2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática

Universidade Federal de São João Del Rei – UFSJ

Sociedade Brasileira de Matemática – SBM

Permutações Caóticas sobre Sequências Finitas

Leonardo Gonçalves Rimsa[1]

Ricardo de Carvalho Falcão[2]

Resumo: Este artigo apresenta o conceito de permutação caótica e infere a sua fórmula, demonstrando – a, em seguida, pelo Princípio de Indução. Para isto, faz-se um estudo detalhado de um resultado importante da análise combinatória: o Princípio da Inclusão e Exclusão. Este princípio é trabalhado com os estudantes em vários momentos da educação básica, geralmente com o envolvimento de dois ou três conjuntos. Porém, muitos alunos e professores não o conhecem com este nome, nem estudam o seu caso geral. Neste trabalho, este princípio é demonstrado e vários exemplos de aplicação dele são dados. Por fim, o princípio da inclusão e exclusão é utilizado na dedução da fórmula das permutações caóticas sobre sequências finitas com elementos distintos.

Palavras – Chave: Combinatória, Contagem, Princípio da Inclusão e Exclusão, Permutações Caóticas.

---

[1] Aluno do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, Turma 2012
Universidade Federal de São João Del Rei – UFSJ – Campus Alto Paraopeba (CAP)
e -mail : leorimsa@bol.com.br

[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática – DEFIM – UFSJ
e -mail : rfalcao@gmail.com

1 Princípio da Inclusão e Exclusão

O principal objetivo desta seção é apresentar, demonstrar e analisar o **princípio da inclusão e exclusão**, assim como apresentar diversos exemplos de aplicação dele. Este princípio nos ensina como contar o número de elementos da união de uma quantidade finita de conjuntos finitos.

Começaremos analisando o princípio para dois e três conjuntos, até chegarmos ao caso geral. A finalidade é "preparar o terreno" para o estudo das **permutações caóticas**, assunto da seção final.

1.1 Cardinalidade da União de Dois Conjuntos

Analisemos a seguinte situação : Marcos Paulo vai a um restaurante de frutos do mar que oferece 180 pratos diferentes em seu cardápio. Destes, 72 são à base de camarão e 65 são à base de moluscos. Temos também os pratos que utilizam os dois componentes em seu preparo, que são em número de 32. Se Marcos Paulo é alérgico tanto a camarão quanto a moluscos, pergunta-se: *"Quantos pratos do cardápio deste restaurante ele pode consumir?"*

Denotemos o nosso conjunto universo por Ω. Assim, temos que $\Omega=$\{pratos do restaurante\}. Denotemos também $n(\Omega)$ como sendo o número de elementos ou cardinalidade de Ω. Temos, então, que $n(\Omega)=180$.

Definamos, agora, dois subconjuntos de Ω:

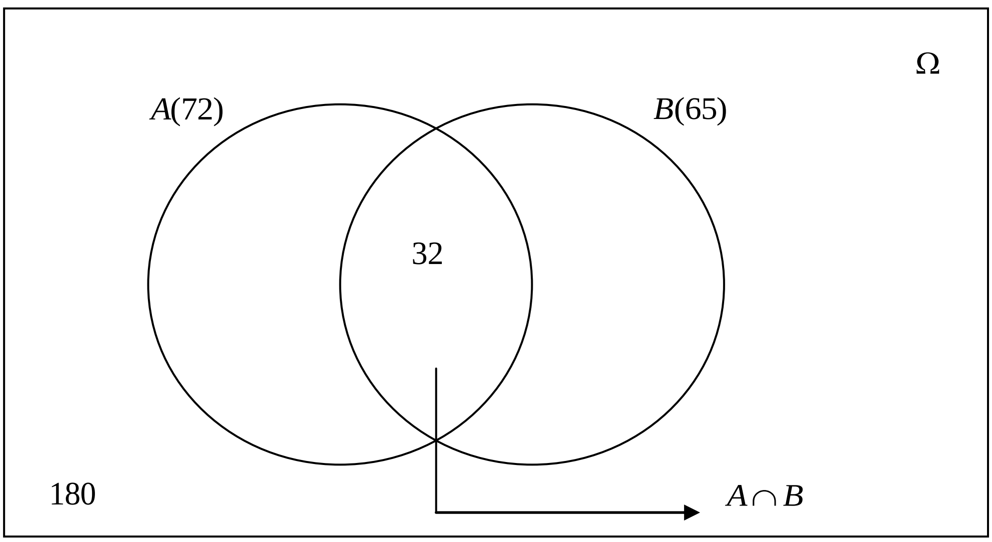
$$A=\{\text{pratos à base de camarão}\} \Rightarrow n(A)=72$$

$$B=\{\text{pratos à base de moluscos}\} \Rightarrow n(B)=65$$

Além disso, temos: $A\cap B=\{\text{pratos à base de camarão e moluscos}\} \Rightarrow n(A\cap B)=32$, ou seja, os conjuntos A e B não são disjuntos.

O diagrama de Venn a seguir representa estes conjuntos:

Cardinalidade da União de Dois Conjuntos



Observemos que os pratos que Marcos Paulo não pode ingerir são aqueles que levam camarão ou molusco em seu preparo, ou seja, os pratos que compõem o conjunto $A \cup B$.

O princípio aditivo, resultado importante da análise combinatória, nos diz que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Porém, este resultado só pode ser aplicado quando A e B são disjuntos, ou seja, quando $A \cap B = \phi$, o que não é o caso aqui. Veja que, neste exemplo, quando fizermos a soma $n(A) + n(B)$, estaremos contando os elementos de $A \cap B$ duas vezes, pois os pratos que levam camarão e moluscos, logicamente, serão contados em $n(A)$ e em $n(B)$.

Para resolver este problema, basta subtrair $n(A \cap B)$ da soma acima. Assim, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 72 + 65 - 32 = 105.$$

Desse modo, os pratos deste restaurante que levam camarão ou moluscos em sua composição são em número de 105. Estes são, exatamente, os pratos que Marcos Paulo não pode consumir. Se queremos saber o número de pratos que ele pode escolher, basta tomar o total e subtrair os que não convêm: $n(\Omega) - n(A \cup B) = 180 - 105 = 75$. Então, concluímos que Marcos Paulo tem 75 opções de escolha no cardápio deste restaurante.

O raciocínio feito acima pode ser generalizado quando temos a união de dois conjuntos finitos quaisquer. Ao fazer a soma $n(A) + n(B)$, estamos contando os elementos de $A \cap B$ duas vezes, pois estes elementos estão tanto em A quanto em B. Para solucionar a questão, subtraímos $n(A \cap B)$. Temos, então, o seguinte resultado:

1.1.1 Teorema: Se A e B são conjuntos finitos, então: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

1.2 Cardinalidade da União de Três Conjuntos

Comecemos, novamente, analisando uma situação.

Numa escola, foi feita uma pesquisa com os 900 alunos do ensino médio sobre o gosto pelas disciplinas História, Matemática e Biologia. Os resultados foram os seguintes:

- 430 alunos gostam de História
- 150 alunos gostam de Matemática
- 385 alunos gostam de Biologia
- 70 alunos gostam tanto de História quanto de Matemática
- 232 alunos gostam tanto de História quanto de Biologia
- 65 alunos gostam tanto de Matemática quanto de Biologia
- 37 alunos gostam das três disciplinas

a) Quantos são os alunos que gostam de uma ou mais destas disciplinas (História, Matemática ou Biologia)?

b) Quantos são os alunos que não gostam de nenhuma destas disciplinas?

Observemos que, neste exemplo, estamos lidando com três subconjuntos finitos de um conjunto – universo, também finito. Definamos os conjuntos:

Universo: $\Omega = \{\text{alunos do ensino médio da escola}\} \Rightarrow n(\Omega) = 900$

$H = \{\text{alunos que gostam de História}\} \Rightarrow n(H) = 430$

$M = \{\text{alunos que gostam de Matemática}\} \Rightarrow n(M) = 150$

$B = \{\text{alunos que gostam de Biologia}\} \Rightarrow n(B) = 385$

$H \cap M = \{\text{alunos que gostam de História e Matemática}\} \Rightarrow n(H \cap M) = 70$

$H \cap B = \{\text{alunos que gostam de História e Biologia}\} \Rightarrow n(H \cap B) = 232$

$M \cap B = \{\text{alunos que gostam de Matemática e Biologia}\} \Rightarrow n(M \cap B) = 65$

$H \cap M \cap B = \{\text{alunos que gostam das três matérias}\} \Rightarrow n(H \cap M \cap B) = 37$

$H \cup M \cup B = \{\text{alunos que gostam de História ou Matemática ou Biologia}\}$

Observe que, na letra a, queremos encontrar $n(H \cup M \cup B)$. Uma primeira ideia seria realizar a soma $n(H) + n(M) + n(B)$.

Com relação a $H \cap M$, estaremos contando os elementos deste conjunto duas vezes, pois eles estão tanto em H quanto em M. O mesmo ocorre para os elementos de $H \cap B$ e de $M \cap B$. Para solucionar este problema, adicionaríamos a parcela:

$$-n(H \cap M) - n(H \cap B) - n(M \cap B).$$

Com relação a $H \cap M \cap B$, contaremos estes elementos três vezes em $n(H) + n(M) + n(B)$, pois estes elementos pertencem aos três conjuntos em jogo. Ao adicionar a parcela $(-n(H \cap M) - n(H \cap B) - n(M \cap B))$, subtraímos estes elementos três vezes, pois eles também pertencem aos três conjuntos em questão. Falta, então, contar os elementos de $H \cap M \cap B$, ou seja, somar $n(H \cap M \cap B)$.

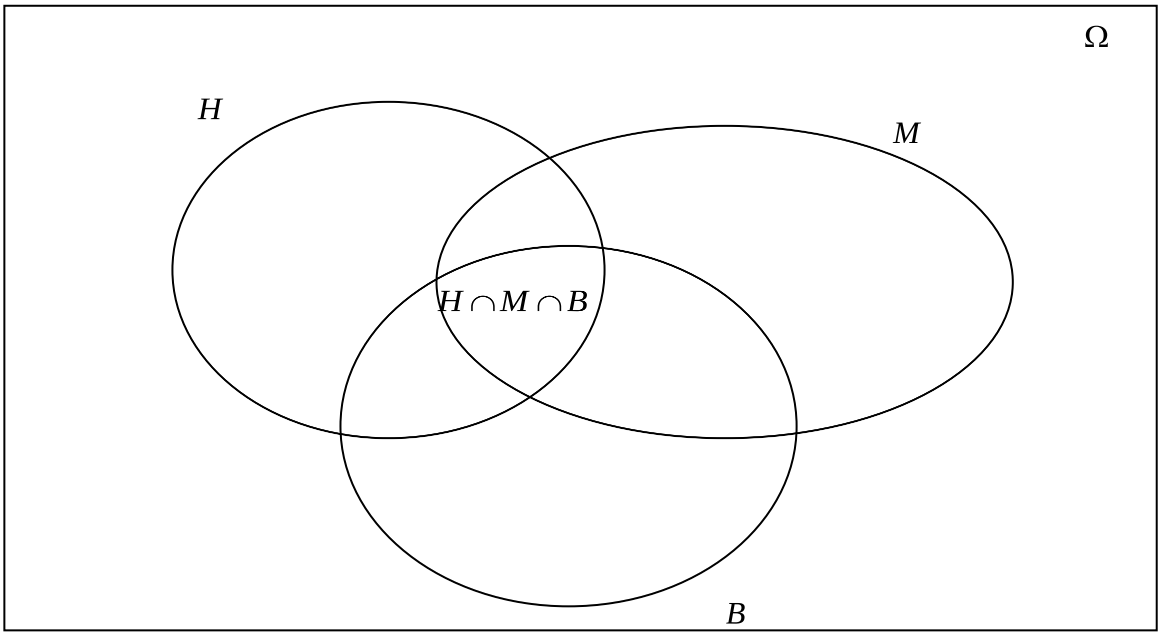
Desse modo, temos que o número de elementos da união destes três conjuntos será:

$$n(H \cup M \cup B) = n(H) + n(M) + n(B) - n(H \cap M) - n(H \cap B) - n(M \cap B) + n(H \cap M \cap B)$$
$$= 430 + 150 + 385 - 70 - 232 - 65 + 37 = 635$$

Logo, temos 635 alunos no ensino médio desta escola que gostam de uma ou mais destas disciplinas.

A representação da situação está no Diagrama de Venn a seguir:

Cardinalidade da União de Três Conjuntos



Para responder a letra b, basta fazer: $n(\Omega) - n(H \cup M \cup B) = 900 - 635 = 265$ alunos que não gostam de nenhuma das três disciplinas.

Apesar de não ser uma demonstração, o exemplo acima nos induz ao seguinte resultado (que é verdadeiro e será demonstrado à frente):

1.2.1 Teorema: Sejam A, B e C conjuntos finitos quaisquer. Então:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Vamos resolver outro exemplo interessante.

1.2.2 Exemplo: Quantos são os elementos do conjunto $\Omega = \{-832, -831, ..., 1211\}$ que não são divisíveis nem por 3, nem por 5 e nem por 11 ?

Temos que $n(\Omega) = 1211 - (-832) + 1 = 2044$.

Sejam os seguintes subconjuntos de Ω:

- $A = \{x \in \Omega \,/\, x = 3k, k \in Z\} = \{-831, -828, ..., 1209\}$
- $B = \{x \in \Omega \,/\, x = 5k, k \in Z\} = \{-830, -825, ..., 1210\}$
- $C = \{x \in \Omega \,/\, x = 11k, k \in Z\} = \{-825, -814, ..., 1210\}$

Os elementos de A formam uma progressão aritmética (PA) de razão $r = 3$. Para calcular o seu número de elementos, utilizamos a fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 1209 = -831 + (n-1).3 \Rightarrow n = 681 \Rightarrow n(A) = 681,$$

onde a_1 é o primeiro termo, r é a razão e a_n é o $n-ésimo$ termo da PA.

Os elementos de B formam uma progressão aritmética de razão $r = 5$. Também pela fórmula geral da PA, temos:

$$b_n = b_1 + (n-1)r \Rightarrow 1210 = -830 + (n-1).5 \Rightarrow n = 409 \Rightarrow n(B) = 409$$

Os elementos de C formam uma progressão aritmética de razão $r = 11$. Também pela fórmula geral da PA, temos:

$$c_n = c_1 + (n-1)r \Rightarrow 1210 = -825 + (n-1).11 \Rightarrow n = 186 \Rightarrow n(C) = 186$$

O conjunto $A \cap B$ é formado pelos elementos de Ω que são múltiplos de 3 e de 5. Consideremos o subconjunto K de Ω formado pelos múltiplos de 15. A inclusão $K \subset (A \cap B)$ é óbvia. Já a inclusão contrária $(A \cap B) \subset K$ decorre de um resultado importante da álgebra ("se $a, b \in Z^*$, $c \in Z$, a divide c, b divide c e $mdc(a,b) = 1$, então ab divide c"). Como $mdc(3,5) = 1$, temos que $A \cap B$ é o conjunto dos múltiplos de 15. Logo: $A \cap B = \{x \in \Omega / x = 15k, k \in Z\} = \{-825, -810, ..., 1200\}$. Novamente pela fórmula da PA, temos: $1200 = -825 + (n-1).15 \Rightarrow n = 136 \Rightarrow n(A \cap B) = 136$.

O conjunto $A \cap C$ é formado pelos elementos de Ω que são múltiplos de 3 e de 11. Como $mdc(3,11) = 1$, temos que $A \cap C$ é o conjunto dos múltiplos de 33. Logo: $A \cap C = \{x \in \Omega / x = 33k, k \in Z\} = \{-825, -792, ..., 1188\}$. Novamente pela Fórmula da PA, temos: $1188 = -825 + (n-1).33 \Rightarrow n = 62 \Rightarrow n(A \cap C) = 62$.

O conjunto $B \cap C$ é formado pelos elementos de Ω que são múltiplos de 5 e de 11. Como $mdc(5,11) = 1$, temos que $B \cap C$ é o conjunto dos múltiplos de 55. Logo: $B \cap C = \{x \in \Omega / x = 55k, k \in Z\} = \{-825, -770, ..., 1210\}$. Novamente pela Fórmula da PA, temos: $1210 = -825 + (n-1).55 \Rightarrow n = 38 \Rightarrow n(B \cap C) = 38$.

O conjunto $A \cap B \cap C$ é formado pelos elementos de Ω que são múltiplos de 3,5 e 11. Como $mdc(3,5,11) = 1$, temos que $A \cap B \cap C$ é o conjunto dos múltiplos de 165. Logo : $A \cap B \cap C = \{x \in \Omega / x = 165k, k \in Z\} = \{-825, -660, ..., 1155\}$. Novamente pela Fórmula da PA, temos: $1155 = -825 + (n-1).165 \Rightarrow n = 13 \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 13$.

Pelo resultado estudado: $n(A \cup B \cup C) = 681 + 409 + 186 - 136 - 62 - 38 + 13 = 1053$, que é a quantidade de elementos de Ω que são divisíveis ou por 3, ou por 5, ou por 11.

Logo: $n(\Omega) - n(A \cup B \cup C) = 2044 - 1053 = 991$

Portanto, em Ω, há 991 números que não são divisíveis nem por 3, nem por 5 e nem por 11.

1.3. Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE)

O Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE) é um resultado de grande importância na análise combinatória. Ele determina o número de elementos ou cardinalidade da união de uma quantidade finita de conjuntos finitos. Os resultados 1.1.1 e 1.2.1 são, na verdade, casos particulares do PIE.

Em linhas gerais, o PIE nos diz que, para obter o número de elementos da união de um número finito de conjuntos finitos, procedemos da seguinte forma:

- Somamos os números de elementos de cada um dos conjuntos;
- Subtraímos a soma dos números de elementos das duplas interseções possíveis;
- Somamos os números de elementos das triplas interseções possíveis;
- Subtraímos a soma dos números de elementos das quádruplas interseções possíveis e prosseguimos o processo, até chegarmos ao número de elementos da interseção de todos eles.

Caso 1: Se tivermos apenas dois conjuntos, o PIE se reduz ao teorema 1.1.1.

Caso 2: Se tivermos três conjuntos, o PIE se reduz ao teorema 1.2.1.

Caso 3: Se tivermos quatro conjuntos (A, B, C, D), teremos:

- Conjuntos: A, B, C, D
- Duplas Interseções Possíveis: $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$
- Triplas Interseções Possíveis: $A \cap B \cap C, A \cap B \cap D, A \cap C \cap D, B \cap C \cap D$
- Quádrupla Interseção Possível: $A \cap B \cap C \cap D$

E o PIE (para quatro conjuntos finitos) ficará:

$$\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C \cup D) = (n(A) + n(B) + n(C) + n(D)) \\
&-(n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) + n(B \cap C) + n(B \cap D) + n(C \cap D)) \\
&+(n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)) \\
&-n(A \cap B \cap C \cap D)
\end{aligned}$$

Antes, porém, de demonstrarmos o caso geral, lembremos que o símbolo $C_{p,u}$ refere-se ao número de combinações simples de p elementos tomados u a u.[1],[2] Este agrupamento acontece quando temos p elementos distintos e queremos contar a quantidade de grupos que podem ser formados com u elementos distintos, escolhidos entre os p, sendo que os grupos serão diferentes apenas pela **natureza** dos elementos, ou seja, a **ordem** em que os elementos são tomados no grupo não diferencia estes grupos. A fórmula para o cálculo é: $C_{p,u} = \dfrac{p!}{u!(p-u)!}$.

Observe, também, que a alternância de sinais se deve, exatamente, ao fato exposto nos exemplos. Ao somar os números de elementos dos $A_i's$, contamos cada dupla interseção duas vezes. Logo, devemos, em seguida, subtrair as duplas interseções, para que cada uma delas seja contada uma única vez.

Ao somar os números de elementos dos $A_i's$, contamos cada tripla interseção três vezes. Ao subtrair as duplas interseções, subtraímos cada tripla interseção três vezes (por exemplo, os elementos da interseção $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ são subtraídos em $A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_3$ e $A_2 \cap A_3$). Logo, devemos novamente somar cada tripla interseção para contá-las.

Ao somar os números de elementos dos $A_i's$, contamos cada quádrupla interseção quatro vezes. Ao subtrair as duplas interseções, subtraímos cada quádrupla interseção $C_{4,2} = 6$ vezes (por exemplo, os elementos da interseção $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ são subtraídos em $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$, $A_1 \cap A_4$, $A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_4$ e em $A_3 \cap A_4$). Ao somar as triplas interseções, novamente somamos cada quádrupla interseção $C_{4,3} = 4$ vezes (por exemplo, os elementos da interseção $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ são contados em $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2 \cap A_4$, $A_1 \cap A_3 \cap A_4$ e em $A_2 \cap A_3 \cap A_4$) . Logo, contamos, até aí, a soma dos elementos de cada quádrupla interseção: $4-6+4=2$ vezes. Então, devemos, agora, subtrair as quádruplas interseções possíveis, para que cada uma delas seja contada $4-6+4-1=1$ única vez.

Por raciocínio análogo, veremos que devemos somar as quíntuplas interseções em seguida, e assim por diante. Isto explica a alternância de sinais da fórmula do PIE.

O caso geral está enunciado a seguir.

1.3.1 Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE)

Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos finitos, então:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k < q} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_q) + ... + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ...... \cap A_n)$$

com $i, j, k, q, ... \in \mathrm{N}$.

Demonstração:[3] A demonstração é feita mostrando que um elemento v, que aparece em p dos n conjuntos ($1 \le p \le n$), é contado pela fórmula anterior exatamente uma vez.

Assim, vemos que, realmente, se v aparece em p dos n conjuntos, então ele é contado:

- $C_{p,1} = p$ vezes em $\sum_{i=1}^{n} n(A_i)$;
- $C_{p,2}$ vezes em $\sum_{1 \le i < j} n(A_i \cap A_j)$, pois v só aparece em $A_i \cap A_j$ se está em A_i e em A_j.

Como temos p conjuntos que possuem v, o número de formas de tomar dois deles com o elemento em jogo (observe que a ordem em que se toma os conjuntos não importa para a contagem) é $C_{p,2}$;

- $C_{p,3}$ vezes em $\sum_{1\le i<j} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$, por raciocínio análogo;

E, prosseguindo o raciocínio, notaremos que v aparece $C_{p,p}=1$ vezes no somatório do número de elementos das interseções de p conjuntos.

É claro que uma interseção com mais de p conjuntos não terá o elemento em questão, pois ele só aparece em p conjuntos.

Logo, se certo elemento v aparece em p dos n conjuntos ($p=1,2,3,......,n$), então v é contado em $n(A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n)$ exatamente:

$$(C_{p,1}-C_{p,2}+C_{p,3}-C_{p,4}+......+(-1)^{p-1}C_{p,p}) \text{ vezes.}$$

Finalmente, para mostrar que a expressão acima vale 1, basta fazer a expansão de $(1-1)^p$ pela fórmula binomial de Newton :

$$(1-1)^p = 1^p.(-1)^0.C_{p,0} + 1^{p-1}.(-1)^1.C_{p,1} + ... + 1^0.(-1)^p.C_{p,p} =$$
$$= C_{p,0} - C_{p,1} + ... + (-1)^p.C_{p,p}$$

Como $(1-1)^p = 0$ e $C_{p,0}=1$, chegamos em:

$$-1 = -C_{p,1} + C_{p,2} + ... + (-1)^p.C_{p,p}$$

E, dividindo-se ambos os membros da igualdade por (-1):

$$C_{p,1} - C_{p,2} + ... + (-1)^{p-1}.C_{p,p} = 1$$

o que conclui a demonstração.

2 Permutações Caóticas sobre Sequências Finitas

O objetivo desta seção é apresentar formalmente o conceito de Permutação Caótica e chegar à sua fórmula.

2.1 Definição: Dada uma sequência finita $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de elementos distintos, damos o nome de **permutação caótica** a qualquer permutação dela em que nenhum dos elementos encontra-se em sua posição original.

O número de permutações caóticas de n elementos será denotado pelo símbolo D_n. Vamos, novamente, entender o conceito resolvendo um exemplo.

Calculemos o *número de anagramas da palavra PRATO em que nenhuma das letras está em sua posição original*. Em síntese, iremos calcular D_5.

Definamos os conjuntos:

Universo: Ω = {anagramas de PRATO}. Sabemos que $n(\Omega) = P_5 = 5! = 120$.

A_1 = {anagramas de PRATO com o "P" na primeira posição}.

A_2 = {anagramas de PRATO com o "R" na segunda posição}.

A_3 = {anagramas de PRATO com o "A" na terceira posição}.

A_4 = {anagramas de PRATO com o "T" na quarta posição}.

A_5 = {anagramas de PRATO com o "O" na quinta posição}.

Todos os cinco conjuntos $A_i's$ consistem de anagramas obtidos fixando-se uma das letras da palavra em questão e deixando as outras quatro permutarem livremente nas posições restantes. Logo: $n(A_i) = P_4 = 4! = 24$, $1 \le i \le 5, i \in \mathrm{N}$.

Ao analisarmos as duplas interseções possíveis ($A_{i_1} \cap A_{i_2}, 1 \le i_1, i_2 \le 5$ e $i_1 \ne i_2$) temos que estes conjuntos consistem de anagramas obtidos fixando-se duas das letras da palavra em questão e deixando as outras três permutarem livremente nas posições restantes. Logo: $n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = P_3 = 3! = 6$. Além disso, o número de duplas interseções possíveis é: $C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!}$.

Ao analisarmos as triplas interseções possíveis ($A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}, 1 \le i_1, i_2, i_3 \le 5$ e $i_1 \ne i_2 \ne i_3$) temos que estes conjuntos consistem de anagramas obtidos fixando-se três das letras da palavra em questão e deixando as outras duas permutarem livremente nas posições restantes. Logo: $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = P_2 = 2! = 2$. Além disso, o número de triplas interseções possíveis é: $C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,2!}$.

Ao analisarmos as quádruplas interseções possíveis ($A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}, 1 \le i_1, i_2, i_3, i_4 \le 5$ e $i_1 \ne i_2 \ne i_3 \ne i_4$) temos que estes conjuntos consistem de anagramas obtidos fixando-se quatro das letras da palavra em questão e deixando uma opção para o preenchimento da posição restante. Logo: $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) = P_1 = 1! = 1$. Além disso, o número de quádruplas interseções possíveis é: $C_{5,4} = \frac{5!}{4!\,1!}$.

A quíntupla interseção possível ($A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$) consiste de um único anagrama. Ele é obtido fixando-se todas as cinco letras da palavra nas posições originais. Logo: $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P_0 = 0! = 1$. Além disso, o número de quíntuplas interseções possíveis é: $C_{5,5} = \frac{5!}{5!\,0!} = 1$.

Pelo Princípio da Inclusão e da Exclusão, temos:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = C_{5,1}\,4! - C_{5,2}\,3! + C_{5,3}\,2! - C_{5,4}\,1! + C_{5,5}\,0!$$

$$= \frac{5!}{1!\,4!}4! - \frac{5!}{2!\,3!}3! + \frac{5!}{3!\,2!}2! - \frac{5!}{4!\,1!}1! + \frac{5!}{5!\,0!}0! = 5!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right)$$

Logo, o número de anagramas pedido será:

$$D_5 = n(\Omega) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = 5! - 5!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right)$$
$$= 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$
$$= 5!\sum_{i=0}^{5} \frac{(-1)^i}{i!} = 120\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right) = 44$$

Então, temos 44 anagramas da palavra PRATO em que nenhuma das letras está na posição original.

O teorema a seguir generaliza o resultado e será demonstrado a seguir.

2.2 Teorema: O número de permutações caóticas de n elementos (D_n) é dado por:

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

A) Inferindo a Fórmula

Vamos utilizar o mesmo raciocínio do exemplo anterior para inferir a fórmula. Depois, vamos demonstrá-la utilizando o Princípio de Indução.

Consideremos, então, uma sequência finita de n elementos distintos: $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Queremos calcular o número de permutações da sequência $a_1 a_2 ...... a_n$ em que nenhum dos elementos permanece na sua posição original.

Para isto, definamos os conjuntos:

Universo: Ω = {permutações da sequência $a_1 a_2 ...... a_n$ }. Temos que $n(\Omega) = n!$.

Para cada $i \in \{1,2,......,n\}$: A_i = {permutações em que a_i fica na posição original}. Os elementos de A_i consistem dos anagramas obtidos fixando-se a_i na $i-ésima$ posição e permutando-se os $(n-1)$ elementos nas posições restantes. Logo, para $i \in \{1,2,......,n\}$, temos: $n(A_i) = (n-1)!$. Além disso, o número de conjuntos A_i é: $C_{n,1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$.

Analisando-se as duplas interseções possíveis: $A_{i_1} \cap A_{i_2}$, com $i_1, i_2 \in \{1,2,......,n\}$ e $i_1 \neq i_2$ ($A_{i_1} \cap A_{i_2}$ = {permutações em que a_{i_1} e a_{i_2} ficam nas posições originais}), temos que os elementos de cada um destes conjuntos são obtidos fixando-se dois elementos em suas posições originais e permitindo-se que os $(n-2)$ elementos restantes permutem nas outras posições. Assim: $n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (n-2)!$ e o número de duplas interseções possíveis é: $C_{n,2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$.

Analisando-se as triplas interseções possíveis: $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}$, com $i_1, i_2, i_3 \in \{1,2,......,n\}$ e $i_1 \neq i_2 \neq i_3$ ($A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}$ = {permutações em que a_{i_1}, a_{i_2} e a_{i_3} ficam nas posições originais}), temos que os elementos de cada um destes conjuntos são obtidos fixando-se três elementos em suas posições originais e permitindo-se que os $(n-3)$ elementos restantes permutem nas outras posições. Assim: $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = (n-3)!$ e o número de triplas interseções possíveis é: $C_{n,3} = \dfrac{n!}{3!\,(n-3)!}$.

Prosseguindo o raciocínio, chegaremos até as interseções de n conjuntos (que sabemos ser única).

Analisando-se a $n-upla$ interseção possível: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, temos que os elementos deste conjunto são obtidos fixando-se n elementos em suas posições originais e permitindo-se que os $(n-n)$ elementos restantes permutem nas outras posições. Assim: $n(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 0! = 1$ e o número de $n-uplas$ interseções possíveis é: $C_{n,n} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$.

Pelo Princípio da Inclusão e da Exclusão :

$$
\begin{aligned}
n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= C_{n,1}(n-1)! - C_{n,2}(n-2)! + C_{n,3}(n-3)! - \dots\dots + (-1)^{n-1} C_{n,n}\,0! \\
&= \frac{n!}{1!\,(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}(n-2)! + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!\,0!}\,0! \\
&= n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

Desse modo :

$$
\begin{aligned}
D_n = n(\Omega) - n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots\dots + (-1)(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) \\
&= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

E, então, vemos que a fórmula, realmente, é:

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Falta agora, demonstrar a fórmula por indução matemática. Para isto, mostraremos que as permutações caóticas satisfazem a uma interessante fórmula de recorrência.

B) Fórmula de Recorrência das Permutações Caóticas [4]

Seja D_{n+2} o número de permutações caóticas dos elementos (distintos) da sequência $a_1 a_2 \dots\dots a_{n+2}$.

Podemos “separar” estas permutações em dois grupos : aquelas em que a_1 ocupa o lugar do elemento que está na primeira posição e aquelas em que isto não ocorre.

As permutações caóticas do primeiro grupo são formadas do seguinte modo : primeiro, escolhe-se um elemento para trocar de posição com a_1, o que pode ser feito de $(n+1)$ formas. Para cada uma delas, permutam-se os n elementos restantes, de forma que nenhum deles fique em sua posição original. Isto pode ser feito de D_n modos. Logo, o número de permutações do primeiro grupo é: $(n+1)D_n$.

Para formar as permutações do segundo grupo, procedemos do seguinte modo : escolhemos um lugar da sequência para alocar o elemento a_1 (lugar x), colocando, “provisoriamente”, o elemento deste local na primeira posição. Isto pode ser feito de $(n+1)$ formas. Para cada uma delas, permutamos os $(n+1)$ elementos restantes de modo que nenhum fique na posição original e a_x não fique na primeira posição. Isto pode ser feito de D_{n+1} modos. Logo, o número de permutações do segundo grupo é: $(n+1)D_{n+1}$.

Portanto: $D_{n+2} = (n+1)D_{n+1} + (n+1)D_n$.

Temos, assim, que as permutações caóticas satisfazem à seguinte fórmula de recorrência: $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$.

Esta fórmula será utilizada para demonstrar, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula das permutações caóticas.

C) Demonstração por Indução

Afirmação: “O número de permutações caóticas de n *elementos é dado por* $D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$ *”*

Nesta demonstração, utilizamos a segunda forma do Princípio de Indução Matemática [5].

Primeiramente, constatamos que a afirmação é válida para $n=1$. Realmente, se temos uma sequência com um elemento (a_1), não existe nenhuma permutação em que a_1 não fique em primeiro lugar, ou seja, $D_1 = 0$. E, utilizando a fórmula: $D_1 = 1!\sum_{i=0}^{1}\frac{(-1)^i}{i!} = 1-1 = 0$.

Suponhamos, agora, que a afirmação seja válida $\forall k \in \mathrm{N}$, com $1 \le k \le (n+1)$. Em particular, para $k = n$ e $k = n+1$, temos :

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \text{ e } D_{n+1} = (n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} \text{ (Hipótese de Indução).}$$

Então, para $(n+2)$, temos (utilizando a fórmula de recorrência obtida no item anterior):

$$D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$$

Utilizando-se a Hipótese de Indução:

$$
\begin{aligned}
D_{n+2} &= (n+1)\left((n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} + n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \right) \\
&= (n+1)n!\left((n+1)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!} + \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \right) \\
&= (n+1)!\left((n+1)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right) + \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \right) \\
&= (n+1)(n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)(-1)^{n+1} + (n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \\
&= (n+1)!\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \right)(n+2) + (n+2-1)(-1)^{n+1} \\
&= (n+2)!\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \right) + (n+2)(-1)^{n+1} + (-1)(-1)^{n+1} \\
&= (n+2)!\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(n+2)(-1)^{n+1}}{(n+2)!} + \frac{(-1)(-1)^{n+1}}{(n+2)!} \right) \\
&= (n+2)!\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} \right) \\
&= (n+2)!\sum_{i=0}^{n+2}\frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

o que mostra a fórmula para $(n+2)$.

Assim, podemos concluir, pelo Princípio de Indução, que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o que finaliza a demonstração do teorema.

2.3 Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra ESCOLAR em que nenhuma das letras permanece em sua posição original?

Queremos calcular D_7. Pelo teorema demonstrado:

$$
\begin{aligned}
D_7 &= 7!\sum_{i=0}^{7}\frac{(-1)^i}{i!} = 7!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right) = \\
&= \left(\frac{7!}{2!} - \frac{7!}{3!} + \frac{7!}{4!} - \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{6!} - \frac{7!}{7!} \right) = \\
&= (7.6.5.4.3 - 7.6.5.4 + 7.6.5 - 7.6 + 7 - 1) = \\
&= 2520 - 840 + 210 - 42 + 7 - 1 = 1854
\end{aligned}
$$

Portanto, a palavra ESCOLAR possui 1854 anagramas em que nenhuma das letras permanece em sua posição original.

2.4 Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra ESCOLAR em que apenas o E e o S permanecem em suas posições originais ?

Para resolver essa questão devemos “fixar” o E e o S em suas posições originais e permutar caoticamente as cinco letras restantes. Logo, o número de anagramas pedido será:

$$D_5 = 5!\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^i}{i!} = 5!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=$$
$$=\left(\frac{5!}{2!}-\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}-\frac{5!}{5!}\right)=5.4.3-5.4+5-1=$$
$$=60-20+5-1=44$$

2.5 Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra ESCOLAR em que apenas duas letras permanecem em suas posições originais?

Devemos, primeiramente, escolher duas letras, que permanecerão fixas em suas posições originais. Isto pode ser feito de $C_{7,2}$ maneiras. Para cada uma das maneiras, permutamos caoticamente as cinco letras restantes. O total pedido, pelo Princípio Fundamental da Contagem, será:

$$C_{7,2}.D_5 = \frac{7!}{2!5!}.D_5 = 21.44 = 924$$

Portanto, temos 924 anagramas.

3 Considerações Finais

O caso mais geral do princípio de inclusão e exclusão (PIE) pode, sim, ser entendido por professores e alunos da educação básica. O trabalho, na escola básica, com problemas envolvendo o PIE apenas para dois e três conjuntos finitos é limitante. O professor pode superar esta limitação e introduzir problemas envolvendo um número maior de conjuntos. Já as permutações caóticas são vistas, por muitos, como um assunto extremamente complicado, impossível de ser trabalhado na educação básica. Este texto mostra que isto não é verdade. A fórmula das permutações caóticas aparece como uma aplicação natural quando se entende o PIE em sua forma geral. Este trabalho pretende ser um texto inicial de apoio para professores da escola básica na compreensão destes assuntos, tão interessantes e, às vezes, negligenciados, no ensino da análise combinatória.

4 Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, Nilzê; PÉRIGO, Roberto; DEGENSZAJN; David; DOLCE, Oswaldo, IEZZI, Gelson. **MATEMÁTICA : CIÊNCIA E APLICAÇÕES – VOLUME 2**. Editora Saraiva. Sexta Edição.

[2] CARVALHO, Paulo Cézar Pinto; MORGADO, Augusto César de Oliveira; PITOMBEIRA, João Bosco; FERNANDEZ, Pedro. **ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE**. SBM.

[3] SANTOS, J. Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C.. **INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA**. Editora Unicamp. Terceira Edição.

[4] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO – VOLUME 2**. Coleção do Professor de Matemática – SBM. Sexta Edição.

[5] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO – VOLUME 1**. Coleção do Professor de Matemática – SBM. Sexta Edição.