2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

O Teorema das Cinco Cores

Divalde Luiz Frois Junior [1]
Alexandre Celestino Leite Almeida[2]

Resumo: Neste trabalho abordaremos alguns conceitos da Teoria de Grafos necessários à demonstração que faremos do Teorema das Cinco Cores. Devido à sua conhecida história, talvez o Teorema das Quatro Cores seja mais familiar ao leitor. O Teorema das Cinco Cores é um resultado um pouco mais fraco que o Teorema das Quatro Cores, mas muito interessante, pois pode ser demonstrado tradicionalmente, sem o auxílio de horas de cálculos computacionais. Também apresentaremos, ao final, algumas sugestões de atividades sobre coloração que podem ser desenvolvidas em aulas de matemática no Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Grafos, Coloração, Teorema das Quatro Cores, Teorema das Cinco Cores.

1 Introdução

A história nos conta que, em 1852, logo após ter concluído seus estudos no University College, em Londres, o jovem matemático Francis Guthrie, que mais tarde veio a se tornar professor de matemática na África do Sul, estava um dia colorindo um mapa dos vários distritos da Inglaterra. Ao colorir o mapa, tomava o cuidado de que países vizinhos com alguma linha de fronteira em comum nunca tivessem a mesma cor. Notou, então, que apenas quatro cores eram suficientes para colorir aquele mapa. Prosseguiu suas tentativas e conseguiu colorir vários outros mapas fazendo uso de apenas quatro cores.

Por ser um matemático, pensou que talvez fosse possível demonstrar que quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa, mas tal demonstração não aparentava ser tão fácil. Repassou, então, o problema a seu irmão Frederick Guthrie, aluno de matemática da mesma universidade onde estudara. Este, por sua vez, reformulou o problema proposto por seu irmão mais velho e o apresentou ao grande professor Augustus De Morgan.

De Morgan, muito entusiasmado, compartilhou o problema com seus estudantes e outros notáveis matemáticos. Dentre estes, estava Sir William Hamilton, que não demonstrou grande interesse pelo problema, respondendo a De Morgan, quatro dias depois, que não tinha a intenção de debruçar-se sobre a questão. Foi, então, por meio de De Morgan que a

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - CAP/UFSJ
E-mail: divaldefrois@gmail.com.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - DeFiM, CAP/UFSJ
E-mail: celestino@ufsj.edu.br

Conjectura das Quatro Cores foi divulgada e teve alguns progressos.

Assim como Guthrie, De Morgan percebeu que três cores eram insuficientes para colorir alguns tipos de mapas, ou seja, eram necessárias pelo menos quatro cores. Ele argumentou que, em qualquer mapa, não existem cinco países tais que cada um tenha fronteira com os outros quatro, isto é, em cada agrupamento de cinco países, ao menos dois deles não são vizinhos. Entretanto, essa propriedade não bastava para garantir que quatro cores fossem sempre suficientes para colorir qualquer mapa. De Morgan também observou que, se quatro territórios possuem individualmente fronteira com os outros três, então, um deles será cercado pelos demais. Isso impediria que um quinto território tivesse fronteira com todos os quatro. Se esse fato pudesse ser provado, quatro cores bastariam para colorir qualquer mapa.

O problema não teve grandes desenvolvimentos, até que, em 1878, 26 anos depois de Guthrie tê-lo formulado, foi divulgado pela London Mathematical Society, por meio de seu presidente Arthur Cayley, após indagar se alguém já havia submetido alguma solução para a Conjectura das Quatro Cores. A partir daí, o problema conquistou o interesse da comunidade matemática britânica.

Em 1879, um ano depois da divulgação do problema por Arthur Cayley, Alfred Bray Kempe, que fora aluno de Cayley, publicou um artigo onde supostamente dava uma demonstração de que quatro cores eram suficientes para colorir qualquer mapa. A demonstração foi estudada por vários matemáticos, recebeu algumas sugestões de melhoria e estabeleceu-se como uma prova definitiva do Teorema das Quatro Cores. Porém, em 1890, onze anos após a publicação de Kempe, Percy John Heawood, por meio de um contra-exemplo, apontou um erro sutil naquela demonstração. Ele próprio lamentou não ser capaz de reparar tal erro. Heawood foi, no entanto, capaz de salvar parte da demonstração de Kempe e provar que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa plano onde países vizinhos têm cores diferentes. Essa demonstração é o tema principal deste trabalho e será vista mais adiante, após a apresentação de algumas noções básicas da Teoria de Grafos essenciais à compreensão do Teorema das Cinco Cores.

2 Noções sobre Grafos

A Teoria de Grafos tem origem recente. Desde o século XVIII, quando, segundo a história, Leonhard Euler resolve o primeiro problema matemático por meio de uma representação que hoje chamamos **grafo**, essa teoria tem conhecido extraordinário desenvolvimento teórico e aplicado. A Teoria de Grafos tem vasta utilização em matemática, sobretudo em matemática aplicada, por ser uma eficiente ferramenta de modelagem para diversas situações reais. Passamos agora a introduzir algumas definições básicas necessárias para depois prosseguirmos às demonstrações centrais deste trabalho.

Um grafo é constituído por uma coleção finita e não-vazia de pontos, chamados **vértices**, com vários pares desses pontos ligados por arcos ou segmentos, chamados **arestas**. Cada aresta tem dois vértices como extremidades (essas duas extremidades podem coincidir e, nesse caso, temos um *laço*), e duas arestas só podem ter em comum pontos de suas extremidades. Quando uma aresta liga dois vértices dizemos que os vértices são **adjacentes** e que a aresta é **incidente** aos vértices. Normalmente, denotamos um grafo pela letra G e representamos por $V(G)$ e $A(G)$ respectivamente, os seus conjuntos de vértices e arestas.

A estrutura de um grafo pode ser representada de diversas formas. Podemos ter uma lista em que se discriminam quais vértices estão ligados; podemos ter um desenho, isto é, uma representação gráfica; ou mesmo por matrizes, muito usadas quando tratamos de grafos em computadores. Nesse trabalho exploraremos fundamentalmente a representação gráfica dos grafos.

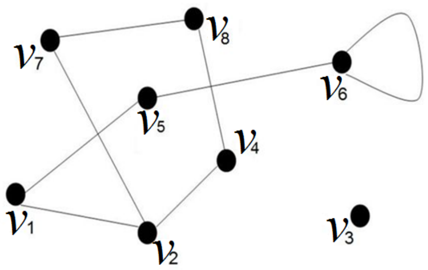


Figura 1: Grafo G com 8 vértices e 7 arestas

O número de arestas incidentes a um vértice v qualquer de um grafo é denominado **grau** ou **ordem** do vértice v e é simbolizado por $d(v)$. Na Figura 1, $d(v_1)$=2, $d(v_2)$=3 e $d(v_3)$=0. No caso de haver laços, cada laço conta como duas arestas. Em nossa figura, $d(v_6)$=2.
Em geral, o que nos interessa num grafo é conhecer quais são os seus vértices e quais são suas arestas, isto é, quais pares de vértices estão ligados e quais não estão. Na literatura sobre Teoria de Grafos as notações empregadas são muito diversificadas e, em muitos casos, leva tempo para se familiarizar com as notações de diferentes autores. Neste trabalho, sempre que possível, procuraremos utilizar o esquema de notação mais simplificado. Para o número de vértices do grafo usa-se $|V|$ e o número de arestas é simbolizado por $|A|$, mas algumas vezes nos referiremos a esses valores como simplesmente v e a.

Com os conceitos definidos até aqui, já podemos demonstrar um primeiro resultado importante para o estudo dos Grafos.

Teorema 2.1 *A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre igual ao dobro do número de arestas. Ou seja,*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.a$$

Demonstração: Cada aresta do grafo incide sobre dois vértices. Ao contarmos e somarmos os graus dos vértices teremos contado cada aresta duas vezes. $\square$

Cada aresta de um grafo pode ser orientada, escolhendo-se uma de suas extremidades como seu vértice inicial e a outra como vértice final. Um **caminho**, em um grafo, é uma sequência de arestas, que podem ser orientadas de tal modo sempre que a e b são duas arestas consecutivos dessa sequência, o vértice final de a é o vértice inicial de b. Sendo $a_1, a_2, ..., a_n$

um caminho em um grafo, o vértice inicial de a_1 é chamado vértice inicial do caminho, e o vértice final de a_n é o vértice final do caminho.

Um caminho é dito **simples fechado**, ou um **circuito**, se seus vértices inicial e final coincidem, e cada outro vértice seu é comum a exatamente duas arestas. Um grafo é **conexo** quando, sendo A e B dois vértices quaisquer do grafo, existe um caminho no grafo de vértice inicial A e vértice final B.

Alguns tipos de grafos possuem estruturas com propriedades particulares que são muito frequentes no estudo dos grafos, recebendo, portanto, nomenclatura diferenciada, como veremos na seção seguinte.

3 Grafos Especiais

Há um grande número de termos que foram sendo definidos à medida em que se desenvolvia a Teoria dos Grafos. Apresentaremos a seguir algumas dessas definições, as quais serão importantes no decorrer do presente trabalho.

Quando cada par de vértices de um grafo é ligado por uma aresta temos um **grafo completo**. Um grafo completo com n vértices é simbolizado por K_n. Na Figura 2, temos um K_5.

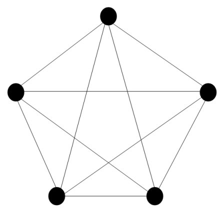


Figura 2: Grafo completo K_5

Se todos os vértices de um grafo possuem o mesmo grau k, dizemos que o grafo é **regular** de grau k, ou ainda $k - regular$. A Figura 3 mostra um grafo 3-regular.

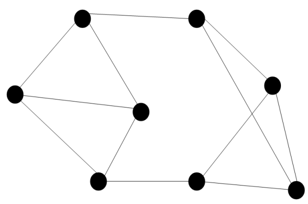


Figura 3: Grafo 3-regular

Um grafo conexo regular de grau 2 é chamado **ciclo**. Um ciclo com n vértices é denotado por C_n. A Figura 4 ilustra um C_6.

Árvores são grafos conexos em que não existem ciclos, como exemplificado na Figura 5. Uma árvore é o grafo conexo com o menor número de arestas.Talvez as árvores constituem a família mais simples dos grafos. Alguns problemas da Teoria dos Grafos podem ser muito

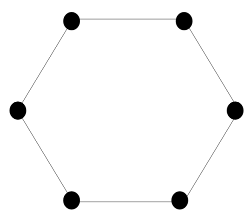


Figura 4: Ciclo C_6

difíceis. Sendo assim, costuma ser um bom começo pensar nesses problemas primeiramente em relação às arvores. Isso é o que faremos para demonstrar o teorema 4.1.

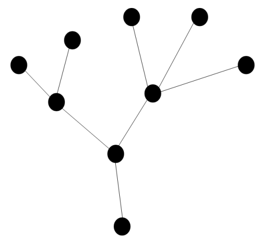


Figura 5: Exemplo de árvore

Agora demonstraremos um resultado sobre árvores que nos será útil mais tarde.

Teorema 3.1 *Seja T uma árvore com v vértices. Então, T possui v-1 arestas.*

Demonstração: Provaremos o teorema por indução sobre o número de vértices de T.

É imediato ver que o teorema é válido para as árvores em que v=1, pois, com apenas um vértice, a árvore terá 0=v-1=1-1 arestas.

Hipótese de indução: Vamos supor que o teorema seja verdadeiro para todas as árvores com v vértices.

Queremos provar que numa árvore T com v+1 vértices, teremos v arestas.

Seja v' uma vértice de grau 1 de T. Seja T'= T-v'. Perceba que o teorema vale para T', que possui v vértices e, portanto, v-1 arestas (HI).

Ao retirarmos v', como $d(v)$=1, eliminamos exatamente uma aresta de T. Então, T possui uma aresta a mais do que T', isto é, T possui (v-1)+1= v arestas.

Logo, por indução, está provado o teorema. $\square$

Grafos bipartidos são aqueles em que seu conjunto V de vértices pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 de forma que toda aresta do grafo possui uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Se todos os vértices de V_1 forem ligados a todos os vértices de V_2 temos um **Grafo bipartido completo** cuja notação é $K_{p,q}$, onde p e q representam as cardinalidades de V_1 e V_2. A Figura 6 representa um grafo bipartido completo $K_{3,4}$.

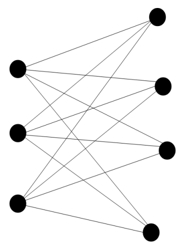


Figura 6: Grafo bipartido completo $K_{3,4}$

Um **subgrafo** é um grafo contido em outro grafo, ou seja, o grafo H é subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Quando a formação de H se dá pela eliminação de vértices de G (e, consequentemente, das arestas necessárias) dizemos que H é um **subgrafo induzido** de G.

Quando um grafo pode ser particionado de forma que, de qualquer vértice de uma parte, existe um caminho que o liga a qualquer outro vértice dessa mesma parte, dizemos que cada parte que possui essa propriedade é dita uma **componente** do grafo.

4 Grafos planares

A representação gráfica de um grafo é definida como a **realização planar** desse grafo. Um grafo é **planar** se for possível redesenhá-lo em um plano, mantendo a mesma estrutura de incidência de seus vértices e arestas, de maneira que suas arestas não se intersectem. Às vezes, a realização planar de um grafo não satisfaz essas condições, o que não quer dizer que não podemos imediatamente dizer que o grafo não é planar. Em muitos casos é possível encontrar uma representação planar para um grafo deformando suas arestas, de modo a torná-lo subconjunto de um plano. Diremos que um grafo é plano quando seus vértices e arestas estão todos em um mesmo plano. A realização planar de um grafo que contém pelo menos um ciclo divide o plano em um número finito de regiões, chamadas **faces** do grafo. No caso das árvores, não temos ciclos, então, só há uma única região; uma face. Vale lembrar que, para os grafos planares em que há ciclos, uma das faces a ser considerada é a face ilimitada, isto é, o restante do plano.

Em todo grafo planar vale o conhecido Teorema de Euler para poliedros convexos.

Teorema 4.1 (Teorema de Euler) *-Num grafo planar conexo com v vértices, a arestas e f faces vale que v-a+f=2.*

Demonstração: Tomemos um grafo planar conexo qualquer. Demonstraremos o teorema por indução sobre o número de arestas.

Se o grafo for uma árvore, já sabemos que f=1 e a=v-1. Assim, v-a+f=v-(v-1)+1=2.

Hipótese de indução: Vamos supor que para todo grafo planar conexo com v vértices e a arestas, vale que $v - a + f$ =2.

Seja G um grafo planar conexo com v vértices, a arestas e f faces. Queremos provar que um grafo G' com a+1 arestas, satisfaz o teorema de Euler.

Se G' é também uma árvore, já vimos que vale o teorema. Se em G' houver um ciclo, retiramos uma aresta do ciclo. Desfazendo o ciclo, o grafo fica com uma face a menos, mas pela hipótese de indução a relação vale para o novo grafo. Assim, temos

$$v - a + (f - 1) = 2,$$

que nos dá

$$v - (a + 1) + f = 2,$$

como queríamos provar. □

É interessante observar que só podemos acrescentar arestas a um grafo planar, sem comprometer sua planaridade, quando uma região do plano estiver limitada por um ciclo de comprimento superior a 3. Assim, um grafo é dito **maximal planar** quando possui uma representação composta apenas por ciclos de comprimento igual a 3, ou seja, não poderíamos acrescentar arestas a esse grafo sem que ele deixasse de ser planar.

Teorema 4.2 *Em todo grafo planar conexo G temos $a \leq 3v - 6$. Se G é maximal planar vale a igualdade.*

Demonstração: Se contarmos as arestas de cada face, cada aresta será contada duas vezes. Como cada face tem, no mínimo, 3 arestas (no caso maximal vale a igualdade), temos:

$$3f \leq 2a$$

Usando o Teorema de Euler,

$$v - a + f = 2,$$

$$3v - 3a + 3f = 6,$$

$$3v - 3a + 2a \geq 6,$$

$$a \leq 3v - 6$$

□

Existem grafos que não são planares. O teorema demonstrado acima nos garante que o grafo K_5 não é planar, pois, para K_5, $v = 5$ e $a = 10$. O terorema nos dá que em um grafo planar vale $a \leq 3v - 6$, mas K_5 não obedece a essa relação: 10>3.5-6. Logo, K_5 e todos os outros grafos completos com mais de quatro vértices não podem ser planares.

Também podemos provar que o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ não é planar.

Teorema 4.3 *Em todo grafo planar bipartido conexo G vale $a \leq 2v - 4$.*

Demonstração: Sabemos que um grafo bipartido só possui ciclos pares. Cada um desses ciclos costitui uma face do grafo cujo número mínimo de arestas é 4. Então,

$$4f \leq 2a$$

Usando novamente o Teorema de Euler,

$$v - a + f = 2,$$

$$\begin{aligned} 4v - 4a + 4f &= 8, \\ 4v - 4a + 2a &\geq 8, \\ a &\leq 2v - 4 \end{aligned}$$

□

O resultado acima nos mostra que $K_{3,3}$ não é planar, pois 9 > 2.6-4.

É interessante perceber que o resultado acima é o argumento que resolve um desafio matemático que fez parte da infância de muitos: o problema das três casinhas. O problema consiste de três casinhas que precisam receber, cada uma delas, as ligações de água, telefone e eletricidade, provenientes das respectivas companhias. O problema é que essas ligações não podem se cruzar. Na linguagem dos grafos, o problema seria equivalente a encontrar uma realização planar para $K_{3,3}$, onde os vértices seriam as três casinhas e as três companhias, em que as arestas não se cruzassem . Vemos que o empreendimento é impossível, pois o grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Mostramos que nem todo grafo é planar. O conceito de planaridade tem caráter aparentemente topológico, mas um importante teorema na Teoria dos Grafos faz uma caracterização combinatória dos grafos planares. Depois de apresentarmos algumas definições necessárias, apresentaremos, sem demonstração, o notável *Teorema de Kuratowski.*

Um **subgrafo** *G'* de *G* é um grafo em que *V(G')⊆V(G)* e *A(G')⊆A(G)*. Uma **subdivisão** de um grafo *G* é um grafo *G'* que pode ser obtido quando substituímos uma aresta por um caminho de comprimento 2. Um grafo *G'* é dito **homeomorfo** a *G* quando é obtido por meio de sucessivas operações de subdivisão em *G*.

Teorema 4.4 (Kuratowski) - *Um grafo é planar se e somente se não contém subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.*

A demonstração do resultado de Kuratowski foge ao propósito desse texto, mas pode ser encontrada em textos avançados sobre Teoria dos Grafos [3]. Entretanto, não poderíamos deixar de mencionar esse importante resultado sobre a planaridade. Dizendo de maneira simplificada, o teorema de Kuratowski afirma que K_5 e $K_{3,3}$, e suas subdivisões, são os únicos grafos que não são planares.

5 Coloração de Grafos

Colorir um mapa de maneira adequada é colorir suas regiões de maneira que regiões limítrofes nunca tenham a mesma cor. Obviamente, para um mapa com n regiões, se disponibilizarmos de n cores distintas, sempre poderemos colorir o mapa adequadamente. O problema desperta um interesse especial quando nos preocupamos em usar o menor número possível de cores na coloração. Esse problema foi proposto pela primeira vez em 1852 por Francis Guthrie, quando, após várias tentativas bem sucedidas, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido usando-se, no máximo, quatro cores.

A conjectura, hoje um dos mais famosos teoremas da Matemática, demorou mais de um século para ser resolvida. Nesse período, muito progresso foi conseguido na Teoria dos Grafos e o problema pode ser abordado por meio das novas descobertas desse notável ramo da Matemática.

A ideia fundamental foi perceber que o problema da coloração de um mapa pode ser encarado como o problema de colorir um grafo. Tomemos um mapa em que não haja regiões (países, estados, distritos, etc.) desconexas. A cada região vamos associar um vértice, a capital de cada país, por exemplo. A partir da capital, desenhamos curvas até o ponto médio de cada uma das fronteiras do país. É facil preceber que essas curvas assumirão uma configuração estrelada e não se cruzarão. Assim, transformamos o mapa em um grafo planar equivalente cujos vértices são as diversas regiões e cujas arestas representam as fronteiras entre essas regiões, como ilustrado na Figura 7. Agora o problema se trata de encontrar uma coloração para os *vértices* do grafo de maneira que vértices ligados por uma aresta tenham necessariamente cores diferentes.

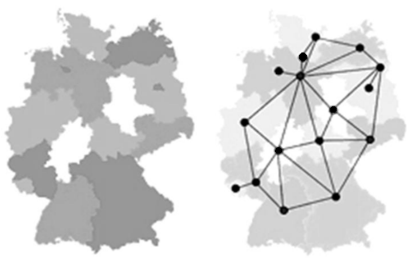


Figura 7: Coloração de vértices

Na Teoria dos Grafos, quando queremos colorir os vértices de um grafo, atribuimos números ou outro símbolo qualquer a cada um deles. De maneira geral, se podemos utilizar k cores, números ou símbolos para colorir os vértices de um grafo G, dizemos que temos uma **k-coloração** de G. Se as cores de vértices adjacentes são sempre diferentes dizemos que a coloração é **própria** e, ainda, se o grafo admitir uma coloração-k própria, ele é chamado **k-colorizável**. Vale observar que o número k se refere à quantidade de cores disponíveis, isso não significa que todas elas devam ser utilizadas. Por exemplo, se um grafo é 6-colorizável, também será 7-colorizável, pois podemos acrescentar a sétima opção ao nosso conjunto de cores disponíveis mesmo que não a utilizemos.

Nos problemas de coloração dos vértices de um grafo o objetivo é usar o mínimo possível de cores. O menor número possível de cores necessárias para que um grafo G seja colorizável é chamado **número cromático** de G e o denotamos por $\chi(G)$. Se um grafo G possui n vértices, temos que $\chi(G) \leq n$, já que podemos atribuir a cada vértice uma cor diferente.

Para os grafos completos K_n, $\chi(K_n)$=n, pois como cada vértice é adjacente a todos os outros e vértices adjacentes nunca podem receber a mesma cor, são necessárias n cores.Se G é bipartido, $\chi(G)$=2, pois basta atribuir uma cor ao conjunto de vértices V_1 e outra para V_2. Como cada aresta tem uma extremidade em V_1 e a outra em V_2, G é 2-colorizável.

Para os grafos planares, o melhor resultado que temos é o Teorema das Quatro Cores cuja demonstração foi feita pelos americanos Kenneth Appel e Wolfgang Haken, em 1976, com o auxílio de aproximadamente 1200 horas de cálculos no melhor computador da época. A prova foi recebida com entusiasmo pela comunidade matemática, mas despertou polêmica pelo fato de não ser possível a sua verificação sem o computador. O volume de cálculos era extremamente grande e isso tornava a tarefa humanamente impossível.

A quantidade de cálculos foi reduzida a um nível bem mais tolerável em 1994, quando Paul D. Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas, ao invés de tentar melhorar a demonstração de Appel e Haken, decidem partir em busca de sua própria demonstração do teorema. Com a redução dos cálculos que conseguiram, um único dia de operações computacionais conseguia verificar o resultado. Ainda hoje tenta-se encontrar uma demonstração que dispense o uso do computador.Dessa forma, não tentaremos demonstrar aqui o teorema que segue:

Teorema 5.1 (Teorema das Quatro Cores) - *Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$.*

Muitos matemáticos importantes deixaram contribuições notáveis na história do problema das quatro cores, merecendo justo reconhecimento. Como já mencionado na introdução, Alfred Kempe apresentou uma demonstração em 1879 que aparentemente estabelecia o Teorema das Quatro Cores. Onze anos depois, Percy Heawood aponta uma falha que derrubava a prova de Kempe. O próprio Heawood não consegue corrigir o erro, mas usando a técnica proposta por Kempe, consegue demonstrar o **Teorema das Cinco Cores**.

Na demonstração do Teorema das Cinco Cores utilizaremos o seguinte Lema:

Lema 5.1 *Num grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

Demonstração: Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.a$. Vamos supor que $d(v) > 5, \forall v \in V$. Sendo v o número de vértices de G, temos

$$6.v \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.a$$

Mas já mostramos que em todo grafo planar vale $a \leq 3.v - 6$. Então, $2.a \leq 6.v - 12$. Isso nos dá que

$$6.v \leq 6.v - 12,$$

que é impossível. Logo, em todo grafo planar existe um vértice com grau menor ou igual a 5. $\square$

Teorema 5.2 (Teorema das Cinco Cores) - *Se G é um grafo planar, então* $\chi(G) \leq 5$

Demonstração: Vamos provar o teorema por indução sobre o número de vértices do grafo.

Para grafos com cinco ou menos vértices, o teorema é obviamente válido, já que podemos atribuir a cada vértice uma cor diferente.

Hipótese de indução: Vamos supor que o resultado seja válido para os grafos com n vértices.

Considere um grafo planar G com $n + 1$ vértices. Pelo Lema 5.1, G contém um vértice v com grau menor ou igual a 5. Considere $G'=G - v$. Repare que G' também é planar e possui n vértices. Usando nossa hipótese de indução, G' pode ser colorido com 5 cores. Agora queremos estender essa coloração a G, colorindo o vértice v. Se, entre os vizinhos de v, foram utilizadas apenas 4 cores diferentes, isto significa que disponibilizamos de uma quinta cor para atribuir a v, tornando G 5-colorizável.

Se o grau do vértice v é $d(v) = 5$ e seus 5 vizinhos possuem cores diferentes, não temos como associar uma cor a v, pois, com apenas 5 cores, a cor de v necessariamente será igual à de algum de seus vizinhos. Dessa maneira, para atribuirmos uma cor ao vértice v que não seja a mesma de seus vizinhos, deveremos recolorir alguns vértices.

Suponhamos que todo vértice de G, exceto v, esteja colorido com os elementos do conjunto 1, 2, 3, 4, 5, que vamos chamar de cores. Vamos supor ainda que cada vizinho de v esteja colorido com uma cor diferente dentre as disponíveis. Sejam u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 os vértices adjacentes a v e, sem perda de generalidade, vamos considerar que u_1 esteja colorido com a cor 1, u_2 com a cor 2 e assim por diante. Além disso, por questão de organização, vamos considerar os vizinhos de v ordenados em sentido horário, conforme ilustrado na Figura 8.

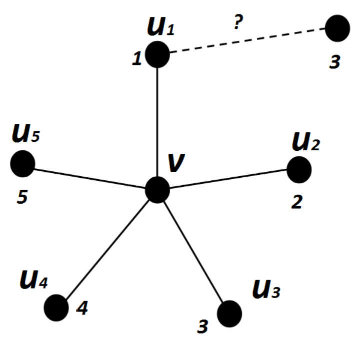


Figura 8: Vértice v e seus vizinhos

Podemos trocar a cor de um dos vizinhos de v. Vamos mudar, por exemplo, a cor de u_1 de 1 para 3. Agora teríamos a cor 1 disponível para colorirmos o vértice v. O problema é que u_1 pode ter um vizinho que já tenha a cor 3 e, nesse caso, não obteríamos uma coloração própria para G.

Vamos então tomar o subgrafo de G induzido por todos os vértices de cores 1 ou 3. Chamemos de $H_{1,3}$ esse subgrafo. Repare que os vértices u_1 e u_3 estarão em $H_{1,3}$, mas não sabemos se estão na mesma componente, ou seja, numa mesma parte de $H_{1,3}$ que possui a propriedade de que a partir de qualquer vértice dessa parte existe um caminho para qualquer outro vértice dessa mesma parte. Se estiverem em componentes separadas, não há caminho entre u_1 e u_3 e, assim, podemos permutar as cores 1 e 3 na componente que contém u_1. Isso nos daria uma coloração própria para G' em que a cor 1 não mais estaria entre os vizinhos de v e, assim, poderíamos atribuir a v a cor 1.

Se u_1 e u_3 estiverem na mesma componente, a permuta entre as cores 1 e 3 não nos disponibiliza nenhuma cor para v. Então, vamos proceder como anteriormente, mas agora tentando recolorir u_2 com a cor 4. Tomemos $H_{2,4}$, subgrafo de G induzido nos vértices de cor 2 ou cor 4. Se u_2 e u_4 estiverem em componentes separadas de $H_{2,4}$, podemos permutar as cores na componente em que está u_2, por exemplo. Essa coloração modificada ainda é própria de G' e poderíamos colorir v com a cor 2 obtendo, assim, uma 5-coloração própria para G.

O problema é que, tal como antes, talvez u_2 e u_4 estejam na mesma componente de $H_{2,4}$. Nesse caso, a simples permuta das cores 2 e 4 ainda não nos permite uma coloração própria para G. Se u_2 e u_4 estão na mesma componente, existe uma caminho Q de u_2 até u_4, onde os vértices estão coloridos com as cores 2 e 4. Da mesma forma existe um caminho P entre u_1 e u_3 com vértices coloridos com as cores 1 e 3. Logo, P e Q não têm vértices em comum. Notemos que o caminho P, acrescentado de v, nos dá um ciclo, com u_2 na região interior e u_4 na região exterior ao ciclo, como mostra a Figura 9. Assim, Q, ao passar de u_2, na região interior, para u_4, na região exterior, cruzaria com P. Mas isso não pode ocorrer, porque G é planar e, portanto, não possui cruzamento de arestas. Logo, u_2 e u_4 estão em componentes separadas de $H_{2,4}$ e, então, podemos recolorir a componente que contém u_2, por exemplo, disponibilizando a cor 2 para que possamos atribuí-la ao vértice v, encontrando, assim, uma 5-coloração própria para G, o que demonstra o teorema. □

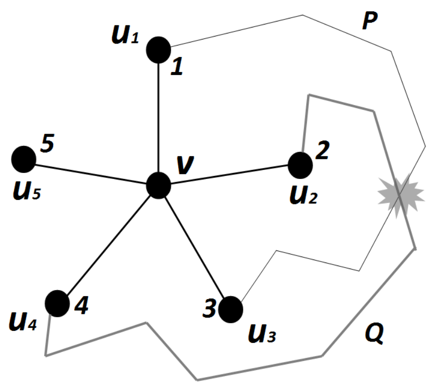


Figura 9: Se G é planar, P e Q não se cruzam.

6 Em Sala de Aula

Problemas que envolvem algum tipo de contagem, normalmente são muito explorados pela parte da matemática conhecida como Análise Combinatória. Por muito tempo, o estudo da

Combinatória fez parte, quase exclusivamente, do Ensino Médio. Porém, o assunto, se tiver a abordagem apropriada, pode perfeitamente ser trabalhado no Ensino Fundamental. De fato, tal prática é muito apoiada e reconhecida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [12] quando colocam a importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos relativos à combinatória, entre outros, para atender à demanda social que indica a necessidade de tratar desses conteúdos.

No Ensino Médio, a Combinatória é um tópico considerado díficil por muitos alunos e professores. A razão, segundo Carvalho [2], talvez se deve ao fato de que o assunto é ensinado com um enfoque muito forte na aplicação de fórmulas e repetição de problemas-modelo, sem estimular o pensamento sobre a situação proposta. Morgado [13] afirma que embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais para atacar certos tipos de problemas, quase sempre, o êxtito na solução de um problema combinatório exige engenhosidade e plena compreensão da situação. Enfatiza, ainda, que nisso está a beleza dessa parte da matemática, em que problemas de enunciado muito simples, podem ter resolução muito difícil, exigindo muita criatividade na solução.

Vimos que um simples problema de coloração de um mapa deu origem a muita pesquisa, culminando com a demonstração de um teorema dos mais famosos em Matemática. As histórias do Teorema das Quatro Cores e também do Teorema das Cinco Cores são muito interessantes. Sabemos que fala-se muito atualmente em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. Os PCNs [12] apontam que a História da Matemática, mediante um processo de transposição didática adequado, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. Problemas de ordem prática (repartição te terras, cálculo de dívidas), problemas relacionados a outras ciências (Astronomia, Física), ou problemas relativos a investigações internas à própria Matemática. Entretanto, muitas vezes, os problemas matemáticos não têm desempenhado seu verdadeiro papel nas aulas de Matemática. Um problema não deve ser um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é proposta e a estruturar a situação que lhe é apresentada.

Um problema matemático, de acordo com os PCNs [12], é uma situação que exige a realização de uma sequência de ações ou operações para atingir um resultado. Ou seja, a solução não está pronta, mas é possível construí-la. Para ser, de fato, um problema, a atividade proposta deve representar um real desafio ao aluno, proporcionando um contexto em que ele pode aprendeender conceitos, procedimentos e pensamento matemático.

Diante do foi discutido, apresentamos a seguir algumas sugestões de atividades selecionadas para o uso em aulas de Matemática do Ensino Fundamental. Atividades com a coloração de mapas e grafos podem ser muito motivadoras e proporcionar momentos de proveitoso aprendizado numa perspectiva de verdadeira resolução de problemas. O que se segue é apenas uma pequena amostra do que pode ser explorado, mas existe uma variedade enorme de material disponível ao uso do professor. As atividades foram selecionadas ou adaptadas de [2, 5, 6, 7, 11, 13], onde podem ser encontradas as soluções.

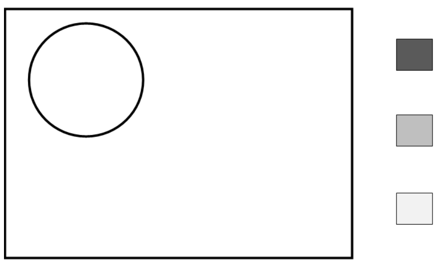
Nosso critério de seleção dos problemas foi primeiramente baseado no tema do exercício. Uma vez que nosso trabalho abordou principalmente a coloração de grafos, procuramos questões que envolviam algum tipo de coloração, seja de grafos ou outras figuras e estruturas. Em segundo lugar, optamos pela possibilidade de utilizar os problemas de coloração com aplicação no Ensino Fundamental. Sendo assim, era importante que as atividades escolhidas explorassem os conceitos primitivos da Análise Combinatória, como o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Acreditamos que o sucesso no aprendizado da Combinatória reside na plena compreensão do PFC, que, devido à sua simplicidade, pode e deve ser incluído no currículo de Matemática do Ensino Fundamental.

Os problemas iniciais estão elaborados com poucos elementos, favorecendo a construção de soluções intuitivas e de descrição e contagem direta de casos possíveis. A inclusão de novos fatores e restrições aumenta nos problemas finais, mas todos ainda ao alcance do nível de ensino selecionado para a aplicação das atividades.

6.1 Exemplos de Atividades

Apresentamos a seguir uma pequena coletânea de atividades que exploram a ideia de coloração de mapas, bandeiras ou outras figuras. Todas elas são de complexidade bem elementar, porém muito interessantes e apropriadas ao trabalho com alunos do Ensino Fundamental. Repetimos que as soluções para as atividades podem ser encontradas em [2, 5, 6, 7, 11, 13]

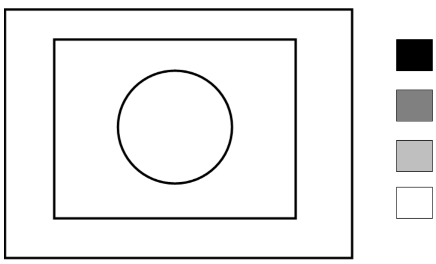
1 - Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas.



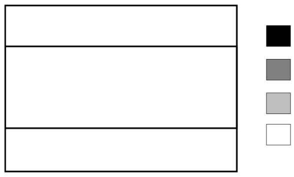
a) Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?

b) Quantas seriam as possíveis bandeiras se 4 cores estivessem disponíveis?

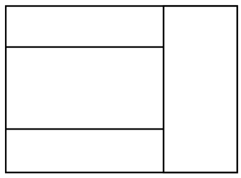
2 - Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?



3 - Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de maneira que faixas adjacentes tenham cores distintas?



4 - Dispomos de 6 cores para pintar a bandeira abaixo, sendo que regiões adjacentes nunca podem ter a mesma cor.



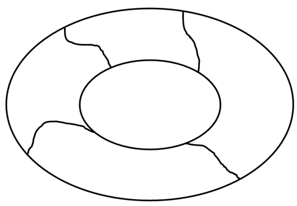
a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?

b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?

5 - *Tendo 4 cores disponíveis, de quantos modos se pode pintar uma bandeira com 3 listras, tendo listras adjacentes de cores distintas?* Um aluno deu a seguinte solução: "Primeiro, eu vou pintar as listras extremas; para cada uma, eu tenho 4 possibilidades de escolha. Depois, eu pinto a listra central; como ela tem que ter cor diferente das duas vizinhas, eu posso escolher sua cor de apenas 2 modos. Logo, o número total de modos de pintar a bandeira é 4x4x2=32". A solução está certa ou errada? Se estiver errada, onde está o erro?

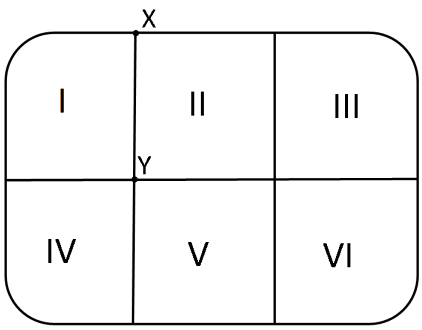
6 - Dispomos de 5 cores distintas. de quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma *linha* não podem receber a mesma cor?

7 - A figura mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarelo, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



a) 12
b)6
c)10
d)24
e)120

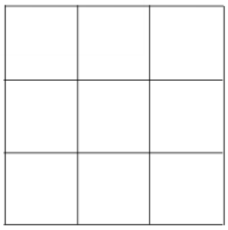
8 - No mapa da figura, a linha XY é uma das fronteiras. Países como I e II têm fronteira comum. O ponto Y não é considerado fronteira, ou seja, países como I e V não têm fronteira comum. Você deve colorir o mapa fazendo países de fronteira comum terem cores diferentes.



a) Qual é o número mínimo de cores para colorir o mapa? Mostre como colorí-lo.

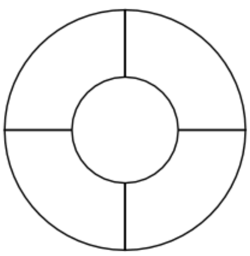
b) Desenhe outro mapa de 6 países, que precise de pelo menos 4 cores para ser pintado. Mostre como colorí-lo com cores A, B, C e D.

9 - Para cada item abaixo, reproduza uma figura como a que é mostrada e tente colori-la de maneira que quadradinhos vizinhos nunca tenham a mesma cor.

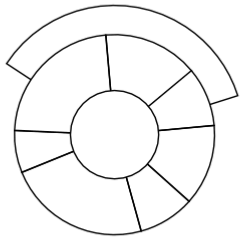


a) Use 9 cores diferentes.
b) Use 8 cores diferentes.
c) Use 6 cores diferentes.
d) Use 4 cores diferentes.
e) É possível usar menos cores? Tente usar 3.
f) Será que consegue colorir usando apenas 2?

10 -Suponha agora que, para colorir a figura abaixo, estivessem disponíveis apenas as cores: *verde, amarelo, vermelho e roxo*. Quantas figuras diferentes seria possível obter, não sendo permitido deixar regiões em branco?

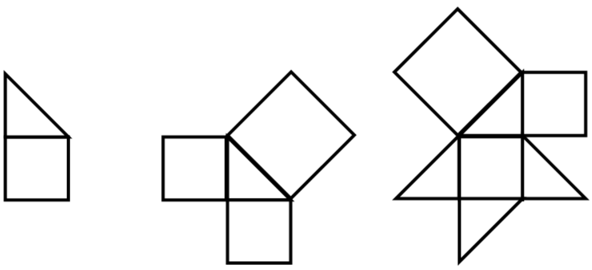


11 - Tente colorir a figura abaixo usando o número mínimo de cores.



12 - O famoso Teorema das Quatro Cores nos garante que é sempre possível colorir uma mapa usando, no máximo, 4 cores. Às vezes, não é tão simples encontrar a coloração correta. Tente utilizar 4 cores para o mapa abaixo, sem que países vizinhos tenham a mesma cor.

13 - João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de mode que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar cada figura abaixo.



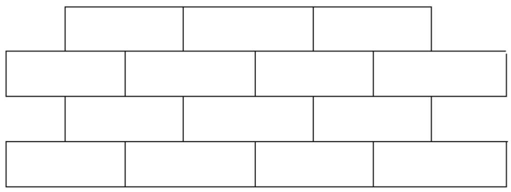
14 - De quantas formas é possível colorir as 6 faces de um cubo de preto ou branco? Duas colorações são iguais se é possível obter uma a partir da outra por uma rotação.

15 - As nove casas de um tabuleiro 3x3 devem ser pintadas de forma que em cada coluna, cada linha e cada uma das diagonais não haja duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

16 - Um muro deve ser contruído, conforme a figura, com 14 tijolos coloridos, disponíveis em amarelo, azul e vermelho, cujos preçoes estão dados na tabela. Se dois tijolos quaisquer que se toquem devem ter cores diferentes, qual é o menor valor que se resgatará na compra desses 14 tijolos?

Tijolo	R $
Amarelo	6
Azul	7
Vermelho	8



7 Conclusões

Os Grafos constituem uma fonte rica e inesgotável de problemas, na maior parte dos casos, com enunciados simples, mas que escondem elaborada estrutura matemática. Neste trabalho abordamos apenas alguns conceitos da Teoria dos Grafos e demonstramos um teorema importante e muito interessante. Há muitos outros. Os avanços desse ramo da Matemática têm sido surpreendentes e há vasto material disponível para estudo e pesquisa. Vimos também que o estudo dos grafos, em especial, a parte de coloração, pode ser muito utilizado para o desenvolvimento das ideias básicas da Análise Combinatória no Ensino Fundamental.

Sabemos que colorir uma mapa, em geral, não seria a primeira ideia que as pessoas teriam de atividade para uma aula de Matemática. Entretanto, vimos que é possível o desevolvimento de muitas habilidades matemáticas utilizando-se de atividades que envolvem algum tipo de coloração de figuras ou estruturas quaisquer. Acreditamos que o professor, com um pouco de criatividade, pode explorar as muitas possibilidades de abordagens que essas atividades têm a oferecer, especialmente no Ensino Fundamental. O aspecto quase lúdico dos grafos pode ser uma grande porta para que a Matemática Discreta possa se fazer mais presente nos currículos da Matemática básica brasileira.

8 Agradecimento

Agradeço à minha família, amigos e alunos pelas palavras de apoio e incentivo que se fizeram necessárias, muitas vezes, durante esses dois anos. Também sou grato à equipe de professores do DeFiM/CAP-UFSJ que acreditaram no programa PROFMAT, em especial à coordenadora Dra. Mariana Garabini pela dedicação, competência e amizade. Aos companheiros do PROFMAT-2012/2013, que sempre foram dispostos a ajudar quando surgiam as dificuldades. Por fim, ao professor Dr. Alexandre Celestino pela valiosa e paciente orientação na elaboração deste trabalho.

Referências

[1] Boyer, C. B.; *História da Matemática.*, Edgard Blücher, São Paulo, 2010.

[2] Carvalho, P. C. P.; *Métodos de Contagem e Probabilidade*, vol. 2, Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007.

[3] Fournier, J. C.; *Demonstration simple du théoreme de Kuratowski et de sa dorme duale*, Discrete Mathematics, 31 (1980), 329-332.

[4] Gullberg, J.; *Mathematics: From the Birth of Numbers*, W.W. Norton and Company, 1997.

[5] IMPA/OBMEP; *Banco de Questões 2010*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[6] IMPA/OBMEP; *Banco de Questões 2011*, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[7] IMPA/OBMEP; *Banco de Questões 2012*, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[8] Jurkiewicz, S.; *Grafos: Uma Introdução.*, Vol. 6, Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007.

[9] Lima, E. L.;*Matemática e Ensino.*, 3ª ed., Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2007.

[10] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C.; *Temas e Problemas.*, 3ª ed., Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[11] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C.; *A Matemática do Ensino médio.*,Vol. 2, 6ª ed., Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[12] Ministério da Educação; *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*, Secretaria da Educação Fundamental, Brasília, 2001.

[13] Morgado, A. C, Pitombeira, J. B., Carvalho, P. C. P., Fernandez, P.; *Análise Combinatória e Probabilidade.*, 9ª ed., Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[14] Santos, J. P. O., Melo, M. P., Murari, I. T. C; *Introdução à Análise Combinatória*, Editora da Unicamp, Campinas, 1995.

[15] Scheinerman, E. R.; *Matemática Discreta.*, Thomson, São Paulo, 2006.

[16] Struik, D. J; *Uma História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa 1997.

[17] Tucker, A.; *Applied Combinatorics*, John Wiley and Sons, 2ª ed, Nova Yorque, 1984.