tag{17}$$

A *velocidade angular instantânea* w é definida de maneira similar a velocidade linear instantânea v, trocando o deslocamento linear Δx pelo deslocamento angular $\Delta\theta$, assim:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t + \Delta\theta) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}, \tag{18}$$

ou seja, $w : [c, d] \to \mathbb{R}$ é a função tal que $w(t)$ representa a taxa com a qual a posição angular $\theta(t)$ está variando com o tempo em um dado instante. Isto é interpretado matematicamente pela noção de derivada, assim $w(t)$ é a derivada da função deslocamento angular $\theta(t)$ em relação a t. Portanto, $w(t)$ representa o módulo do vetor velocidade em cada instante de tempo t.

4 Formulação do Problema

O problema que relataremos foi publicado em um texto de quatro páginas publicado em um jornal da internet, pelo físico Dmitri Krioukov, em seu artigo "The Proof of Innocent". Não conformado por ter recebido de um policial uma multa de trânsito no valor de $400,00 (o policial alegou que Dmitri não respeitou o sinal de parada obrigatória), o físico utilizou-se de argumentos físico-matemáticos para convencer aos leitores do jornal que a multa aplicada não era justa.

Para obter êxito neste sentido, a modelagem matemática foi aplicada para uma situação singular, onde acontece uma combinação de três eventos físicos. Neste artigo, Dmitri Krioukov partiu das conhecidas fórmulas físicas mencionadas nas seções anteriores, envolvendo o movimento retílineo e movimento angular em conjunto com a geometria que descreve o caso.

Como argumento, ele analisou o caso para a combinação das seguintes três hipóteses:

1. O policial não mede a velocidade linear do veículo e sim a velocidade angular.

2. Há uma desaceleração seguida de uma rápida aceleração do veículo.

3. O policial teve um instante de tempo de obstrução de sua visão do veículo em questão por um outro veículo de maior porte quando estes se aproximavam do sinal de parada obrigatória ($t = 0$).

Considerando a velocidade angular $w(t)$, em função do tempo, para o caso onde a velocidade do veículo $v = v_0$ é constante e por meio da geometria que descreve o caso (ver Figura 5) é possível obter uma equação para a medição de $w(t)$ para o modelo em questão. Para entender a primeira situação, podemos imaginar, que quando estamos próximos a uma

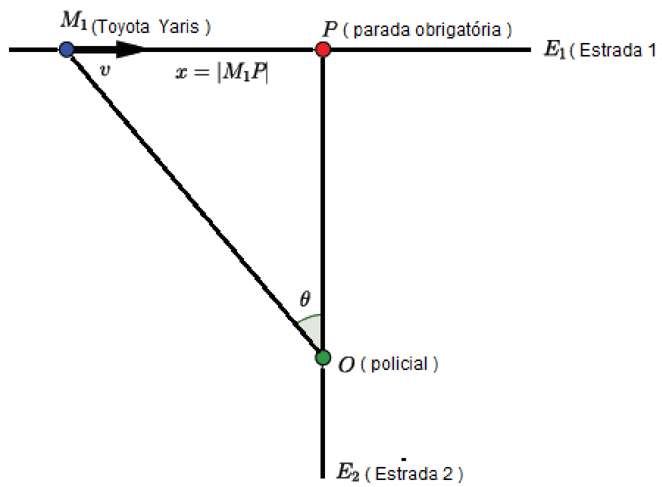

Figura 5: Diagrama que descreve a primeira das hipóteses - Adaptado de [7] por meio do software Geogebra.

linha férrea e observamos o movimento de um trem que se aproxima em linha reta, com uma velocidade linear constante a uma distância considerável, temos a primeira impressão que o mesmo vem se movendo lentamente e que a medida que se aproxima de onde estamos, essa velocidade aumenta consideravelmente. Isso acontece pelo fato de estarmos mensurando a sua velocidade angular e não a velocidade linear que neste caso é constante.

A Figura 5 retrata a geometria da situação-problema. Para equacionar a velocidade angular em função do tempo $w(t)$ de forma que o ângulo de visão θ do observador (no caso o policial) é determinado pela relação trigonométrica envolvendo a distância percorrida $x(t)$ pelo móvel, localizado em M_1 (no caso o seu veículo modelo Toyota Yaris) que trafega em uma estrada E_1 e a constante $r_0 = OP$, que representa a distância entre a posição do observador O situado em uma outra estrada E_2 perpendicular a E_1 e o ponto de parada obrigatória P que está situado no cruzamento das estradas E_1 e E_2. O móvel M_1 move-se ao longo da estrada E_1 com velocidade linear v. O ângulo de visão do observador é o ângulo formado entre os segmentos $|OM_1|$ e $|OP|$ é θ.

4.1 Velocidade Linear Constante

Considerando a velocidade angular, em função do tempo $w(t)$, para o caso onde v é constante com $v = v_0$ e por meio da geometria descrita na Figura 5 é possível encontrar uma equação para a medição de $w(t)$ para o modelo em questão.

Sendo o deslocamento do móvel $x(t) = v_0\, t + C,$ C constante e supondo sem perda de generalidade que no instante $t = 0$ o móvel se encontra no ponto P, obtemos $x(0) = |M_1P| = 0$, isso implica que $C = 0$.

Portanto, podemos escrever a distância $x(t)$ em função do tempo t simplesmente como:

$$x(t) = v_0\, t, \tag{19}$$

no entanto, como já foi enunciado anteriormente o observador localizado no ponto O não mede a velocidade linear do móvel e sim a sua velocidade angular descrita pela fórmula (18)

$$w(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

Na figura, podemos notar que o triângulo OM_1P é retângulo em P e portanto:

$$\tan\theta(t) = \frac{x(t)}{r_0}$$

então,

$$\theta(t) = \arctan\frac{x(t)}{r_0} = \arctan\left(\frac{v_0\, t}{r_0}\right). \tag{20}$$

Substituindo esta última igualdade na equação (18), obtemos

$$w(t) = \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{v_0\, t}{r_0}\right), \tag{21}$$

Por último, diferenciando (21) encontramos a velocidade angular $w(t)$ do móvel quando a velocidade linear é constante:

$$w(t) = \frac{\left(\dfrac{v_0}{r_0}\right)}{1 + \left(\dfrac{v_0}{r_0}\right)^2 t^2}. \tag{22}$$

O gráfico representado na Figura 6 permite confirmar a hipótese inicial que afirma que a velocidade angular de um móvel se deslocando a uma velocidade linear constante, mensurada por um observador situado no ponto O não é constante e que a medida que o móvel se aproxima da parada obrigatória P o valor de $w(t)$ cresce significativamente, chegando ao seu valor máximo quando $t = 0$, ou seja, quando o móvel se encontra sobre a parada obrigatória P.

4.2 Aceleração e Desaceleração Constante

Nesta seção, é considerado que o movimento do veículo sofre brusca desaceleração/ aceleração em determinado instante de tempo. Para isso, ele supôs que o movimento considerado aconteceu inicialmente em desaceleração constante a_0 até o móvel atingir o ponto de parada obrigatória P, vindo a parar completamente sobre P e posteriormente volta a mover-se com aceleração constante a_0.

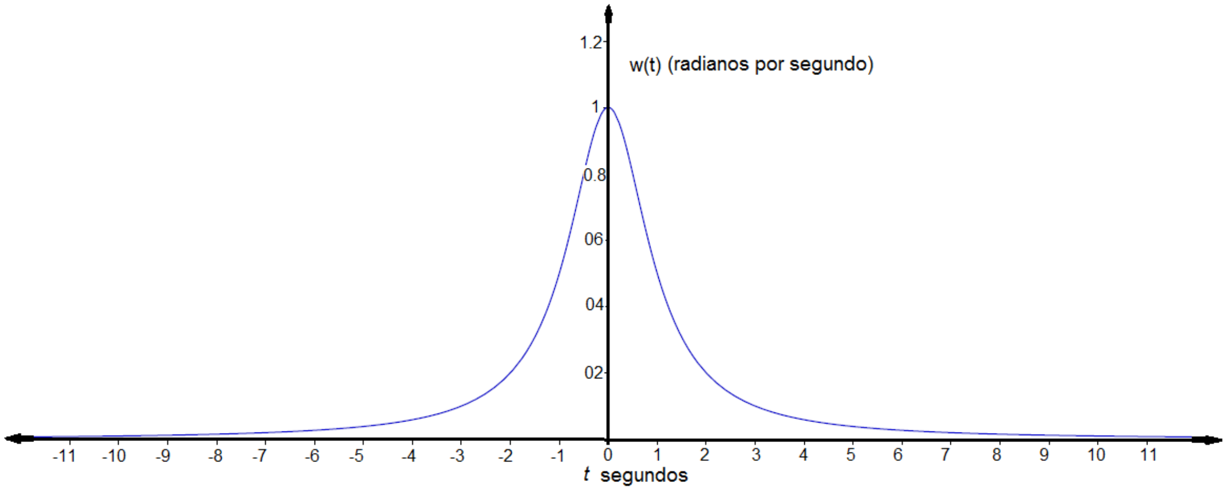

Figura 6: A velocidade angular w de M_1 observada por O como função do tempo t quando M_1 se move em velocidade constante v_0. O gráfico mostra o resultado para os seguintes dados: $v_0 = 10\ m/s$ e $r_0 = 10\ m$ - Adaptado de [7] por meio do software Geogebra.

Nesta situação, devemos usar a equação (15) considerando que em $t = 0$ o móvel parou completamente, isto é $x(0) = 0$ e portanto $v_0 = 0$. Assim, concluímos que a equação (15) deve dar lugar a equação:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2. \tag{23}$$

adaptando a situação neste caso, temos em (20) para este modelo

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}a_0 t^2}{r_0}\right)$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{a_0 t^2}{2r_0}\right) \tag{24}$$

o que nos fornece:

$$w(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\arctan\left(\frac{a_0 t^2}{2r_0}\right)\right]$$

$$w(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a_0 t^2}{2r_0}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a_0 t^2}{2r_0}\right)$$

$$w(t) = \frac{1}{1 + \frac{t^4}{4}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2}\left(\frac{a_0}{2r_0}\right)2t.$$

Assim obtemos a velocidade angular

$$w(t) = \frac{\left(\frac{a_0}{r_0}\right) t}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 t^4}. \tag{25}$$

O gráfico representado na Figura 7 foi construído considerando três valores diferentes para a_0.

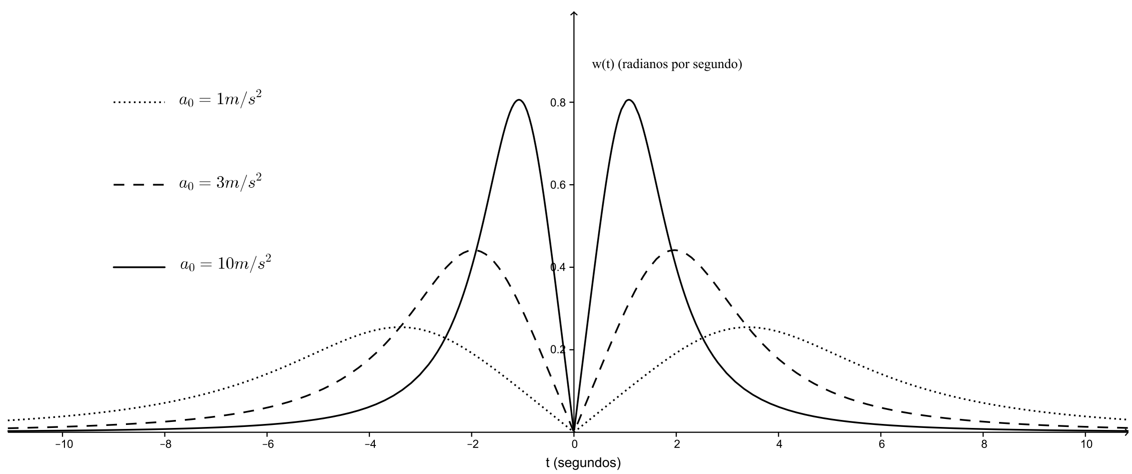

Figura 7: A velocidade angular w de M_1 observada por O como função do tempo t quando M_1 se move com desaceleração linear constante a_0, chega a completar a parada em P no tempo $t = 0$, para depois acelerar com a mesma aceleração constante a_0. O gráfico mostra os resultados para o caso $r_0 = 10\ m$ - Adaptado de [7] por meio do software Geogebra.

4.3 Presença de uma Breve Obstrução ao redor da Vista do Observador

Concluindo a prova, analisaremos a situação acrescentando o fato de que a visão do observador O sofre uma rápida obstrução por outro objeto externo, no caso outro veículo com maior porte no momento em que o veículo se aproxima do sinal de parada obrigatória. A Figura 8 descreve a situação a ser analisada.

Para isso, consideramos o infrator, no caso Dmitri, dirigindo o seu veículo Toyota Yaris (carro M_1 na figura), que é um carro de pequeno porte e um dos mais curtos produzidos na atualidade. O veículo Toyota Yaris possui comprimento $l_1 = 3,81\ m$. Não se sabe o modelo correto do veículo M_2, porém o seu comprimento se assemelha do comprimento de um Subaru Outback, cujo comprimento exato é de $l_2 = 4,80\ m$.

Consideramos t_p e t_f os intervalos de tempo parcial e total, respectivamente, da visão do observador O na direção do veículo M_1 em função da posição intermediária de M_2 em determinado instante compreendido entre o início e o fim da obstrução. Considere também que t_p ocorreu em um deslocamento total de modulo $x_p = l_2 + l_1 = 8,61\ m$ e t_f ocorreu em um deslocamento total de modulo $x_f = l_2 - l_1 = 0,99\ m$.

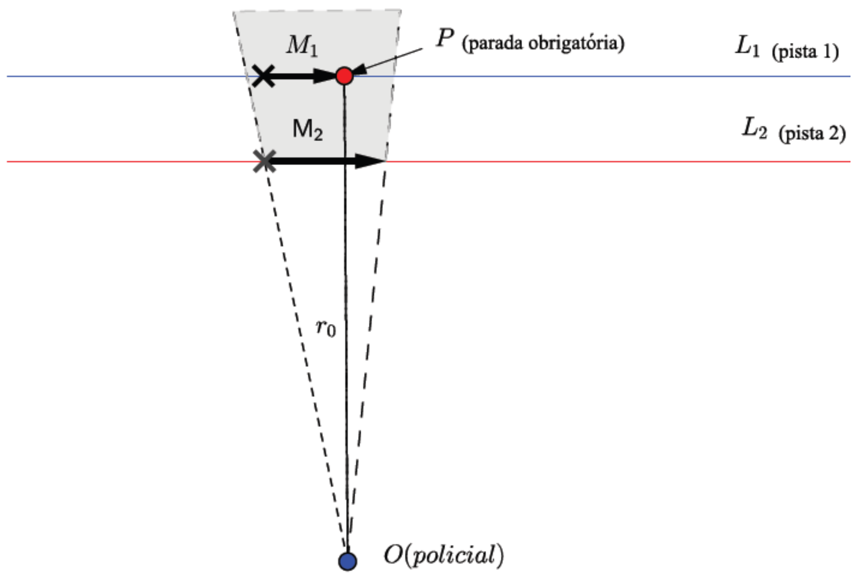

Figura 8: O diagrama mostra esquematicamente a breve obstrução da vista do observador, que aconteceu no caso considerado. As observações do carro M_1 em movimento na pista L_1 são brevemente obstruídas por outro carro M_2 em movimento na pista L_2 quando ambos os carros estão perto do sinal de parada P. A região sombreada pela cor cinza é a área de pouca visibilidade para O - Adaptado de [7] por meio do software Geogebra.

Faz-se necessário considerar que não é uma tarefa fácil medir a desaceleração / aceleração a_0 do veículo M_1 sem uma ferramenta adequada. Então, faremos uma estimativa plausível para a_0. É sabido, que no dia do fato ocorrido, Dmitri não estava bem de saúde, pois tinha contraído uma forte gripe e o clima estava intensamente frio. Diante disso, no momento que o veículo M_1 se aproximava do sinal de parada obrigatória, Dmitri estava espirrando e involutariamente acionou os pedais de freio de maneira brusca. E isso pode ter causado uma desaceleração próxima do máximo possível para o veículo M_1 que é da ordem de $a_0 = 10m/s^2 = 22,36\ mph/s$.

Assim, usaremos $a_0 = 10m/s^2$ e retornaremos a equação (23) deixando o tempo t em função de x e a_0,

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a_0}} \tag{26}$$

Desta forma, obtemos:

$$t_p = 1,31 \quad \text{segundos} \tag{27}$$

$$t_f = 0,45 \quad \text{segundos.} \tag{28}$$

Para determinarmos o tempo de duração total da obstrução parcial e total devemos dobrar t_p e t_f, respectivamente.

O próximo passo é determinar o tempo t_m que representa o instante em que a velocidade angular de M_1 observada por O, sem qualquer obstrução atinge o seu valor máximo, como na figura 7. Para isso, podemos determinar o valor da derivada da função que representa a velocidade angular em função do tempo e igualar esta derivada a zero, então temos:

$$\frac{dw}{dt} = w(t_m) \tag{29}$$

$$\frac{dw}{dt} = 4\frac{a_0}{r_0}\frac{1-\frac{3}{4}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 t^4}{\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 t^4\right]^2}. \tag{30}$$

A função descrita pela equação (30) se anula apenas se o numerador é igual a zero e portanto t pode ser obtido resolvendo a equação:

$$t = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{r_0}{a_0}}. \tag{31}$$

Substituindo $a_0 = 10m/s^2$ e $r_0 = 10\ m$ na última expressão, chegamos ao valor de:

$$t_m = 1,07 \quad \text{segundos}. \tag{32}$$

Podemos, assim, concluir que o tempo t_m situa-se entre t_f e t_p, ou seja:

$$t_f < t_m < t_p. \tag{33}$$

Analisando estes resultados, concluímos que a velocidade angular w atingiu seu valor máximo no intervalo de tempo onde a visão do observador O do veículo M_1 foi parcialmente obstruída pelo veículo M_2 e foi muito próximo deste valor máximo quando ocorreu a obstrução completa da visão.

Interpolando os dados disponíveis para os tempos $t > t_m \approx t_f \approx t_p$ por uma função linear, a interpolação pode ser visualizada na figura 9 pela linha tracejada. O gráfico obtido se assemelha a curva que representa a velocidade angular de um objeto qualquer com velocidade constante $v_0 = 8m/s$ =18 mph

4.4 Conclusão

De acordo com as inferências realizadas, o policial O errou e confundiu-se ao avaliar o movimento do veículo M_1 que ao se aproximar do sinal de parada obrigatória sofreu desaceleração linear constante, parou completamente na parada obrigatória e posteriormente movimentou-se com a mesma aceleração. A linha contínua, (ver Figura 9), que descreve a trajetória de um objeto hipotético movimentando-se a uma velocidade linear quase constante, que vem a parar completamente no sinal de parada obrigatória. Já a linha tracejada denota a velocidade angular de um móvel se movendo a uma velocidade linear constante $v_0 = 8m/s$. E a velocidade angular observada pelo policial se representa na linha tracejada de maior espessura na mesma figura.

Podemos, assim, concluir que a multa aplicada ao condutor Dmitri pelo policial O foi injusta e decorreu de um erro de observação do policial em consequência de uma combinação de três fatores:

1. O observador não mediu a velocidade linear de M_1 utilizando-se de um equipamento próprio para este fim, ele na verdade mensurou a velocidade angular visual de M_1;

2. Houve uma desaceleração e aceleração linear elevadas do veículo M_1;

3. A visão do observador O do veículo M_1 foi obstruída por um instante de tempo por outro veículo M_2 em torno de $t = 1,31\ s$.

Esta infeliz coincidência de fatores, resultou em uma falsa percepção da realidade, pois o veículo respeitou o sinal de parada obrigatória.

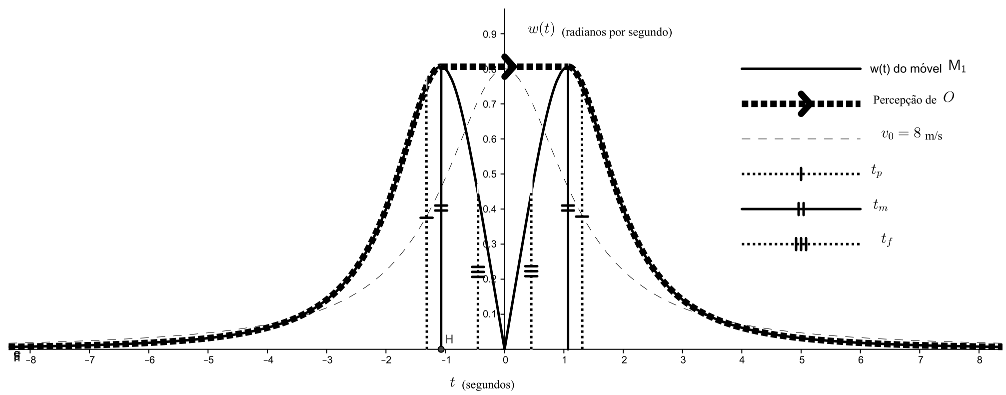

Figura 9: A curva contínua representa a velocidade angular de M_1. A suposta velocidade angular observada pelo policial está descrita pela curva tracejada de maior espessura. Nota-se grande semelhança entre esta linha tracejada de maior espessura e a curva tracejada, que indica a velocidade angular de um objeto hipotético com velocidade linear-constante $v_0 = 8m/s$ - Adaptado de [7] por meio do software Geogebra.

4.5 Considerações Finais

É notório a crescente utilização da modelagem matemática com estratégia de ensino das ciências exatas, especificamente no ensino da física.

Isso justifica-se pelo fato desta modalidade de ensino proporcionar ao aluno um entendimento mais significativo do conteúdo proposto. As atividades envolvendo modelagem matemática normalmente tratam de situações problemas mais próximas da realidade. Nesse aspecto, torna-se natural o aumento da interação dos educandos nas atividades propostas.

O aluno é levado a construir estratégias para a resolução de um problema proposto, pois enquanto sujeito, no processo ensino-aprendizagem, tende a atuar buscando as informações e não as recebendo prontas, e desta maneira o seu aprendizado se torna mais significativo.

No entanto, um trabalho envolvendo o uso de modelagem matemática exige muito de todos envolvidos: professor e alunos. O professor deve se apresentar como um orientador perspicaz neste processo. O educando precisa ser levado a sair da zona de conforto, passando a ser sujeito ativo no desenvolvimento do trabalho proposto.

O professor deve estudar muito o assunto a ser abordado e planejar as atividades propostas de forma eficiente, determinando com antecedência as estratégias que serão utilizadas.

É importante também salientar que o professor que pretente utilizar-se da modelagem matemática precisa ser criativo, pois o tema a ser escolhido deve despertar o interesse dos educandos e durante as atividades desenvolvidas muitas vezes exigem-se adaptações inesperadas. Domínio do tema proposto, um bom planejamento e adequação na condução do trabalho são imprecindíveis para consecução do modelo a ser desenvolvido.

Podemos, assim, concluir que um trabalho via modelagem apesar de exigir muito dos professores e alunos é gratificante pois deixa as aulas mais chamativas e encantadoras, facilitando aos alunos o uso da matemática em diversar situações do cotidiano, e assim aproximando o conhecimento escolar da sua realidade sócio-cultural tornando-os cidadãos críticos e ativos na sociedade.

4.6 Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, meu guia em todos os momentos.

A minha esposa Ana Paula e aos meus filhos, pela compreensão e paciência.

Ao Padre Hilton e seus familiares pelo acolhimento e hospitalidade.

Aos meus professores da UFSJ, que muito contibuíram para a consecução deste sonho.

Ao meu orientador, o mestre e doutor José Angel Dávalos Chuquipoma pela dedicação e incentivo.

A todos os meus colegas de sala, especialmente os meus companheiros de estrada: Adaílton, Andrea e Célio pela amizade que se consolida.

A minha amiga, professora Angela Marques, pelo paciente trabalho de revisão da redação.

A CAPES pelo apoio financeiro e a SBM por oportunizar este curso.

A Prefeitura Municipal de Belo Horizonte por permitir flexibilização da minha jornada de trabalho.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Referências

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2004.

[2] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2000. 127 p.

[3] CHUQUIPOMA, José A. Dávalos. Modelagem matemática. São João del-Rei, MG: UFSJ, 2012. 147p.

[4] FLEMMING, Diva marília, FLEMMING, Elisa Luz e MELLO, Ana Cláudia Collaço de. Tendências em Educação Matemática- 2 ed.- Palhoça: Unisul Virtual, 2005.87p.

[5] LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; BORBA, Marcelo de Carvalho. Tendências em educação matemática. Revista Roteiro, Chapecó, n.32, p.49-61, jul./dez., 1994.

[6] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de Física- 8ª Edição - Vol. 1. LTC. 2008.

[7] :http://www.improbable.com/airchives/paperair/volume18/v18i4/AIR_18-4_screen.pdf

[8] :http://w3.ualg.pt/~rguerra/fisicaaplicada/docs/cap2_mecanica.pdf

[9] :http://www.ced.ufsc.br/men5185/trabalhos/A2005_outros/36_parque/rotacao.pdf