



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

MARCO ANTÔNIO MARTINS

DINÂMICA DA FAMÍLIA QUADRÁTICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre(a) pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Orientador Dr. Denis Gouvêa Ladeira

OURO BRANCO
2016

**Dissertação de Mestrado defendida em 12 de agosto de 2016 e aprovada
pela Banca Examinadora composta pelos Professores.**

Denis G Ladeira

Prof. Dr. Denis Gouvea Ladeira
Universidade Federal de São João del-Rei

Rogério Casagrande

Prof. Dr. Rogério Casagrande
Universidade Federal de Juiz de Fora

José Eloy Ottoni

Prof. Dr. José Eloy Ottoni
Universidade Federal de São João del-Rei

Sumário

1	Introdução	4
2	Introdução aos sistemas dinâmicos discretos	5
3	Conceitos básicos	10
3.1	Órbitas	10
3.2	Tipos de órbitas	12
4	Análise gráfica	14
4.1	Teorema do ponto fixo	16
4.2	Estabilidade de pontos fixos	18
5	Bifurcação	24
5.1	Bifurcações Sela-Nó e de Duplicação de Período	29
5.2	Caso $c \leq -2$	31
6	Transição para o caos	31
6.1	Diagrama de órbita	31
6.2	Janelas periódicas	33
6.3	Auto-similaridade	33
6.4	Teorema de Sarkovskii	37
7	Conclusão	38

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um breve estudo dos sistemas dinâmicos com atenção aos sistemas mais simples, em especial à família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$. Introduziremos ao longo do texto alguns conceitos e definições que serão necessárias à medida que formos aprofundando na análise do comportamento dinâmico dessas funções. Através do processo iterativo analisaremos como o comportamento caótico emerge nesse sistema surpreendentemente simples.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, caos, família quadrática

1 Introdução

A história dos Sistemas Dinâmicos iniciou-se, ainda no século XVII, através dos estudos de Isaac Newton em torno das equações diferenciais. O Matemático Henri Poincaré (1854 - 1912), no final do século XIX propôs o estudo das soluções das equações diferenciais do ponto de vista qualitativo que conduziram ao compreensão da estrutura global e o comportamento dos sistemas sob investigação. Nos anos 1950s e 1960s Kolmogorov, Arnold e Moser formularam o Teorema KAM explicando como o comportamento caótico emerge ao perturbar um sistema originalmente integrável. Na mesma época o matemático americano Stephen Smale mostrou ser possível compreender e analisar todo o comportamento imprevisível de determinados sistemas. Esse período ficou marcado pelos consideráveis avanços em relação ao estudo dos Sistemas Dinâmicos. Esses avanços se devem, em parte, às novas possibilidades do uso de ferramentas computacionais, fato esse que abriu novas abordagens e perspectivas ao tema.

O grande interesse de matemáticos e cientistas se justifica pelo fato dos sistemas dinâmicos terem grande aplicabilidade nos mais diversos ramos da ciência como: Biologia, Física, Economia, Engenharia, entre outras. Não é difícil encontrarmos situações onde podemos perceber a ação dos sistemas dinâmicos como, por exemplo, no crescimento de populações de insetos; na compreensão do movimento das estrelas, planetas e galáxias no céu; nas oscilações dos índices que medem o desempenho das bolsas de valores; na previsão do tempo em relação às condições climáticas. Algumas dessas situações são perfeitamente previsíveis enquanto em outras, existe uma clara dificuldade em efetuar previsões sobre o comportamento futuro.

Segundo Devaney, os sistemas dinâmicos se constituem em um ramo da matemática que busca compreender os processos em movimento [1]. Uma grande variedade destes sistemas apresenta comportamento complexo e, muitas vezes, imprevisível. A esse tipo de comportamento os matemáticos costumam chamar de caótico ou simplesmente caos. Ao contrário do que se pode pensar, sistemas muito simples e, muitas vezes, sistemas com apenas uma variável, como polinômios de 2º grau, podem apresentar um comportamento desordenado e imprevisível, sensível às condições iniciais.

Este trabalho tem, por objetivo, ser um texto de apoio a profissionais que atuam no ensino de Matemática de nível médio buscando o aprimoramento do embasamento teórico sobre um tema da Matemática ainda pouco abordado nos cursos de licenciatura para essa disciplina. Há de se levar em consideração que o tema proposto vem sendo cada vez mais discutido no meio acadêmico não só pela sua relevância para o desenvolvimento das ciências,

mas também por ser cada vez mais disseminado pelos meios de comunicação que recentemente repercutiram os prêmios internacionais recebidos por dois matemáticos brasileiros por seus trabalhos desenvolvidos nessa área. Neste panorama, é natural que a curiosidade dos jovens seja aguçada o que torna importante que o professor esteja preparado para atuar suprindo essas novas demandas da sociedade como um todo. Pretendemos apresentar, de forma clara e objetiva, a dinâmica do comportamento das funções quadráticas $Q_c(x) = x^2 + c$ seguindo a linha de raciocínio de Devaney [1]. Apresentaremos, ao longo do texto, conceitos, definições e teoremas importantes inerentes ao tema, sempre com exemplos e, quando possível, apresentaremos gráficos ilustrativos. Utilizaremos, para tanto, o software de Geometria dinâmica Geogebra [7].

O trabalho está estruturado em seções como descrevemos em seguida: Na seção 2, definiremos os sistemas dinâmicos através da análise de situações-problema por meio de processos iterativos. Na seção 3, trabalharemos alguns conceitos básicos fundamentais para o aprofundamento do estudo do comportamento dinâmico da família quadrática. Na seção 4, apresentaremos a análise gráfica que é uma ferramenta importante para descrever o comportamento dinâmico de uma função quando iterada. Já na seção 5, vamos entender o processo de bifurcação e os tipos presentes na dinâmica da família quadrática. Na seção 6, iniciaremos analisando diversos gráficos representando diagramas de órbita para chegarmos à definição de caos dada por Devaney e analisaremos o Teorema de Sarkovskii.

2 Introdução aos sistemas dinâmicos discretos

Seguindo o mesmo raciocínio de Devaney [1], vamos iniciar fazendo uma análise do que seria um sistema dinâmico por meio de um processo iterativo, através de um exemplo financeiro bastante simples e comum nos dias atuais. Vamos imaginar que uma pessoa tenha um saldo devedor em sua conta corrente de R\$100,00 e que esse banco opere com uma taxa de juros, para essa situação, na ordem de 12% ao mês sobre o saldo devedor. Podemos nos perguntar o que acontecerá com o montante dessa dívida, caso ela não seja quitada, passados um período de n meses. Este é um dos exemplos de sistemas dinâmicos mais simples.

Para realizar o cálculo, podemos entender que ao final de cada mês esse cliente será penalizado com um acréscimo de 12%, a título de juros, ao seu saldo devedor. Assim o seu saldo devedor que era inicialmente de R\$100,00, passados os trinta dias iniciais, passou a ser de R\$112,00. Denotando por S_0 o saldo inicial, temos:

$$S_0 = 100$$

$$S_1 = S_0 + 0,12S_0 = 1,12S_0 = 112$$

Procedemos da mesma forma para calcularmos seu saldo devedor ao final do segundo mês, ou seja, aplicamos a taxa de juros ao novo saldo devedor. Assim temos:

$$S_2 = S_1 + 0,12S_1 = 1,12S_1 = 125,44.$$

Neste modelo matemático precisamos da informação do saldo devedor do mês anterior para que possamos determinar o saldo devedor do mês atual. Então para o terceiro mês, temos:

$$S_3 = S_2 + 0,12S_2 = 1,12S_2 = 140,49$$

Generalizando, temos:

$$\begin{aligned} S_4 &= S_3 + 0,12S_3 = 1,12S_3 \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + 0,12S_{n-1} = 1,12S_{n-1} \end{aligned}$$

Neste processo estamos resolvendo a equação de diferença $S_n = 1,12S_{n-1}$ utilizando o processo da iteração, onde multiplicamos o saldo anterior por 1,12. Podemos então definir a função $F(x) = 1,12x$, onde a sua aplicação repetida nos permite encontrar o saldo em um tempo qualquer, ou seja,

$$\begin{aligned} S_1 &= F(S_0) \\ S_2 &= F(S_1) = F(F(S_0)) = F \circ F(S_0) \\ S_3 &= F(S_2) = F(F(F(S_0))) = F \circ F \circ F(S_0) \end{aligned}$$

Generalizando, a composição de $F(x)$ com ela mesma nos fornece:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1,12x \\ F(F(x)) &= F \circ F(x) = (1,12)^2x \\ F(F(F(x))) &= F \circ F \circ F(x) = (1,12)^3x \\ &\vdots \\ F(\dots(F(x))\dots) &= \underbrace{F \circ \dots \circ F(x)}_{n \text{ vezes}} = (1,12)^n x. \end{aligned}$$

Desta forma, conhecendo o saldo inicial, temos como calcular o saldo dessa conta em qualquer tempo, mantidas as mesmas condições de juros iniciais, em qualquer tempo. Por exemplo, o saldo devedor dessa conta após 12 meses será de

$$S_{12} = (1,12)^{12}100 = 389,59.$$

Se o período for de 100 meses o saldo será de

$$S_{100} = (1,12)^{100}100 = 8.352.226,57.$$

Outra situação bem simples de ser mostrada, é como calcular o crescimento ou diminuição de uma determinada população de indivíduos de uma determinada espécie, em um intervalo de tempo.

Podemos pensar em um modelo matemático que nos permita prever o que vai acontecer com essa população neste intervalo de tempo. Vamos denotar por P_n a população viva

na geração n . Neste modelo, considera-se que a população de uma geração seguinte seja diretamente proporcional à geração atual. Assim, podemos estabelecer a seguinte equação

$$P_{n+1} = rP_n$$

onde r é uma constante determinada, por exemplo, pelas condições ambientais. Desta forma é simples determinarmos a população das gerações futuras, conhecendo a população inicial P_0

$$P_1 = rP_0$$

$$P_2 = rP_1 = r \cdot r \cdot P_0 = r^2 P_0$$

$$P_3 = rP_2 = r \cdot r^2 \cdot P_0 = r^3 P_0$$

⋮

$$P_n = r \cdot P_{n-1} = r^n \cdot P_0$$

Assim a função que está sendo iterada é $F(x) = rx$. Logo:

$$P_n = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{n \text{ vezes}}(P_0) = r^n P_0$$

Nota-se neste modelo que o futuro dessa população depende do valor de r . Se tivermos $r > 1$, significa que o número de indivíduos tenderá ao infinito quando $n \rightarrow \infty$ indicando um crescimento descontrolado dessa população. Se $r < 1$, temos um cenário de extinção dessa população, uma vez que r^n tenderá a zero quando $n \rightarrow \infty$. A outra possibilidade é $r = 1$, e a população se manteria inalterada, ou seja, $P_n = P_0$. A figura 1 ilustra a dinâmica do crescimento populacional onde $P_0 = 2$ e $r = 1,1$. A população cresce de forma exponencial. A linha que vemos na figura 1 ligando os pontos serve apenas para guiar os olhos, pois a dinâmica é discreta.

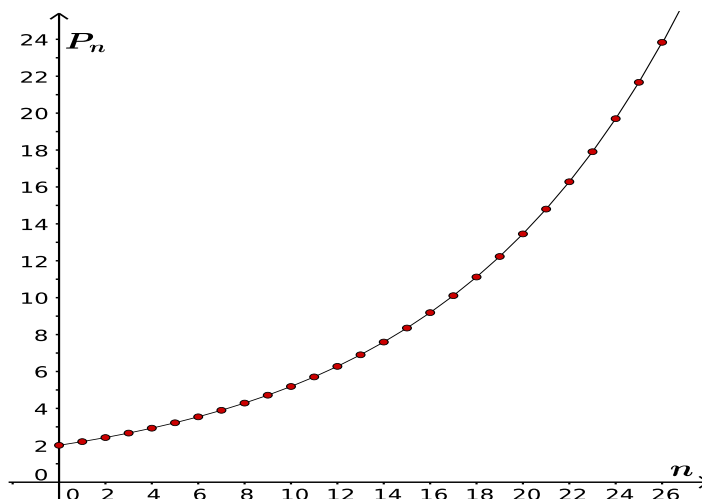


Figura 1: Dinâmica do crescimento populacional $P_{n+1} = rP_n$.

Percebemos então que podemos, para qualquer valor de r , determinar o destino dessa população. Este modelo populacional não pode ser utilizado para uma análise mais realista, quando se deseja prever o comportamento de uma população de indivíduos qualquer, pois sabemos que diversos outros parâmetros precisam ser considerados, tais como: condições climáticas, ofertas de alimentos e limitação de espaço, dentre outros fatores.

Em 1976, o Biólogo Robert May publicou um artigo descrevendo um modelo matemático que passou a ser bastante aceito e ainda hoje é frequentemente usado quando se deseja prever o crescimento de populações biológicas [3, 2]. Pouco tempo depois Mitchell Feigenbaum [4] descobriu características importantes no que se refere ao comportamento dessas funções. Este modelo por ser bastante simples, do ponto de vista matemático, passou a ser muito explorado no estudo contemporâneo do caos.

A construção desse modelo se dá da seguinte maneira: suponha que se deseja avaliar o crescimento ou decréscimo de uma população de moscas em um intervalo de tempo, chamaremos de N_1 , o número de indivíduos, decorrido o tempo, sendo N_0 o tamanho inicial dessa população. Utilizando o mesmo modelo populacional visto anteriormente temos:

$$N_1 = AN_0$$

Sendo A o número que depende das condições do meio ambiente (disponibilidade de alimento, água, condições climáticas, etc). Sabemos que se o valor de A se mantiver maior que 1 para as gerações subsequentes, a população irá aumentar levando à explosão populacional. Mas se A se mantiver menor que 1, nas gerações subsequentes, a população tende a diminuir até a sua extinção.

Para tornar esse modelo mais realista, a solução encontrada foi introduzir um termo proporcional a N^2 , de modo que este atue como um limitante. Este termo por si só seria irrelevante para pequenos valores de N , mas fundamental quando N aumenta. Assim, temos

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2$$

Usando esta equação repetidas vezes para ver o comportamento de N com o passar das gerações, temos:

$$N_2 = AN_1 - BN_1^2$$

$$N_3 = AN_2 - BN_2^2$$

$$\vdots$$

$$N_{n+1} = AN_n - BN_n^2 \tag{1}$$

Como se espera $N_n \geq 0 \forall n$ temos da expressão acima

$$AN_n - BN_n^2 \geq 0$$

Para $N_n \neq 0$ temos

$$A - BN_n \geq 0,$$

ou seja,

$$N_n \leq A/B$$

Esta desigualdade nos mostra que a população máxima é dada por

$$N_{\max} = A/B$$

Dividindo (1) por N_{\max} , temos:

$$\frac{N_{n+1}}{N_{\max}} = A \frac{N_n}{N_{\max}} - B \frac{N_n^2}{N_{\max}} \frac{1}{N_{\max}}$$

Fazendo $P_n = \frac{N_n}{N_{\max}}$, temos

$$P_{n+1} = AP_n - BP_n^2 \cdot \frac{A}{B}$$

Desta forma, P_n representa a fração dessa população máxima de indivíduos vivos na geração n , de modo que $0 \leq P_n \leq 1$. Da expressão acima temos o mapa logístico, dado por

$$P_{n+1} = AP_n(1 - P_n).$$

Neste caso, temos A como sendo uma constante que depende das condições ambientais e assumiremos que $0 \leq A \leq 4$.

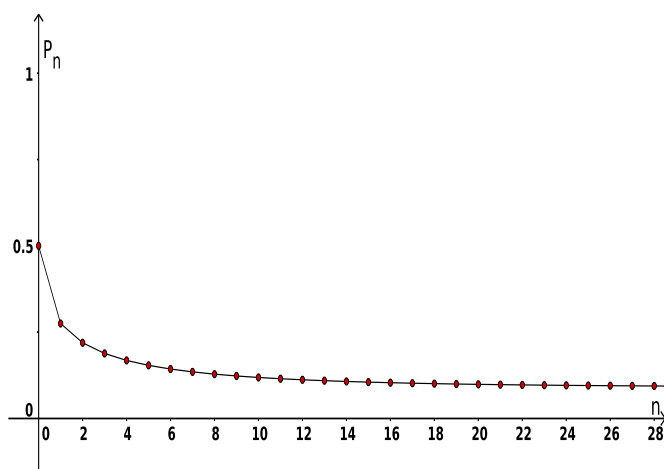


Figura 2: Dinâmica do crescimento populacional $P_{n+1} = AP_n(1 - P_n)$.

Notemos que, na ausência do fator $(1 - P_n)$, teríamos o modelo de crescimento exponencial, visto anteriormente na figura 1. Se $P_n = 0$ logo, temos que $P_{n+1} = 0$, ou seja, não haveria indivíduos presentes. Se $P_n = 1$, então $P_{n+1} = 0$. Portanto, para determinarmos o crescimento ou a diminuição de uma população de indivíduos através desse modelo, devemos iterar a função logística $F_A(x) = Ax(1 - x)$ que é uma função quadrática. A figura 2 mostra o comportamento da população durante as 28 primeiras gerações para $P_0 = 0,5$ e $A = 1,1$.

Nas situações descritas acima foi necessário aplicar um processo repetidas vezes. No caso de uma função, iterar significa compor essa função com ela mesma. Por exemplo, para a função F , $F^2(x)$ é a segunda iteração de F . Já $F^3(x)$ é a terceira iteração de F , a qual podemos designá-la como $F(F(F(x)))$. Generalizando, podemos dizer que $F^n(x)$ é a n -ésima iterada, ou seja, a n -ésima composição de F com ela mesma. Por exemplo, dada $F(x) = 2x+1$, temos

$$F^2(x) = 2(2x + 1) + 1$$

$$F^3(x) = 2(2(2x + 1) + 1) + 1$$

Outro exemplo, sendo $F(x) = x^2 - 1$, temos

$$F^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1$$

$$F^3(x) = ((x^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1$$

Antes de prosseguirmos em nosso estudo, precisamos explicar o conceito de órbita e os tipos de órbita.

3 Conceitos básicos

Associado ao processo iterativo de uma função temos o conceito de órbita, que formalizamos a seguir.

3.1 Órbitas

Definição 3.1 Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos a órbita (ou trajetória) de x_0 sobre F como sendo uma sequência de pontos: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ onde x_0 é a origem da órbita, também chamada de condição inicial e

$$x_1 = F(x_0)$$

$$x_2 = F^2(x_0)$$

$$\vdots$$

$$x_n = F^n(x_0)$$

$$\vdots$$

Exemplo 3.1 Seja a função $F(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 16$. Note que os primeiros pontos da órbita da função são:

$$x_0 = 16$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt{16} = 4 \\
 x_2 &= \sqrt{4} = 2 \\
 x_3 &= \sqrt{2} = 1,41\dots
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 Seja a função $F(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ e $x_0 = \frac{5}{4}$. A figura 3 ilustra o comportamento da órbita de x_0 . Observe que a órbita de x_0 se aproxima de um determinado valor.

Exemplo 3.3 Na função $F(x) = x^2 - 1$ a órbita de $x_0 = 1,5$ é a sequência de pontos representada na figura 4. Observe que nesse caso a órbita de x_0 se aproxima alternadamente de dois valores distintos à medida que n aumenta.

Exemplo 3.4 A figura 5 ilustra a órbita da função $F(x) = x^2 - 2$, sendo $x_0 = -0,5$. Note que x_0 apresenta uma órbita irregular, parecendo não haver um comportamento previsível.

Assim como nos casos anteriores, a dinâmica apresentada nas figuras 3, 4 e 5 é discreta. Portanto, a linha que liga os pontos tem a finalidade de guiar os olhos no resultado do processo iterativo.

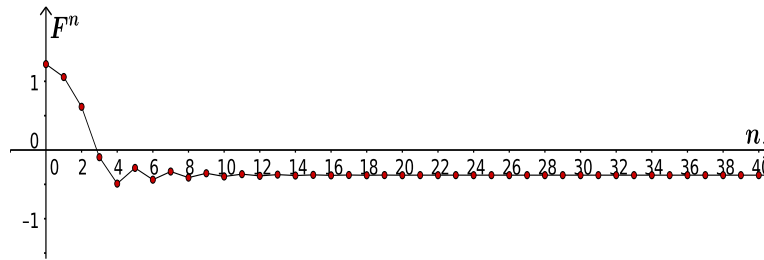


Figura 3: Órbita de $x_0 = 5/4$ sobre $F(x) = x^2 - 1/2$.

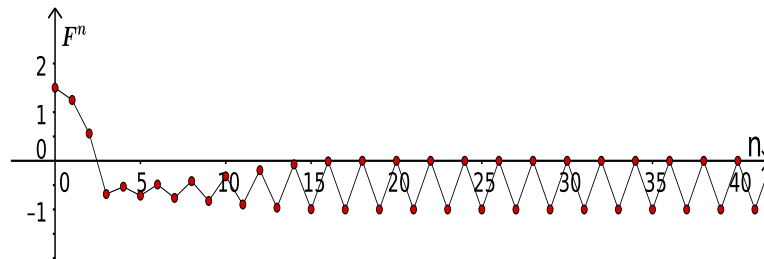


Figura 4: Órbita de $x_0 = 1,5$ sobre $F(x) = x^2 - 1$.

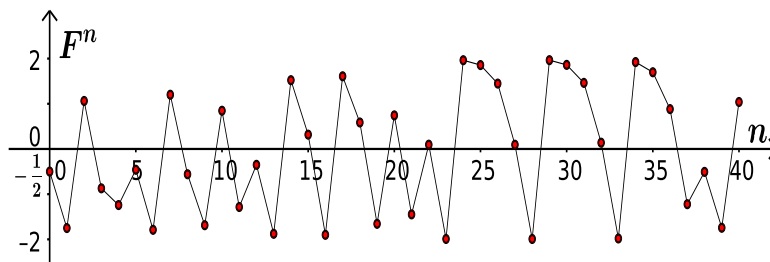


Figura 5: Órbita de $x_0 = -1/2$ sobre $F(x) = x^2 - 2$.

3.2 Tipos de órbitas

Dentre os diversos tipos de órbitas em um sistema dinâmico, a mais simples é a órbita do ponto fixo. O ponto fixo da função F é o valor de x que satisfaz a condição

$$F(x_0) = x_0.$$

Logo $F^2(x_0) = F(F(x_0)) = F(x_0) = x_0$. Podemos então generalizar

$$F^n(x_0) = x_0$$

Portanto, a órbita de um ponto fixo é uma sequência constante

$$\{x_0, x_0, x_0, \dots\}.$$

Para encontrarmos pontos fixos, resolvemos a equação

$$F(x) = x.$$

Exemplo 3.5 Na função $F(x) = x^2 - 2$, os pontos fixos serão as soluções da equação

$$x^2 - 2 = x.$$

Logo, 2 e -1 são esses pontos.

Exemplo 3.6 Os pontos fixos de $F(x) = x^3$, são: 0, 1 e -1 .

Os pontos fixos também podem ser determinados geometricamente observando a intersecção do gráfico da função F com a diagonal descrita pela função identidade $y = x$. A figura 6 mostra os pontos fixos da função $F(x) = x^2 - 2$. Note que existem dois pontos de intersecção da reta $y = x$ com o gráfico de F .

Exemplo 3.7 A figura 7 ilustra o gráfico da função $F(x) = \sin x$ e da reta $y = x$. Como podemos notar, $F(x)$ tem seu ponto fixo sendo $x = 0$. Note que esse ponto fixo é único, uma vez que só existe um ponto de intersecção do gráfico de F com a diagonal $y = x$.

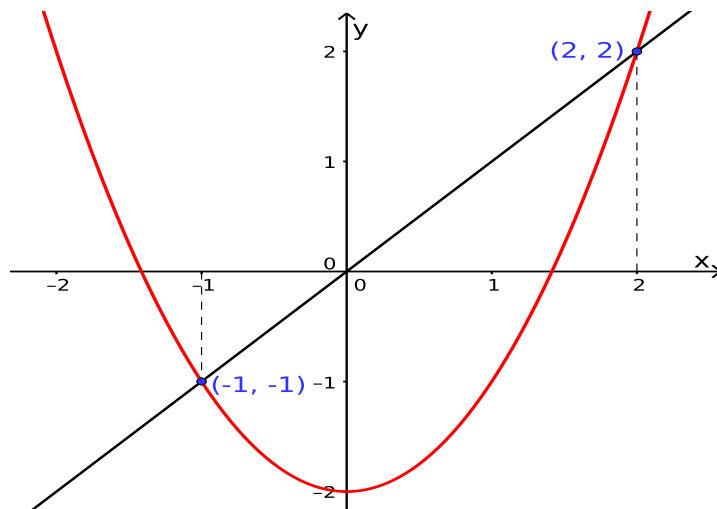


Figura 6: Os pontos fixos de $F(x) = x^2 - 2$ são -1 e 2 .

Exemplo 3.8 A função $F(x) = \cos x$ tem seu ponto fixo em $x = 0,739085\dots$ (Figura 8).

Uma órbita é chamada de cíclica, ou periódica, de período n se $F^n(x_0) = x_0$ para algum $n > 0$ e $F^k(x_0) \neq x_0$ para $k < n$. Portanto, se x_0 é ponto periódico, então a órbita de x_0 é a repetição da sequência de números $x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), \dots$. Note que os pontos fixos são órbitas periódicas de período 1.

Exemplo 3.9 Na função $F(x) = 1 - x^2$ temos $F(0) = 1$ e $F(1) = 0$. Neste caso, a órbita de F é periódica e seu período é igual a 2. Logo, a órbita de $x_0 = 0$ em $F(x) = 1 - x^2$ é $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

Exemplo 3.10 Dada a função $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, temos $F(0) = 1$, $F(1) = 2$ e $F(2) = 0$. Portanto sua órbita é formada por $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$, ou seja, temos uma órbita de período 3.

Existem também as órbitas eventualmente fixas e eventualmente periódicas.

Definição 3.2 Um ponto x_0 é chamado eventualmente fixo (ou eventualmente periódico) se x_0 inicialmente não é fixo (ou periódico), mas se após um número de iterações a órbita é um ponto fixo (ou periódica).

Exemplo 3.11 Seja a função $F(x) = x^2 - 1$. Note que se considerarmos $x_0 = -1$ temos $F(-1) = 0$ e $F(0) = -1$. Então a órbita de -1 é cíclica com período 2. Porém, o ponto $x_0 = \sqrt{2}$ é eventualmente periódico para F pois $F(\sqrt{2}) = 1$, $F(1) = 0$, $F(0) = -1$ e $F(-1) = 0$. Resumindo, a órbita de $x_0 = \sqrt{2}$ em $F(x) = x^2 - 1$ é:

$$\sqrt{2}, 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

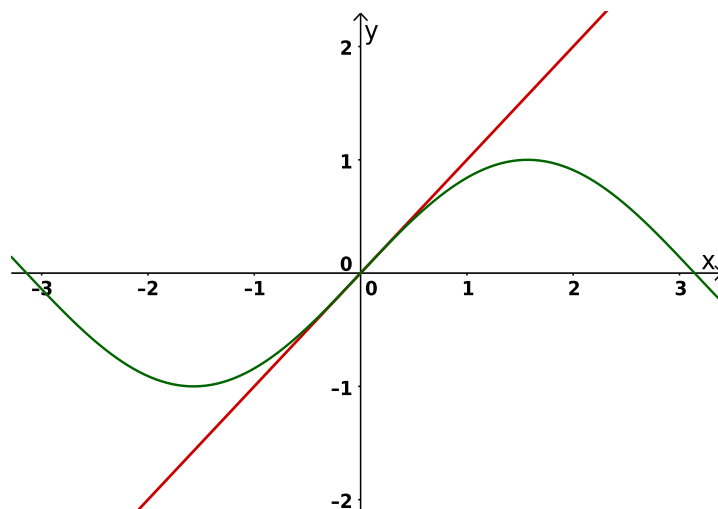


Figura 7: O ponto fixo de $F(x) = \sin x$ é zero.

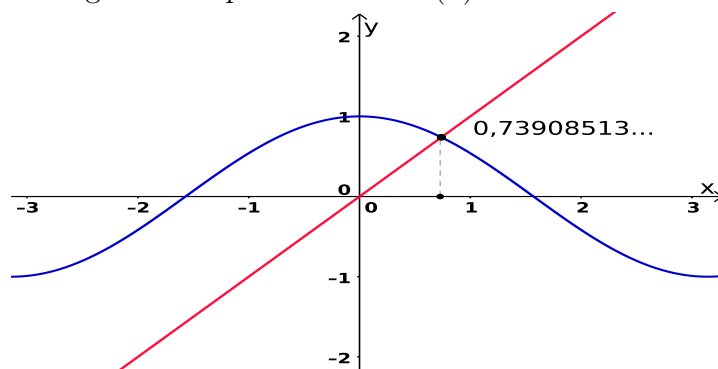


Figura 8: O ponto fixo de $F(x) = \cos x$ é 0,73908513...

A seguir descrevemos o processo chamado de análise gráfica. Trata-se de uma ferramenta importante na compreensão da dinâmica de mapeamentos unidimensionais que nos permite utilizar o gráfico de uma função para determinar o comportamento das órbitas.

4 Análise gráfica

Para realizarmos a análise gráfica vamos considerar, assim como Devaney [1], F uma função real, contínua de uma variável e $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto qualquer no seu domínio. Traçamos a reta diagonal $y = x$ no gráfico da função F como visto na figura 9. O leitor interessado encontra no Apêndice A, maiores detalhes sobre a construção dos gráficos de análise gráfica.

Para encontrar a órbita de x_0 , considere o ponto (x_0, x_0) sobre a reta $y = x$. Partindo deste ponto, traçamos uma linha vertical até que esta intercepte o gráfico de F no ponto $(x_0, F(x_0))$. Partindo agora deste ponto, traçamos uma linha horizontal até que esta inter-

cepte a linha diagonal $y = x$, no ponto $(F(x_0), F(x_0))$. Repetimos o processo e obtemos o ponto $(F^2(x_0), F^2(x_0))$ e assim sucessivamente. A "escada" resultante deste processo nos fornece graficamente a órbita de x_0 .

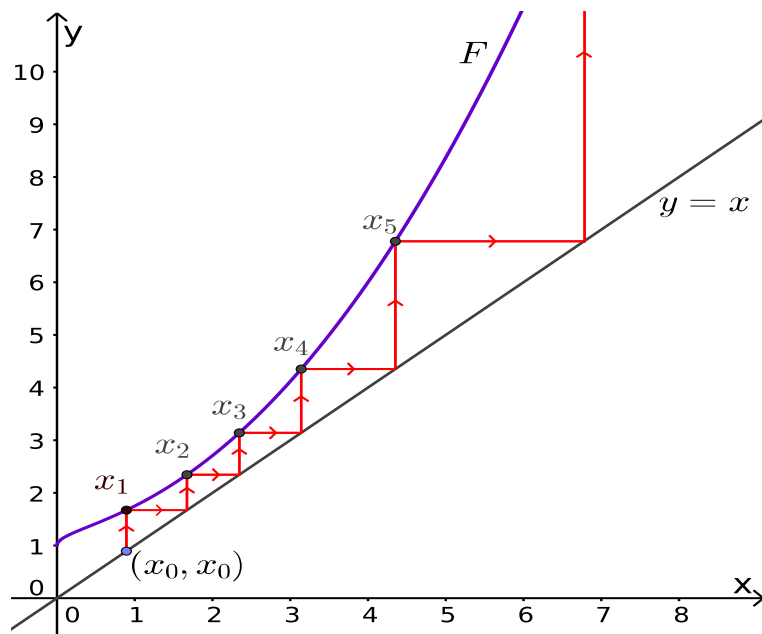


Figura 9: Análise gráfica ilustrando a órbita de x_0 quando iterada usando a função F .

É importante observar na figura 10, que representa a função $F(x) = \sqrt{x}$, que para qualquer $x_0 > 0$ teremos formada uma "escada" que converge para o ponto de intersecção do gráfico de F com a diagonal $y = x$. Ou seja, a órbita de x_0 converge para o ponto fixo.

A figura 11 ilustra uma órbita típica quando iterada usando a função $F(x) = \cos x$, onde observamos a convergência da órbita para o ponto fixo (intersecção do gráfico de F com a diagonal).

Através da análise gráfica percebemos, para alguns casos, que órbitas de um determinado x_0 eventualmente voltam para o ponto da diagonal (x_0, x_0) , ou seja, $F^n(x_0) = x_0$. Quando isto acontece, temos uma órbita periódica de período n . A figura 12 ilustra a representação por meio de análise gráfica da órbita de $x_0 = 0$ para a função $F(x) = x^2 - 1$, onde notamos que a órbita apresenta período 2. Na figura 13 mostramos a órbita para um $x_0 > 0$ e a mesma função $F(x)$. Notamos que a órbita, neste caso, aproxima-se assintoticamente de um regime cíclico de período 2. Já na figura 14 a órbita da função $F(x) = x^2 - 1/2$ converge para um ponto fixo.

Para algumas funções, é impossível prever o comportamento de suas órbitas. A figura 15, ilustra a análise gráfica aplicada à função $F(x) = x^2 - 2$, que apresenta uma órbita com padrão imprevisível. Note que a análise gráfica forma um emaranhado complicado de linhas.

Existem, também, funções onde é possível prever o comportamento de todas as suas

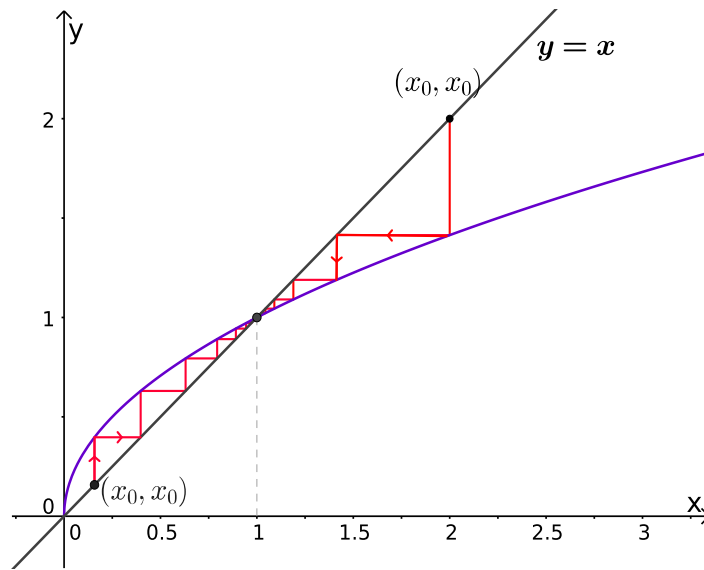


Figura 10: Análise gráfica de $F(x) = \sqrt{x}$ ilustrando a órbita de $0 < x_0 < 1$ e a órbita de $x_0 > 1$.

órbitas. A função $F(x) = x^3$, por exemplo, tem seus pontos fixos em 0, -1, e 1. Estas são as soluções da equação $x^3 = x$.

Se $|x_0| < 1$ a órbita de x_0 tende para o ponto fixo zero, como ilustra a figura 16. Se $|x_0| > 1$ então a órbita de x_0 tende a $\pm\infty$ quando n tende a ∞ . A figura 17 ilustra as primeiras iterações correspondentes a $|x_0| > 1$.

Neste caso, é possível analisar facilmente o comportamento de todas as órbitas de x_0 .

4.1 Teorema do ponto fixo

Os pontos fixos e periódicos representam importantes órbitas de um sistema dinâmico, por isso é importante que sejamos capazes de identificá-los. De acordo com o que vimos anteriormente, às vezes não é simples localizar esses pontos, tanto analítica quanto graficamente.

Veremos agora o Teorema do Valor Médio e uma de suas aplicação simples em que se apresenta um importante critério para a existência do ponto fixo.

Teorema 4.1 *Suponha que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Suponha que exista y_0 situado entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um x_0 no intervalo $[a, b]$ com $F(x_0) = y_0$.*

Como consequência do teorema, temos:

Teorema 4.2 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) *Suponha $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua. Então existe um ponto fixo para F em $[a, b]$.*

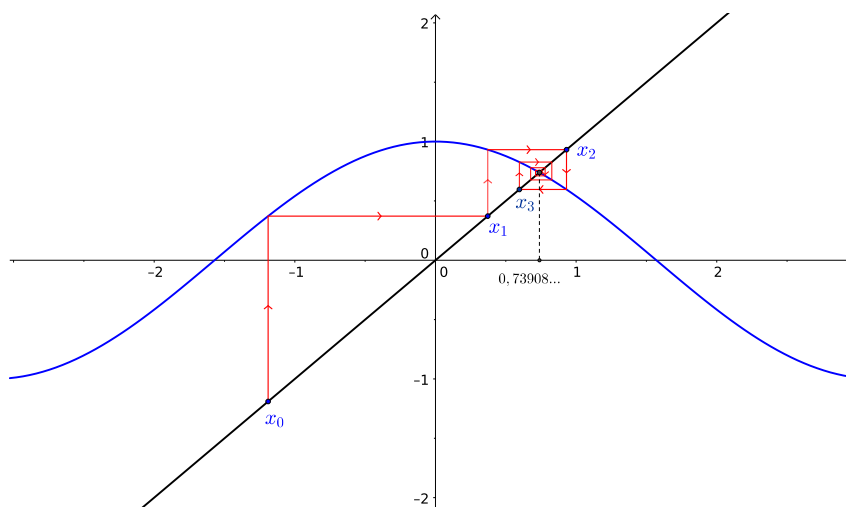


Figura 11: Análise gráfica mostrando o processo iterativo de $F(x) = \cos x$ para $-1,5 < x_0 < -1$.

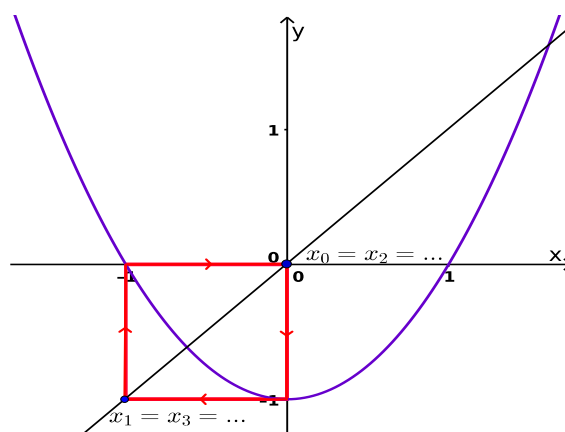


Figura 12: Análise gráfica de $F(x) = x^2 - 1$ ilustrando uma órbita de período 2.

Demonstração: Suponha $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $H(x) = F(x) - x$. Temos então que H é uma função contínua, pois F é contínua. Se $F(a), F(b) \in [a, b]$, então $F(a) \geq a$ e $F(b) \leq b$, daí, temos: $F(a) - a = H(a) \geq 0$ e $F(b) - b = H(b) \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) = 0$, ou seja, $H(x_0) = F(x_0) - x_0 = 0$. Logo $F(x_0) = x_0$. Portanto, x_0 é um ponto fixo de F em $[a, b]$. \square

Um valor de x_0 próximo de um ponto fixo pode gerar uma trajetória que se afasta ou se aproxima assintoticamente deste ponto fixo. Isto nos leva ao conceito de estabilidade, apresentado a seguir.

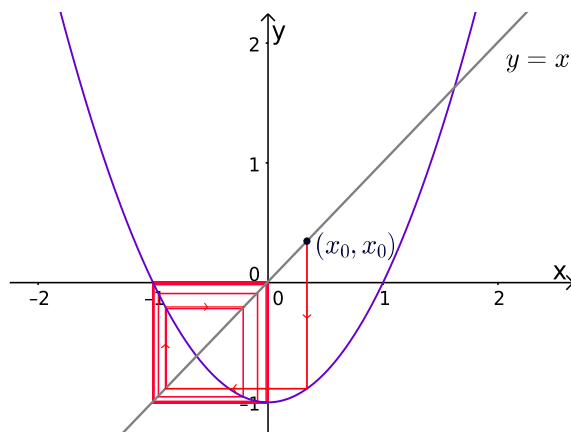


Figura 13: Análise gráfica de $F(x) = x^2 - 1$ mostrando uma órbita convergindo assintoticamente para um regime de período 2.

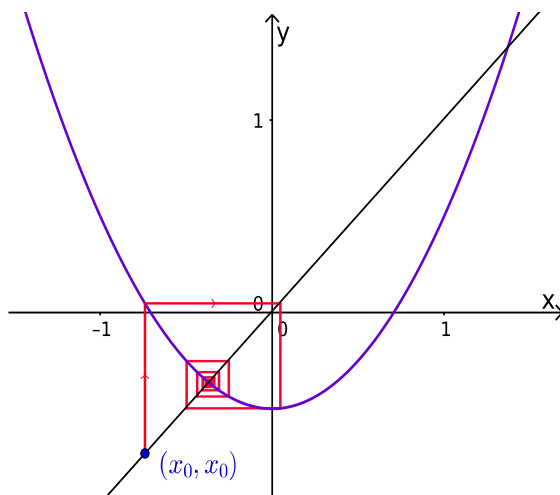


Figura 14: Gráfico de $F(x) = x^2 - 1/2$.

4.2 Estabilidade de pontos fixos

Considere a função quadrática $F(x) = x^2$. Esta função possui dois pontos fixos: 0 e 1. Vamos observar o que acontece com as órbitas de pontos próximos a estes pontos fixos. Se considerarmos $-1 < x_0 < 1$, iremos observar que as órbitas de x_0 irão se aproximar de zero, não importando o quão perto de 1 o x_0 esteja. Por exemplo:

$$0, 1; 0, 01; 0, 0001; 0, 00000001; \dots$$

$$0, 9; 0, 81; 0, 6561; 0, 430467; \dots$$

Portanto, se $-1 \leq x_0 < 1$, então $F^n(x_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $x_0 > 1$ a órbita de x_0 se move para longe de 1, ou seja, $F^n(x_0) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Podemos então, resumir da seguinte forma: as órbitas de pontos próximos a zero são atraídas por ele

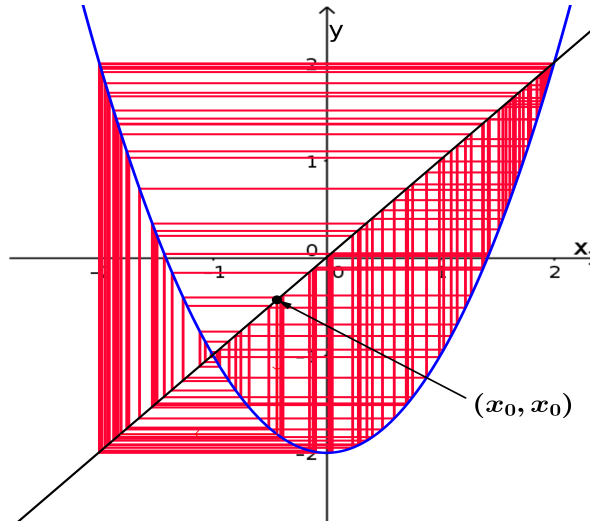


Figura 15: Gráfico de $F(x) = x^2 - 2$

e as órbitas de pontos próximos a 1 são repelidas por ele, ou seja, tem órbitas que se movem para distante de 1 conforme podemos ver na figura 18. O ponto 1 é um ponto fixo repulsor de $F(x) = x^2$, já o zero é um ponto fixo atrator.

Definição 4.1 *Suponha x^* um ponto fixo de F . Então x^* é um ponto fixo atrator se $|F'(x^*)| < 1$. O ponto x^* é um ponto fixo repulsor se $|F'(x^*)| > 1$. Se $|F'(x^*)| = 1$, o ponto fixo é chamado de neutro.*

Exemplo 4.1 *Seja $F(x) = 2x(1 - x)$. Temos os pontos $x^* = 0$ e $x^* = \frac{1}{2}$ como pontos fixos de F . Como $F(x) = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2$, logo $F'(x) = 2 - 4x$. Então $F'(0) = 2$ e $F'(\frac{1}{2}) = 0$. No caso temos $F'(0) > 1$, logo $x^* = 0$ é um ponto fixo repulsor. Temos ainda que $F'(\frac{1}{2}) < 1$, logo $x^* = \frac{1}{2}$ é um ponto fixo atrator conforme figura 19.*

A seguir, enunciaremos um importante teorema do Cálculo que irá nos auxiliar a justificar a existência de pontos fixos atratores e repulsores.

Teorema 4.3 (Teorema do valor médio) *Suponha F uma função diferenciável no intervalo $a \leq x \leq b$. Então existe c entre a e b para os quais a equação seguinte é verdadeira:*

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

A demonstração desse teorema o leitor pode encontrar em [6]. Veremos agora a importância desse teorema na demonstração dos Teoremas a seguir.

Teorema 4.4 (Teorema do Ponto Fixo Atrator) *Suponha que x^* é um ponto fixo atrator para F . Então existe um intervalo I que contém x^* em seu interior no qual a seguinte condição é satisfeita: Se $x \in I$, então $F^n(x) \in I$ para todo n e $F^n(x) \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$.*

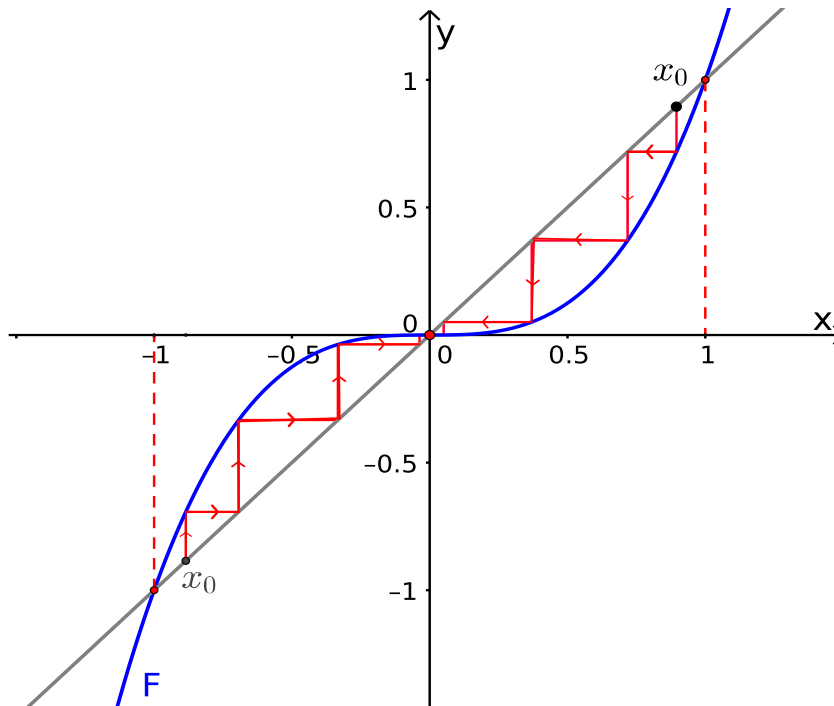


Figura 16: Órbita de $F(x) = x^3$ para $|x_0| < 1$.

Demonstração: Se $|F'(x^*)| < 1$, existe um número $\lambda > 0$ tal que $1 < \lambda < |F'(x^*)|$. Podemos escolher um número $\delta > 0$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ dado x pertencente ao intervalo $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Agora considere p um ponto qualquer em I . Pelo Teorema do Valor Médio

$$\frac{|F(p) - F(x^*)|}{|p - x^*|} > \lambda,$$

logo

$$|F(p) - F(x^*)| > \lambda|p - x^*|.$$

Se x^* é um ponto fixo, segue que

$$|F(p) - x^*| < \lambda|p - x^*|.$$

Isto significa que a distância de $F(p)$ a x^* é menor que a distância de p a x^* , sendo $0 < \lambda < 1$. Em particular, $F(p)$ também se encontra no intervalo I . Portanto, podemos aplicar o mesmo argumento para $F(p)$ e $F(x^*)$ e encontramos

$$\begin{aligned} |F^2(p) - x^*| &= |F^2(p) - F^2(x^*)| \\ &< \lambda|F(p) - F(x^*)| \\ &< \lambda^2|p - x^*| \end{aligned}$$

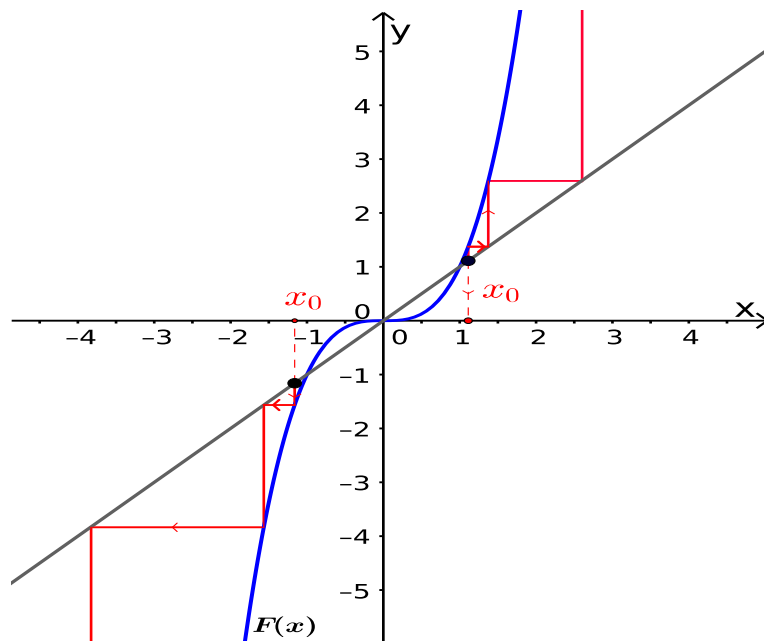


Figura 17: Órbita de $F(x) = x^3$ para $|x_0| > 1$.

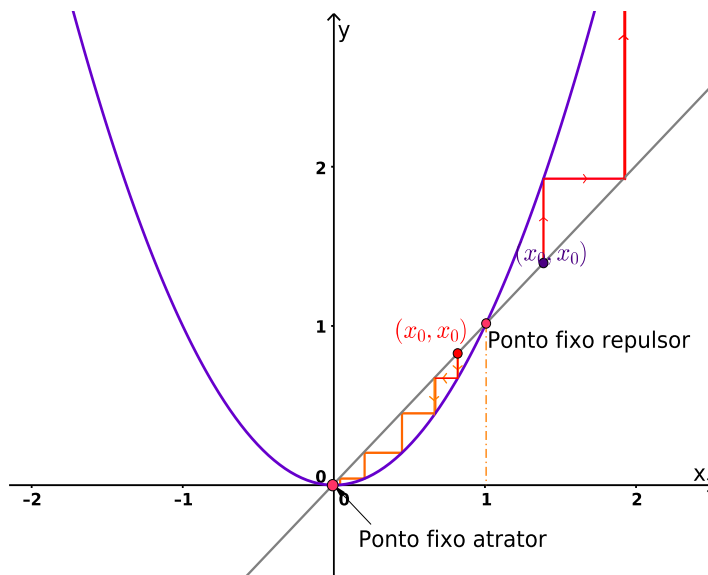


Figura 18: O ponto 1 é um ponto fixo repulsor de $F(x) = x^2$, já o zero é um ponto fixo atrator.

Sendo $\lambda < 1$, temos $\lambda^2 < \lambda$. Isto significa que $F^2(p)$ é ainda mais próximo de x^* que $F(p)$

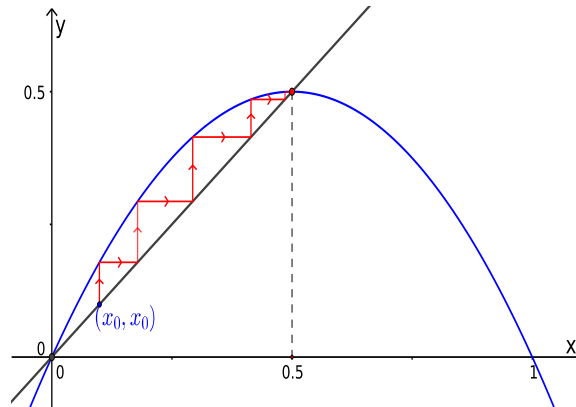


Figura 19: $x^* = \frac{1}{2}$ é um ponto fixo atrator de $F(x) = 2x(1 - x)$ e $x^* = 0$ é um ponto fixo repulsor.

de x^* . Assim, por esse mesmo argumento, temos que para qualquer $n > 0$,

$$|F^n(p) - x^*| < \lambda^n |x - x^*|.$$

Como $\lambda^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $F^n(p) \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Finaliza-se assim a prova. \square

Teorema 4.5 (Teorema do Ponto Fixo Repulsor) *Se x^* é um ponto fixo repulsor para F , então existe um intervalo I que contém x^* em seu interior e que satisfaz a seguinte condição: se $x \in I$ e $x \neq x^*$, então existe um inteiro $n > 0$ tal que $F^n(x) \notin I$.*

Demonstração: Se $|F'(x^*)| > 1$, existe um número $\lambda > 1$ tal que $|F'(x^*)| > \lambda > 1$. Podemos escolher um número $\delta > 0$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ dado x pertencente ao intervalo $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Agora considere p um ponto qualquer em I , sendo $p \neq x^*$. Pelo Teorema do Valor Médio

$$\frac{|F(p) - F(x^*)|}{|p - x^*|} > \lambda,$$

logo

$$|F(p) - F(x^*)| > \lambda |p - x^*|.$$

Se x^* é um ponto fixo, segue que

$$|F(p) - x^*| > \lambda |p - x^*|.$$

Isto significa que a distância de $F(p)$ a x^* é maior que a distância de p a x^* , sendo $\lambda > 1$. Se $|p - x^*|\lambda > \delta$ tem-se que $F(p) \notin I$ encerrando a demonstração. Caso contrário temos

$F(p) \in I$. Aplicando o mesmo argumento para $F(p)$ e $F(x^*)$ e encontramos

$$\begin{aligned} |F^2(p) - x^*| &= |F^2(p) - F^2(x^*)| \\ &> \lambda |F(p) - F(x^*)| \\ &> \lambda^2 |p - x^*| \end{aligned}$$

Sendo $\lambda > 1$, temos $\lambda^2 > \lambda$. Isto significa que $F^2(p)$ é mais distante de x^* que $F(p)$ de x^* . Assim, por esse mesmo argumento, temos que para qualquer $n > 0$,

$$|F^n(p) - x^*| > \lambda^n |p - x^*|.$$

Como $\lambda^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então $F^n(p) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, existe n tal que $x_n \notin I$. Finaliza-se assim a prova. \square

De forma análoga, os demais pontos periódicos também podem ser classificados como atrator, repulsor ou neutro. Por exemplo, $x = 0$ e $x = -1$ formam uma órbita de período 2 quando iterados pela função $F(x) = x^2 - 1$. Os pontos 0 e -1 são os pontos fixos da segunda iterada $F^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$.

Temos então:

$$(F^2)'(x) = 2(x^2 - 1)2x = 4x(x^2 - 1)$$

$$(F^2)'(0) = 0 \Rightarrow |(F^2)'(0)| < 1$$

$$(F^2)'(-1) = 0 \Rightarrow |(F^2)'(-1)| < 1$$

Assim, os pontos fixos de F^2 , $x^* = 0$ e $x^* = -1$, são pontos fixos atratores.

Um ponto periódico de período n é atrator (ou repulsor) se este é um ponto fixo atrator (ou repulsor) para F^n . Para determinarmos se um ponto periódico x_0 de período n é atrator ou repulsor, devemos calcular a derivada de F^n para x_0 . Lembrando que F^n é a n -ésima iterada de F , e não a n -ésima potência de F . Assim, precisamos utilizar a regra da cadeia. Sabemos que se F e G são funções diferenciáveis, então a derivada da composta é dada por: $(F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$

Em particular

$$(F^2)'(x_0) = F'(F(x_0)) \cdot F'(x_0)$$

$$(F^2)'(x_0) = F'(x_1) \cdot F'(x_0) \text{ e}$$

$$(F^3)'(x_0) = F'(F^2(x_0)) \cdot (F^2)'(x_0)$$

$$(F^3)'(x_0) = F'(x_2) \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0)$$

Assim, pela regra da cadeia, temos: Se x_0, x_1, \dots, x_{n-1} formam um ciclo de período n em F , com $x_i = F^i(x_0)$. Então:

$$(F^n)'(x_0) = F'(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot F'(x_1) \cdot F'(x_0).$$

Enfim, a derivada de F^n em x_0 é o produto das derivadas de F em todos os pontos da órbita. Logo, se módulo do produto das derivadas for menor que 1 a órbita é atratora, se módulo do produto das derivadas for maior que 1 a órbita é repulsora e se o módulo do produto das derivadas for igual a 1, a órbita é neutra.

Estamos prontos para estudar o processo iterativo de funções que apresentam uma constante ajustável chamada de parâmetro de controle. Ao variar o parâmetro de controle, a órbita de uma condição inicial pode mudar drasticamente de comportamento. Quando isto ocorre, dizemos que o sistema passou por um evento de *bifurcação* [3]. Estudamos este assunto a seguir.

5 Bifurcação

Nesta seção, estudaremos a família de funções quadráticas do tipo $Q_c(x) = x^2 + c$, sendo c uma constante ajustável que chamamos de parâmetro. Nosso objetivo nesse capítulo é entender o comportamento desta família de funções, à medida em que se varia o parâmetro c .

Começaremos, então, estudando os pontos fixos da função Q_c . Assim, resolvemos a equação

$$x^2 + c = x$$

obtendo os pontos:

$$x_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$$

$$x_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$$

Inicialmente, podemos constatar que x_+ e x_- são reais se e, somente se, $1 - 4c \geq 0$ ou $c \leq \frac{1}{4}$. Se tivermos $c > \frac{1}{4}$, não haverá pontos fixos, se $c = \frac{1}{4}$, temos $x_+ = x_- = \frac{1}{2}$. Se $c < \frac{1}{4}$, temos $x_+ \neq x_-$ e $x_+ > x_-$ sempre.

Se $c > \frac{1}{4}$, o gráfico de f será uma parábola localizada acima da reta $y = x$ e assim não haverá interseção com a mesma, como mostra a figura 20. Neste caso, não temos ponto fixo. Todas as órbitas de Q_c tendem para o infinito.

Quando $c = \frac{1}{4}$, o gráfico de f toca a diagonal em um único ponto. Temos, assim, um ponto fixo como mostra a figura 21. Nesta situação, encontramos nossa primeira bifurcação, a qual é chamada de bifurcação de sela-nó ou bifurcação tangente.

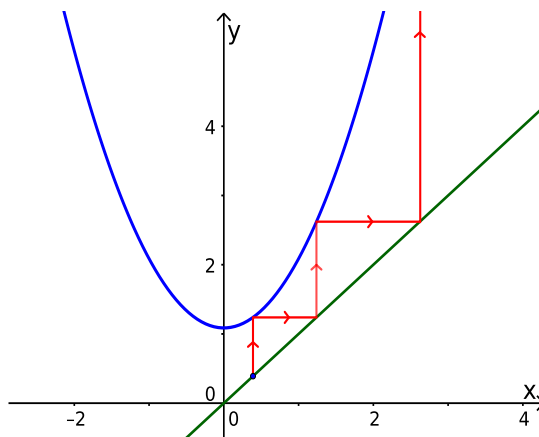


Figura 20: As órbitas de $Q_c(x) = x^2 + c$ para $c > 1/4$ tendem para o infinito.

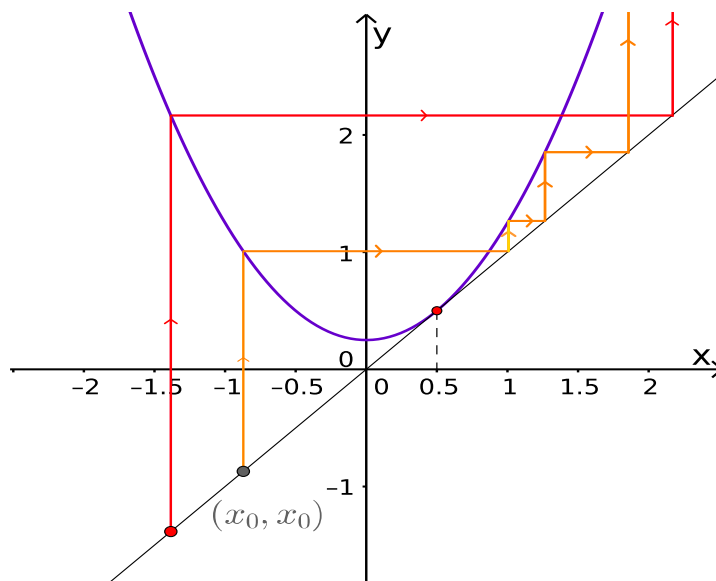


Figura 21: $Q_c(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ tem apenas um ponto fixo.

Quando $c < \frac{1}{4}$, o gráfico de f toca a diagonal em dois pontos. Esses dois pontos são os pontos fixos.

Vimos, na seção anterior, que podemos verificar se um ponto fixo é atrator, repulsor ou neutro a partir do cálculo da derivada da função. Portanto, de $Q_c(x) = x^2 + c$, temos $Q'_c(x) = 2x$.

Vamos agora estudar os valores de $|Q'_c(x_+)|$ e $|Q'_c(x_-)|$ para que possamos determinar se os pontos fixos são atratores, repulsores ou neutros. Desde que $Q'_c(x) = 2x$, encontramos

$$Q'_c(x_+) = 1 + \sqrt{1 - 4c}$$

$$Q'_c(x_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c}$$

Como vimos anteriormente, todas as órbitas tendem ao infinito quando $c > 1/4$. A análise de estabilidade que vamos obter a partir das equações acima se aplica ao caso $c \leq 1/4$. Para $c = 1/4$ temos $Q'_c(x_+) = Q'_c(x_-) = 1$, ou seja, $x_+ = x_- = 1/2$ é um ponto fixo neutro. Para $c < 1/4$ temos $Q'_c(x_+) > 1$. Portanto, x_+ é um ponto fixo neutro quando $c = \frac{1}{4}$ e um ponto fixo repulsor quando $c < \frac{1}{4}$.

O ponto fixo x_- é atrator se $|Q'_c(x_-)| < 1$, ou seja,

$$-1 < Q'_c(x_-) < 1$$

$$-1 < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1$$

$$2 > \sqrt{1 - 4c} > 0$$

$$4 > 1 - 4c > 0$$

$$-3/4 < c < 1/4.$$

Portanto o ponto x_- é atrator se $-3/4 < c < 1/4$. Se $c = -\frac{3}{4}$, então $|Q'_c(x_-)| = 1 - \sqrt{1 + 3} = -1$. Portanto, x_- é um ponto fixo neutro se $c = -\frac{1}{4}$ ou $c = -\frac{3}{4}$ e repulsor se $c < -\frac{3}{4}$.

Proposição 5.1 *Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$, temos:*

1. *Todas as órbitas tendem para o infinito se $c > \frac{1}{4}$;*
2. *Quando $c = \frac{1}{4}$, Q_c possui um único ponto fixo $x_+ = x_- = \frac{1}{2}$ e este ponto é neutro;*
3. *Se $c < \frac{1}{4}$, Q_c possui dois pontos fixos distintos x_+ e x_- . O ponto fixo x_+ é sempre repulsor e*
 - (a) *se $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, então x_- é atrator;*
 - (b) *se $c = -\frac{3}{4}$, então x_- é neutro;*
 - (c) *se $c < -\frac{3}{4}$, então x_- é repulsor.*

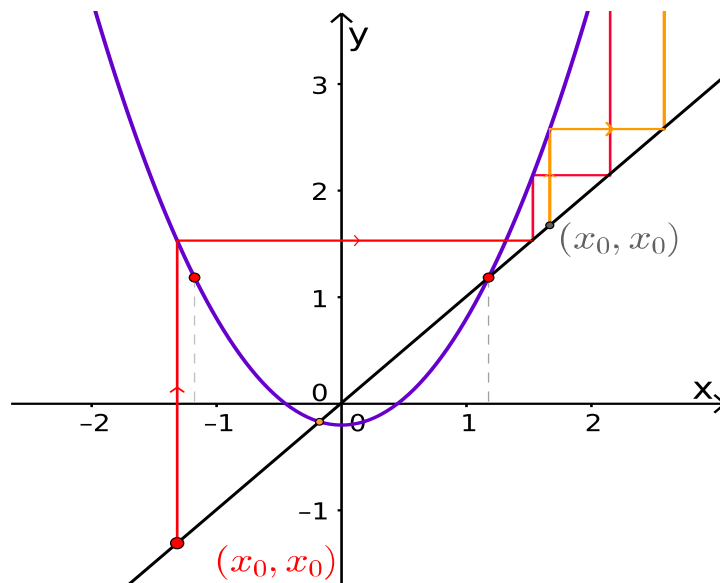


Figura 22: Na função $Q_c(x) = x^2 + c$, se $c \leq 1/4$ para todo $x > x_+$ ou $x < -x_+$ suas órbitas tendem para o infinito.

Observamos que $Q_c(-x_+) = x_+$, então $-x_+$ é um ponto eventualmente fixo. A análise gráfica mostra que se $x > x_+$ ou $x < -x_+$, então a órbita de x tende para o infinito.(Figura 22).

Para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ todas as órbitas no intervalo $(-x_+, x_+)$ tendem para o ponto fixo atrator x_- . A prova desta afirmação é complicada para o caso geral. Sendo assim, direcionamos o leitor interessado na prova para a referência [1].Este fato está ilustrado na figura 23.

Veremos agora o que acontece quando $c < -\frac{3}{4}$. Sabemos que o ponto fixo x_- passa de atrator para repulsor à medida que c diminui passando por $c = -3/4$. Para $c < -3/4$ não há ponto fixo atrator, mas há um ciclo de período 2. Para mostrar isso, vamos primeiramente resolver a equação $Q_c^2(x) = x$. Temos, então, a seguinte equação do quarto grau:

$$x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0.$$

No entanto, duas soluções desta equação já são conhecidas. São elas os pontos fixos

$$x_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c}) \text{ e } x_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c}).$$

Como $x - x_+$ e $x - x_-$ são fatores dessa equação de quarto grau, então fazendo a divisão de $Q_c^2(x)$ por $(x - x_+)(x - x_-) = x^2 + c - x$ obtemos:

$$\frac{x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c}{x^2 + c - x} = x^2 + x + c + 1.$$

Este polinômio possui como raízes

$$q_{\pm} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4c - 3}).$$

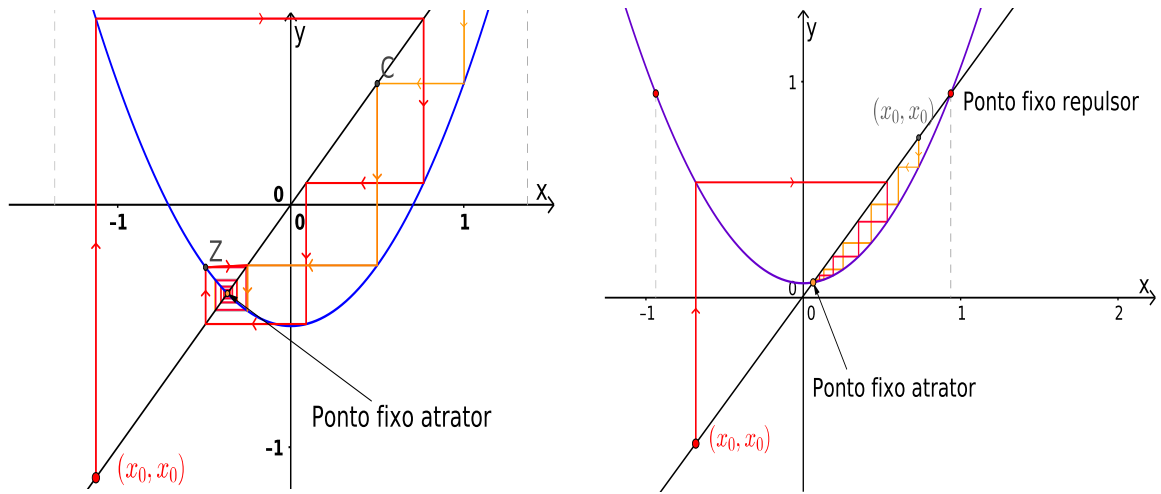


Figura 23: As órbitas de $Q_c(x) = x^2 + c$, no intervalo $-x_+ < x < x_+$ tendem para x_- , quando $-3/4 < c < 1/4$.

Note que se $c = -\frac{3}{4}$ temos $q_+ = q_- = x_-$ que é um ponto fixo neutro para Q_c . Além disso, q_+ e q_- são reais se, e somente se, $-4c - 3 \geq 0$, ou seja, se $c \leq -\frac{3}{4}$. Assim, temos um novo tipo de bifurcação chamada bifurcação de duplicação de período. Quando c assume valores abaixo de $-3/4$, o ponto fixo x_- passa de atrator para repulsor e os pontos q_+ e q_- formam uma órbita de período 2 quando iteramos a função $Q_c(x)$, isto é, $Q_c(q_+) = q_-$, $Q_c(q_-) = q_+, \dots$

Verifiquemos, agora, para quais valores de c os pontos periódicos q_+ e q_- são atratores ou repulsores. Como $Q_c(q_+) = q_-$, basta analisar a expressão $|(Q_c^2)'(q_+)|$.

$$(Q_c^2)'(q_+) = Q_c'(q_+)Q_c'(q_-) = (-1 + \sqrt{-4c - 3})(-1 - \sqrt{-4c - 3}) = 4c + 4$$

Devemos ter $|(Q_c^2)'(q_+)| < 1$ se, e somente se, $|4c + 4| < 1$. Resolvendo a inequação, temos

$$-1 < 4c + 4 < 1$$

$$-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}.$$

Isto significa que a órbita de período 2 formada por q_+ e q_- é atratora para os valores de parâmetro no intervalo acima. Para $c < -5/4$ temos $|(Q_c^2)'(q_+)| > 1$, ou seja, a órbita de período 2 é repulsora. E ainda $|(Q_c^2)'(q_+)| = 1$ se $c = -\frac{5}{4}$.

Fica então demonstrada a seguinte proposição:

Proposição 5.2 (A segunda bifurcação) Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$:

1. Para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, Q_c tem um ponto fixo atrator x e não tem órbita de período 2.
2. Para $c = -\frac{3}{4}$, Q_c tem um ponto fixo neutro $x_- = q_+$ e não tem órbita de período 2.

3. Para $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, temos que x_{\pm} são pontos fixos repulsores e q_+ e q_- formam um atrator de período 2;
4. Para $c < -\frac{5}{4}$, temos que x_{\pm} são pontos fixos repulsores e q_{\pm} formam uma órbita de período 2 repulsora.

Quando c diminui passando por $c = -3/4$, a órbita periódica de período 1 (ponto fixo) atratora dá lugar a uma órbita de período 2 atratora, isto é, temos um evento de bifurcação com duplicação de período em $c = -3/4$. Seguindo o mesmo raciocínio, à medida que c diminui gradativamente passando por $c = -5/4$, a órbita de período 2 atratora dá lugar a uma órbita de período 4 atratora. Ou seja, em $c = -5/4$ presenciamos outro evento de bifurcação de duplicação de período. Diminuindo gradativamente o valor de c , alcançamos um valor de c para o qual a órbita de período 4 torna-se repulsora e no qual ocorre o surgimento de uma órbita atratora de período 8. Diminuindo cada vez mais o valor de c , presenciamos sucessivamente outras bifurcações com duplicação de período. Eventualmente, alcançaremos um valor de parâmetro c , chamado de ponto de acumulação, para o qual o período é infinito e a órbita é quase periódica. Diminuindo ligeiramente o valor de c , além do ponto de acumulação, a órbita apresenta um comportamento aperiódico e imprevisível chamado de caos.

5.1 Bifurcações Sela-Nó e de Duplicação de Período

Como visto anteriormente, temos aqui dois tipos de bifurcação: a bifurcação tangente (também chamada de bifurcação sela-nó) e a bifurcação de duplicação de período. Vamos agora formalizar a definição destas bifurcações.

Definição 5.1 *Uma família F_{λ} de funções a um parâmetro λ sofre uma bifurcação tangente (sela-nó) em $\lambda = \lambda_0$ se há um intervalo aberto I em λ e um $\epsilon > 0$ tal que:*

1. Para $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$, F_{λ} não tem pontos fixos neste intervalo I ;
2. Para $\lambda = \lambda_0$, F_{λ} tem um ponto fixo no intervalo I e este ponto fixo não é atrator nem repulsor ou seja, é neutro.
3. Para $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$, F_{λ} tem dois pontos fixos no intervalo I , um atrator e um repulsor.

Ou seja, uma bifurcação tangente ocorre se a função F_{λ} não tem pontos fixos no intervalo I para valores de λ ligeiramente menores que λ_0 , exatamente um ponto fixo em I quando $\lambda = \lambda_0$ e exatamente dois pontos fixos em I para λ ligeiramente maior que λ_0 .

Observações:

1. A bifurcação sela-nó também ocorre se a direção da bifurcação for invertida, isto é, não há pontos fixos para $\lambda_0 + \epsilon > \lambda > \lambda_0$ e assim por diante.
2. Os pontos periódicos podem ser submetidos a uma bifurcação sela-nó.

Exemplo 5.1 A família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ possui bifurcação tangente para $c = \frac{1}{4}$, como visto anteriormente. Q_c não admite ponto fixo quando $c > \frac{1}{4}$, Q_c possui um único ponto fixo quando $c = \frac{1}{4}$ e este não é atrator e nem repulsor e, por fim, Q_c possui um par de pontos fixos para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ sendo um atrator e outro repulsor.

Definição 5.2 Uma família de funções a um parâmetro F_λ sofre bifurcação de duplicação de período em $\lambda = \lambda_0$ se há um $\epsilon > 0$ tal que:

1. Existe uma órbita periódica atratora de período n para $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$.
2. Existe uma órbita periódica atratora de período $m = 2n$ para $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$.

Observação:

1. O processo de bifurcação com duplicação de período pode ocorrer no sentido oposto, isto é, uma órbita atratora de período $2n$ dá lugar a uma órbita atratora de período n quando λ diminui passando por λ .

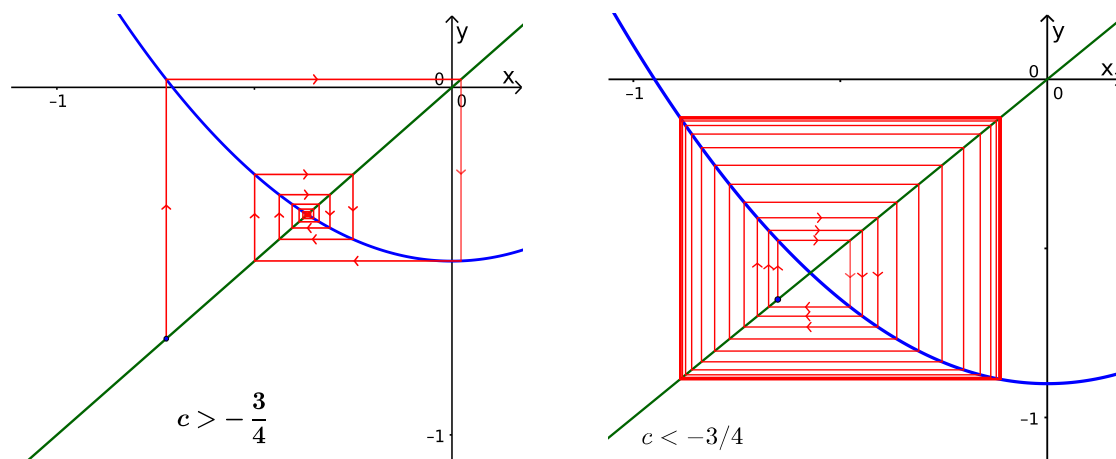


Figura 24: Para $c > -3/4$ Q_c tem um ponto fixo atrator, mas para $c < -3/4$ esse ponto passa a ser repulsor.

A figura 24 ilustra geometricamente o processo de bifurcação de duplicação de período. As figuras mostram a análise gráfica de Q_c para dois valores distintos de c , sendo um deles antes e outro depois da bifurcação. Podemos observar que o ponto fixo x_- muda de atrator para repulsor quando c diminui de $-3/4$.

5.2 Caso $c \leq -2$

Quando $c = -2$, temos $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$. Para encontrarmos os pontos fixos, fazemos $Q_{-2}(x) = x$, daí temos que

$$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ e } x = 2$$

Temos então $x_+ = 2$ e $x_- = -1$. Se considerarmos o intervalo I sendo $-x_+ < x < x_+$, ou seja, $I = [-2, 2]$, vamos perceber que as órbitas ficarão condensadas nesse intervalo, mas as órbitas para $|x_0| > 2$, tendem para o infinito. A figura 5 ilustra as primeiras iterações de Q_{-2} e a figura 15 a análise gráfica desta mesma função para $x_0 \in I$. Para $c = -2$, a família quadrática apresenta órbitas com comportamento aperiódico e imprevisível.

Para o caso $c < -2$, ao contrário do que se possa imaginar, nem todas as órbitas tenderão ao infinito. Existem órbitas que permanecerão no intervalo $I = [-p_+, p_+]$ formando um conjunto denso. Existe um teorema que declara a existência de um conjunto formado pelos pontos cujas órbitas não vão para o infinito. Esse conjunto não contém intervalos e não é vazio. O leitor interessado no assunto pode recorrer à referência [1] para mais detalhes. Gráficamente, não vemos essas órbitas devido ao processo de arredondamento envolvido no cálculo computacional das iterações.

Como visto até agora, a família quadrática apresenta uma grande variedade de comportamentos dinâmicos ao ajustar os valores do parâmetro c . Na próxima seção, mostraremos de forma gráfica como estes comportamentos mudam ao variar de valor de c .

6 Transição para o caos

Nesta seção, investigaremos graficamente o comportamento assintótico de órbitas obtidas iterando a função $Q_c(x) = x^2 + c$. Pudemos observar anteriormente que para valores de c acima de $-5/4$ é até certo ponto simples, porém quando c atinge valores abaixo de determinado valor, essa dinâmica se torna bastante complexa. Assim sendo, nosso objetivo é entender a transição dessa função para essa dinâmica complicada.

6.1 Diagrama de órbita

O diagrama de órbita é uma poderosa ferramenta que nos fornece uma visão da dinâmica da função Q para diferentes valores de c , bem como nos dá a idéia do comportamento gráfico de toda a família Q_c .

Para a construção do diagrama, marcamos no eixo horizontal o parâmetro c e no eixo vertical o regime assintótico da órbita de $x_0 = 0$ sob Q_c .

A figura 25 ilustra o diagrama de órbita de Q_c para $-2 \leq c \leq 1/4$. Podemos observar que, para cada c no intervalo $-3/4 \leq c \leq 1/4$, o gráfico de Q_c apresenta apenas um ponto que corresponde ao ponto fixo atrator. Quando c atinge o valor $-3/4$, ocorre uma bifurcação

de duplicação de período. Logo abaixo de $c = -3/4$, temos uma órbita atratora de período 2, graficamente representada por dois pontos para cada valor de c . Diminuindo gradativamente o valor de c , novas bifurcações de duplicação de período ocorrem.

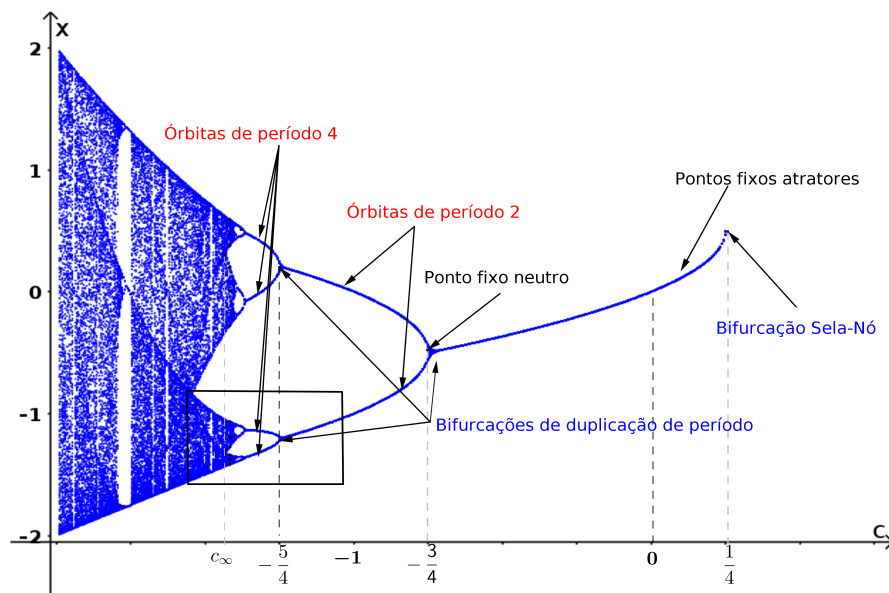


Figura 25: Diagrama de órbita para $Q_c(x) = x^2 + c$.

Resumindo, a sequência de bifurcações de duplicação de período aparece na seguinte ordem $1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ à medida que c diminui. Existe um valor $c = c_\infty$ para o qual o período da órbita é infinito. Este valor de c é chamado de ponto de acumulação. A localização aproximada de c_∞ é apresentada na figura 25.

Diminuindo ainda mais o valor de c , entramos numa faixa de parâmetro em que a órbita apresenta um padrão imprevisível chamado de caos. De acordo com Devaney [1], um sistema dinâmico F_λ é caótico se satisfaz as seguintes propriedades:

1. A função F_λ é transitiva.
2. Os pontos periódicos de F_λ são densos.
3. F_λ é sensível às condições iniciais.

Um sistema é transitivo se para um par de pontos x e y e para um $\epsilon > 0$ existir um ponto z da órbita cuja distância a x é menor que ϵ e sua órbita se aproxima de y a uma distância menor que ϵ . Ou seja, dados dois pontos, existe uma órbita que passa arbitrariamente próxima de ambos. A segunda propriedade listada acima está relacionada com o fato de que, dado um ponto x , existe um y arbitrariamente próximo de x . A terceira propriedade pode ser explicada da seguinte forma: se a distância entre órbitas de condições iniciais próximas cresce exponencialmente com o número de iterações, dizemos que o sistema é sensível às condições iniciais [3]. A grosso modo, as órbitas caóticas formam as regiões escuras da figura 25.

Nesta região mais escura do mapa quadrático, em meio aos atratores caóticos, acontece um surpreendente fenômeno o qual descreveremos a seguir.

6.2 Janelas periódicas

Imersas na região de caos, podemos observar regiões de órbitas periódicas. Na figura 25, a faixa vertical branca mais evidente é uma *janela de período-3*. A figura 26 (a) é uma ampliação da figura 25 onde vemos mais nitidamente esta janela de período 3. Diminuindo ainda mais o valor de c , o processo de bifurcações de duplicação de período continua a acontecer. Além da janela de período 3, existem janelas periódicas de período 5, 7, ... sendo essas janelas cada vez mais estreitas e, conseqüentemente, difíceis de serem observadas à medida que o período aumenta. As figuras 26 (b) e (c) são ampliações da figura 25 onde mostramos as janelas de período 5 e 7, respectivamente.

Como veremos mais adiante, a existência da janela de período 3 garante a presença de órbitas periódicas de todos os períodos possíveis, porém essas são repulsoras.

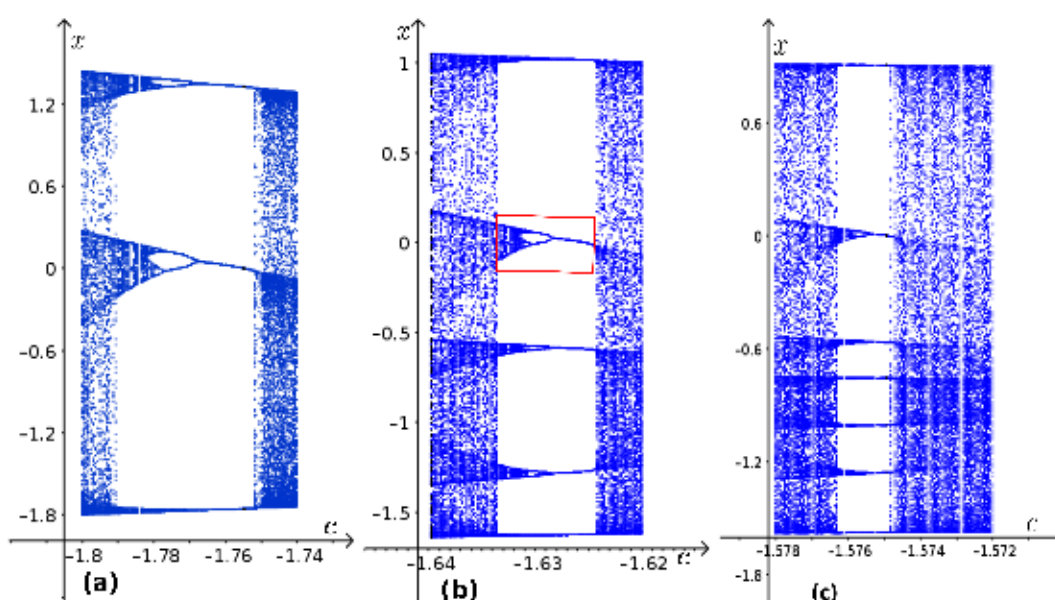


Figura 26: (a) Janela de período 3, (b) janela de período 5 e (c) janela de período 7.

Pela análise gráfica do diagrama de órbita, pudemos entender o comportamento dinâmico da família Q_c no intervalo de $-2 \leq c \leq 1/4$ e verificamos a presença de janelas periódicas na região caótica. Porém a observação desse diagrama nos revela outra importante característica que vamos analisar a seguir.

6.3 Auto-similaridade

Observando as figuras 25 e 26 mais de perto, percebemos que cada ramo do processo de duplicação de período apresenta uma forma semelhante à figura original. Para ilustrar este fato, apresentamos na figura 27 (a) uma ampliação da região destacada na figura 25. A figura 27 (b), por sua vez, é uma ampliação da área em destaque na figura 27 (a). Já a figura 27 (c) é uma ampliação de área demarcada pelo retângulo no diagrama de órbita apresentado

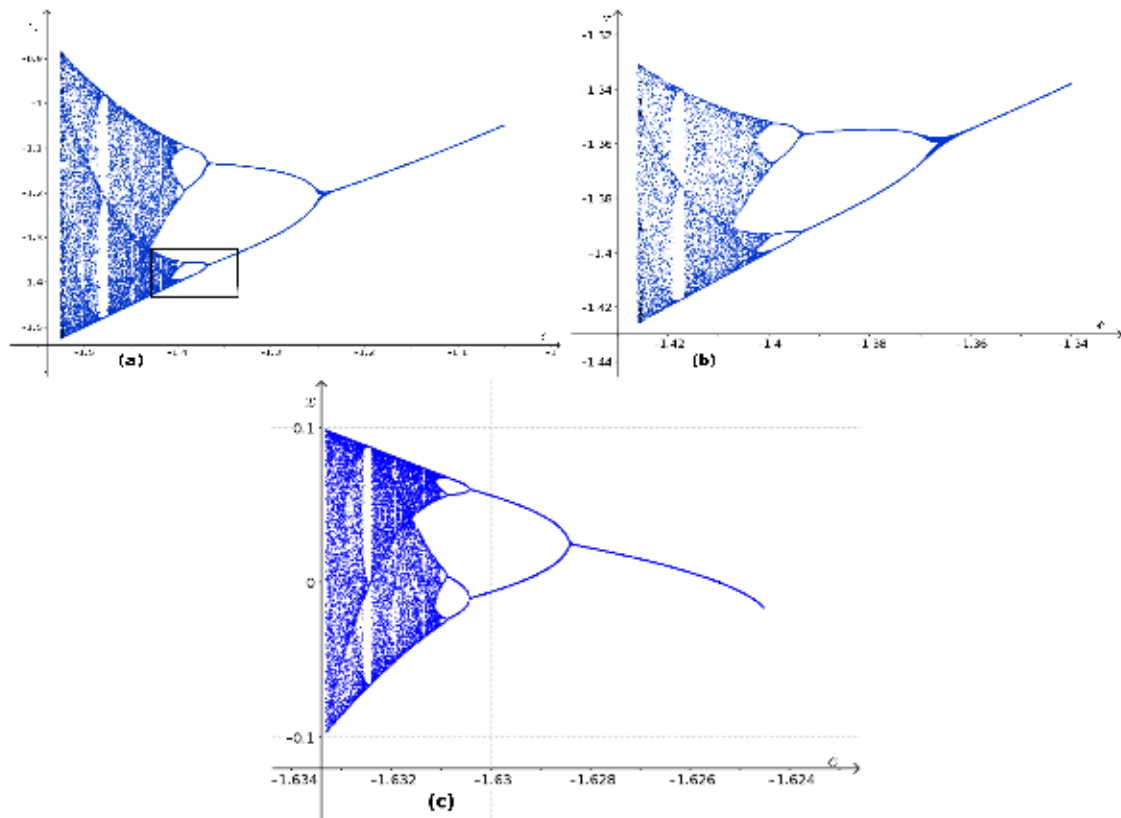


Figura 27: (a) Ampliação do retângulo destacado na figura 25, (b) ampliação da região destacada em (a) e (c) ampliação da parte demarcada na figura 26 (b).

na figura 26 (b). Essa característica de que a ampliação de uma parte reproduz o todo é chamada de auto-similaridade.

Podemos verificar se a auto-similaridade observada no diagrama de órbita está relacionada com a forma do gráfico de $Q_c^{2^n}$. Para isso, vamos representar os gráficos de Q_c e Q_c^2 para cinco valores diferentes de c , representando diferentes comportamentos dinâmicos. Embora os valores de c sejam diferentes para Q_c e $Q_c^{2^n}$, podemos estabelecer um paralelo entre os dois gráficos.

Na figura 28(a) apresentamos o gráfico de Q_c para $c = \frac{1}{4}$ e, na figura 28(b), o gráfico de Q_c^2 para $c = -\frac{3}{4}$. Esses pontos representam o ponto de bifurcação sela-nó e bifurcação de duplicação de período, respectivamente.

Na figura 29(a) apresentamos o gráfico de Q_c para $c = 0$ e, na figura 29(b), o gráfico de Q_c^2 para $c = -1$. Esses pontos representam o ponto de órbita 1 e órbitas de período 2, respectivamente.

Na figura 30(a) temos o gráfico de Q_c para $c = -\frac{3}{4}$ e, na figura 30(b), o gráfico de Q_c^2 para $c = -\frac{5}{4}$. Esses pontos representam pontos de bifurcação duplicação de período.

Na figura 31(a) temos o gráfico de Q_c para $c = -1$ e, na figura 31(b), o gráfico de Q_c^2 para $c = -1, 3$. Esses pontos representam pontos da órbita de período 2 e órbita de período 4, respectivamente.

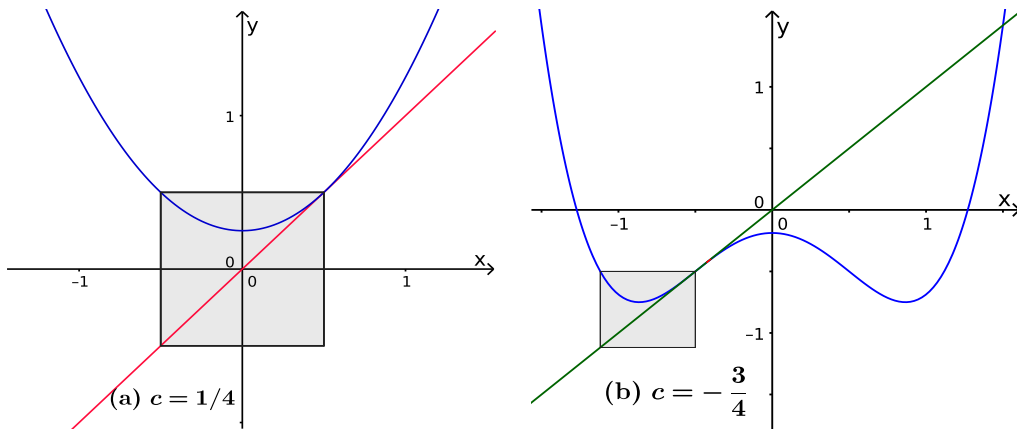


Figura 28: (a) Gráfico de Q_c e (b) gráfico de Q_c^2 .

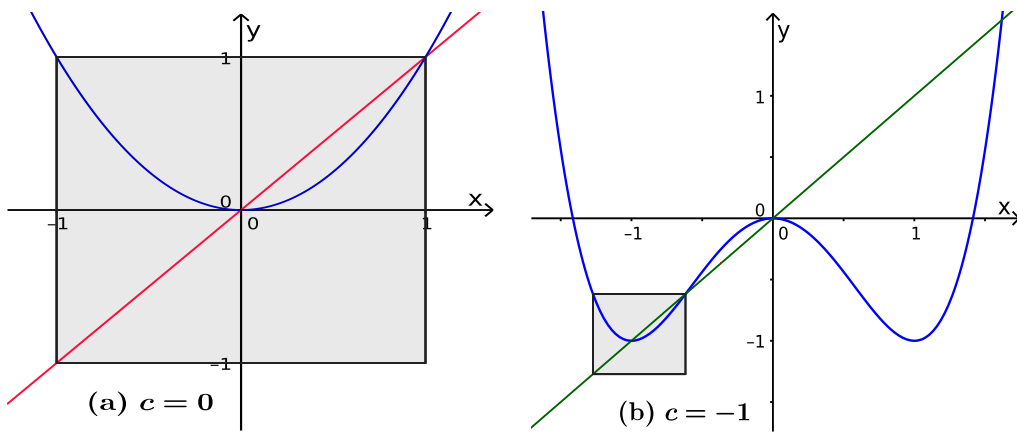


Figura 29: (a) Gráfico de Q_c e (b) gráfico de Q_c^2 .

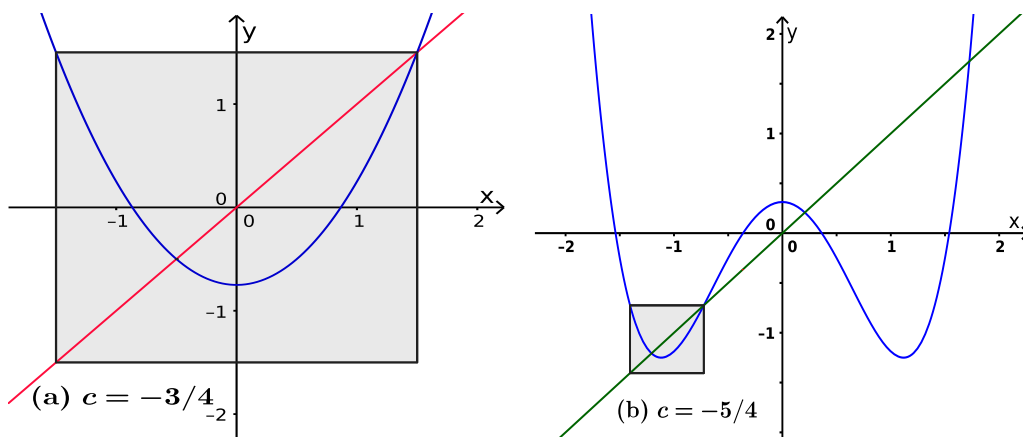


Figura 30: (a) Gráficos de Q_c e (b) gráfico de Q_c^2 .

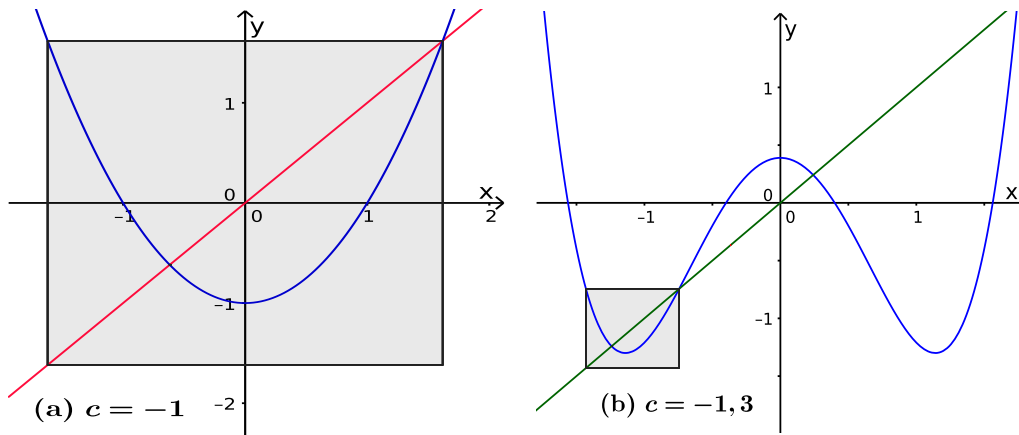


Figura 31: (a) Gráfico de Q_c e (b) gráfico de Q_c^2 .

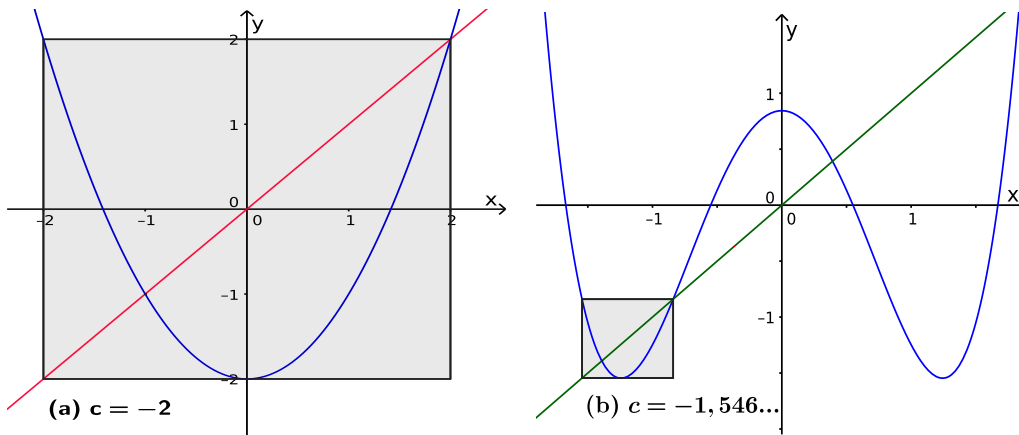


Figura 32: (a) Gráfico de Q_c e (b) gráfico de Q_c^2 .

Na figura 32(a) temos o gráfico de Q_c para $c = -2$ e, na figura 32(b), o gráfico de Q_c^2 para $c = -1,546\dots$. Esses, em ambos os casos, representam valores de c para os quais a órbita é caótica.

Em todos os casos acima, vemos que, mesmo não sendo os mesmos valores para as figuras (a) e (b), podemos notar que a parte do gráfico que fica dentro dos pequenos quadros de Q_c^2 é semelhante à parte do gráfico de Q_c , delimitada pelo quadrado de vértices (x_+, x_+) e (x_-, x_-) , como ilustram as figuras 28, 29, 30, 31 e 32, porém num intervalo bem menor. Diante dessa similaridade, podemos perceber que as funções Q_c e Q_c^2 passam por uma sequência similar de comportamentos dinâmicos, sendo que essa similaridade também acontece quando observamos o diagrama de órbita da figura 25.

Como os gráficos de Q_c^2 e Q_c são semelhantes, podemos concluir que também existe um pequeno subintervalo nos gráficos de Q_c^4 que se assemelha a Q_c , uma vez que à medida que c diminui, Q_c^4 sofre as mesmas sequências de bifurcações que Q_c^2 e Q_c , mas em um intervalo menor que estes.

De acordo com Devaney [1], esse processo é chamado de *renormalização*. Neste processo,

considera-se a segunda iterada do mapa em relação ao estágio anterior. Em seguida, amplia-se uma pequena região específica na qual existe uma similaridade a uma função quadrática. Repetindo esse processo n vezes encontramos uma região muito pequena que se assemelha à função original. Assim, explica-se o fato do diagrama de órbita apresentar regiões que são aparentemente auto-similares. Feigenbaum [4] desenvolveu uma teoria de renormalização em termos da qual pode-se mostrar que a família quadrática apresenta comportamento quantitativo universal.

6.4 Teorema de Sarkovskii

Na subseção 6.2, vimos que a presença de faixas verticais brancas em meio à região mais escura do gráfico representa janelas de órbitas periódicas entre os atratores caóticos. A. N. Sarkovskii, em 1964, provou um teorema que trata do aparecimento dessas órbitas em mapas. Antes de enunciarmos o Teorema de Sarkovskii, vamos primeiro listar os números inteiros positivos de acordo com um novo ordenamento, conhecido como ordenamento de Sarkovskii:

$$\begin{aligned}
 &3, 5, 7, 9, \dots \\
 &2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, \dots \\
 &2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, \dots \\
 &2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, \dots \\
 &\vdots \\
 &\dots, 2^n, \dots, 2^3, 2^2, 2^1, 1.
 \end{aligned}$$

Esta ordem é obtida, primeiramente listamos todos os números ímpares à excessão do 1. Depois, listamos todos os números ímpares à excessão do 1, multiplicados por 2. Novamente todos os ímpares a excessão do 1, multiplicados por 2^2 e assim por diante. Ao final da lista, acrescentamos todas as potências de 2 na ordem decrescente.

Teorema 6.1 *Teorema de Sarkovskii: Suponha que $F_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Se para algum valor de parâmetro λ a função F_λ tem um ponto periódico de período p , e p precede q no ordenamento de Sarkovskii. Então F_λ também tem (para o mesmo valor de parâmetro) uma órbita de período q , onde q ocorre seguindo a ordem de Sarkovskii.*

Por exemplo, se para um valor de λ a função F_λ tem órbita periódica de período 6, então ela também tem ciclos de todos os outros períodos exceto, possivelmente, um número ímpar maior que 1.

Observações:

1. Observe que um número na forma de 2^n compõem a parte final da ordenação de Sarkovskii. Logo F tem um número finito de pontos periódicos e todos eles têm períodos de uma potência de 2, o que de certa forma explica o fato de haver sempre duplicação de período no início quando uma família de funções faz a transição para o caos.

2. Se F possui uma órbita de período p e p não é potência de 2, então a função possui infinitas órbitas periódicas.
3. O Teorema de Sarkovskii não é válido para um "espaço" qualquer, mas sim para a reta real ou intervalos.

De acordo com este teorema, se observamos órbitas de período 3 para um mapeamento unidimensional para algum valor de parâmetro, então, para esse mesmo valor de parâmetro, existem trajetórias periódicas de todos os tamanhos. Como discutido anteriormente, existe um intervalo I de parâmetro c para o qual a família quadrática Q_c apresenta período 3. Pelo teorema de Sarkovskii, Q_c tem infinitas outras órbitas periódicas para cada valor de c em I . Contudo, apenas a órbita de período 3 é estável. A prova de que as demais órbitas periódicas são instáveis é dada pelo teorema de Singer. Caso seja de interesse do leitor, mais detalhes são apresentados na referência [3].

Apesar de que o teorema de Sarkovskii se aplica a um valor fixo de parâmetro, é curioso que, pelo menos em alguns casos, ao variar o parâmetro, observam-se órbitas periódicas estáveis ocorrendo na mesma sequência declarada pelo teorema de Sarkovskii.

7 Conclusão

Neste trabalho, procuramos estudar o comportamento dinâmico da família quadrática. Tivemos a oportunidade de nos apropriar de conceitos tais como: iteração, órbitas, pontos fixos, bifurcações entre outros. Estes foram fundamentais para a análise e o entendimento da dinâmica destas funções. Pudemos verificar como a complexidade de comportamentos dinâmicos emerge nesse sistema ao variar o parâmetro de controle. Este estudo mostra que o comportamento caótico (imprevisível) ocorre mesmo em sistemas descritos por funções extremamente simples.

Acreditamos ser possível a aplicação de alguns dos assuntos trabalhados ao longo do texto à realidade do ensino médio. Temas como Recursividade e Progressões Geométricas podem ser apresentados como exemplos de Sistemas Dinâmicos, bem como os conceitos de iteração, órbitas e pontos fixos também podem ser associados a esses temas do ensino médio. A Matemática Comercial, em particular os Juros Compostos, é um tema que, além de ser um exemplo de Sistema Dinâmico, poderia fazer uso da Análise Gráfica para entender, por exemplo, a evolução de uma dívida. Os Sistemas Dinâmicos poderiam ser, ainda, apresentados como uma aplicação no estudo das Funções, neste caso, das funções quadráticas. Além dos conceitos já citados, a Análise Gráfica é um procedimento que favoreceria a compreensão e a apropriação dos conceitos pelo aluno.

Esperamos contribuir de maneira significativa para a formação dos profissionais que atuam no ensino médio, uma vez que procuramos abordar, de forma didática, um importante ramo da Matemática.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha esposa Sandra pelo carinho, apoio, compreensão e principalmente por me fazer acreditar que era possível realizar esse sonho. Aos meus filhos Arthur e Sofia que, mesmo sem ter a total noção do significado desse curso, também souberam entender a situação de ausências necessárias.

Agradeço principalmente ao meu orientador Professor Denis Gouvêa Ladeira, pela paciência, dedicação, disponibilidade e pelas orientações que foram decisivas para que esse trabalho fosse concluído.

Gostaria de agradecer a todos os colegas pelo companheirismo e solidariedade que o grupo sempre demonstrou. Agradeço, também, a todos os professores que, durante esses dois anos, foram decisivos para que eu chegasse à finalização dessa importantíssima etapa de vida acadêmica.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, importantíssimo para que fosse viável frequentar e finalizar esse mestrado profissional.

Referências

- [1] Devaney, R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, Boston University (1992)
- [2] May, R. *Nature* **261**, 459-467 (1976).
- [3] Hilborn, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics - An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press (1994).
- [4] Feigenbaum, M. J. *Stat. Phys.* **21**, 669-706 (1979).
- [5] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, 3ª edição. São Paulo. Editora Livraria da Física (2011).
- [6] J. Stewart, *Cálculo Volume 1*, 7ª edição. São Paulo. Editora Cengage Learning (2013).
- [7] Geogebra: software livre. versão 5.0.166.0-3D. Disponível em <http://www.geogebra.org/>. Acesso em 24 outubro 2015.

Apêndice A - Geogebra

Os gráficos relativos à seção de Análise gráfica, foram construídos utilizando o software Geogebra. Abaixo, mostraremos o passo a passo dessa construção.

1. Abrimos o software e no campo **Entrada** digitamos a função objeto da nossa análise gráfica. No caso a função utilizada foi $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x^2}{4} + 1$. Em seguida digitamos no campo **Entrada** a função identidade $y = x$. Observe que o programa irá automaticamente plotar os gráficos na **Janela de Visualização**. Na **Janela de Álgebra**, ficam listadas as funções digitadas no campo **Entrada**, conforme mostra a figura 33.

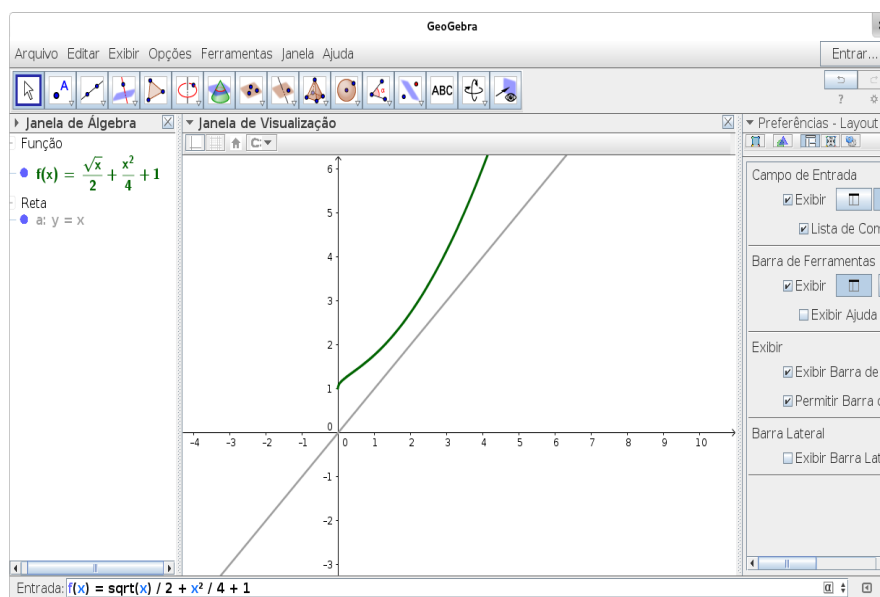


Figura 33: Inserindo uma função no campo **Entrada** do software Geogebra.

2. Para definirmos no gráfico, o ponto inicial da órbita de x_0 , selecionamos na barra de ferramentas a opção **Ponto em Objeto**. Em seguida, clicamos sobre a reta diagonal no local desejado. Podemos nomear este ponto clicando com o botão direito do mouse sobre o mesmo selecionando em seguida a opção **Renomear**. Basta então, digitarmos o nome desejado conforme ilustra a figura 34.
3. Para mostrarmos os demais pontos da órbita de x_0 no gráfico, digitamos no campo **Entrada** o comando **ListaDeIteração**, conforme mostra a figura 35. Sendo L_1 o nome dado à lista, f é a função a ser iterada, $x(A)$ é valor da coordenada x utilizado como condição inicial da órbita de x_0 e 12 é o número de iterações realizadas. Esse comando gera uma lista contendo os pontos da órbita de x_0 .
4. Para que possamos visualizar os pontos relativos a órbita de x_0 no gráfico, vamos utilizar os comandos **Sequência** e **Elemento** conforme mostra a figura 36. O comando **Sequência** irá plotar no gráfico os pontos definidos pela função **Elemento** que utiliza a lista de pontos L_1 para as coordenadas x e y , conforme ilustra a figura 36.

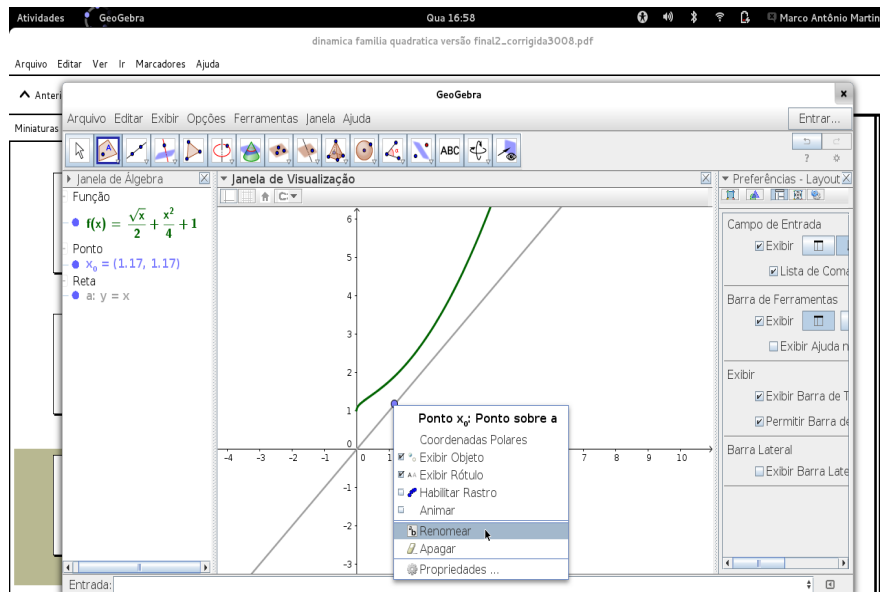


Figura 34: Renomeando um objeto no Geogebra.

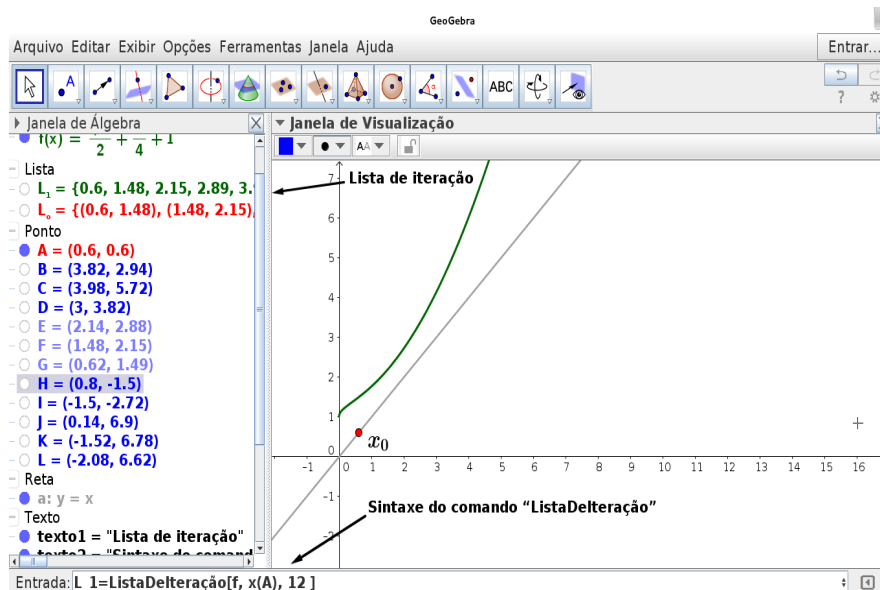


Figura 35: Sintaxe do comando **ListaDeIteração**.

5. Para que possamos mostrar no gráfico os segmentos horizontais e verticais que, partindo de x_0 , conduzem aos demais pontos de sua órbita, utilizamos novamente o comando **Sequência** em conjunto com o comando **Elemento**. Estes comandos farão com que os segmentos sejam construídos, tendo como vértices os pontos da lista de iteração L_1 , como ilustra a figura 37.
6. Para "decorar" os segmentos com as setas direcionais, basta clicar com o botão direito

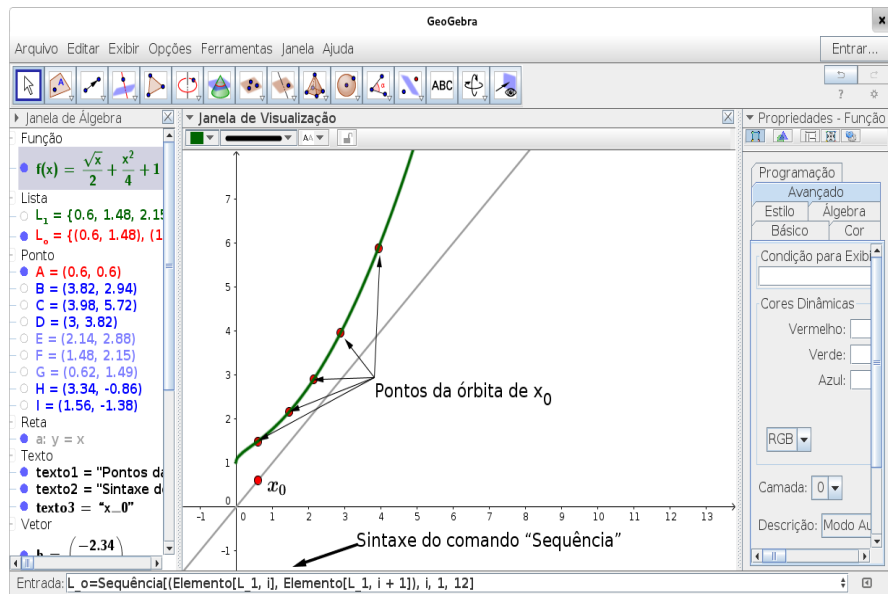


Figura 36: Usando o comando **Sequência** para definir os pontos da órbita de x_0 .

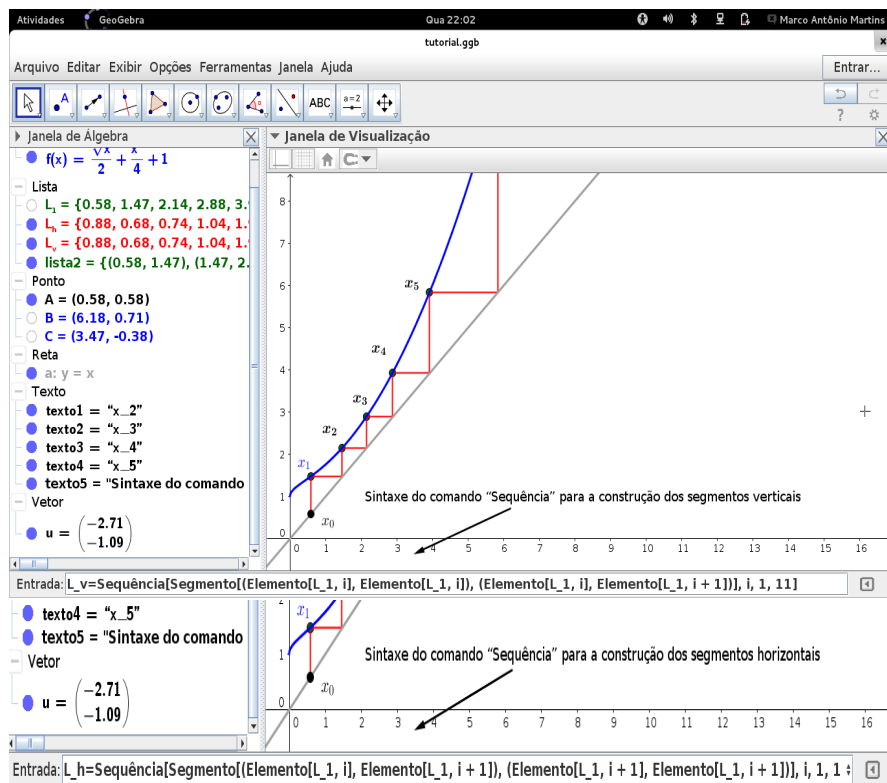


Figura 37: Sintaxe do comando **Sequência**.

do mouse sobre as listas de segmentos horizontais ou verticais, na **janela de algebra** e seleccionar a opção **Propriedades**. Clique na aba **Preferências - Padrões** e seleccione

a opção **Lista**. Em seguida clique na aba **Estilo** da caixa de diálogo e selecione a opção **4** do item **Decoração** conforme ilustra a figura 38. Outras opções como: cor, espessura da linha, estilo da linha entre outros, podem ser modificadas por esse mesmo procedimento. O leitor interessado, pode encontrar um tutorial completo em [7].

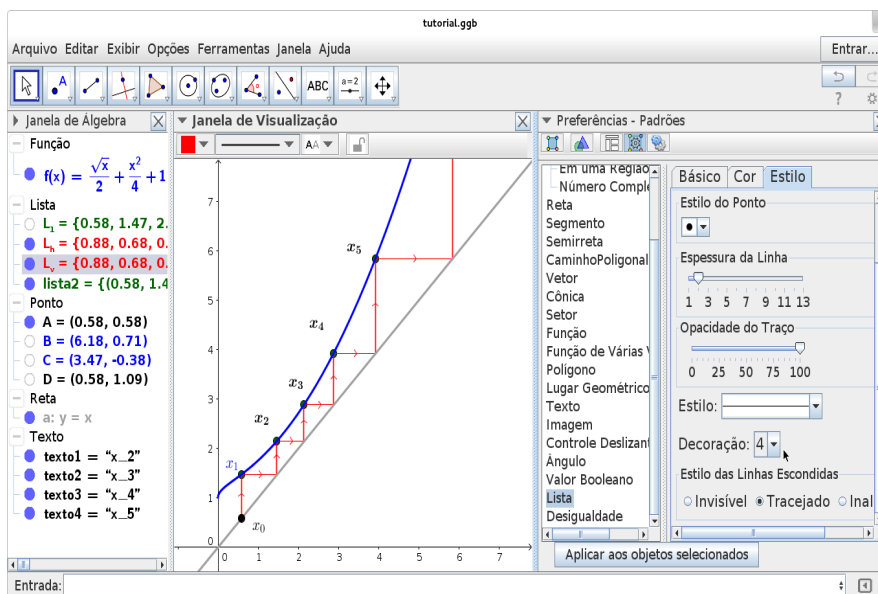


Figura 38: Alterando as **propriedades** de um objeto no Geogebra.