2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

O Teorema de Monty Hall e o Cálculo da Aproximação de π Como Fator de Estímulo ao Ensino da Probabilidade

Daniela Presotti Vitor[1]
Humberto Cesar Fernandes Lemos [2]

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar um dos enigmas numéricos mais interessantes e intrigantes, o teorema de Monty Hall. Esse problema pode ser usado no ensino da probabilidade no ensino médio. Sabemos que resultados envolvendo probabilidade são, muitas vezes, contra-intuitivos e a abordagem correta permite a solução da aparente contradição. Para isso, vamos mostrar algumas maneiras de interpretar esse problema através de desenho, probabilidade condicional e frequência. Outra questão apresentada é como calcular aproximações do número π usando probabilidade, com experimentos simples feitos em sala de aula, que podem ser trabalhados inclusive em turmas do ensino fundamental. Usando problemas interessantes, é possível fazer com que o ensino da probabilidade se torne mais atrativo para alunos do ensino fundamental e do ensino médio.

Palavras chave: Probabilidade, frequência, Teorema de Mounty Hall

Abstract : The objective of this document is to present one of the most interesting and intriguing numerical puzzles, Monty Hall's theorem. This problem can be used to teaching probability in high school. We know that results involving probability are oftentimes counterintuitive and correct approach allows the solution of the apparent contradiction. For this, we will show some ways to interpret this problem through drawing, conditional probability and frequency. Another question is how to compute approximations of the number π using probability, with simple experiments done in

[1] Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
E-mail: danielapresotti@yahoo.com.br
[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, UFSJ/CAP
E-mail: humbertolemos@ufsj.edu.br

the classroom, which can be worked even in elementary basic education. Using interesting problems, it is possible to make the teaching of probability becomes more attractive for students from basic education and high school.

Keywords: Probability, frequency, Monty Hall's Theorem

1 Introdução

A origem da probabilidade foi através dos jogos de azar e, por muitos séculos, matemáticos deram contribuições importantes para o desenvolvimento desse conteúdo.

A probabilidade é o conteúdo da matemática que nos auxilia no entendimento das situações de incerteza, de resultados imprevisíveis entre todos os que são possíveis em determinada situação. O estudo desse conteúdo é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). De acordo com esta norma, o ensino da probabilidade deve ser iniciado no ensino fundamental para que o aluno possa observar a chance ou possibilidade de ocorrência de um determinado resultado e com que frequência ele ocorre. É muito importante que o aluno desenvolva a capacidade de observar, registrar e fazer análise dos dados obtidos.

O objetivo desse trabalho é apresentar algumas interpretações do problema de Monty Hall e o cálculo de aproximações de π através de experimentos. Essas questões que serão apresentadas poderão auxiliar no ensino de probabilidade no ensino fundamental e médio. Geralmente, questões que envolvem probabilidade são interpretadas de maneira intuitiva e errada. Fazendo uma análise correta, podemos encontrar a real solução, compreender melhor o conceito de probabilidade e evitar contradições.

Nesse trabalho, apresentamos um pouco da história da probabilidade, como surgiu e como foi desenvolvida, os principais nomes que fizeram parte dessa história e suas respectivas contribuições.

A linguagem da probabilidade aparece como uma pequena introdução com os termos usados dentro desse conteúdo, conceitos básicos necessários para o desenvolvimento e interpretação dos problemas que serão analisados.

O problema de Monty Hall e a pergunta que o tornou famoso, a polêmica que gerou a resposta de Marilyn vos Savant e as interpretações desse problema serão discutidas ao longo do trabalho.

Para finalizar, será discutido o cálculo de aproximações de π através de experimentos, usando o que diz a Lei dos Grandes Números, calculando a probabilidade pela frequência de ocorrência do evento.

2 História da probabilidade

Segundo Silveira (2001), na antiguidade era comum atribuir aos Deuses a resolução de qualquer evento , era considerado normal pensar que os acontecimentos dependiam do sobrenatural. Não se discutia aleatoriedade, não se atribuía ao acaso qualquer ocorrência.

> " A humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não casuais." (KENDALL, apud, CASSIANO e ALVES, 2012)

A idéia de discutir probabilidade surgiu através de questionamentos de jogadores que queriam vencer os jogos de dados ou de cartas. A palavra probabilidade é derivada do Latim *probare* que significa provar, testar.

Marco Túlio Cícero, estadista, orador e filósofo romano, 106 a.C. a 43 a.C., citado por Mlodinow (2011), contestava a cultura dos gregos antigos que valorizavam apenas o estudo da geometria.

> "Entre os gregos, o geômetra ocupava o lugar mais honrado; dessa forma, nada progrediu de maneira tão brilhante entre eles quanto a matemática. Porém, nós estabelecemos como o limite dessa arte sua utilidade na contagem." (CÍCERO, Apud, MLODINOW, 2011, p.46).

Segundo Mlodinow (2011), Cícero usou o termo, *probabilis,* que originou o termo empregado atualmente e talvez tenha sido o maior defensor da probabilidade na antiguidade. Ele afirmou que a probabilidade é o próprio guia da vida. "Cícero acreditava que um acontecimento poderia ser antecipado e previsto mesmo que sua ocorrência dependesse do mero acaso" (MLODINOW, 2011, p.46.).

Ishihara e Pessoa (2010) afirmam que Tartaglia (1499-1557) e Cardano (1501-1576) analisaram problemas propostos a partir dos jogos, mas tanto os matemáticos quanto os jogadores da época deixaram as discussões de lado, pois consideravam que só poderiam aplicar o estudo das probabilidades em casos restritos e também pela dificuldade de entendimento da matemática envolvida. Essa afirmação pode ser confirmada, uma vez que, mesmo alguns séculos antes de Cristo, os matemáticos da época já manifestavam sobre a dificuldade de aceitação da probabilidade.

Mlodinow (2011), cita em seu livro algumas frases que sustentam a afirmação: "Argumentos baseados em probabilidades são impostores" (SÍMIAS, apud, 2011, p.42)

"A menos que seja observado grande cuidado em seu uso, tendem a ser enganadores- na geometria e também em outros assuntos."(PLATÃO, apud, MLODINOW, 2011, p.42.).

"Argumentos baseados apenas em verossimilhança e probabilidade são suficientes para desclassificar qualquer geômetra." (PLATÃO, apud, MLODINOW, 2011, p.42.).

"Porém, mesmo os gregos que acreditavam que os probabilistas possuíam algum valor talvez tenham tido dificuldades em formular uma teoria consistentes naqueles dias, em que ainda não havia extensos registros de dados [...]" (MLODINOW, 2011, p.42.).

Tartaglia, um autodidata que veio a se tornar um professor estimado, dedicou algumas páginas de seu livro *General Trattato* para discutir problemas matemáticos.

Gerolamo Cardano, médico dos nobres da corte e professor de medicina na Universidade de Pavia, publicou 131 livros sobre filosofia, medicina, matemática e ciências. Cardano escreveu "*Libar de ludo aleal*",que significa ,"*Livros sobre jogos de azar"* que foi o primeiro na história a tratar da teoria da aleatoriedade.

> "Antes de morrer, Cardano queimou 170 manuscritos não publicados. As pessoas que vasculharam suas posses encontraram 111 textos sobreviventes. Um deles, escrito décadas antes e aparentemente revisado muitas vezes, era um tratado em 32 capítulos curtos. Intitulado O livro dos jogos de azar." (MLODINOW, 2011, p.46).

Segundo Ishihara e Pessoa (2010), a probabilidade como é estudada nos dias atuais foi desenvolvida por três franceses: De Méré (1607-1684), Pascal (1623-1662) e Fermat (1601-1665).

Por volta de 1654, Chevalier de Méré, matemático amador e viciado em jogos de azar, propôs a Pascal a seguinte questão:

"Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?" (MÉRÉ, Apud, BOYER, 1974, p.265).

Pascal era físico, matemático, filósofo e teólogo. Com o *Traité du triangle arithmétique* de 1654, "Tratado do triângulo aritmético", mais conhecido como triângulo de Pascal, instituiu com Pierre de Fermat, as bases da teoria das probabilidades e da análise combinatória, que o holandês Huygens desenvolveria posteriormente.

Boyer (1974), fala sobre o problema proposto por Chavalier de Méré: "Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades, as idéias de Cardano de um século antes tendo sido esquecidas." (BOYER, 1974, p.265.)

Fermat, foi um matemático e cientista francês que gostava de trocar e resolver desafios. "Ainda que não fosse um profissional ou especialista, Pierre de Fermat é geralmente considerado o maior matemático amador de todos os tempos." (MLODINOW, 2011, p.92)

Pascal e Fermat não costumavam escrever seus resultados mas, em 1657, Huygens, incentivado pelos matemáticos franceses, publicou um pequeno folheto "*De ratiociniis in ludo aleae" (sobre o raciocínio em jogos de dados)* que é considerado o primeiro livro sobre cálculo das probabilidades e sobre a introdução do conceito de esperança matemática. Ao mesmo tempo, Pascal já relacionava o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético. Segundo Boyer (1974), o triângulo já existia há mais de 600 anos, mas Pascal descobriu novas propriedades. "Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade." (PASCAL, apud, IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN e ALMEIDA, 2010, p.285). Uma das propriedades descobertas para exemplificar:

> "Em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior assim como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo inclusive" (PASCAL, apud, BOYER, 1974, p.265)

Para provar essa propriedade, Pascal, em 1654, desenvolve uma explicação sobre o método de indução matemática que se tornou mais importante que a propriedade demonstrada.

O pequeno folheto de Huygens foi reproduzido em 1713 como a primeira das quatro partes de um tratado clássico "*Ars conjectandi"* (Arte de conjecturar), escrito por Jacques Bernoulli. "Esse é o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, pois o *De ludo aleae,* de Huygens, fora apenas uma breve introdução." (BOYER, 1974, p.308). Segundo Boyer (1974), problemas que exemplificam a teoria das probabilidades aparecem na terceira e na quarta parte de *Ars conjectandi,* também na quarta parte aparece a Lei dos Grandes Números que hoje leva o nome do autor. E, devido ao conselho de Leibniz, Jacques Bernoulli se dedicou ao aperfeiçoamento da teoria das probabilidades. A sua obra *Ars conjectandi* apresenta o primeiro teorema limite da teoria das probabilidades e é rigorosamente provado.

Leibniz (1646-1716), filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão, não deixou de se ocupar das probabilidades. Publicou duas obras, uma sobre a arte combinatória e outra sobre as aplicações do cálculo das probabilidades às questões financeiras.

A teoria das probabilidades teve vários admiradores e o francês Abraham De Moivre (1667-1754) foi um deles. Publicou, em 1711, *Philosophical Transactions,* que tratava das leis do acaso e, em 1718, *Doctrine of Chances,* considerado uma ampliação do anterior. No segundo livro citado, De Moivre refere à obra sobre probabilidades de Jacques, Jean e Nicolaus Bernoulli. As várias edições de seus livros apresentam mais de cinqüenta problemas sobre probabilidades. Em 1730, aparecem algumas de suas descobertas no campo das probabilidades no livro *Miscellanea analytica,* que trata de questões importantes para a probabilidade e para o lado analítico da trigonometria.

Euler (1707-1783), matemático e físico suíço, e d'Alembert (1717-1783), filósofo, matemático e físico francês, escreveram sobre problemas de expectativa de vida, valor de uma anuidade, loterias, entre outros. Em 1751, cálculos de Euler são publicados em *Memórias* da Academia de Berlim. Em 1765, na mesma revista, publicou o seguinte problema:

> " Suponha que *n* bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a *n* e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é
>
> $$\frac{2.3}{n(n-1)}\ ,$$
>
> a probabilidade que dois números consecutivos (mas não três) sejam tirados é
>
> $$\frac{2.3.(n-3)}{n(n-1)}\ ,$$
>
> e a probabilidade que não sejam tirados números consecutivos é
>
> $$\frac{(n-3).(n-4)}{n(n-1)}\ .$$" (BOYER, 1974, p.334).
>
> Euler contribuiu com algumas notações, entre elas escreveu que achava útil representar a expressão
>
> $$\frac{p(p-1)...(p-q+1)}{1.2...q}$$
>
> por
>
> $$\left[\frac{p}{q}\right]$$

> equivalente a notação que usamos hoje por
>
> $\binom{p}{q}$. (EULER, apud, Boyer, 1974, p.334)

D'Alembert aparece na história como um opositor às idéias geralmente aceitas da teoria das probabilidades. Publicou um artigo em 1754 na *Encyclopédie,* "Croix ou Pile", sugere que a probabilidade de lançar cara em dois lances de uma moeda deveria ser $\frac{2}{3}$ e não $\frac{3}{4}$ como é usualmente aceito, pois o jogo termina se cara aparece no primeiro lance. Segundo Boyer (1974), d'Alembert considerava os princípios básicos das probabilidades pouco firmes, e que quando possível as probabilidades deveriam ser determinadas experimentalmente.

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat (1743-1794), marquês de Condorcet, foi um filósofo, enciclopedista e matemático francês era também amigo de d'Alembert. Condorcet publicou livros sobre probabilidade e , segundo Boyer (1974) é lembrado matematicamente como um pioneiro em matemática social, especialmente pela aplicação de probabilidades e estatística a problemas sociais.

Laplace (1749-1827), matemático, astrônomo e físico francês, tem grande importância na história da teoria das probabilidades. Escreveu vários artigos sobre o assunto e o clássico *Théorie analytique des probabilités* de 1812. Em 1814 publicou uma introdução à probabilidade com uma linguagem mais simples, *Essai philosophique des probabilités.* "No fundo a teoria das probabilidades é apenas um senso comum expresso em números." (LAPLACE, apud, BOYER, 1974, p.361)

Assim como Laplace, Jules Henri Poincaré (1854- 1912), matemático, físico e filósofo francês, escreveu sobre probabilidades e, em alguns aspectos consideravam seus escritos como uma continuação das obras de Laplace e de outros matemáticos. Poincaré foi intitulado, segundo Boyer (1974), como professor do cálculo de probabilidades.

A matemática sofreu grandes mudanças após a Segunda Guerra e um dos ramos mais influenciados foi a teoria das probabilidades. Félix Édouard Justin Émile Borel (1871- 1956), um matemático e político francês, foi um dos pioneiros da teoria da medida e suas aplicações à teoria das probabilidades. Borel publicou, em 1909, *Éléments de la théorie des probabilités.* "O primeiro ano do novo século foi auspicioso para as probabilidades[...]". (BOYER, 1974, p.454).

> "As probabilidades e a estatística no século vinte estão intimamente ligados não só com a matemática pura como uma característica notavelmente diferente de nosso tempo - uma dependência crescente com relação aos grandes computadores." (BOYER, 1974, p.457)

Em 1933, Andrei Nikolayevich Kolmogorov teve sua monografia publicada, na qual tratava, de forma rigorosa e a partir de axiomas fundamentais, a teoria da probabilidade. A partir dessa publicação, tem-se início o desenvolvimento da etapa moderna da Teoria das Probabilidades. "[...] construiu-se a teoria da probabilidade de uma forma rigorosa a partir de axiomas fundamentais de uma maneira comparável com Euclides no tratamento de geometria." (KOLMOGOROV, apud, COOKE, 1999)

3 A linguagem da probabilidade

Os jogos de baralho, dados, roleta, com moedas (cara/coroa), com sorteio de fichas, entre outros são denominados jogos de azar, pois dependem mais da sorte do que do cálculo. Se fatores externos não influenciarem no resultado, pode-se avaliar a igualdade de possibilidade de resultados. "*Probabilidade* pode ser pensada como a teoria matemática utilizada para se estudar a *incerteza* oriunda de fenômenos de caráter *aleatório." (* MAGALHÃES e LIMA, 2008, p.2)

Barroso (2010) e SMOLE e DINIZ (2010) afirmam que, nos dias de hoje, a probabilidade ultrapassa as questões que envolvem jogos de azar, sendo usada em muitas outras áreas.

> "A área da Matemática que investiga a chance de ocorrência de um evento é denominada teoria das probabilidades e teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder as questões ligadas aos jogos de azar. Atualmente encontramos a aplicação da teoria das probabilidades em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica, por exemplo, na previsão meteorológica, na análise especulativa da economia mundial e do mercado financeiro ou no

> estabelecimento dos possíveis efeitos colaterais dos medicamentos." (BARROSO, 2010, p.336)

> "Atualmente, as aplicações do cálculo de probabilidades ultrapassam largamente as relacionadas com jogos de azar (dados, cartas, loterias, rifas etc.), por onde a teoria das probabilidades começou a ganhar força e aos quais ela é associada habitualmente. É comum o uso das probabilidades em áreas como Política, Medicina, Biologia etc." (SMOLE e DINIZ, 2010, p.161)

Considerando o lançamento de um dado, pode se obter como resultado 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Calcula-se a probabilidade de sair um desses resultados, por exemplo, o 3, pela razão $\frac{1}{6}$, pois 3 é um dos possíveis resultados dentre as seis chances que temos.

Para se ter compreensão da probabilidade é necessário fazer a definição de alguns termos usualmente utilizados nesse conteúdo. São eles:

- Experimento aleatório – nome dado a ação que, quando repetida, os resultados são imprevisíveis. Exemplos: lançamento de dado e moeda.

> " Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá "cara" ou "coroa". Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de fenômenos aleatórios (ou casuais)." (DANTE, 2005, p.282)

- Espaço amostral – são todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Geralmente é representado pela letra S de “space” da língua inglesa ou pela letra grega Ω (ômega). Exemplos: no lançamento de um dado S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e no lançamento de duas moedas S = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}.

> " Na linguagem moderna, a regra de Cardano é expressa da seguinte maneira: suponha que um processo aleatório tenha

> muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultados. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral. [...] Um comentário sobre o pressuposto de que todos os resultados são igualmente prováveis: obviamente, isso nem sempre é verdade." (CARDANO, apud, MLODINOW, 2011, p.70).

- Evento: qualquer subconjunto de um espaço amostral. Exemplos: No lançamento de um dado sair um número par na face superior, o conjunto A = {2, 4, 6} é a representação desse evento e no lançamento de duas moedas B = {(cara, cara), (coroa, coroa)} é o evento correspondente a encontrar resultados iguais nas duas moedas.

> "Em matemática, uma probabilidade é simplesmente um número associado a um objeto. Nas aplicações, o objeto é um evento ou ação incerta, e o número é a medida de quão freqüente ou quão viável é o evento." (SCHEINERMAN, 2011, p.285)

Os eventos podem ser classificados como:

- Eventos equiprováveis são os que apresentam a mesma probabilidade. Exemplo: No lançamento de um dado cada um dos resultados tem probabilidade $\frac{1}{6}$.

- Evento impossível é o que não tem possibilidade de acontecer. Exemplo: Lançar um dado e sair o número 9 em sua face superior.

- Evento certo é o que acontecerá com certeza. Exemplo: Lançar um dado e sair um divisor de 120.

> "[...] O espaço amostral de um experimento aleatório é denominado evento certo. Assim, obter um número inteiro no lançamento de um dado é um evento certo. O conjunto vazio, por outro lado, representa um

> evento que nunca pode ocorrer e, por essa razão, é denominado um exemplo impossível. Quando lançamos um dado, por exemplo, obter um número maior que 6 é um evento impossível." (BEZZERRA, 2001, p. 290)

- Evento complementar $\overline{A}$ de um evento A representa o evento de não ocorrência de A. Exemplo: no lançamento de um dado, se o evento A é sair um número maior que 4, o evento $\overline{A}$ é sair um número menor ou igual que 4.

> "Seja *E* um evento de um espaço amostral Ω. Chamamos *evento complementar de E,* em relação a Ω (indica-se por E^C *ou* $\overline{E}$), o evento que ocorre quando *E* não ocorre. Note que: $\begin{cases} E \cup E^C = \Omega \\ E \cap E^C = \varnothing \end{cases}$ " (IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO e ALMEIDA, 2010, p. 288)

3.1 Probabilidade de um evento num espaço amostral finito

A probabilidade de ocorrer um evento A, em um fenômeno aleatório onde as possibilidades são igualmente prováveis, é dada pela razão entre o número de elementos do evento A e o número de elementos do espaço amostral.

Num espaço amostral equiprovável, onde S é finito, a probabilidade de que um evento A ocorra é sempre:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Exemplo: Considere o evento A: jogar um dado e sair um número ímpar em sua face superior.

A = { 1, 3, 5} e S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

n(A) = 3 e n(S) = 6

P(A) = $\frac{3}{6}$ = 0,5 = 50%

3.2 Outra maneira de obter probabilidades

Podemos obter probabilidades através das frequências de ocorrências. Com a observação do experimento aleatório de interesse, anotando o número de ocorrências, temos a frequência relativa que é dada pela razão entre o número de vezes que um evento ocorre e o total de vezes que o experimento é repetido. Quanto maior o número de repetições do experimento, mais as frequências relativas se estabilizam tendendo a um número que associamos à probabilidade. "Para Bernoulli, era perfeitamente justificado esperar que, com o aumento do número de testes, as frequências observadas refletissem - com cada vez mais precisão - as probabilidades subjacentes." (BERNOULLI, apud, MLODINOW, 2011, p.121). Segundo Mlodinow (2011), Bernoulli trabalhou no tema por muitos anos e escreveu o teorema que recebe o nome de Teorema de Bernoulli, Lei dos Grandes Números e Lei Fraca dos Grandes Números e que esse teorema é um dos resultados mais famosos da teoria da aleatoriedade. A Lei dos Grandes Números mostra que, com um número muito grande de repetições de um determinado evento, a frequência relativa desse evento converge para a probabilidade, e o erro se torna cada vez mais desprezível. "É importante perceber que a probabilidade é uma medida de Tendência, e não de certeza." (SMOLE e DINIZ, 2010, p.161).

> "Observando as diversas repetições do fenômeno em que ocorre a variável de interesse, podemos anotar o número de ocorrências de cada valor dessa variável. Para um número grande de realizações, a frequência relativa poderia ser usada como probabilidade. Em ciências biológicas e humanas, essa é a forma mais comum de se atribuir probabilidades." (MAGALHÃES e LIMA, 2008, p.38)

Charles Sanders Pierce, em 1896, escreve sobre a probabilidade determinística em que uma amostra é julgada pela forma como ela se apresenta.

> " Uma amostra seria aleatória se "coletada a partir de um pressuposto ou método que, sendo aplicado muitas e muitas vezes indefinidamente, faça com que, a longo prazo, o sorteio de qualquer conjunto de números ocorra com frequência igual à de qualquer outro conjunto do mesmo tamanho." (PEIRCE, apud, MLODNOW, 2011, p.113)

3.3 Probabilidade da união de eventos

Proposição:

Sejam dois eventos $A, B \subset S$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração:

Vamos começar provando que $A \cup B = A \cup (B - A)$

Seja $x \in (A \cup B)$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$, concluímos que $x \in [A \cup (B - A)]$. Como em $(B - A)$, $x \in B$ e $x \notin A$, temos que se $x \in B \Rightarrow x \in [A \cup (B - A)]$. Portanto, $(A \cup B) \subset [A \cup (B - A)]$.

Se $x \in [A \cup (B - A)]$, $x \in A$ ou $x \in B$. Como $x \in A$ ou $x \in B$, $x \in (A \cup B)$, e portanto $[A \cup (B - A)] \subset (A \cup B)$. Logo, $A \cup B = A \cup (B - A)$.

Observe também que $A \cap (B - A) = \varnothing$

Consideremos por absurdo que $A \cap (B - A) \neq \varnothing$. Então existe $y \in [A \cap (B - A)]$, com $y \in A$ e $y \in (B - A)$. Mas se $y \in A$ e $y \in (B - A)$, temos que $y \in A$, $y \in B$ e $y \notin A$. Contradição. Portanto, $A \cap (B - A) = \varnothing$.

Logo, se $A \cup B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \varnothing$, temos que, segundo Kolmogorov,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A). \qquad (1)$$

Dado $x \in B$, então podemos ter $x \in A$ ou $x \notin A$. Se $x \in B$ e $x \notin A$, $x \in (B - A)$, e se $x \in B$ e $x \in A$, $x \in (A \cap B)$. Logo, se $x \in B \Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (B - A)]$ e $B \subset [(A \cap B) \cup (B - A)]$.

Se $x \in [(A \cap B) \cup (B - A)]$, $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (B - A)$.

Se $x \in (A \cap B)$, $x \in A$ e $x \in B$ e se $x \in (B - A)$, $x \in B$ e $x \notin A$. Como $x \in B$, temos que $[(A \cap B) \cup (B - A)] \subset B$. Portanto $B = [(A \cap B) \cup (B - A)]$

Vamos considerar agora que existe $y \in [(B - A) \cap (A \cap B)]$, então $y \in (B - A)$ e $y \in (A \cap B)$.

Se $y \in (B - A)$, $y \in B$ e $y \notin A$, e se $y \in (A \cap B)$, $y \in A$ e $y \in B$. Contradição.

Portanto $(B - A) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

Como $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ e $(B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing$, temos que, segundo Kolmogorov , $P(B)=P(B-A)+P(A\cap B)\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ (2)
Finalmente,de (1) e (2), podemos concluir que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

> "A probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B é dada pela soma das probabilidades de os dois eventos ocorrerem separadamente, menos a probabilidade deles ocorrerem simultaneamente." (GIOVANNI e BONJORNO, 2005, p.195)

Exemplo: Em uma pesquisa de opinião realizada entre 1000 moradores de uma cidade, 200 deles lêem o jornal A, 500 lêem o jornal B e 120 moradores lêem os dois jornais. Qual a probabilidade de que um morador, escolhido ao acaso, leia o jornal A ou o Jornal B?

$$P(A)=\frac{200}{1000},\ P(B)=\frac{500}{1000}\ \text{e}\ \ P(A\cap B)=\frac{120}{1000}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+\ P(B)-P(A\cap B)=\frac{200}{1000}+\frac{500}{1000}-\frac{120}{1000}=\frac{580}{1000}=58\%$$

3.4 Probabilidade da intersecção de eventos independentes

Quando a ocorrência de um evento A não interfere na probabilidade de ocorrência de um evento B, dizemos que os eventos A e B são independentes. A probabilidade de ocorrer os eventos A e B num mesmo espaço amostral onde a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência do outro evento, é o produto da probabilidade de ocorrer o evento A pela probabilidade de ocorrer o evento B.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

Exemplo: Jogando dois dados, qual é a probabilidade de que no primeiro a face superior seja um número maior que 4 e que no segundo seja um número par?

Considerando como evento A o primeiro dado e como o evento B o segundo dado, temos:

$$A = \{5,6\},\ P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$B = \{2,4,6\},\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B) = \frac{1}{3}.\ \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Mlodinow (2011) afirma que, apesar da simplicidade, boa parte da teoria da probabilidade é formada por três leis.

> "A probabilidade que dois eventos ocorram nunca pode ser maior que a probabilidade que cada evento ocorra individualmente." ; "Se dois eventos possíveis, A e B, forem independentes, a probabilidade de que A e B ocorram é igual ao produto de suas probabilidades individuais." e " Se um evento pode ter diferentes resultados possíveis, A, B, C e assim por diante, a possibilidade de que A e B ocorram é igual à soma das possibilidades individuais de A e B, e a soma das possibilidades de todos os resultados possíveis (A, B,C e assim por diante) é igual a 1 (ou seja, 100%)." (MLODINOW, 2011, p.36, 49, 51).

Sheinerman (2011), destaca que:

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(S) = 1$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3.5 Probabilidade condicional

Quando vamos calcular um evento que está condicionado ao acontecimento de outro evento denotamos por $P(B|A)$:a probabilidade de ocorrência de um evento B, dado que o evento A ocorreu, se A e B são não vazios. A probabilidade condicional de B em relação a A é dada por:

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Quando os eventos são independentes, $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A).P(B)}{P(A)}=P(B)$$

Através da definição de probabilidade condicional, fica definida a regra do produto de probabilidades. Sejam A e B eventos de S e P(B) >0, temos que:

$$P(A\cap B)=P(A|B).P(B)$$

Exemplo: Se um casal tem 3 filhos, qual a probabilidade de que, se o primeiro filho é homem, os outros também sejam?

O evento A é de que o primeiro dos três filhos seja homem.

A= { (H, H, H); (H, H, M); (H, M, H); (H, M, M)}; $n(A)=4$

O evento B é de que o segundo e o terceiro filhos sejam homens.

B= { (H, H, H); (M, H, H)}

$A\cap B$ é o evento em que o primeiro filho é homem e os outros também.

$A\cap B$= { (H, H, H)}; $n(A\cap B)=1$

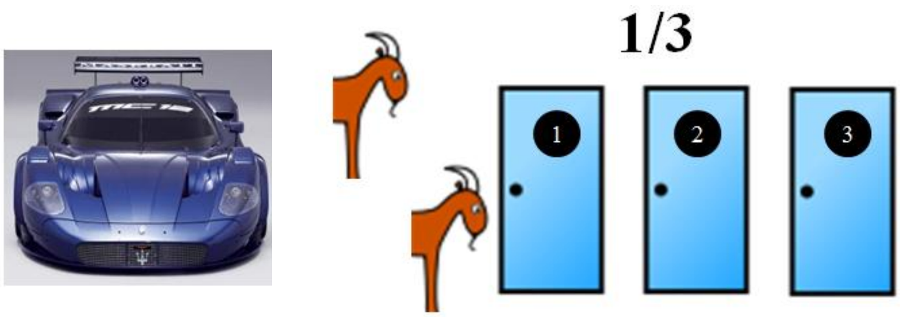
A probabilidade condicional $P(B|A)=\frac{1}{4}$

> "Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas. A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas possibilidades de ocorrências das etapas sucessivas. Neste caso, dizemos que ganhamos informação e podemos "recalcular" as possibilidades de interesse. Essas probabilidades "recalculadas" recebem o nome de probabilidade condicional." (MAGALHÃES e LIMA, 2008, p.41)

4 O problema de Monty Hall

Um dos enigmas numéricos mais interessantes e intrigantes é o teorema de Monty Hall, conhecido também como o "Problema do Sílvio Santos" aqui no Brasil. O teorema de Monty Hall, transmitido de 1963 a 1976, nos Estados Unidos a partir do talk show " Let's Make a Deal" que significa vamos fazer um negócio. " Para a surpresa dos idealizadores, mesmo após a transmissão de 4500 episódios ao longo de 27 anos, essa questão sobre probabilidade acabou sendo seu principal legado." (MLODINOW, 2011, p.62).

O apresentador do programa é quem comanda a situação e apresenta ao participante três portas onde, atrás de uma delas existe um carro e atrás das outras duas, bodes. Se o participante acertar a porta onde se encontra o carro, ele será seu. Cada uma dessas portas tem exatamente probabilidade de $\frac{1}{3}$. A grande dúvida acontece quando o apresentador, ciente da porta onde está o carro, abre uma porta que esconde um bode. E agora, qual será a probabilidade de acertar a porta em que está o carro? Será que com duas portas apenas, a probabilidade passa a ser de $\frac{1}{2}$? Segundo Mlodinow (2011), o problema de Monty Hall é difícil de entender pois não é facilmente percebida a participação do apresentador. "Um probleminha maravilhosamente confuso [...] em nenhum outro ramo da matemática é tão fácil para um especialista cometer erros como na teoria da probabilidade." (GARDNER, apud, MLODIINOW, 2011, p.77)



4.1 Um fato interessante

O problema das três portas talvez tenha sido o mais polêmico na história da coluna "Ask Marilyn" da revista *Parade.* Essa seção de perguntas e respostas foi lançada em 1986. Marilyn vos Savant citada, segundo Mlodinow (2011), no Hall da Fama do Livro Guinness dos recordes como a pessoa do maior QI já registrado no planeta, era quem respondia as perguntas. A questão sugerida em setembro de 1990:

> " Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre as três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: "Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?" Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?" (MLODINOW, 2011, p.61)

Marilyn respondeu que era mais vantajoso mudar a escolha e isso causou uma enorme polêmica entre os leitores.

> " Quase mil PhDs escreveram cartas; muitos deles eram professores de matemática e pareciam especialmente irados. " Você errou feio", escreveu um matemático da Universidade George Mason: Deixe-me explicar: se mostrarmos que uma das portas não contém o prêmio, essa alteração altera a probabilidade das duas escolhas remanescentes para $\frac{1}{2}$ - e nenhuma das duas apresenta motivos para ter probabilidade maior que a outra. Como matemático profissional, estou preocupado com a falta de conhecimentos matemáticos do público em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confessando seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro." (MLODINOW, 2011, p.63)

Muitos questionaram e mostraram indignação pela resposta dada por Marilyn, cartas de matemáticos, de universidades e até mesmo do exército. Consideravam tão evidente o resultado que não conseguiram entender como Marilyn, tão inteligente e admirada por todos, teria cometido um erro tão grosseiro. Segundo

Mlodinow (2011), um professor de Harvard manifestou: "Nosso cérebro não foi muito bem projetado para resolver problemas de probabilidade." Apesar do bombardeio de cartas, Marilyn não mudou de opinião e mostrou que estava certa.

> " Temos que elogiar Marilyn vos Savant, não só por tentar aprimorar a compreensão pública sobre a probabilidade elementar, mas também por ter coragem de continuar a publicar tais perguntas mesmo após a frustrante experiência com o problema de Monty Hall." (MLODINOW, 2011, p.64)

4.2 A solução do problema

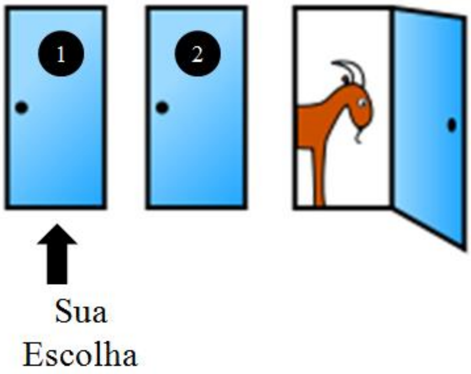
Para entender a resposta de Marilyn, é necessário que faça a separação dos casos: caso 1 - palpite inicial certo; e caso 2 - palpite inicial errado. Vale destacar que após a escolha de uma das portas pelo participante, o apresentador abre uma das portas que restam onde não aparece o carro, e o problema passa a não ser totalmente aleatório. " A porta que o apresentador abre depende de qual porta o concorrente escolheu originalmente, e essa escolha não é arbitrária." (SHEINERMAN, 2011, p.306)

> " O problema de Monty Hall é um dos que podem ser resolvidos sem nenhum conhecimento matemático especializado. [...] Tudo o que precisamos é de uma compreensão básica sobre o funcionamento das probabilidades e da Lei do Espaço Amostral." (MLODINOW, 2011, p.64)

4.2.1 Palpite inicial certo

O problema começa com a apresentação de três portas onde cada uma das portas tem probabilidade de $\frac{1}{3}$. Supondo que o palpite inicial esteja certo, a probabilidade da escolha certa será, portanto, de $\frac{1}{3}$.

Supondo que a escolha certa tenha sido pela porta 1, o apresentador abre uma das outras duas portas, revelando um bode, mas a probabilidade de ganhar o prêmio continua de $\frac{1}{3}$.



4.2.2 Palpite inicial errado

A probabilidade de que o palpite inicial seja errado é de $\frac{2}{3}$, uma vez que uma porta esconde um carro e as outras duas portas, bodes. A chance de escolher inicialmente a porta "errada" é duas vezes a chance de escolher a porta "certa". Após a escolha será revelado um bode que estará atrás de uma das outras portas.

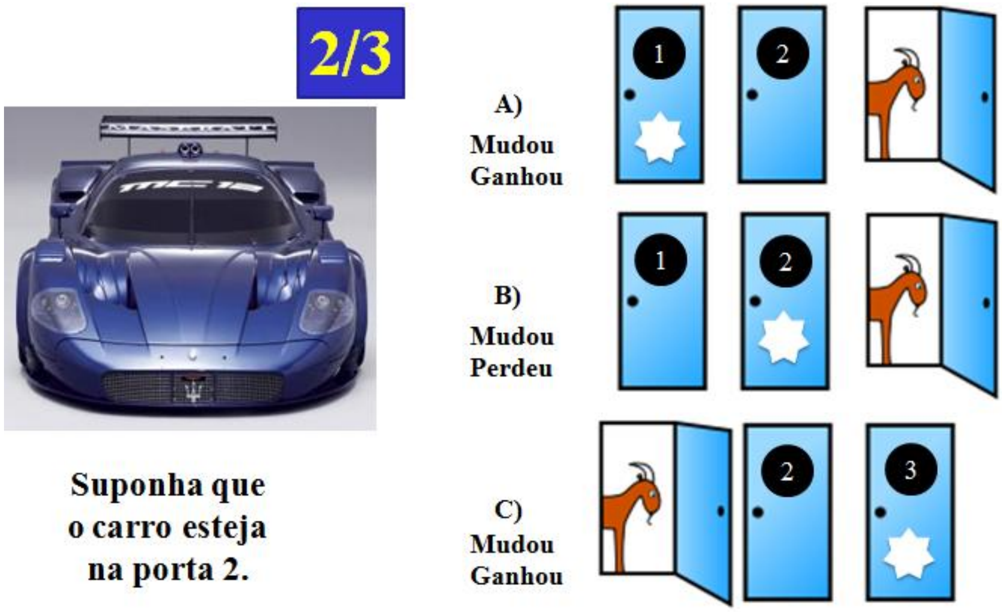
Para entender o problema, suponha que o que o carro esteja atrás da porta 2. A probabilidade de ganhar o prêmio, o tão sonhado carro, poderá ser analisada da seguinte forma:

- escolhida a porta 1, o apresentador revela o bode na porta 3 e ao mudar de porta, o participante ganha o prêmio.

- escolhida a porta 2, o apresentador revela o bode em uma das outras portas, o participante muda de porta e perde o prêmio.

- escolhida a porta 3, o apresentador revela o bode na porta 1 e ao mudar de porta, o participante ganha o prêmio.

Pode-se concluir que, ao mudar de porta, a probabilidade de ganhar o carro será de $\frac{2}{3}$, duas vezes a probabilidade de ganhar sem mudar a porta escolhida. Portanto, como Marilyn havia afirmado, é mais vantajoso trocar de porta.



4.3 Alterando o número de portas

Mlodinow (2011) propõe a analise do problema com 100 portas. A probabilidade de ganhar o prêmio principal sem mudar de porta passa a ser de $\frac{1}{100}$ e a chance do carro estar em das outras portas é de $\frac{99}{100}$. Continuando a analisar o problema de Monty Hall, o apresentador abre 98 das 99 portas restantes, deixando apenas uma.

Portanto, a chance de que o carro esteja atrás da porta escolhida inicialmente continua sendo de $\frac{1}{100}$ e de que esteja atrás de uma das outras ainda é de $\frac{99}{100}$. Como o apresentador abre 98 portas, a porta restante representa todas as outras 99 e a probabilidade de que o carro esteja atrás dela é de $\frac{99}{100}$. Aumentando o número de portas, o entendimento do problema de Monty Hall fica evidente.

4.4 Usando a probabilidade condicional

Podemos resolver o problema de Monty Hall usando a probabilidade condicional. Precisamos, portanto, definir alguns termos. Vamos representar por P1, porta 1, P2, porta 2, P3, porta 3 e, M1, mostra a porta 1, M2, mostra a porta 2 e M3, mostra a porta 3. Definida a notação, podemos representar o espaço amostral por:

$$S = \{(P1, M2), (P1, M3), (P2, M1), (P2, M3), (P3, M1), (P3, M2)\}, \text{ onde}$$

(Pi, Mj) - o prêmio está atrás da porta i e o apresentador mostra a porta j.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, que o participante escolha a porta 1, P1. Sabemos que uma vez que o participante escolhe P1, o apresentador poderá mostrar o que está atrás de uma das portas restantes, M2 ou M3.

Seja o evento A, o carro está atrás da porta 1.

$$A = \{(P1, M2),\ (P1, M3)\},\ P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A probabilidade de que o participante tenha escolhido a porta premiada e, após o apresentador mostrar uma das portas restantes, ele não tenha trocado de porta e ganhado o carro é de $\frac{1}{3}$.

Vamos pensar no fato de que o participante tenha escolhido a porta 1 e, após o apresentador abrir uma das portas restantes, ele faça a troca da porta. Como a porta 1 foi escolhida, o apresentador tem 4 possibilidades de revelar uma outra porta:

$$S' = \{(P1, M2), (P1, M3), (P2, M3), (P3, M2)\}$$

Vamos calcular a probabilidade de cada uma das possibilidades. Para (P1,M2) e (P1,M3), o prêmio está na porta P1 que é a escolhida pelo participante. O apresentador tem 2 opções para mostrar uma das portas restantes. Já em (P2,M3) e (P3,M2), como estamos considerando que o participante escolheu P1, o apresentador tem uma única possibilidade.

$$P\{(P1,M2)\}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\ ,$$

$$P\{(P1,M3)\}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P\{(P2,M3)\}=\frac{1}{3}.1=\frac{1}{3}$$

$$P\{(P3,M2)\}=\frac{1}{3}.1=\frac{1}{3}$$

Podemos calcular a probabilidade de que o carro esteja atrás da porta 3 e que o apresentador revele a porta 2. Para isso, definimos:

Evento B, o apresentador mostra a porta 2.

$$B=\{(P1,M2),(P3,M2)\},\ P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Evento C, o carro está atrás da porta 3.

$$C=\{(P3,M2)\},\ P(C)=\frac{1}{3}$$

O carro está atrás da porta 3 e o apresentador revela a porta 2

$$B\cap C=\{(P3,M2)\},\ P(B\cap C)=\frac{1}{3}$$

A probabilidade de que o carro esteja atrás da porta 3, uma vez que foi revelada a porta 2, será dada por:

$$P(C\mid B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.\frac{2}{1}=\frac{2}{3}$$

Portanto, a probabilidade do participante ganhar o carro trocando de portas é o dobro da probabilidade quando permanece com a escolha original.

4.5 Analisando a frequência de participantes premiados

Ainda considerando que o participante tenha escolhido inicialmente a porta1, vamos fazer uma análise por um outro foco. Pensando em três variáveis onde a primeira é a porta premiada, a segunda é a porta que o apresentador abre e a terceira é a porta que o participante escolhe finalizar o jogo, temos então 8 possibilidades diferentes:

S = {(P1, M2, P1), (P1, M2, P3), (P1, M3, P1), (P1, M3, P2), (P2, M3, P1),

(P2, M3, P2), (P3, M2, P1), (P3, M2, P3)}

Sabemos que a probabilidade do participante escolher inicialmente uma porta sem carro é $\frac{2}{3}$ e que escolher inicialmente a porta com o carro é $\frac{1}{3}$. Após ser revelada uma porta pelo apresentador, a probabilidade de escolha de ambas as portas é de $\frac{1}{2}$.

Pensando separadamente em cada caso, vamos calcular a probabilidade de cada evento:

1) $P(\{P1, M2, P1\}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, nesse caso o participante não troca de porta e ganha o carro.

2) $P(\{P1, M2, P3\}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, nesse caso o participante troca de porta e não ganha o carro.

3) $P(\{P1, M3, P1\}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, nesse caso o participante não troca de porta e ganha o carro.

4) $P(\{P1, M3, P2\}) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, nesse caso o participante troca de porta e não ganha o carro.

5) $P(\{P2,M3,P1\})=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, nesse caso o participante não troca de porta e não ganha o carro.

6) $P(\{P2,M3,P2\})=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, nesse caso o participante troca de porta e ganha o carro.

7) $P(\{P3,M2,P1\})=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, nesse caso o participante não troca de porta e não ganha o carro.

8) $P(\{P3,M2,P3\})=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, nesse caso o participante troca de porta e ganha o carro.

Portanto a probabilidade do participante ganhar o carro, trocando ou não de porta, aparece em 1, 3, 6 e 8 e a probabilidade do participante não ganhar o carro, trocando ou não de porta, aparece em 2, 4, 5 e 7. Vamos considerar os eventos:

G (Ganhar) = $\{(P1,M2,P1),(P1,M3,P1),(P2,M3,P2),(P3,M2,P3)\}$ e

$$P(G)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=50\%$$

$\overline{G}(Não\ ganhar)=\{(\mathrm{P1,M2,P3}),(P1,M3,P2),(P2,M3,P1),(P3,M2,P1)\}$ e

$$P(\overline{G})=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=50\%$$

Podemos concluir que, ao escolher aleatoriamente se vai ou não trocar de porta depois que o apresentador abre uma porta que não tem o carro, o participante ganha a metade das vezes. Como o participante não usa, necessariamente, a informação dada pelo apresentador, a probabilidade dele ganhar o carro diminui e nesse caso deixa de levar vantagem em um jogo que lhe poderia ser favorável. O resultado encontrado, de 50% de chance de ganhar, retrata o que a maioria das pessoas respondem de forma intuitiva que, como restam duas portas as chances ficam divididas de $\frac{1}{2}$ entre ganhar ou perder.

Dentre as opções em que o participante ganha o prêmio, podemos avaliar os casos em que troca ou não de porta:

$$T(troca) = \{(P1, M2, P3), (P1, M3, P2), (P2, M3, P2), (P3, M2, P3)\}$$ e

$$P(T) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$\overline{T}(não\ troca) = \{(P1, M2, P1), (P1, M3, P1), (P2, M3, P1), (P3, M2, P1)\}$$ e

$$P(\overline{T}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$T \cap G = \{(P2, M3, P2), (P3, M2, P3)\}\ e\ P(T \cap G) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{T} \cap G = \{(P1, M2, P1), (P1, M3, P1)\}\ e\ P(\overline{T} \cap G) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade do participante ganhar, uma vez que ele efetuou a troca de porta, será dada por:

$$P(G \mid T) = \frac{P(T \cap G)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} . \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

A probabilidade do participante ganhar quando ele permanecer com a porta escolhida inicialmente será dada por:

$$P(G \mid \overline{T}) = \frac{P(\overline{T} \cap G)}{P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} . \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Analisado esses resultados, percebemos que se o participante usa como estratégia trocar a porta escolhida inicialmente pela porta restante, ele ganha com probabilidade $\frac{2}{3}$. A sua chance de ganhar aumenta pois ele está usando a informação dada quando o apresentador abre uma porta que não tem o carro. Isso acontece pois geralmente a primeira porta escolhida será uma porta ruim, uma vez que no jogo apenas uma das três portas tem o carro.

A probabilidade é corretamente interpretada quando analisamos a frequência de ocorrência de um número grande de realizações desse evento. Se o participante jogar diversas vezes trocando sempre de porta, ele ganhará aproximadamente $\frac{2}{3}$ das vezes. Da mesma forma, se o participante jogar diversas vezes mantendo sempre a porta escolhida inicialmente, ele ganhará aproximadamente $\frac{1}{3}$ das vezes.

Quando pensamos em eventos individuais, jogar apenas uma vez, podemos atribuir a probabilidade baseando nas características teóricas de realização do evento dentro do espaço amostral de origem.

Alguns sites, como o SHODOR e o da Universidade da Califórnia San Diego (UCSD), simulam o problema de Monty Hall. O primeiro apresenta o jogo numa versão clássica, enquanto o segundo apresenta o jogo em duas versões: o jogo clássico de Monty Hall, que eles chamam *Monty knows*, e uma variante chamada *Monty does not know*, que pode ser traduzido por "Monty atrapalhado", nesta versão do problema o apresentador não sabe aonde está a porta premiada.

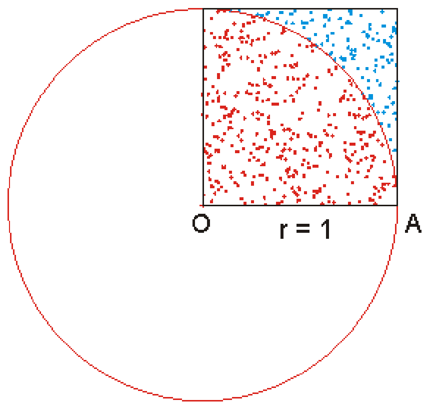
Em "Monty atrapalhado", quando o jogador escolher uma porta sem prêmio, há uma chance de que Monty abra a porta errada, estragando o jogo. Esta variante faz com que não haja mais uma estratégia vantajosa. Trocando ou não de porta, o jogador ganha metade das vezes.

Vale ressaltar que, no segundo site, os acessos dos jogadores ficam registrados a cada jogada. Quanto mais pessoas jogarem - lembrando que as pessoas jogam aleatoriamente -, mais próximo do resultado encontrado vamos chegar pela Lei dos Grandes Números.

5 Calculando uma aproximação de π

Para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, Euler, em 1737, adotou como símbolo a letra grega π, usando em seus livros e tornando conhecida e usada. O número *pi* é um número irracional. Em 1761, Lambert apresenta à Academia de Berlim, a primeira prova de que π é um número irracional." Lambert mostrou que se x é um número racional não-nulo então $tg\, x$ não pode ser racional. Como $tg\frac{\pi}{4}=1$, um número racional, segue-se que $\frac{\pi}{4}$ não pode ser racional, portanto, π tão pouco." (LAMBERT, apud, BOYER, 1974, p.340). O número 3,14159 é uma aproximação do valor de π.

Usando um método estatístico, podemos calcular uma aproximação de π. Considere um alvo dado por um quarto de círculo inscrito em um quadrado conforme a figura abaixo:



Nesse alvo são jogados dardos aleatoriamente.

Uma vez que dardos são jogados aleatoriamente, qual a probabilidade de um jogador acertar o quarto de círculo inscrito no quadrado?

$$P = \frac{\text{número de dardos que acertaram a quarta parte do círculo}}{\text{número de dardos que acertaram o alvo}}$$

$$P = \frac{\text{área da quarta parte do círculo}}{\text{área do quadrado}}$$

$$P = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{r^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, uma aproximação para o valor de π poderá ser calculada por:

$$\pi \cong 4.\left(\frac{\textit{número de dardos que acertaram a quarta parte do círculo}}{\textit{número de dardos que acertaram o alvo}} \right)$$

Podemos fazer essa atividade com alunos do ensino fundamental e do ensino médio. Preparamos o alvo, um quadrado com um quarto de círculo inscrito, e pedimos para que os alunos lancem os dardos e façam as anotações de quantos dardos atingiram a área delimitada pelo quarto de círculo e quantos foram lançados. Se alunos em sala de aula jogarem muitos dardos, podemos estimar o valor de π, uma vez que pela Lei dos Grandes Números (ver página 13), repetindo muitas vezes um determinado evento, a frequência relativa desse evento converge para a probabilidade, e o erro poderá ser desprezado.

Com as anotações, podemos propor o cálculo da probabilidade dos dardos atingirem o quarto de círculo, ou seja, a razão entre o número de dardos que atingiram o quarto de círculo e o número de dardos que foram lançados. Por exemplo, se forem lançados 500 dardos na área delimitada pelo quadrado, encontraremos um resultado próximo de: 108 atingirão a área externa ao quarto de círculo e 392 atingirão a área interna ao quarto de círculo. Calculando a probabilidade de que os dardos atinjam o círculo, temos:

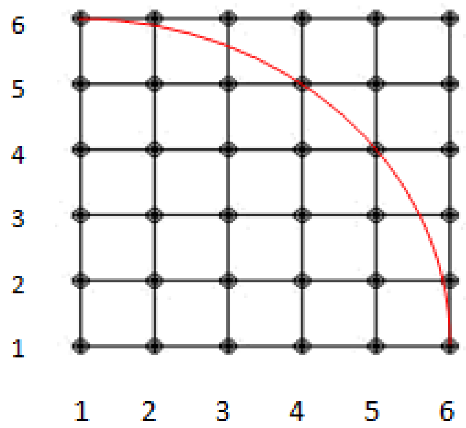
$$P = \frac{392}{500} = 0{,}784$$

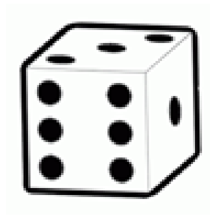
$$4 \,.\, 0{,}784 = 3{,}136 \cong \pi$$

Encontramos um valor muito próximo de π.

Mas será que esse experimento é realmente aleatório? Um bom jogador vai acertar mais o quarto de círculo do que o esperado, ou seja, vamos encontrar um valor superestimado para π .

Podemos trocar os dardos por dados. Considere o quadrado do alvo como uma malha quadriculada que associamos a um plano cartesiano. Os pontos dos eixos representam os números que aparecem nas faces de um dado, conforme a figura:





Lançando duas vezes o dado, formamos um par ordenado e podemos marcar esse ponto no alvo. Das 36 coordenadas no quadrado, para um dado de 6 lados, 26 estão dentro do quarto de círculo Repetimos muitas vezes esse procedimento. Calculamos a probabilidade do ponto atingir a área interna ao quarto de círculo e encontramos um valor aproximado de π . Jogando o dado muitas vezes, vamos achar uma aproximação não muito boa para $\pi \simeq 2{,}8888888....$

Esse experimento pode ser usado com dados de número de lados variados.

Através de simulações em planilhas do Excel, encontramos as seguintes aproximações: dado de 8 lados, 45 em 64 pontos pertencem ao quarto de círculo e $\pi \simeq$ 2,8125, nesse caso a aproximação piorou; dado de 10 lados, 73 em 100 pontos pertencem ao quarto de círculo e $\pi \simeq$ 2,92; dado de 12 lados, 106 em 144 pontos pertencem ao quarto de círculo e $\pi \simeq$ 2,94444... ; dado de 20 lados, 302 em 400 pontos pertencem ao quarto de círculo e $\pi \simeq$ 3,02. O dado de 100 lados não existe, mas podemos simular essa situação jogando o dado de 10 lados duas vezes para a coordenada x e duas vezes para vezes para a coordenada y, teremos 7789 em 10000 pontos pertencem ao quarto de círculo e $\pi \simeq$ 3,1156.

O experimento com dados não viciados é aleatório mas, como nesse método marcamos pontos de acordo com o número de lados do dado usado, não temos como atingir qualquer ponto da área do alvo como no exemplo dos dardos. Quanto maior o número de lados do dado, mais pontos poderemos atingir dentro do alvo, melhorando assim a aproximação ao valor de π .

6 Comentário

A aplicação de uma situação problema a partir de um jogo ou de ferramentas lúdicas torna mais atrativo o ensino do conteúdo matemático e desperta a curiosidade dos alunos. Dentro dessa concepção, o presente estudo pôde constatar que a probabilidade se apresenta como um dos ramos da matemática no qual se pode explorar essas estratégias de ensino.

Como exemplo da utilização de jogos, o problema de Monty Hall e o cálculo de uma aproximação de π se tornam possibilidades extremamente viáveis para o ensino aprendizagem da probabilidade. O problema de Monty Hall é um exemplo que envolve probabilidade e que a intuição acaba levando a um resultado errado. Isso porque, ao responder esse problema de maneira intuitiva, é natural pensar que, no momento em que a escolha é feita entre duas portas, a probabilidade de ganhar o prêmio passa de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$. Neste artigo, mostramos que, ao explorar e interpretar várias nuances desse problema, usando uma abordagem correta, estas contradições serão esclarecidas.

Já o cálculo de uma aproximação de π usando o alvo, ou seja um quarto de círculo inscrito em um quadrado, usa o conteúdo de probabilidade e, de uma maneira interativa, faz com que os alunos adquiram novos conhecimentos matemáticos. Os dois problemas apresentados no trabalho são exemplos de atividades interessantes que podem ser usadas no ensino da probabilidade do ensino básico.

7 Agradecimento Final

A Deus por me dar saúde, força e por iluminar a minha vida. Aos professores que contribuíram para minha formação e em especial à professora Mariana Garabini Cornelissen, pelo cuidado e dedicação. Ao meu orientador, Humberto Cesar Fernandes Lemos, pelo suporte, pelas correções e incentivo. À CAPES pelo apoio financeiro, fundamental para a realização desse projeto. Agradeço aos colegas de curso pelos momentos que, juntos, enfrentamos os desafios. Agradeço ao meu esposo, Flávio, que me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldade e aos meus filhos, João Vítor e Maria Luiza, pela compreensão quando não estive presente ao longo desses dois anos. Agradeço enormemente aos meus pais, Eugênio e Ana Cristina, e às minhas irmãs, Renata, Patrícia e Juliane, que não mediram esforços para me ajudar nessa caminhada. Agradeço também à Maria Amélia Ribeiro, Joice Solano e a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que a conclusão desse trabalho se tornasse possível.

8 Referências Bibliográficas

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a Matemática, 2010.

BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o ensino médio, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; tradução: Elza F. Gomide, 1974.

CARVALHO, Sônia Pinto, A área e o perímetro de um círculo, 2011.

CASSIANO, Cláudio Roberto de Paula; ALVES, Osvando dos Santos. Probabilidade e Estatística: Funcionalidade Cotidiana, 2012. Disponível em:

http://www.webartigos.com/_resources/files/_modules/article/article_100984_20121204234048f78f.pdf

COOKE, Roger Lee. Enciclopédia Britânnica. Disponível em: http://global.britannica.com/EBchecked/topic/321441/Andrey-Nikolayevich-Kolmogorov Acessado em 13 de janeiro de 2014.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, 2005.

GIOVANNI, José Ruy; **BONJORNO**, José Roberto. Matemática Completa, 2005.

IEZZI, Gerson; **DOLCE**, Osvaldo; **DEGENSZAJN**, David; **PÉRIGO**, Roberto; **ALMEIDA**, Nilze. Matemática: Ciência e Aplicações, 2010.

ISHIHARA, Cristiane Akemi; **PESSOA**, Neide Antônia. Matemática, 2010.

MAGALHÃES, Marcos, Nascimento; **LIMA**, Antônio Carlos Pedroso. Noções de Probabilidade e Estatística, 2008.

MLODINOW, Leonard. O Andar do Bêbado, 2011

O´CONNOR, John J e **ROBERTSON**, Edmund. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St Andrews na Escócia. Disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kolmogorov.html Acessado em 13 de janeiro de 2014.

SCHEINERMAN, Edward. Matemática Discreta, uma introdução, 2011.

SHODOR. Disponível em: http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/ . Acessado em 13 de fevereiro de 2014.

SILVEIRA, Porto . Disponível em: http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/estatist.html. Acessado em 13 de fevereiro de 2014.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; **DINIZ**, Maria Ignez. Matemática: ensino médio, 2010.

Universidade da Califórnia San Diego (UCSD). Disponível em: http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html Acessado em 13 de fevereiro de 2014.

Anexo de figuras

1- Portas e prêmios. RODRIGUES, Júlio César. Pensando Estatisticamente.

2- Quarto de círculo inscrito no quadrado. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi Acessado em 2 de fevereiro de 2014.

3- Dado de 6 lados. Disponível em http://desenhospaintcolor.blogspot.com.br/ Acessado em 5 de fevereiro de 2014.

4- Dados de número de lados variados. Disponível em http://www.rpgnailha.org/2012/04/dados-para-que-te-quero.html Acessado em 14 de fevereiro de 2014.