

## Geometria Fractal e Outros Tópicos Relacionados: novos conteúdos e atividades a serem explorados na Educação Básica

Emerson Rodrigues Andrade<sup>1</sup>  
Telles Timóteo da Silva<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste artigo apresentamos a Geometria Fractal com o objetivo de auxiliar o professor da Educação Básica na introdução do tema e conseqüentemente despertar um maior interesse e exploração em sala de aula deste conteúdo que apresenta um rico potencial no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. O trabalho trata também de outros tópicos relacionados como bases numéricas e frações contínuas que podem, inclusive, ser explorados no ensino de matemática de forma independente da geometria fractal.

**Palavras-chave:** Geometria Fractal. Fractais Clássicos. Dimensão Fractal. Auto-similaridade.

### 1 Introdução

A Geometria Fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e o comportamento dos *fractais* (objetos geométricos irregulares e fragmentados [7]). Na matemática da educação básica costuma-se trabalhar com os alunos a Geometria Euclidiana, onde se estuda as figuras mais simples, como retas, círculos, quadrados, cones, etc. Calculamos volumes, áreas, perímetros e, assim, trabalha-se em duas e três dimensões. Mas em muitos fenômenos e formas da natureza não podemos utilizar a geometria tradicional, precisando para tanto de uma teoria especial para ser explicada. É aqui que entra a geometria fractal, que foi criada nos anos 70 do séc. XX, pela mão de Benoit Mandelbrot. Surgiu como uma intenção de descrever diversos fenômenos na natureza. Segundo Mandelbrot [7]

As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, a casca das árvores não é lisa nem os relâmpagos viajam em linha reta (MANDELROT, B., 1983, p.1, tradução nossa).

---

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2012  
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ - Campus Alto Paraopeba  
E-mail: emersomat@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ  
E-mail: timoteo@ufs.edu.br

Na geometria euclidiana os objetos geométricos possuem dimensão topológica inteira (por exemplo: o ponto, a reta, um quadrado e um cubo possuem dimensão respectivamente 0, 1, 2 e 3). A geometria fractal se diferencia da geometria euclidiana por trabalhar com objetos que, usualmente, possuem *dimensão* maior do que a dimensão topológica *esperada*. Os fractais, diferentemente dos objetos da geometria euclidiana, apresentam-se como figuras irregulares em todas as escalas e possuem sempre algum tipo de auto-similaridade.

Em diversos materiais escritos para o ensino de Matemática na educação básica, especificamente na parte fractais, observa-se uma deficiência na exploração da geometria fractal. Ela é apresentada através de um texto complementar, tratada como uma curiosidade ou utilizada em algumas obras apenas para construção de alguns fractais. Como exemplos podemos citar os livros: “Matemática: jogos e conceitos, 9º ano” [3] que apresenta um texto sobre formas fractais e situações para pensar, construir e resolver; a coleção “Matemática: ensino médio” [9, 10] que apresenta os fractais dentro do conteúdo de Sequências e Progressões no volume 1 e um texto que retrata duas maneiras de descrever o mundo, através da geometria euclidiana e a dos fractais no volume 2; e o livro “Novo Olhar: matemática” [2] que apresenta, dentro do conteúdo de conjuntos, um texto sobre o Matemático Georg Cantor e o notável avanço dos fractais.

Percebe-se que a geometria fractal permite a interação de diversos temas da matemática e de outras áreas. Quando incluída no ensino básico, permite aos alunos desenvolverem o espírito experimental de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais e estabelecer modelos matemáticos para auxiliar no estudo de fenômenos naturais.

O presente artigo visa a contribuir para a apresentação da Geometria Fractal de forma interessante, aprofundando em certos aspectos da teoria e mostrando que certos aspectos relacionados aos fractais podem ser exercitados na Educação Básica. A estruturação do artigo é a seguinte:

Na seção 2 **Fractais Clássicos**, veremos os fractais clássicos retornando aos trabalhos de matemáticos do passado, como Georg Cantor, Helge Von Koch, Waclaw Sierpinski, David Hilbert, Guiseppe Peano. Encerramos a seção com o fractal de Mandelbrot pois as criações desses matemáticos citados anteriormente influenciaram o conceito de Mandelbrot de uma nova geometria, entretanto eles não pensavam que seus estudos serviriam como passos conceituais em direção a uma nova percepção ou de uma nova geometria da natureza. Mandelbrot ao definir os fractais se apoiou muito em matemáticos, cientistas, que já haviam se dedicado a este estudo sistemático dos fractais, mas não chegaram a ter uma conclusão exata dos seus estudos.

Na seção 3 **Fundamentos Matemáticos**, veremos algumas das principais características dos Fractais. Começamos com a subseção 3.1 Dimensão Fractal, vendo a idéia que foi introduzida por Carathéodory (1914) de definir medidas usando coberturas de conjuntos e que foi adotada por Hausdorff (1919) para definir a medida que leva seu nome *Medida de Hausdorff*. Na subseção 3.2 Auto-Similaridade começamos descrevendo uma construção geral para fractais, de que o conjunto de Cantor, a curva de von Koch e outros exemplos padrões são casos especiais. Muitos fractais são feitos de partes que são, de algum modo, similares ao conjunto. Por exemplo, o conhecido conjunto Cantor é a união de cópias similares de si mesmo, e a curva de von Koch é composta de quatro cópias similares. Mostraremos que o Conjunto de Cantor tem medida positiva e finita de dimensão  $\log 2 / \log 3$  e veremos também que usando a iteração de uma função, muitas vezes a dimensão de um conjunto invariante é relativamente fácil de calcular ou estimar em termos da definição de contração.

Na seção 4 aprofundaremos nosso conhecimento sobre o **Conjunto de Cantor**. Vamos analisar a representação ternária de seus elementos e com isso verificar sua não-enumerabilidade.

Na seção 5 **Outros Objetos Fractais e Aplicações**, trabalhamos uma variação do Conjunto de Cantor e utilizamos uma técnica que é muitas vezes útil para melhorar as estimativas de dimensão de conjuntos invariantes de transformações que não são estritamente similares. E encerramos a seção vendo algumas aplicações dos fractais na teoria dos números.

Finalmente na seção 6 **Propostas de Atividades em Sala de Aula**, apresentamos ao leitor algumas atividades relacionadas ao conteúdo deste trabalho que podem ser trabalhadas com os alunos da Educação Básica.

## 2 Fractais Clássicos

Os fractais apresentados nesta seção, podem ser encontrados em diversos textos. Veja-se por exemplo [1, 6].

### 2.1 Conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo, na Rússia, a 3 de março de 1845, e faleceu em Halle, Alemanha, a 6 de janeiro de 1918. Cantor dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente na parte que hoje é conhecida como Teoria dos Conjuntos. Ele foi o primeiro matemático a estudar, no final do século XIX, essa teoria.

O Conjunto de Cantor também conhecido como Poeira de Cantor é talvez o primeiro objeto reconhecido como fractal. Apesar de ter um visual diferente dos demais fractais, este conjunto desenvolvido por Cantor é de grande importância nos estudos dos fractais e dos Sistemas Dinâmicos.

#### 2.1.1 Construção do Conjunto de Cantor

Para a construção do Conjunto de Cantor ( $C$ ), seguiremos as seguintes etapas:

**Etapa 1:** Considere um intervalo fechado  $C_0 = [0, 1]$ , o qual iremos dividir em três intervalos congruentes e em seguida removemos o intervalo médio. Obtemos assim, dois intervalos fechados e disjuntos de comprimento  $1/3$  que formam o conjunto  $C_1$ ;

**Etapa 2:** Em seguida, dividimos cada um dos intervalos de  $C_1$  em três intervalos congruentes, retirando novamente o terço médio, obtemos assim 4 intervalos fechados e disjuntos de comprimento  $1/9$  que formam o conjunto  $C_2$ .

Repetindo esse procedimento infinitamente a cada um dos intervalos restantes, obtemos o conjunto dos pontos que sobraram que chamaremos de  $C$ . Veja na Figura 1 as primeiras etapas da construção de  $C$ .

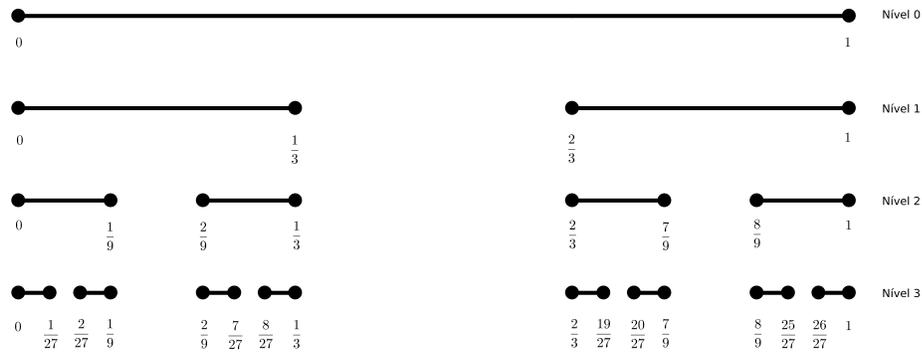


Figura 1: As três primeiras etapas da construção do conjunto de Cantor (Produzida pelo autor com auxílio do software “Geogebra”)

## 2.2 Curva de Peano

Nascido em 1858 na cidade de Cuneo, situada na Itália, Giuseppe Peano foi professor da academia militar de Turim, onde concebeu enormes contribuições à Matemática, principalmente relacionada às preocupações dos matemáticos da época. Autor de inúmeros livros e artigos, Peano foi o fundador da moderna lógica matemática e teoria dos conjuntos, para cujos conceitos e notações contribuiu de forma decisiva. Na obra “Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita” de 1889, Peano desenvolveu os famosos axiomas de Peano, considerados até hoje como a axiomatização padrão dos números naturais.

Tratando do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão em 1890, Peano publica a sua famosa curva, propondo o cobrimento de uma superfície plana quadrangular.

### 2.2.1 Construção da Curva de Peano

**Etapa 1:** Iniciamos com um segmento de reta, veja Figura 2;

**Etapa 2:** Substituímos por uma curva de nove segmentos, portanto em escala 1/3;

**Etapa 3:** Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, em escala 1/9. E assim sucessivamente.

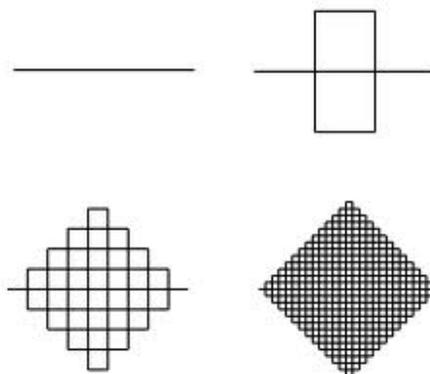


Figura 2: Construção da curva de Peano - Fonte: <http://www.avaad.ufsc.br/moodle/file.php/27/Fractal/peano.jpg>. Acesso: 20/04/2014.

Observa-se que na 2ª etapa, temos dois quadrados, enquanto na 3ª etapa apresenta 32

quadrados. Seguindo o processo, teremos na 4ª etapa, 338 quadrados. A Curva de Peano vai cobrindo, portanto, uma região quadrada, onde o segmento inicial representa a medida da diagonal. Considerando um segmento unitário, a área dessa região é dada por  $A = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$ .

### 2.3 Fractais de Koch

O matemático polônes Helge Von Koch foi o criador da curva que leva seu nome, Curva de Koch, que veio posteriormente a dar origem a “Ilha de Koch” que também é chamada de “Floco de Neve”.

A construção do fractal pelo qual chamamos de Curva de Koch se dá da seguinte maneira:

**Etapa 1:** Iniciamos desenhando um segmento de reta;

**Etapa 2:** Em seguida, dividimos este segmento em três partes iguais e retiramos a parte do meio;

**Etapa 3:** Construimos então na parte central retirada um triângulo equilátero e retiramos sua base.

Após esta etapa, repetimos o processo descrito acima nos quatro segmentos restantes; e finalmente, repetimos o processo indefinidamente. Veja a Figura 3.

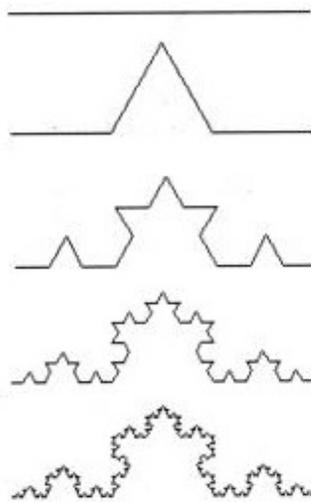


Figura 3: Construção da Curva de Koch - Fonte: [http://www.jayrus.art.br/Apostilas/7\\_UPE/fractais3.jpg](http://www.jayrus.art.br/Apostilas/7_UPE/fractais3.jpg). Acesso: 22/04/2014.

Já a curva “Floco de Neve” é criada utilizando o mesmo processo descrito acima para a construção da Curva de Koch, trocando apenas a figura inicial (segmento de reta) por um triângulo equilátero. Veja a Figura 4.

Apesar do nome Floco de Neve, devemos ressaltar que esta curva não é idêntica a um floco de neve, pois ela é perfeitamente simétrica. Entretanto, podemos considerá-la como um floco de neve “ideal”.

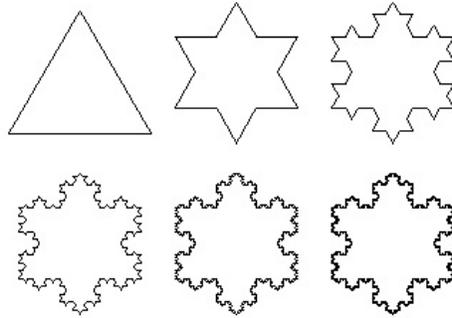


Figura 4: Construção da Ilha de Koch ou Floco de Neve - Fonte: <http://www.ceticismoaberto.com/wp-content/uploads/imagens4/fractalkoch.gif>. Acesso: 22/04/2014.

## 2.4 Curva de Hilbert

David Hilbert nascido em Königsberg no ano de 1862 foi um dos mais notáveis matemáticos. Os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual. Hilbert é frequentemente considerado como um dos maiores matemáticos do século XX, no mesmo nível de Henri Poincaré. Devemos a ele principalmente a lista de 23 problemas, alguns dos quais não foram resolvidos até hoje, apresentada em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris.

Em 1891, Hilbert torna público a sua curva de cobertura da superfície de um quadrado, apresentada preliminarmente num encontro em Bremen.

### 2.4.1 Construção da Curva de Hilbert

**Etapa 1:** Considere um quadrado e divida-o em quatro quadrados. Em seguida traçamos a curva composta por 3 segmentos consecutivos com extremos nos seus pontos centrais;

**Etapa 2:** Substitua cada quadrado por novos 4 quadrados com a mesma construção da curva da etapa 1, conectando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem dos anteriores, e proceder assim sucessivamente. Ver Figuras 5 e 6.

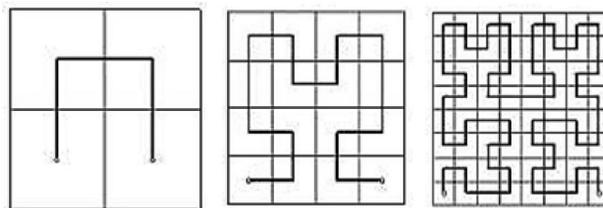


Figura 5: As três primeiras etapas da Curva de Hilbert - Fonte: <http://www.ecured.cu/images/1/13/24-Hilbert.jpg>. Acesso: 22/04/2014.

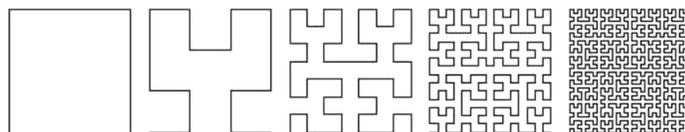


Figura 6: Etapas da Curva de Hilbert - Fonte: <http://www2.ic.uff.br/~aconci/peano.jpg>. Acesso: 22/04/2014.

## 2.5 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, teve grande reputação, principalmente na década 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter seu nome. Em 1916 Sierpinski apresentou alguns dos famosos “monstros” de seu trabalho, a curva de Sierpinski, o triângulo de Sierpinski e o tapete de Sierpinski. Aqui daremos ênfase à construção do triângulo de Sierpinski.

### 2.5.1 Construção do Triângulo de Sierpinski

Iniciamos com um triângulo equilátero no plano, aplicando o seguinte esquema repetitivo de operações:

**Etapa 1:** Marque os pontos médios dos três lados;

**Etapa 2:** Em conjunto com os vértices do triângulo inicial, estes pontos definem quatro novos triângulos iguais, dos quais eliminamos o triângulo central.

Portanto, após o 1º passo, temos três triângulos iguais com lados iguais à metade do lado do triângulo inicial; repetindo o processo, após o 2º passo temos nove triângulos iguais com lados de  $(1/4)$  do triângulo original e assim indefinidamente. Ver Figura 7.

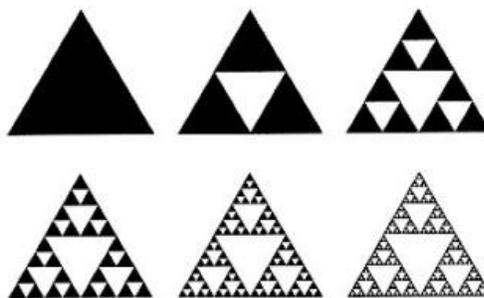


Figura 7: Os cinco primeiros passos na construção do Triângulo de Sierpinski - Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/~visao/2000/fractais/image024.jpg>. Acesso: 22/04/2014.

## 2.6 Conjunto de Mandelbrot

Benoit Mandelbrot (1924-2010) ficou conhecido por desenvolver uma “teoria da rugosidade” na natureza e no campo da geometria fractal. É considerado por muitos o pai da geometria fractal.

O conjunto de Mandelbrot é um dos mais famosos fractais, formado por intermináveis formas. Ele tem grande importância pois caracteriza todos os conjuntos de Julia de funções

quadráticas [4]. Sua construção<sup>3</sup> pode ser feita a partir do sistema de duas equações

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \quad (1)$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b \quad (2)$$

onde para cada par  $a$  e  $b$  são obtidos os valores limites de  $x_n$  e  $y_n$ . O algoritmo a seguir mostra como construir o fractal.

### 2.6.1 Construção do Fractal de Mandelbrot

Utilizaremos as equações (1) e (2) citadas anteriormente para a construção:

- (i) centrado na origem do plano cartesiano  $(x, y)$  desenhe um círculo de raio 2;
- (ii) tome  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ ;
- (iii) escolha um valor para  $a$  e um valor para  $b$ ;
- (iv) calcule os valores de  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{100}, y_{100}$ ;
- (v) se o ponto  $(x_{100}, y_{100})$  estiver dentro do círculo, pinte  $(a, b)$  de preto, caso contrário, deixe-o inalterado;
- (vi) repita o processo do passo (ii) ao (vi).

O Fractal de Mandelbrot é o conjunto dos pontos  $(a, b)$  pintados de preto. A Figura 8 ilustra algumas das regiões que formam este fractal.

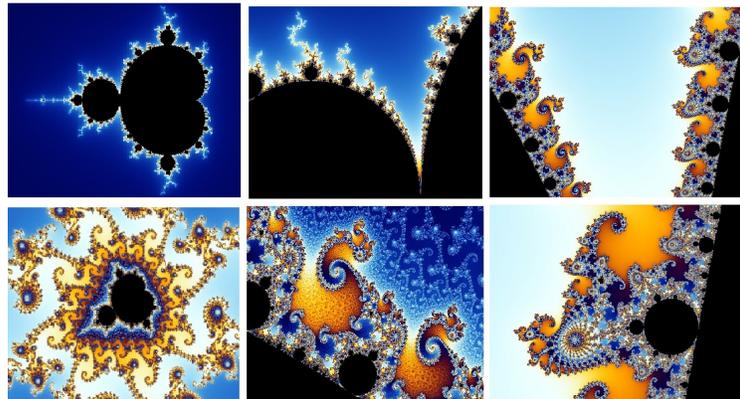


Figura 8: Regiões do fractal de Mandelbrot - Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Mandel\\_zoom\\_08\\_satellite\\_antenna.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_08_satellite_antenna.jpg). Acesso: 22/04/2014.

## 3 Fundamentos Matemáticos

Uma das principais características dos fractais é sua dimensão fracionária. Nesta seção apresentamos alguns fundamentos matemáticos e propriedades relacionadas à noção de dimensão. A referência primordial para esta seção são os capítulos 2, 3 e 9 de *Fractal Geometry*, K. Falconer [5], e o leitor deve se remeter a ela para aprofundar seu estudo e apreender outras características matemáticas de fractais.

<sup>3</sup>Veja o Apêndice 9.1 para mais detalhes sobre o Fractal de Mandelbrot.

### 3.1 Dimensão Fractal

Da variedade de “Dimensões Fractais” em uso, a mais antiga e provavelmente a mais importante é a definição de Hausdorff, baseado na construção de Carathéodory. A dimensão de Hausdorff tem a vantagem sobre a dimensão Box, a ser vista posteriormente, por estar definida para qualquer conjunto, limitado ou não, e de ser matematicamente conveniente, por se basear em medidas que são relativamente fáceis de manipular.

#### 3.1.1 A Medida de Hausdorff

Começaremos introduzindo o conceito de  $\delta$ -cobertura.

Seja  $U$  um subconjunto qualquer não vazio de um espaço euclidiano. Definimos o *diâmetro* de  $U$  como  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ , ou seja, o diâmetro de  $U$  é definido como a maior distância entre qualquer par de pontos em  $U$ .

**Definição 3.1** Uma  $\delta$ -cobertura de um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ , é uma coleção contável (finita ou enumerável) de subconjuntos,  $\{U_i\}$ , de  $\mathbb{R}^n$ , com diâmetro no máximo  $\delta$ , que cobrem  $F$ , i.e.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  com  $0 < |U_i| \leq \delta$  para cada  $i$ .

Seja  $F$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $s \geq 0$ . Para qualquer  $\delta > 0$ , definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F. \right\} \quad (3)$$

Assim, tomamos todas as coberturas de  $F$  por conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  e tiramos o ínfimo da soma das potências (de ordem  $s$ ) dos diâmetros. Quando  $\delta$  decresce, o ínfimo  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  aumenta e então se aproxima de um limite quando  $\delta \rightarrow 0$ . Escrevemos então

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (4)$$

Ocorre sempre a existência deste limite para qualquer subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , embora o valor do limite seja usualmente 0 ou  $\infty$ .  $\mathcal{H}^s(F)$  é chamada de a *medida de Hausdorff  $s$ -dimensional* de  $F$ .

Pode-se mostrar que  $\mathcal{H}^s(F)$  é uma medida, satisfazendo

- $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ ;
- se  $E \subset F$  então  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ ;
- $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$ , para qualquer coleção enumerável de conjuntos  $\{F_i\}$ , verificando-se a igualdade se os  $F_i$  forem conjuntos disjuntos.

Os conceitos familiares de comprimento, área e volume são generalizados pelas medidas de Hausdorff, ou seja, as medidas de Hausdorff generalizam as medidas de Lebesgue.

### Propriedades da medida de Hausdorff s-dimensional

**Proposição 3.2 (Propriedade de escala)** Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ , então  $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$  onde  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ , i.e. o conjunto  $F$  multiplicado por um fator  $\lambda$ .  
Vide prova em [5].

**Proposição 3.3** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \text{ para quaisquer } x, y \in F \quad (5)$$

com  $c$  e  $\alpha$  constantes positivas.

Então, para cada  $s$ ,

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F). \quad (6)$$

Vide prova em [5].

Chamamos *funções de Hölder de expoente  $\alpha$*  todas as funções que satisfazem a condição (5), o que as torna necessariamente contínuas.

No caso particular em que  $\alpha = 1$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \text{ para quaisquer } x, y \in F, \quad (7)$$

$f$  é chamada de função de Lipschitz e verifica-se

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F). \quad (8)$$

Como consequência do teorema do valor médio, qualquer função diferenciável com derivada limitada é necessariamente uma transformação de Lipschitz.

Se  $f$  satisfaz

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|,$$

então é chamada *isometria* e tem-se  $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$ .

#### 3.1.2 Dimensão de Hausdorff

Da equação (3) vê-se que, para qualquer conjunto  $F$  e qualquer  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  é não-crescente com  $s$ . Então por (4),  $\mathcal{H}^s(F)$  também é não-crescente com  $s$ . Mas, temos que, se  $t > s$  e  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então  $|U_i| < \delta$  e

$$\sum_i \left( \frac{|U_i|}{\delta} \right)^t \leq \sum_i \left( \frac{|U_i|}{\delta} \right)^s \Rightarrow \sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$

Tomando os ínfimos (sobre as  $\delta$ -coberturas), obtemos  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Quando  $\delta \rightarrow 0$ , temos dois casos:

**Caso 1:** se  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , então  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  para  $t > s$ ;

**Caso 2:** se  $\mathcal{H}^t(F) > 0$ , não podemos ter  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , logo  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ .

Então existe um valor crítico de  $s$  para o qual  $\mathcal{H}^s(F)$  “pula” de  $\infty$  para 0. Este valor crítico é chamado de *Dimensão de Hausdorff* de  $F$ , e representamos por  $\dim_{\mathcal{H}} F$ . A Figura 9 mostra um possível gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  em função de  $s$ .

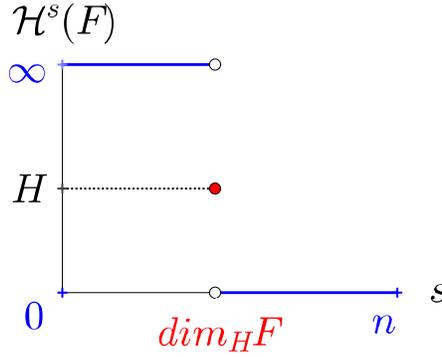


Figura 9: Representação gráfica de  $\mathcal{H}^s(F)$ , como função de  $s$ . (Produzida pelo autor com auxílio do software “Geogebra”.)

**Observação 3.4:** A dimensão de Hausdorff é também conhecida por dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Formalmente,

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

tendo-se

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se } s < \dim_{\mathcal{H}} F, \\ 0, & \text{se } s > \dim_{\mathcal{H}} F. \end{cases}$$

Se  $s = \dim_{\mathcal{H}} F$ , então  $\mathcal{H}^s(F)$  pode ser zero ou infinito, ou verificar  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

Note também que alguns subconjuntos  $F \subset \mathbb{R}^n$  podem ter medida de Lebesgue nula, mas dimensão de Hausdorff fracionária, satisfazendo

$$n - 1 < \dim_{\mathcal{H}} F < n.$$

Por exemplo, o conjunto de Cantor tem comprimento 0, mas dimensão de Hausdorff  $\frac{\log 2}{\log 3}$ , o triângulo de Sierpinski tem área 0, mas dimensão de Hausdorff  $\frac{\log 3}{\log 2}$ , como será visto na Seção 3.2.

**Proposição 3.5:** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e suponhamos que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfaz a condição de Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{para quaisquer } x, y \in F.$$

Então  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_{\mathcal{H}} F$ .

**Prova:** Se  $s > \dim_{\mathcal{H}} F$ , então pela Proposição 3.3,

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$$

o que implica que  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$  para qualquer  $s > \dim_{\mathcal{H}} F$ . ■

**Corolário 3.6:**

- (a) Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de Lipschitz (ver(7)), então  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \dim_{\mathcal{H}} F$ .
- (b) Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de bi-Lipschitz, isto é,  $c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$  ( $x, y \in F$ ) onde  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , então  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) = \dim_{\mathcal{H}} F$ .

**Prova:** A parte (a) decorre da Proposição 3.5, tomando  $\alpha = 1$ . Aplicando  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$  obtemos a outra inequação requerida para (b). ■

Este corolário revela uma propriedade fundamental da dimensão de Hausdorff: a dimensão de Hausdorff é invariante sob transformações bi-Lipschitz (por exemplo: translações, rotações, isometrias).

**Proposição 3.7:** Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  com  $\dim_{\mathcal{H}} F < 1$  é totalmente desconexo.

**Prova:** Sejam  $x, y \in F$ , com  $x \neq y$ . Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ , definida por  $f(z) = |z - x|$ . Como  $f$  não aumenta as distâncias, i.e.  $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$ , a alinea (a) do Corolário 3.6 garante-nos que  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \dim_{\mathcal{H}} F < 1$ . Assim,  $f(F)$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  com medida  $\mathcal{H}^1$  igual a zero, logo tem um complementar denso. Escolhendo  $r$ , tal que  $r \notin f(F)$  e  $0 < r < f(y)$  decorre que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

Tendo-se assim, que  $F$  está contido em dois conjuntos abertos disjuntos, com  $x$  em um deles e  $y$  no outro, tal que  $x$  e  $y$  estão em diferentes componentes conexas de  $F$ . ■

**3.1.3 Dimensão “Box-Counting”**

“Box-counting” ou Dimensão Box é um dos processos mais utilizados no cálculo de dimensão. Grande parte da sua popularidade é devido à sua relativa facilidade de cálculo matemático e estimativa empírica. Esta definição foi introduzida por Kolmogorov na década de 1930.

**Definição 3.8** Seja  $F$  um subconjunto, limitado e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $N_{\delta}(F)$ , o menor número de conjuntos, de diâmetro  $\delta$ , que são suficientes para cobrir  $F$ . As dimensões “box-counting” inferior e superior de  $F$  são dadas por

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \quad (9)$$

e

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \quad (10)$$

respectivamente. Se estes limites forem iguais, o valor comum chama-se dimensão “box-counting” ou “box dimension” de  $F$

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \quad (11)$$

Para determinar a dimensão “box” de um conjunto plano  $F$  podemos desenhar uma malha de quadrados ou caixas de lado  $\delta$  e contar o número  $N_\delta(F)$  dos pequenos quadrados de lado  $\delta$  que se sobrepõem ao conjunto  $F$  (daí o nome “box-counting” que traduzindo significa contagem de caixa). À medida que diminuimos  $\delta$ , fazendo-o tender a 0, podemos estimar  $\dim_B F$  calculando a razão entre o  $\log N_\delta(F)$  e  $-\log \delta$ .

Não podemos deixar de ressaltar a importância e compreender a relação entre as dimensões “box counting” e a dimensão de Hausdorff.

Seja  $F$  um conjunto limitado e não vazio. Citamos Falconer [5]:

Se  $F$  pode ser coberto por  $N_\delta(F)$  conjuntos de diâmetro  $\delta$ , então, a partir da definição (3) temos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s.$$

Se  $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$  então  $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$  para  $\delta$  suficientemente pequeno. Assim,  $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$  então

$$\dim_{\mathcal{H}} F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \quad (12)$$

para qualquer  $F \subset \mathbb{R}^n$  (FALCONER, K., 1990, p. 42–43, tradução nossa).

Apesar de muitos conjuntos “razoavelmente regulares” apresentarem as dimensões de Hausdorff e “box counting” iguais, há uma abundância de exemplos em que a desigualdade (12) é estrita. Na prática, a maioria das definições de dimensão, tomam valores entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão “box counting”.

Grosso modo, a definição (11) dá-nos que o menor número de conjuntos, de diâmetro  $\delta$ , suficientes para cobrir  $F$ ,  $N_\delta(F)$ , é aproximadamente da ordem  $\delta^{-s}$ , i.e.  $N_\delta(F) \simeq \delta^{-s}$ , onde  $s = \dim_B F$ .

Mais precisamente, nos diz que:

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty \quad \text{se } s < \dim_B F$$

e

$$N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0 \quad \text{se } s > \dim_B F.$$

Mas

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf \left\{ \sum_{i=1} \delta^s : \{U_i\} \text{ é uma (finita) } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

a qual pode ser comparada com

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

que ocorre nas definições de medida e de dimensão de Hausdorff. Ao calcular a dimensão de Hausdorff, atribuímos diferentes pesos  $|U_i|^s$  para a cobertura dos conjuntos  $U_i$ , enquanto no cálculo das dimensões “box-counting” utilizamos o mesmo peso,  $\delta^s$ , para qualquer conjunto da cobertura. A dimensão “box-counting” pode ser pensada como indicando a eficiência com a qual um conjunto pode ser coberto por pequenos conjuntos de mesmo tamanho, ao passo que a cobertura da dimensão de Hausdorff é feita por conjuntos de tamanho pequeno, mas talvez, com tamanhos bem variados. (...) Devido ao fato de serem determinadas por coberturas, formadas por conjuntos de mesmo tamanho, as dimensões “box-counting” são mais simples de serem calculadas do que a dimensão de Hausdorff. (FALCONER, K., 1990, p. 43, tradução nossa).

## 3.2 Auto-Similaridade

### 3.2.1 Sistemas de Funções Iteradas

Seja  $D$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ . Uma transformação de um conjunto nele mesmo  $S : D \rightarrow D$  é chamada *contração* em  $D$ , se existe um número  $c$  com  $0 < c < 1$  tal que  $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$  para todo  $x, y$  em  $D$ .

**Exemplo 3.9 - (Conjunto de Cantor)** As transformações  $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{x}{3} \\ S_2(x) &= \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

são contrações. De fato: Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que:

$$\begin{aligned} |S_1(x) - S_1(y)| &= \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| \\ &= \frac{1}{3}|x - y| \\ |S_2(x) - S_2(y)| &= \left| \left( \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right) - \left( \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \right) \right| \\ &= \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| \\ &= \frac{1}{3}|x - y| \end{aligned}$$

onde  $0 < c = \frac{1}{3} < 1$  para ambas as transformações.

Estas transformações estão relacionadas com o Conjunto de Cantor.

**Exemplo 3.10 - (Triângulo de Sierpinski)** As transformações  $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y), \\ T_2(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y) + \frac{1}{2}(1, 0), \\ T_3(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y) + \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

são contrações. De fato: Para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$  onde  $v = (x_1, y_1)$  e  $w = (x_2, y_2)$  temos que:

$$\begin{aligned} |T_1(v) - T_1(w)| &= \left| \frac{1}{2}(x_1, y_1) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \right| \cdot |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |v - w|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|T_2(v) - T_2(w)| &= \left| \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(1, 0) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) - \frac{1}{2}(1, 0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(x_1, y_1) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \right| \cdot |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |v - w|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|T_3(v) - T_3(w)| &= \left| \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) - \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}(x_1, y_1) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \right| \cdot |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |v - w|
\end{aligned}$$

onde  $0 < c = \frac{1}{2} < 1$  para todas as transformações.

Estas transformações estão relacionadas com o Triângulo de Sierpinski

**Exemplo 3.11 - (Curva de Koch)** As transformações relacionadas à curva de Koch são  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde

$$\begin{aligned}
K_1(x, y) &= \frac{1}{3}(x, y), \\
K_2(x, y) &= (x, y) + \left(\frac{1}{3}, 0\right), \\
K_3(x, y) &= (x, y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \\
K_4(x, y) &= (x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right), \\
K_5(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ com } \theta = \frac{\pi}{3} \\
K_6(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ com } \theta = \frac{-\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Destas,  $K_1$  é uma contração,  $K_2, K_3, e K_4$  são translações e  $K_5$  e  $K_6$  rotações.

Note que, por exemplo, as transformações compostas  $K_1 \circ K_4$  ou  $K_1 \circ K_6 \circ K_3$  são contrações.

Se vale a igualdade

$$|S(x) - S(y)| \doteq c|x - y|,$$

então  $S$  transforma o conjunto em outro geometricamente semelhante, e chamamos  $S$  de uma semelhança.

Dadas  $S_1, \dots, S_m$  contrações em  $D$ , chamamos de *invariante* um conjunto  $F \subset D$  tal que

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F). \quad (13)$$

Com frequência esses conjuntos invariantes são fractais. Por exemplo, se  $C$  é o conjunto Cantor, então  $C = S_1(C) \cup S_2(C)$ , para  $S_1$  e  $S_2$  definidas no Exemplo 3.9.

O próximo teorema mostra que famílias de contrações (ou esquemas de funções iteradas) definem unicamente conjuntos (não-vazios) invariantes compactos. Isso significa, por exemplo, que o conjunto terço médio de Cantor é um conjunto invariante compacto em decorrência das transformações  $S_1$  e  $S_2$  acima indicadas.

Para tanto precisamos definir uma distância entre subconjuntos de  $D$ . Seja  $\mathcal{L}$  a classe de todos subconjuntos compactos não-vazios de  $D$ . Chamamos de  $\delta$ -corpo paralelo de  $A \in \mathcal{L}$  o conjunto de pontos de  $A$  com distância menor que  $\delta$ , ou seja,

$$A_\delta \doteq \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ para algum } a \in A\}.$$

Definimos a distância  $d(A, B)$  entre os dois conjuntos  $A, B \in \mathcal{L}$  como o menor  $\delta$  tal que o  $\delta$ -corpo paralelo de  $A$  contém  $B$  e vice-versa. Sendo uma distância em  $\mathcal{L}$  chamada *métrica de Hausdorff*,  $d$  satisfaz:

- (i)  $d(A, B) \geq 0$ , com igualdade se e somente se  $A \doteq B$ ;
- (ii)  $d(A, B) = d(B, A)$ ; e
- (iii)  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  para qualquer  $A, B$  e  $C$  em  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 3.12** - *Sejam  $S_1, \dots, S_m$  contrações em  $D \subset \mathbb{R}^n$  tal que*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y| \quad (x, y \in D)$$

*com  $c_i < 1$  para cada  $i$ . Então existe um único conjunto  $F$  compacto não vazio que é invariante para os  $S_i$ 's, ou seja, o qual satisfaz*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

*Além disso, definimos a transformação  $S$  na classe  $\mathcal{L}$  de conjuntos compactos não vazios por*

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E). \quad (14)$$

*e escrevemos  $S^k$  para a  $k$ -ésima iterada de  $S$  dada por  $S^0(E) \doteq E$ ,  $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$  para  $K \geq 1$ , então*

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E) \quad (15)$$

*para algum conjunto  $E$  em  $\mathcal{L}$  tal que  $S_i(E) \subset E$  para cada  $i$ .*

**Prova:** Observe que conjuntos em  $\mathcal{L}$  são transformados por  $S$  em outros conjuntos de  $\mathcal{L}$ . Seja  $E$  algum conjunto em  $\mathcal{L}$  tal que  $S_i(E) \subset E$  para todo  $i$ ; por exemplo  $D \cap B_r(0)$  vai atender, desde que  $r$  seja suficientemente grande. Então  $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$  tal que  $S^k(E)$  é uma seqüência decrescente de conjuntos compactos não vazios, o qual necessariamente não tem interseção compacta vazia  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ . Como  $S^k(E)$  é uma seqüência decrescente, segue-se que  $S(F) = F$ , de modo que  $F$  é invariante. Para mostrar que o conjunto invariante é único, note que se  $A, B \in \mathcal{L}$  então

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(A), \bigcup_{i=1}^m S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

(pois se  $\delta$  é tal que  $\delta$ -corpo paralelo  $S_i(A)_\delta$  contém  $S_i(B)$  para cada  $i$ , então  $(\bigcup_{i=1}^m S_i(A))_\delta$  contém  $\bigcup_{i=1}^m S_i(B)$ ). Assim

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B). \quad (16)$$

Segue-se que se  $S(A) = A$  e  $S(B) = B$  são ambos conjuntos invariantes, então  $d(A, B) = 0$ , o que implica que  $A = B$ . ■

Falconer esclarece que

De fato, a seqüência das iterações  $S^k(E)$  converge para  $F$  para qualquer conjunto  $E$  em  $\mathcal{L}$ , no sentido de que  $d(S^k(E), F) \rightarrow 0$ . O resultado de (16) implica que  $d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq cd(E, F)$ , tal que  $d(S^k(E), F) \leq c^k d(E, F)$  onde  $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$ .

Assim o  $S^k(E)$ , cada vez mais proporciona boas aproximações para  $F$ . (Se  $F$  é um fractal estas aproximações são às vezes chamados de *pré-fractais* para  $F$ .) Para cada  $k$

$$S^k(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E) = \bigcup_{J_k} S_{i_1}(S_{i_2}(\dots(S_{i_k}(E))) \quad (17)$$

onde a união é sobre os conjuntos  $J_k$  de todos os  $k$ -termos da seqüência  $(i_1, \dots, i_k)$  com  $1 \leq i_j \leq m$  (...). Se  $S_i(E)$  está contido em  $E$  para cada  $i$  e  $x$  é um ponto de  $F$ , resulta de (15) que existe uma seqüência (não necessariamente única)  $(i_1, i_2, \dots)$  tal que  $x \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$  para todo  $k$ . Assim,

$$F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$$

onde

$$x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E). \quad (18)$$

Esta expressão para  $x_{i_1, i_2, \dots}$  é independente de  $E$  provando que  $S_{i_k}(E)$  está contida em  $E$  para todo  $i$ .

(...)

Esta teoria nos fornece dois métodos para desenho computacional de conjuntos invariantes no plano. Para o primeiro método, tome qualquer conjunto  $E$  inicial (como um

quadrado) e desenhar a  $k$ -ésima aproximação  $S^k(E)$  par  $F$  dada por (17) para um valor adequado de  $k$ . O conjunto  $S^k(E)$  é composto de  $m^k$  pequenos conjuntos - estes podem ser tirados na íntegra, ou um representante de cada ponto pode ser plotado. Se  $E$  pode ser escolhido como um segmento de linha, de tal maneira que  $S_1(E), \dots, S_m(E)$  se juntam até uma forma poligonal com pontos de extremidade da mesma maneira que aqueles de  $E$ , então a sequência de poligonais  $S^k(E)$  proporciona cada vez mais boas aproximações para a curva fractal  $F$ . (...)

Para o segundo método, tome  $x_0$  como qualquer ponto inicial, selecione uma contração  $S_i$ , a partir de  $S_1, \dots, S_m$  de forma aleatória, e seja  $x_1 = S_1(x_0)$ . Continuar desta maneira, escolher  $S_{i_k}$  de  $S_1, \dots, S_m$  aleatoriamente (com igual probabilidade) e fazendo  $x_k = S_{i_k}(x_{k-1})$  para  $k = 1, 2, \dots$ . Para um  $k$  suficiente grande, os pontos  $x_k$  estarão indistintamente perto de  $F$ , com  $x_k$  perto de  $S_{i_k} \circ \dots \circ S_{i_1}(F)$ , de modo a sequência  $\{x_k\}$  aparecerá distribuída aleatoriamente sobre  $F$ . A plotagem da sequência  $\{x_k\}$ , digamos, do centésimo termo em diante pode dar uma boa impressão de  $F$ . (FALCONER, K., 1990, p. 115 – 117, tradução nossa).

**Exemplo 3.13 - (Curva de Koch)** A curva de Koch é o subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  invariante sob as transformações  $K_1, \dots, K_6$  dadas no exemplo 3.11. Os pré-fractais  $S^n$  da curva de Koch são obtidos aplicando as transformações  $K_1, \dots, K_6$  sobre o conjunto  $S^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$  iterativamente, a fim de obter

$$S^n = \bigcup_{j=1}^4 S_{nj}$$

onde

$$\begin{aligned} S_{n1} &= K_1(S^{n-1}) \\ S_{n2} &= K_1(K_5(K_2(S^{n-1}))) \\ S_{n3} &= K_1(K_6(K_3(S^{n-1}))) \\ S_{n4} &= K_1(K_4(S^{n-1})). \end{aligned}$$

### 3.2.2 Dimensões de Conjuntos Auto-Similares

Um conjunto que é invariante sob uma coleção de similaridades é chamado de *conjunto auto-similar*, pois é uma união de um número de exemplares menores semelhantes de si mesmo. Alguns exemplos incluem o conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch. Os resultados abaixo, mostram que, sob certas condições, um conjunto auto-similar  $F$  tem dimensão de Hausdorff e “box-counting” iguais a um valor  $s$  e, ainda, que  $F$  tem medida  $\mathcal{H}^s$  positiva e finita.

Dizemos que  $S_i$  satisfaz a condição de conjunto aberto se existe um conjunto  $V$ , aberto, não-vazio e limitado tal que

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m S_i(V) \tag{19}$$

com a união disjunta.

**Teorema 3.14:** *Suponha que a condição de conjunto aberto (19) seja atendida para as similaridades  $S_i$  em  $\mathbb{R}^n$  com índices  $c_i (1 \leq i \leq m)$ . Se  $F$  é um conjunto invariante satisfazendo*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \quad (20)$$

então  $\dim_{\mathcal{H}} F = \dim_B F = s$ , onde  $s$  é dado por

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1. \quad (21)$$

Além disso, para este valor de  $s$ ,  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

Vide prova em [5].

**Exemplo 3.15 - Conjunto de Cantor** *O conjunto de Cantor  $C$  é construído a partir de um intervalo fechado  $C_0 = [0, 1]$ , o qual é dividido em três intervalos congruentes retirando-se o intervalo médio e repetindo esse procedimento infinitamente a cada um dos intervalos restantes; ver Figura 1. Então  $\dim_{\mathcal{H}} C = \dim_B C = \log 2 / \log 3$  e o conjunto de Cantor é totalmente desconexo.*

**Cálculo:** *O conjunto de Cantor  $C$  é um conjunto invariante definido pelas similaridades  $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ ;  $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  de razão  $1/3$  que mapeiam o intervalo  $C_0$  para os intervalos de  $C_1$ . A condição de conjunto aberto é satisfeita, tomando  $V$  como o interior de  $C_0$ . Assim pelo teorema 3.14 temos:*

$$\begin{aligned} \sum_1^2 \left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{3^s} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 3^s = 2 \\ &\Rightarrow s = \log_3 2 \\ &\Rightarrow s = \log 2 / \log 3. \end{aligned}$$

Logo,  $\dim_{\mathcal{H}} C = \dim_B C = \log 2 / \log 3$ .

Consequentemente, como  $\dim_{\mathcal{H}} C = \dim_B C \leq 1$  temos pela proposição 3.7 que o conjunto de Cantor é totalmente desconexo. ■

### Exemplo 3.16 - Variações do Conjunto de Cantor

(a) *Ao invés de retirarmos o terço central de  $[0, 1]$ , retiramos um intervalo central de tamanho  $L < 1$ . Assim na primeira iteração, o conjunto restante será a união de  $[0, \frac{1-L}{2}]$  e  $[\frac{1+L}{2}, 1]$ . Nas iterações seguintes, dos intervalos restantes, retiramos sempre um intervalo cuja razão de tamanho para o anterior é  $L$ .*

**Cálculo:** O conjunto novamente é invariante e a condição de conjunto aberto é atendida. Temos dois intervalos onde o fator de escala é  $\frac{1-L}{2}$ , então pelo Teorema 3.14 a dimensão é dada por:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{1-L}{2}\right)^d = 1 &\Rightarrow \left(\frac{1-L}{2}\right)^d = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow d = \log_{\frac{1-L}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow d = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1-L}{2}\right)} \\ &\Rightarrow d = \frac{\log 2^{-1}}{\log\left(\frac{2}{1-L}\right)^{-1}} \\ &\Rightarrow d = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2}{1-L}\right)} \end{aligned}$$

■

(b) À esquerda do intervalo  $[0,1]$  mantemos um intervalo de tamanho  $a$  e à direita, um de tamanho  $b$ , com  $0 < a, b < \frac{1}{2}$ . Nas iterações seguintes, para cada intervalo restante, à esquerda mantemos um intervalo cujo fator de escala é  $a$ , e à direita,  $b$ .

**Cálculo:** Temos um conjunto invariante que atende a condição de conjunto aberto e que possui dois intervalos, cujos fatores de escala são  $a$  e  $b$ . Pelo Teorema 3.14 a dimensão fractal  $d$  será dada pela equação  $a^d + b^d = 1$ . ■

**Exemplo 3.17 - Triângulo de Sierpinski** O triângulo de Sierpinski  $F$  é construído a partir de um triângulo equilátero, removendo repetidamente triângulos equiláteros invertidos; ver Figura 7. Então  $\dim_{\mathcal{H}} F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$ .

**Cálculo:** O triângulo  $F$  é um conjunto invariante definido em três óbvias similaridades de razão  $1/2$  que mapeiam o triângulo  $E_0$  para os triângulos de  $E_1$ . A condição de conjunto aberto está satisfeita, tendo  $V$  como interior de  $E_0$ . Assim, pelo teorema 3.14, temos:

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 &\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \\ &\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{2^s} = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow 2^s = 3 \\
&\Rightarrow s = \log_2 3 \\
&\Rightarrow s = \log 3 / \log 2.
\end{aligned}$$

Logo,  $\dim_{\mathcal{H}} F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$ . ■

**Exemplo 3.18 - Variações sobre a curva de Koch** Podemos produzir variações da Curva de Koch alterando o tamanho do segmento central. Por exemplo, seja  $C$  tal que  $0 < C < 1$ . Dividimos o intervalo  $[0, 1]$  em três subintervalos  $[0, \frac{1}{2}(1 - C)]$ ,  $[\frac{1}{2}(1 - C), \frac{1}{2}(1 + C)]$  e  $[\frac{1}{2}(1 + C), 1]$ . Construimos um triângulo equilátero sobre o intervalo central e em seguida retiramos a base. Para os 4 segmentos restantes repetimos esse procedimento, mantendo a proporção das medidas com referência ao primeiro passo.

**Cálculo:** A curva é invariante sob as similaridades que mapeiam o intervalo de unidade em cada um dos quatro intervalos. Então pelo teorema 3.14, a dimensão fractal é dada por:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \left[ \frac{1}{2}(1 - C) \right]^d + 2 \cdot C^d = 1 &\Rightarrow 2 \left\{ \left[ \frac{1}{2}(1 - C) \right]^d + C^d \right\} = 1 \\
&\Rightarrow \left[ \frac{1}{2}(1 - C) \right]^d + C^d = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

## 4 Conjunto de Cantor

Nesta seção vamos explorar especialmente algumas propriedades do Conjunto de Cantor.

### 4.1 Representação Ternária do Conjunto de Cantor

Na construção do conjunto de Cantor (veja 2.1.1) definimos:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right] \\
C_2 &= \left[ 0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[ \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[ \frac{8}{9}, 1 \right] \\
&\vdots \\
C_n &= \left[ 0, \frac{1}{3^n} \right] \cup \left[ \frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}} \right] \cup \left[ \frac{2}{3^{n-1}}, \frac{7}{3^n} \right] \cup \dots \cup \left[ \frac{3^n - 1}{3^n}, 1 \right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Continuando este processo iterativo definimos o conjunto de Cantor como sendo o conjunto dos pontos que “restam”, ou seja,

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Considere

$$\begin{aligned} E_1 &= C_0 - C_1 \\ E_2 &= C_1 - C_1 \\ &\vdots \\ E_n &= C_{n-1} - C_n \end{aligned}$$

Temos que  $E_1, E_2, \dots, E_n$  representam a reunião dos intervalos que retiramos em cada etapa de iteração, ou seja, na etapa 1 retiramos  $E_1$  de  $C_0$ , etapa 2 retiramos  $E_2$  de  $C_1$  e assim sucessivamente. Podemos representar o conjunto de Cantor como sendo:

$$C = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Podemos então observar que se um número  $x_1 \in E_1$ , então ele pode ser escrito como:

$$x_1 = \frac{1}{3} + x \text{ onde } 0 < x < \frac{1}{3}.$$

Se  $x_2 \in E_2$ , então ele pode ser escrito como:

$$x_2 = \frac{1}{9} + x \text{ ou } x_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + x \text{ onde } 0 < x < \frac{1}{9}.$$

Se  $x_3 \in E_3$ , então ele pode ser da forma:

$$x_3 = \frac{1}{27} + x \text{ ou } x_3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + x \text{ ou } x_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27} + x \text{ ou } x_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + x \text{ onde } 0 < x < \frac{1}{27}.$$

Repetindo o processo chegamos que:  $x_n = \frac{a_{n1}}{3} + \frac{a_{n2}}{3^2} + \frac{a_{n3}}{3^3} \dots + \frac{a_{nn-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} + x$  onde  $0 < x < \frac{1}{3^n}$  e  $a_{ni} = 0$  ou  $2$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Observe que enquanto a fração tem denominadores potências de 3, os numeradores podem ser apenas 0, 1 ou 2, sendo 1 na  $n$ -ésima etapa para a fração cujo denominador é  $3^n$ . Desta forma podemos escrever  $x_n$  como:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}}{3^i} + \frac{1}{3^n} + x \quad (22)$$

onde  $0 < x < \frac{1}{3^n}$  e  $a_{ni} = 0$  ou  $2$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Podemos concluir então que qualquer número pertencente a  $E_n$  pode ser escrito na forma (22), e também, qualquer número escrito na forma (22) pertencerá a  $E_n$ .

Assim dado um número entre 0 e 1 podemos descobrir através de sua representação ternária se ele pertence a algum  $E_n$  ou não (neste caso ele pertenceria ao conjunto de Cantor). Se sua representação ternária:

- apresentar somente os algarismos 0 e 2 ele não estará em  $E_n$ , portanto estará no conjunto de Cantor.
- apresentar o algarismo 1 ele pertencerá a  $E_n$ , conseqüentemente não estará no conjunto de Cantor.

Note que os extremos dos intervalos abertos retirados pertencem ao conjunto de Cantor. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= (0, 1)_3 = (0, 0222\dots)_3 \\ \frac{1}{9} &= (0, 02)_3 = (0, 02000\dots)_3 \\ \frac{7}{9} &= (0, 21)_3 = (0, 20222\dots)_3\end{aligned}$$

**Exemplo 4.1** Os números  $\frac{5}{6}$  e  $\frac{8}{9}$  pertencem ao conjunto de Cantor?

*Cálculo:* Suponha que a representação ternária de  $\frac{5}{6}$  seja

$$\frac{5}{6} = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \dots + \frac{b_n}{3^n} + \dots$$

Para obter  $b_1$ , podemos multiplicar ambos os membros da equação por 3 e obter

$$\frac{15}{6} = b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{3^2} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-1}} + \dots$$

Como 15 dividido por 6 dá quociente 2 e resto 3, logo  $b_1 = 2$ . Sobra

$$\frac{1}{2} = \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{3^2} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-1}} + \dots$$

Multiplicando novamente por 3 ambos os membros temos

$$\frac{3}{2} = b_2 + \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-2}} + \dots$$

Como 3 dividido por 2 dá quociente 1 e resto 1, logo  $b_2 = 1$ . Sobra

$$\frac{1}{2} = \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-2}} + \dots$$

que implicará que  $b_3 = 1$ . Repetindo-se o processo vê-se que  $b_4 = b_5 = b_6 = \dots b_n = 1$  para  $n > 4$ . Portanto a representação ternária de  $\frac{5}{6}$  é  $(0, 2111\dots)_3$ , logo concluímos que  $\frac{5}{6}$  não pertence ao conjunto de Cantor.

Já para  $\frac{8}{9}$  temos:

$$\frac{8}{9} = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \dots + \frac{b_n}{3^n} + \dots$$

Para obter  $b_1$ , podemos multiplicar ambos os membros da equação por 3 e obter:

$$\frac{24}{9} = b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{3^2} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-1}} + \dots$$

Como 24 dividido por 9 dá quociente 2 e resto 6, logo  $b_1 = 2$ . Sobra

$$\frac{6}{9} = \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{3^2} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-1}} + \dots$$

Multiplicando novamente por 3 ambos os membros temos

$$\frac{18}{9} = b_2 + \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_n}{3^{n-2}} + \dots$$

Como 18 dividido por 9 dá quociente 2 e resto 0, logo  $b_2 = 2$ . Então a representação ternária de  $\frac{8}{9}$  é  $(0, 22)_3$ , logo  $\frac{8}{9}$  pertence ao conjunto de Cantor.

## 4.2 Enumerabilidade do Conjunto de Cantor

**Definição 4.1** : Um conjunto  $A$  diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma correspondência um-a-um de seus elementos com os números naturais.

Seria então o conjunto de Cantor enumerável?

Vimos que cada elemento do conjunto  $c$  do conjunto de Cantor tem uma expansão ternária da forma  $c = (0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots)_3$  onde  $a_i = 0$  ou  $2$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Suponhamos que o conjunto de Cantor seja enumerável, isto é podemos estabelecer uma enumeração do conjunto de Cantor segundo a listagem a seguir:

$$\begin{aligned} c_1 &= (0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots)_3 \\ c_2 &= (0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots)_3 \\ c_3 &= (0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots)_3 \\ &\vdots \\ c_n &= (0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} a_{n4} \dots)_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde  $a_{ij} = 0$  ou  $2$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Dessa maneira, se um número pertencer ao conjunto de Cantor, ele deve constar dentre os listados acima. Porém, vamos construir um número que possui a seguinte representação ternária:

$$c = (0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots)_3$$

onde:

$$\begin{aligned} b_1 &\neq a_{11} \\ b_2 &\neq a_{22} \\ b_3 &\neq a_{33} \\ &\vdots \\ b_n &\neq a_{nn} \end{aligned}$$

com  $n = 1, 2, \dots$ . O número construído desta maneira, pertence ao conjunto de Cantor e não pode ser igual a  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ . Logo podemos concluir que a listagem acima não está completa e portanto o conjunto de Cantor não é enumerável.

## 5 Outros Objetos Fractais e Aplicações

Nesta seção apresentamos mais alguns exemplos de estruturas fractais como o conjunto de Cantor não-linear e um interessante resultado sobre a distribuição dos dígitos de números. A principal referência são os capítulos 9 e 10 de [5].

### 5.1 Variações do Conjunto de Cantor

O Teorema 3.14 pode ser adaptado para estimar a dimensão de um conjunto invariante  $F$  de uma coleção de contrações que não são similares.

**Proposição 5.1** *Sejam  $S_1, \dots, S_m$  contrações no subconjunto fechado  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y \in D)$$

onde  $c_i < 1$  para cada  $i$ . Então  $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$  e  $\overline{\dim}_B F \leq s$ , onde  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ .

Vide prova em [5].

Caso  $F$  seja totalmente desconexo e as componentes  $S_i(F)$  seja disjuntas, é possível obter um limite inferior para a dimensão de Hausdorff. Este é o caso se, por exemplo, para algum  $i$ ,  $S_i(E)$  estiver contido em  $E$ , para algum compacto  $E$ .

**Proposição 5.2** *Sejam  $S_1, \dots, S_m$  contrações no subconjunto fechado  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$b_i |x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \quad (x, y \in D) \quad (23)$$

com  $0 < b_i < 1$  para cada  $i$ . Suponha que  $F$  é invariante para o  $S_i$ ,

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F), \quad (24)$$

com esta união disjunta. Então  $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$  onde

$$\sum_{i=1}^m b_i^s = 1. \quad (25)$$

Vide prova no Apêndice.

**Exemplo 5.3 - Conjunto de Cantor “Não-Linear”:** *Seja  $D = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})]$  e seja  $S_1, S_2 : D \rightarrow D$  dado por  $S_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ,  $S_2(x) = 2 + \frac{1}{x}$ . Então  $0,44 < \dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \overline{\dim}_B F \leq \underline{\dim}_B F < 0,66$  onde  $F$  é um conjunto invariante para  $S_1$  e  $S_2$ .*

**Cálculo:** *Notamos que  $S_1(D) = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), \sqrt{3}]$  e  $S_2(D) = [\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})]$  para que possamos usar as proposições 5.1 e 5.2 para estimar  $\dim_{\mathcal{H}}(F)$ . Pelo teorema do valor médio, se  $x \neq y \in D$ , então  $(S_i(x) - S_i(y))/(x - y) = S'_i(c_i)$  para algum  $c_i \in D$ , para  $i = 1, 2$ .*

$$\inf_{x \in D} |S'_i(x)| \leq \frac{|(S_i(x) - S_i(y))|}{|x - y|} \leq \sup_{x \in D} |S'_i(x)|.$$

Uma vez que  $S'_1(x) = S'_2(x) = -1/x^2$  resulta que

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})|x - y| \leq |(S_i(x) - S_i(y))| \leq 2(2 - \sqrt{3})|x - y|$$

para ambos  $i = 1$  e  $i = 2$ . De acordo com as proposições 5.1 e 5.2 limites inferior e superior para as dimensões são dados pelas soluções de  $2(\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}))^s = 1$  e  $2(2(2 - \sqrt{3}))^s = 1$  que são  $s = \frac{\log 2}{\log 2(2 + \sqrt{3})} = 0,34$  e  $\frac{\log 2}{\log \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})} = 1,11$  respectivamente.

Para um subconjunto da reta real, um limite superior maior que 1 não é de muita utilidade. Uma maneira de obter melhores estimativas é notar que  $F$  também é o conjunto invariante dos quatro mapeamentos sobre  $[0, 1]$ .

$$S_i \circ S_j = i + \frac{1}{j + \frac{1}{x}} = i + \frac{x}{jx + 1} \quad (i, j = 1, 2).$$

Ao calcular as derivadas e usando o teorema do valor médio como antes, temos que

$$(S_i \circ S_j)'(x) = (jx + 1)^{-2}$$

assim

$$(j(1 + \sqrt{3} + 1)^{-2}|x - y| \leq |S_i \circ S_j(x) - S_i \circ S_j(y)| \leq (\frac{1}{2}j(1 + \sqrt{3}) + 1)^{-2}|x - y|.$$

Limite inferior e superior para as dimensões são agora dadas pelas soluções de  $2(2 + \sqrt{3})^{-2s} + 2(3 + 2\sqrt{3})^{-2s} = 1$  e  $2(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}))^{-2s} + 2(2 + \sqrt{3})^{-2s} = 1$ , dando  $0,44 < \dim_{\mathcal{H}}(F) < 0,66$  uma melhoria considerável nas estimativas anteriores. Na verdade, um valor que pode ser obtido olhando ainda as iteradas de ordem superior de  $S_i$ . ■

## 5.2 Exemplos de Teoria dos Números

### 5.2.1 Distribuição de Dígitos dos Números

Dado  $m \geq 2$ , todo número real possui uma expansão na base  $m$ . Considere  $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}$  como as proporções com que os dígitos  $0, 1, \dots, m - 1$  aparecem na expansão de um número, respectivamente. Seja  $F(p_0, p_1, \dots, p_{m-1})$  o conjunto de números  $x$  em  $[0, 1)$  cuja expansão na base  $m$  contém os dígitos  $0, 1, \dots, m - 1$  na proporção  $p_0, \dots, p_{m-1}$  respectivamente. Por exemplo, o conjunto  $F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  é formado pelos números que, quando expandidos na base 2, têm um terço de seus dígitos iguais a 0 e o restante 1.

**Exemplo 5.4** Os números  $\frac{6}{7}$  e  $\frac{3}{7}$  pertencem a  $F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

**Cálculo:** (a) Vamos encontrar a representação binária de  $\frac{6}{7}$

$$\frac{6}{7} = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots$$

Multiplicando por 2 temos:

$$\frac{12}{7} = b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-1}} + \dots$$

Dividindo 12 por 7 encontramos quociente 1 e resto 5, logo  $b_1 = 1$ . Resta

$$\frac{5}{7} = \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-1}} + \dots$$

Multiplicando por 2 temos

$$\frac{10}{7} = b_2 + \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-2}} + \dots$$

Dividindo 10 por 7 encontramos quociente 1 e resto 3, logo  $b_2 = 1$ . Resta

$$\frac{3}{7} = \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-2}} + \dots$$

Multiplicando por 2 temos

$$\frac{6}{7} = b_3 + \frac{b_4}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-3}} + \dots$$

Dividindo 6 por 7 temos quociente 0 e resto 6, logo  $b_3 = 0$ . Multiplicando por 2 novamente temos

$$\frac{12}{7} = b_4 + \frac{b_5}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-4}} + \dots$$

onde verificamos que  $b_4 = 1$  e o processo se torna periódico. Então  $\frac{6}{7} = (0, 110110110110\dots)_2 \in F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  pois possui dois terços da sua base 2 sendo 1 e o restante 0.

(b) Vamos encontrar agora a representação binária de  $\frac{3}{7}$

$$\frac{3}{7} = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots$$

Multiplicando por 2 temos

$$\frac{6}{7} = b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-1}} + \dots$$

Dividindo 6 por 7 encontramos quociente 0 e resto 6, logo  $b_1 = 0$ . Resta

$$\frac{6}{7} = \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-1}} + \dots$$

Multiplicando por 2 temos

$$\frac{12}{7} = b_2 + \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-2}} + \dots$$

Dividindo 12 por 7 encontramos quociente 1 e resto 5, logo  $b_2 = 1$ . Resta

$$\frac{5}{7} = \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-2}} + \dots$$

Multiplicando por 2 temos

$$\frac{10}{7} = b_3 + \frac{b_4}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-3}} + \dots$$

Dividindo 10 por 7 temos quociente 1 e resto 3, logo  $b_3 = 1$ . Resta

$$\frac{3}{7} = b_4 + \frac{b_5}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-4}} + \dots$$

O processo novamente se torna periódico. Então  $\frac{3}{7} = (0, 011011011011\dots)_2 \in F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  pois possui dois terços da sua base 2 sendo 1 e o restante 0. ■

Quase todos os números (no sentido de Lebesgue) são normais a todas as bases, isto quer dizer que eles têm expansões na base  $m$  contendo proporções iguais dos dígitos  $0, 1, \dots, m-1$  para todos  $m$ . Assim  $F(m^{-1}, \dots, m^{-1})$  tem medida de Lebesgue 1, e por conseguinte dimensão 1, para todo  $m$ . No entanto, nenhum exemplo específico de um número que é normal para todas as bases já foi encontrado (vide [5]).

A dimensão de Hausdorff descreve o tamanho dos conjuntos  $F(p_0, \dots, p_{m-1})$  quando os  $p_j$  não são todos iguais.

**Proposição 5.5** Com  $F = F(p_0, \dots, p_{m-1})$  como anteriormente,

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) = -\frac{1}{\log m} \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i.$$

Vide prova em [5].

**Exemplo 5.6** Tomemos os números do conjunto de Cantor  $C$  com expansão de base 3 nos quais os dígitos 0 e 2 aparecem na proporção 1/2. Então pela proposição 5.5 temos que:

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) = -\frac{1}{\log 3} \sum_{i=0}^2 \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

### 5.2.2 Frações Contínuas

Um número  $x \in \mathbb{R}$  não inteiro pode ser escrito como

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

onde  $a_0$  é um inteiro e  $x_1 > 1$ . Daí se  $x_1$  não é um inteiro, temos

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

com  $x_2 > 1$ , assim

$$x = a_0 + \frac{1}{\left(a_1 + \frac{1}{x_2}\right)}.$$

Podemos continuar este procedimento e obter

$$x = a_0 + 1/\left(a_1 + 1/\left(a_2 + 1/\left(\dots + 1/\left(a_{k-1} + 1/x_k\right)\right)\right)\right)$$

para cada  $k$ , desde que em nenhum momento  $x_k$  seja um número inteiro. A sequência de inteiros  $a_0, a_1, a_2, \dots$  são os quocientes parciais de  $x$ , e escrevemos

$$x = [a_0, a_1, a_2, a_3 \dots] = a_0 + 1/\left(a_1 + 1/\left(a_2 + 1/\left(a_3 + \dots\right)\right)\right)$$

para denotar a expansão em fração contínua de  $x$ . Um número é racional se, e somente se, tem expansão em frações contínuas finita. Caso contrário, os números racionais da forma

$$x_k = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$$

formam uma sequência de aproximações para  $x$ , e temos  $x_k \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 5.6** A representação contínua de  $\sqrt{2}$  é  $[1, 2, 2, 2, \dots]$

**Cálculo:** Temos que:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + 1 + (\sqrt{2} - 1)} \\
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}
 \end{aligned}$$

Repetindo esse processo infinitamente encontramos que  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$

**Exemplo 5.7** Mostre que  $[6, 1, 3, 2] = \frac{61}{9}$ .

**Cálculo:** Como a representação contínua é finita, temos que ela é a representação de um número racional.

$$\begin{aligned}
 x = [6, 1, 3, 2] &= 6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} \\
 &= 6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} \\
 &= 6 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} \\
 &= 6 + \frac{1}{\frac{9}{7}} \\
 &= 6 + \frac{7}{9} \\
 &= \frac{61}{9}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 5.8** Seja  $F$  o conjunto de números reais positivos  $x$  com expressões de frações parciais infinitas que têm todos os quocientes parciais iguais a 1 ou 2. Então  $F$  é um fractal com  $0,44 < \dim_{\mathcal{H}}(F) < 0,66$ .

**Prova:** É fácil ver que  $F$  é fechado e limitado. Além disso,  $x \in F$  precisamente quando  $x = 1 + 1/y$  ou  $x = 2 + 1/y$  com  $y \in F$ . Deixando  $S_1(x) = 1 + 1/x$  e  $S_2(x) = 2 + 1/x$ , resulta que  $F = S_1(F) \cup S_2(F)$ ; em outras palavras,  $F$  é invariante para o  $S_i$  como em (24). Na verdade  $F$  é apenas o conjunto analisado no exemplo 5.3 que se mostrou ter dimensão de Hausdorff entre 0,44 e 0,66. ■

## 6 Propostas de Atividades em Sala de Aula

A introdução de fractais no ensino básico propicia aos alunos o conhecimento de uma nova geometria diferente da euclidiana, além de satisfazer a curiosidade daqueles que já ouviram falar em fractais. É possível trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas. As seções 6.1 e 6.3 foram adaptadas de [1].

### 6.1 Medidas nos Fractais: contagem, perímetros e áreas.

Nas atividades a seguir iremos calcular algumas medidas que podem ser realizadas utilizando fractais e conceitos de limite de forma intuitiva com algumas definições usadas em Progressões Geométricas.

#### Atividade 1 *Explorando o floco de neve de Koch.*

Começaremos com as etapas iniciais da construção do floco de neve

**Etapa 1:** Considere um triângulo equilátero de lado de comprimento  $c$ .

**Etapa 2:** Cada lado do triângulo equilátero será dividido em três partes iguais, e a do meio será substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados. Então cada lado inicial do triângulo original darão origem a quatro segmentos.

**Etapa 3:** Repetimos o processo descrito acima nos quatro segmentos em cada lado do triângulo. E finalmente, repetimos o processo indefinidamente.

Observando as etapas da construção do floco de neve de Koch complete a tabela:

Etapa	Número de Segmentos	Comprimento do Segmento	Perímetro	Área
0	3	$c$	$3.c$	$\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$
1				
2				
3				
...	...	...	...	...
n				

Análise:

- O que podemos dizer do perímetro do floco de neve quando  $n \rightarrow \infty$ ?
- O que podemos dizer da área do floco de neve quando  $n \rightarrow \infty$ ?

Suponha agora que o comprimento  $c$  do lado do triângulo inicial tenha 1 centímetro, ou que o perímetro inicial seja 3 centímetros.

- Quantas iterações precisamos realizar para que o perímetro seja maior ou igual a 1 dm? E 1 m? E 10 m?
- O padrão observado no item (c) seria verdadeiro para outros perímetros?

#### Atividade 2 *Explorando o triângulo de Sierpinski.*

Vamos construir o triângulo de Sierpinski. Considere um triângulo equilátero de lado de comprimento  $c$  e área  $A$  e siga as seguintes instruções:

**Etapa 1:** una os pontos médios dos lados do triângulo e retire o triângulo médio (pintando-o).

**Etapa 2:** dos três triângulos não pintados, una os pontos médios dos seus lados e retire os triângulos médios.

**Etapa 3:** aplique o processo anterior a cada triângulo não pintado. Repita este processo até que não tenha espaço no triângulo para continuar.

Observando as etapas da construção do triângulo de Sierpinski complete a tabela:

Etapa	Número de Triângulos	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total	Área de cada triângulo	Área Total
0	1	$3.c$	$3.c$	A	A
1					
2					
3					
...	...	...	...	...	...
n					

Análise:

- (a) O que podemos dizer do perímetro do triângulo de Sierpinski quando  $n \rightarrow \infty$ ?  
 (b) O que podemos dizer da área do triângulo de Sierpinski quando  $n \rightarrow \infty$ ?

## 6.2 Noção Intuitiva de Dimensão.

**Atividade** *Quaisquer que sejam as divisões auto-similares em um conjunto existe uma relação entre a quantidade de peças geradas  $n$  e o fator de redução  $r$  que é dada por  $n = r^d \Rightarrow d = \frac{\log n}{\log r}$ . Veja alguns exemplos e complete as tabelas:*

Figura Geométrica	Peças Geradas $n$	Fator de redução $r$	Dimensão $d = \frac{\log n}{\log r}$
Segmento de Reta	2	2	$d = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$
Quadrado	4	2	$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$
Cubo			

Que tal tentar com objetos fractais ?

Fractal	Peças Geradas $n$	Fator de redução $r$	Dimensão Fractal $d = \frac{\log n}{\log r}$
Conjunto de Cantor	2	3	$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,361$
Curva de Koch	4	3	$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,262$
Curva de Peano			
Triângulo de Sierpinski			

## 6.3 Fractais e o Triângulo de Pascal

**Atividade** *Múltiplos de dois*

Consideremos o triângulo de Pascal (utilize a Figura 10). Destaque os múltiplos de dois. Essa configuração obtida é um fractal?

*Múltiplos de três*

Destaque agora os múltiplos de três no triângulo de Pascal. Essa configuração obtida é um fractal?

*Outros Múltiplos*

Que tal repetir o processo agora para os múltiplos de 4, 5, 6 e 7? Essas configurações obtidas seriam fractais?

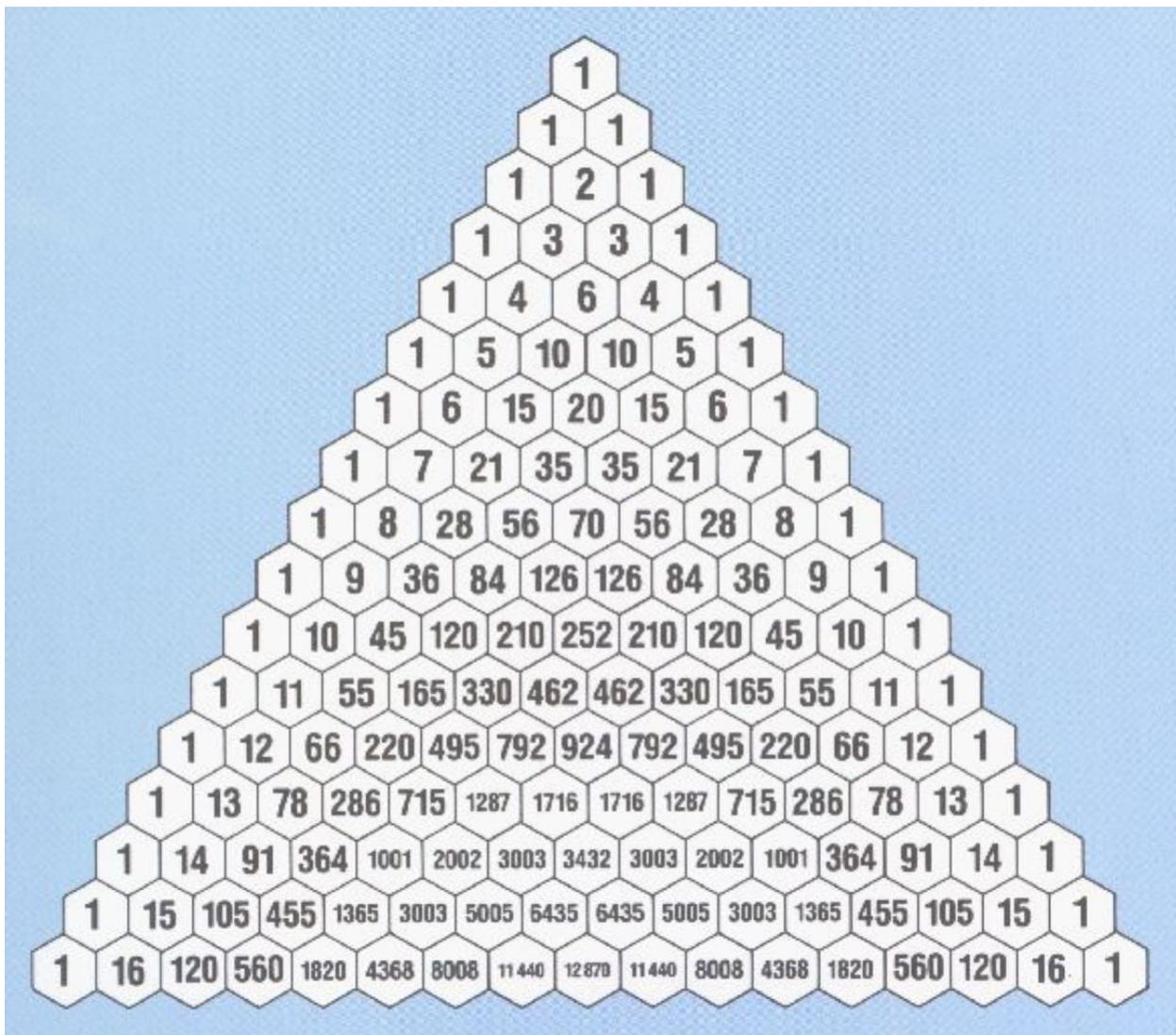


Figura 10: Triângulo de Pascal até linha 16. Fonte: <http://infinitoemais.blogspot.com.br/2014/02/a-beleza-do-triangulo-de-pascal.html>. Acesso:22/04/2014.

## 6.4 Mudança entre Bases Numéricas.

**Atividade:** *Mudança da base 10 para a base 2:*

- Número inteiro: transforme o número 248 da base 10 na base 2.*
- Número decimal: transforme o número 0,375 da base 10 na base 2.*

**Atividade:** *Mudança da base 2 para a base 10:*

(a) *Número inteiro: escreva o número  $(1011)_2$  na base 10.*

(b) *Número decimal: escreva o número  $(0,101)_2$  na base 10.*

**Atividade:** *Mudança da base 3 para a base 10:*

*Escreva os números  $(0,2111\dots)_3$  e  $(0,2020\dots)_3$  para a base 10.*

**Atividade:** *Representação ternária do Conjunto de Cantor*

*Represente os números  $\frac{9}{13}$  e  $\frac{11}{12}$  na base ternária e verifique se eles pertencem ao Conjunto de Cantor.*

## 6.5 Desenvolvimento de Números Reais em Frações Contínuas.

**Atividade:** Encontre a representação em frações contínuas de:

- (i)  $\frac{41}{9}$
- (ii)  $\sqrt{5}$

## 6.6 Novos Fractais

Além das atividades aqui propostas, é possível desenvolver atividades em que novos fractais são obtidos a partir de figuras geométricas bem conhecidas. Ver [8].

# 7 Considerações Finais

Neste artigo tivemos por objetivo auxiliar o professor da Educação Básica na introdução da Geometria Fractal e despertar uma maior interesse e exploração em sala de aula. Buscando alcançar esses objetivos, visamos uma contribuição para a apresentação da Geometria Fractal de forma interessante, exemplificando com os fractais clássicos, aprofundando em certos aspectos da teoria como a dimensão fractal e a auto-similaridade e explorando a aplicação e construção de fractais. Percebemos também, que dentro deste tema, podemos trabalhar vários componentes do currículo matemático do Ensino Básico, citando como exemplo: a semelhança de figuras, forma, dimensão, área, perímetro, volume, progressões geométricas, dentre outros. A geometria fractal nos permite não somente trabalhar com os conteúdos de modo tradicional como também desenvolver trabalhos com materiais concretos para a construção de fractais ou até mesmo utilizar recursos computacionais. Concluímos que a exploração da geometria fractal, deve ser incentivada no contexto de sala de aula, pois proporciona aos alunos a criação e elaboração de conteúdos a partir de uma visão diferente da tradicional.

# 8 Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado esta oportunidade, ter me guiado até aqui e por fazer com que mais esse sonho se realize. A todos professores que lecionaram no PROF-MAT 2012-2014 transmitindo seus conhecimentos e enriqueceram a minha formação. Em

especial ao meu orientador Professor Telles Timóteo da Silva pela competência, disponibilidade e pelo aprendizado que me proporcionou; a minha família pela torcida, incentivo e apoio; a minha noiva Aira pelo companheirismo e compreensão; aos meus colegas de sala, pelo convívio, grupo de estudo e momentos compartilhados. À coordenação nacional por proporcionar o aprimoramento da formação profissional dos professores da educação básica, à CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho e por fim, à todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

## 9 Apêndice

### 9.1 Fractal de Mandelbrot

O sistema de equações iteradas

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a \\y_{n+1} &= 2x_n y_n + b\end{aligned}$$

representa uma relação de recursão no plano complexo  $\mathbb{C}$  dada por

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{26}$$

onde  $z = x_n + iy_n$  e  $c = a + bi$ .

Dado  $w_0 \in \mathbb{C}$ , a órbita de  $w_0$  é o conjunto de pontos

$$\{w_0, \mathcal{O}_c(w_0), \mathcal{O}_c^2(w_0), \dots, \mathcal{O}_c^n(w_0), \dots\}$$

obtida pela aplicação repetida de (26), ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_c(w_0) &= w_0^2 + c \\ \mathcal{O}_c^2(w_0) &= \mathcal{O}_c(\mathcal{O}_c(w_0)) \\ \mathcal{O}_c^n(w_0) &= \mathcal{O}_c(\mathcal{O}_c^{n-1}(w_0)), \quad \forall n = 3, 4, \dots\end{aligned}$$

O fractal de Mandelbrot é o conjunto formado pelos pontos  $c$  cuja órbita não tende ao infinito. Isto é, para obter o fractal, apenas precisamos analisar as órbitas iniciadas na origem do plano complexo.

Além disso, precisamos estudar apenas os valores de  $c$  tais que  $|c| < 2$ . De fato, quando  $|c| > 2$ , a órbita de 0 imediatamente escapa ao infinito, pois escrevendo  $|c| = 2 + k$ , em que  $k > 0$ , se  $|z| > |c|$  então

$$|\mathcal{O}_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \geq |z|(k + 1),$$

o que implica, repetindo o raciocínio, que

$$|\mathcal{O}_c^n(z)| \geq |z|(1 + k)^n \rightarrow \infty.$$

Ou seja, se  $|z| \geq 2$ , então  $|\mathcal{O}_c^n(z)| \rightarrow \infty$ . Para mais detalhes, ver [4].

Portanto o algoritmo escrito na Seção 2.6 está justificado, pois apenas os pontos  $(a, b)$  dentro de um círculo de raio 2 necessitam serem avaliados.

## 9.2 Bases Numéricas

Seja  $B$  um número natural maior do que 2. A representação de um número real  $x$  na base  $B$ , representado por  $(x)_B$ , é feita determinando  $n$  números naturais  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e uma sequência infinita de números naturais  $b_{i \in \mathbb{N}}$  tais que  $0 \leq a_i < B$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $0 \leq b_i < B$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e

$$x = \sum_{i=0}^n a_i B^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i B^{-i}.$$

Denotamos

$$(x)_B = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots)_B.$$

### 9.2.1 Mudança de Base

Seja  $(c_n \dots c_1 c_0)_{10}$  a representação de um número real no sistema decimal. Para transformá-lo para a base  $B$ , temos que encontrar  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ , com  $0 \leq a_i < B$  tais que

$$\sum_{i=1}^n c_i 10^i = \sum_{i=0}^k a_i B^i = a_0 + B \sum_{i=1}^k a_i B^{i-1}$$

Assim, se dividirmos  $\sum_{i=1}^n c_i 10^i$  por  $B$  teremos o quociente  $\sum_{i=1}^k a_i B^{i-1}$  e o resto  $a_0$ .

Tomamos agora

$$\sum_{i=1}^k a_i B^{i-1} = a_1 + B \sum_{i=2}^k a_i B^{i-2}$$

ou seja, dividimos o quociente do passo anterior por  $B$ , obtendo o resto  $a_1$ . Repetimos este processo para obter  $a_2, \dots, a_k$ , encerrando quando o quociente for nulo.

Se tivermos o número  $(q)_{10} = (0, c_1 c_2 \dots c_n \dots)_{10}$ ,  $q < 1$ , para encontrar sua expressão na base  $B$ , escrevemos

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} a_i B^{-i}$$

e multiplicamos a expressão anterior por  $B$ :

$$Bq = a_1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i B^{-i+1}.$$

Como  $0 \leq a_i < B$ , então  $\sum_{i=2}^{\infty} a_i B^{-i+1} < 1$ , logo  $a_1$  é a parte inteira de  $Bq$ . Seja

$$q_2 = \sum_{i=2}^{\infty} a_i B^{-i+1}.$$

Temos que  $a_2$  será a parte inteira de  $Bq_2$ . Continuamos o processo para obter  $a_3, a_4, \dots$

### 9.3 Prova da Proposição 5.2

Seja  $d > 0$  a distância mínima entre algum par de conjuntos compactos disjuntos  $S_1(F), \dots, S_m(F)$ , ou seja,  $d = \min_{i \neq j} \inf\{|x-y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}$ . Seja  $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$  e defina  $\mu$  por  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$ . Já que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) \\ &= \sum_{i=1}^m (b_{i_1} \cdots b_{i_k}, b_i)^s \\ &= (b_{i_1} \cdots b_{i_k}, b_i)^s \\ &= \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^k F_{i_1, \dots, i_k, i}\right) \end{aligned}$$

segue-se que  $\mu$  é uma distribuição de massa em  $F$  com  $\mu(F) = 1$ .

Seja  $x \in F$ , então existe uma única sequência infinita  $i_1, i_2, \dots$  tal que  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  para cada  $k$ . Para  $0 < r < d$  seja  $k$  o menor inteiro tal que

$$b_{i_1} \cdots b_{i_k} d \leq r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d.$$

Se  $i'_1, \dots, i'_k$  é distinta de  $i_1, \dots, i_k$  então os conjuntos  $F_{i_1, \dots, i_k}$  e  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  são disjuntos e separados por um intervalo  $b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d > r$ . (para ver isto note que se  $j$  é o menor inteiro tal que  $i_j \neq i'_j$  então  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset F_{i_j}$  e  $F_{i'_1, \dots, i'_k} \subset F_{i'_j}$  são separados por  $d$ , assim  $F_{i_1, \dots, i_k}$  e  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  são separados por  $b_{i_1} \cdots b_{i_{j-1}} d$ .) Segue-se que  $F \cap B_r(x) \subset F_{i_1, \dots, i_k}$ , assim

$$\mu(F \cap B_r(x)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Se  $U$  intersecta  $F$ , então  $U \subset B_r(x)$  para algum  $x \in F$  com  $r = |U|$ . Então  $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ , assim pelo princípio de distribuição de massa  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  e  $\dim_{\mathcal{H}}(F) \geq s$ . ■

## Referências

- [1] BARBOSA, Ruy Madsen, *Descobrendo a Geometria Fractal: para a sala de aula*, 3a. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
- [2] DE SOUZA, Joameir Roberto, *Novo Olhar: matemática*. São Paulo: Editora FTD, 2010.
- [3] DE SOUZA, Maria Helena Soares, *Matemática: jogos e conceitos, 9o. ano*. São Paulo: Editora Ática, 2009.
- [4] DEVANEY, Robert L., *Chaos, Fractals, and Dynamics*. Menlo Park (California): Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [5] FALCONER, Kenneth J., *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.

- [6] JANOS, Michel, *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.
- [7] MANDELBROT, Benoit B., *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: Freeman, 1983.
- [8] PESTANA, Paula & DIAS, Teresa, *Curiosidades Matemáticas: à descoberta dos fractais*. Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia de Viseu. Disponível em: <<http://www.ipv.pt/millennium/Millennium24/2.pdf>> Acesso em: 10 de jan. 2014.
- [9] SMOLE, Kátia S. & DINIZ, Maria I., *Matemática: ensino médio*, volume 1, 6a. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.
- [10] SMOLE, Kátia S. & DINIZ, Maria I., *Matemática: ensino médio*, volume 2, 6a. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.