

Princípio de d'Alembert e Equações de Lagrange

Tiago de Oliveira ¹

Denis Gouvêa Ladeira²

Resumo: O trabalho desenvolvido aqui se restringe à aplicação da matemática em uma área da física conhecida como Mecânica Analítica ou Mecânica Clássica. Um curso de Mecânica Analítica é bastante extenso. Desta forma focamos este trabalho nos aspectos introdutórios da Mecânica Clássica desenvolvendo o princípio de d'Alambert e as equações de Lagrange, que são formas alternativas às leis de Newton para solução de problemas físicos.

Este trabalho é apresentado da seguinte forma. Na primeira seção apresentamos uma introdução à Mecânica Analítica, na segunda seção apresentamos alguns dos conceitos físicos e matemáticos que serão necessários para o entendimento das formulações que são apresentadas nas seções seguintes. Na terceira seção serão apresentados vínculos e coordenadas generalizadas, conceitos de grande importância no texto. Na quarta seção desenvolvemos o princípio de d'Alambert que constitui um avanço relativamente à formulação newtoniana porque exclui qualquer referência às forças de vínculo. Ainda na quarta seção apresentamos algumas aplicações clássicas da mecânica como o pêndulo simples e máquina de Atwood. No exemplo final da seção vamos encontrar as equações de movimento de um pêndulo de comprimento fixo e com dissipação. Na quinta seção demonstramos as equações de Lagrange para o caso geral. Resolvemos o mesmo exemplo final da seção anterior e encontramos as mesmas equações de movimento do pêndulo dissipativo. Logo percebemos que é mais vantajoso usar as equações de Lagrange em relação ao Princípio de d'Alembert, pois usamos um número mínimo de coordenadas. Finalmente na última seção demonstramos as equações de Lagrange para o caso particular em que o sistema mecânico está sujeito a potenciais conservativos, além de incluirmos algumas aplicações deste método.

Palavras-chave: Princípio de D'Alembert, Equações de Lagrange.

¹Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, tiagodeoliveira07@yahoo.com.br

²Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, dgl@ufs.edu.br

1 Introdução

Pode-se dizer que a mecânica analítica é a base de grande parte da física teórica e trata-se de uma disciplina de caráter eminentemente matemático. Para uma boa leitura, têm-se como pré-requisitos matemáticos essenciais os cursos de cálculo de uma e várias variáveis, equações diferenciais ordinárias e álgebra linear. A mecânica analítica é um ramo da física onde se desenvolve um conjunto de formalismos que se aplicam a uma classe muito abrangente de problemas.

Este trabalho não visa o aprofundamento da mecânica analítica e sim usar conceitos básicos da física e do cálculo de uma e várias variáveis da matemática para tornar possível a compreensão do princípio de d'Alembert e das equações de Lagrange.

Jean le Rond d'Alembert, parisiense no século XVIII, físico, matemático e filósofo foi o responsável por uma das afirmações clássicas do movimento: o Princípio de d'Alembert. O físico foi co-editor da primeira enciclopédia europeia, e por suas investigações em Matemática sobre as Equações Diferenciais e as Derivadas Parciais.

Discípulo intelectual de Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, nascido em Turin na Itália em 1736 e pertencente a uma família rica de origem francesa foi um dos maiores matemáticos de sua época. Suas principais obras são: Apêndice à Álgebra de Euler (1772), Teoria das Funções Analíticas (1798), Lição Sobre o Cálculo das Funções (1806), entre outras. Atribui-se a Lagrange importantes descobrimentos matemáticos como a Série de Lagrange, os Multiplicadores de Lagrange, Fórmula da Interpretação, Série de Lagrange, Princípio de Lagrange e Equação do Movimento.

Neste trabalho vamos apresentar dois formalismos importantes em mecânica: o princípio de d'Alembert e as equações de Lagrange. Estes formalismos estão na base da mecânica analítica. Um estudo mais aprofundado do assunto é encontrado nas referências [4] e [1].

2 Conceitos básicos

No decorrer do texto vamos utilizar alguns conceitos da mecânica clássica como as leis de Newton, energia cinética e trabalho. Vamos começar apresentando um resumo de alguns conceitos físicos e matemáticos necessários ao desenvolvimento da teoria. Não vamos delongar nas definições, mas o leitor que desejar mais detalhes é encorajado a recorrer à referência [2] ou algum outro material de mecânica clássica. Segue abaixo a definição desses conceitos:

1ª Lei de Newton: Se nenhuma força resultante atua sobre um corpo ($\vec{F}_R = \vec{0}$), sua velocidade não pode mudar, ou seja, o corpo não pode sofrer uma aceleração.

2ª Lei de Newton: A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração.

$$\vec{F}_R = m \vec{a}.$$

3ª Lei de Newton: Quando dois corpos interagem, as forças que cada corpo exerce sobre o outro são sempre iguais em módulo e têm sentidos opostos.

A **energia cinética** T é a energia que está associada com o estado de movimento de um objeto. Este tipo de energia é uma grandeza escalar que depende da massa e do módulo da velocidade do objeto em questão. Para um objeto de massa m cuja velocidade v é muito menor que a velocidade da luz a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

O **Trabalho** representado pelo símbolo W , é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando o objeto recebe energia o trabalho é positivo; quando o objeto cede energia, o trabalho é negativo.

O **trabalho realizado sobre uma partícula por uma força constante** \vec{F} durante um deslocamento \vec{d} é dado por

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta, \quad (2)$$

onde θ é o ângulo constante entre \vec{F} e \vec{d} .

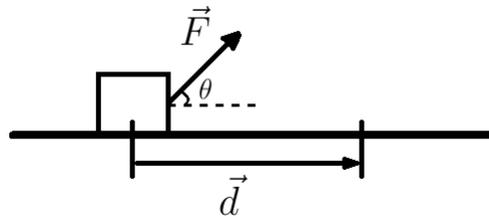


Figura 1: Trabalho.

Apenas a componente de \vec{F} na direção do deslocamento \vec{d} pode realizar trabalho sobre o objeto. Quando duas ou mais forças agem sobre um objeto, o trabalho total é a soma dos trabalhos realizados pelas forças, que também é igual ao trabalho que seria realizado pela força resultante \vec{F}_R .

Muitas vezes em nosso estudo utilizaremos as derivadas parciais. Não investimos aqui muito esforço para apresentar todas as regras de derivação relevantes. Caso julgue necessário, o leitor pode recorrer aos livros de cálculo diferencial e integral de sua preferência.

Um livro texto que aborda este assunto em mais detalhes é apresentado na referência [5]. Seguem abaixo algumas regras importantes.

Se f é uma função de duas variáveis, vamos denotar suas derivadas parciais de f_x e f_y . Como f_x e f_y são funções de duas variáveis, podemos considerar novamente suas derivadas parciais, onde denotaremos $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$ derivadas parciais de segunda ordem de f . Por exemplo se $z = f(x, y)$, temos:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad e \quad (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Teorema 2.1 Teorema de Clairaut *Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b) . Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D , então*

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Abaixo apresentamos a regra da cadeia em dois casos:

A Regra da Cadeia (Caso 1) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t . Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

A Regra da Cadeia (Caso 2) Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t . Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Se f é uma função de duas variáveis x e y , então o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\hat{j}.$$

Uma vantagem do formalismo de d'Alembert sobre as leis de Newton é a utilização do conceito de vínculos, o que simplifica substancialmente o problema a ser resolvido. Como consequência das equações de vínculo o número de coordenadas originais do sistema pode ser reduzido a um conjunto com o mínimo de variáveis, chamadas de coordenadas generalizadas, necessárias para a descrição do sistema. O formalismo de Lagrange, que será apresentado mais a frente, explora os vínculos para obter as coordenadas generalizadas. Para isto, apresentamos agora os conceitos de vínculo e coordenadas generalizadas.

Vínculos e Coordenadas Generalizadas

O objetivo deste trabalho é encontrar e aplicar o princípio de d'Alembert e as equações de Lagrange que são particularmente convenientes para descrever as equações de movimento de sistemas que podem estar sujeitos a certas restrições ou vínculos. Para isso devemos saber o que são vínculos e coordenadas generalizadas. Nesta seção apresentamos os conceitos de vínculos e coordenadas generalizadas citando o exemplo do pêndulo duplo, um exemplo clássico da mecânica.

Vínculo é uma restrição de natureza geométrica ou cinemática ao movimento das partículas de certo sistema. São restrições às posições ou velocidades das partículas. Portanto a própria formulação da equação de movimento precisa levar em conta esses vínculos ou essas restrições.

Exemplo 2.1 Um pêndulo duplo oscila num plano vertical fixo, conforme a figura abaixo. Este pêndulo é constituído por um pêndulo rígido de comprimento l_1 e de massa m_1 , ao qual está ligado um segundo pêndulo rígido de comprimento l_2 e de massa m_2 . Os ângulos θ_1 e θ_2 representam os ângulos que as hastes l_1 e l_2 formam com a vertical.

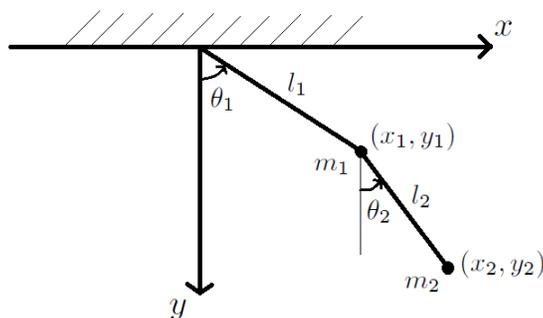


Figura 2: Pêndulo duplo plano.

Considerando (x_1, y_1) e (x_2, y_2) coordenadas das respectivas massas m_1 e m_2 , temos que as coordenadas x_1 e y_1 não são independentes entre si, pois a distância de m_1 à origem tem que ser igual a l_1 ($d_{0,m_1} = l_1$). Portanto uma condição que temos é:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2. \quad (3)$$

Por outro lado as coordenadas x_2 e y_2 também não são independentes entre si, a distância entre m_1 e m_2 tem que ser igual a l_2 ($d_{m_1,m_2} = l_2$), ou seja

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \quad (4)$$

No caso do pêndulo duplo plano há duas equações de vínculo (3) e (4). Elas refletem que a distância d_{0,m_1} e d_{m_1,m_2} são fixas.

Vínculos Holônomos. Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ coordenadas arbitrárias para descrever um sistema mecânico (podem representar posições, ângulos, etc). Se os vínculos forem todos da forma:

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M, t) = 0,$$

eles são ditos holônomos³. Um exemplo de vínculos holônomos são o do exemplo anterior que podem ser escrito na forma:

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0.$$

Coordenadas generalizadas é um conjunto mínimo de coordenadas necessárias para descrever a configuração de um sistema em relação a algum referencial. Para isso as coordenadas generalizadas devem

- i) Ser independentes entre si,
- ii) Caracterizar univocamente a configuração do sistema a cada instante,
- iii) Tornar os vínculos identicamente satisfeitos.

No caso do pêndulo duplo, discutido no exemplo (2.1):

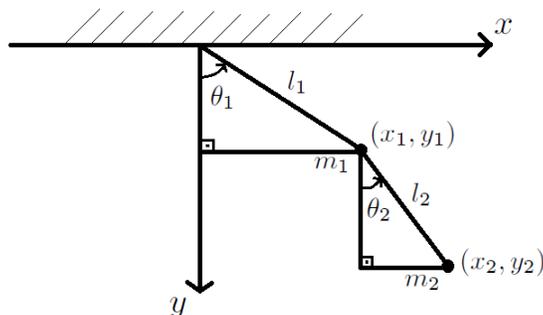


Figura 3: Pêndulo duplo plano.

Vimos que os vínculos são

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \quad \text{e} \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2.$$

³Vínculos que envolvem coordenadas e velocidades não são holônomos. Mas se o vínculo é integrável reduzindo a equação do vínculo a uma relação entre coordenadas apenas, então o vínculo é holônomo. Não entraremos em detalhes dos vínculos não holônomos pois foge do assunto deste trabalho. O leitor que tiver interesse pode recorrer à referência [4] para mais detalhes.

Temos que as duas coordenadas angulares θ_1 e θ_2 atendem os requisitos que definem coordenadas generalizadas. De fato:

- i) Os ângulos θ_1 e θ_2 são independentes entre si, ou seja a posição angular do pêndulo de massa m_2 é totalmente independente da posição angular do pêndulo de massa m_1 .
- ii) Caracterizam univocamente a configuração do sistema.
- iii) Em termos das coordenadas θ_1 e θ_2 as coordenadas cartesianas da posição das partículas, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , podem ser escritas como

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad y_1 = l_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad \text{e} \quad y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2.$$

Substituindo x_1 e y_1 na primeira equação de vínculo

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_1^2 \cos^2 \theta_1 \\ &= l_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) = l_1^2. \end{aligned}$$

Substituindo x_1, y_1, x_2 e y_2 na segunda equação do vínculo,

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)^2 + (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 - l_1 \cos \theta_1)^2 \\ &= l_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ &= l_2^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) = l_2^2, \end{aligned}$$

portanto quaisquer que sejam os valores de θ_1 e θ_2 as equações do vínculo são satisfeitas.

Vamos supor que todos os vínculos sejam holônomos, ou seja, para um sistema de N partículas as equações de vínculo só dependem das coordenadas das partículas e possivelmente do tempo. Desta forma os vínculos podem ser representados por expressões do tipo

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0. \end{aligned}$$

em que p é o número de vínculos.

Para descrever completamente um sistema de N partículas no espaço tridimensional a princípio são necessárias $3N$ coordenadas $(x_1, y_1, z_1) \dots (x_N, y_N, z_N)$. No entanto, como existem p vínculos holônomos, o número de coordenadas indispensáveis se reduz a

$n = 3N - p$. Para um sistema de N partículas no espaço com dimensão d , temos dN coordenadas, onde apenas $n = dN - p$ podem ser tomadas como independentes entre si, e diz-se que o sistema possui n graus de liberdade.

Essas n coordenadas indispensáveis são as coordenadas generalizadas e as representaremos por q_1, \dots, q_n . O número n é chamado de número de graus de liberdade. Em termos das coordenadas generalizadas, a posição de cada partícula do sistema pode ser escrita na forma

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Exemplo 2.2 *No caso do pêndulo duplo havíamos restringido o movimento a um plano. Como $d = 2$ e o número de partículas é $N = 2$ temos $dN = 4$ coordenadas dadas por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não independentes entre si, as quais definem a posição das massas m_1 e m_2 . Como existem dois vínculos ($p = 2$) o sistema possui $n = dN - p = 4 - 2 = 2$ graus de liberdade, ou seja, duas coordenadas generalizadas.*

Princípio de d'Alembert

Nesta seção determinamos o princípio do trabalho virtual e o princípio de d'Alembert, que usa a noção de coordenadas generalizadas e o conceito dos deslocamentos virtuais para eliminar as forças de vínculo da descrição do problema. Em seguida encontramos as equações de movimento da máquina de Atwood, um exemplo clássico da mecânica e no exemplo final, as equações de um pêndulo de comprimento fixo e com dissipação.

Deslocamentos Virtuais. Representamos deslocamento virtual por $\delta\vec{r}$ que é um deslocamento infinitesimal de um ponto a outro ponto da curva (ou superfície) no mesmo instante t , o vetor formado por esses pontos é tangente à curva (ou superfície). Ou seja, dado um sistema de N partículas os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i, i = 1, 2, \dots, N$ são deslocamentos infinitesimais das posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ realizados instantaneamente.

Suponha um vínculo, por exemplo uma curva, que dependa do tempo, ao qual o movimento da partícula está restrito. A equação de vínculo, neste caso, é dada por

$$f(x, y, t) = 0.$$

O vínculo pode também ser uma superfície, neste caso a equação de vínculo é $f(x, y, z, t) = 0$.

A figura abaixo ilustra a diferença entre deslocamento virtual e real para uma partícula restrita a uma superfície onde a velocidade no instante t é u .

Deslocamento real, representado por $d\vec{r}$ é um deslocamento que cada partícula do sistema sofre no intervalo de tempo dt de acordo com as equações de movimento do

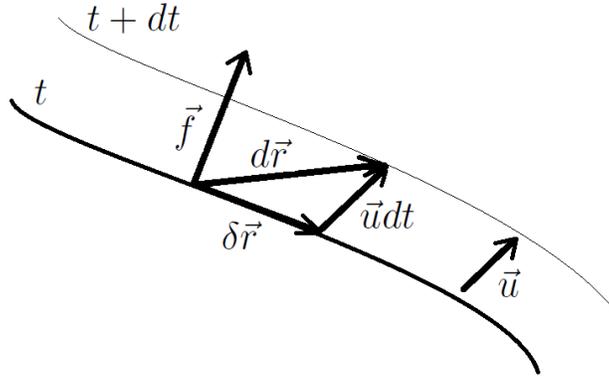


Figura 4: Deslocamentos em superfície móvel.

sistema. O vetor $d\vec{r}$ em geral não é tangente à curva. Se a curva(ou superfície) estiver fixa, ou seja não possui dependência do tempo, então $d\vec{r}$ e $\delta\vec{r}$ são ambos tangentes à superfície.

Se a superfície à qual o movimento da partícula está condicionado é idealmente lisa (É uma superfície considerada ideal, em que o coeficiente de atrito é igual a zero), logo, a força de contato entre a partícula e a superfície não contém componente tangencial, mas apenas normal à superfície.

Como a força de vínculo \vec{f} é perpendicular à superfície no instante t e deslocamento virtual $\delta\vec{r}$ é tangente à superfície, temos que

$$W = \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = 0,$$

ou seja, o trabalho é zero.

2.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais

A formulação newtoniana da mecânica para um sistema de N partículas caracteriza-se pelo conjunto de equações diferenciais

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

onde \vec{F}_i é a força total, ou resultante, sobre a i -ésima partícula.

Na física é comum escrever a derivada em relação ao tempo utilizando um ponto. Por exemplo, a velocidade, dada por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, é escrita como

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}.$$

Similarmente, a aceleração é escrita como $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$.

Nesse formalismo, a distinção entre forças de vínculo e outras forças, que chamaremos de forças aplicadas, é fundamental. Escrevemos a força resultante na i -ésima partícula como

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i \quad (7)$$

onde \vec{f}_i é a força de vínculo e $\vec{F}_i^{(a)}$ é a força aplicada, ou força ativa.

Exemplo 2.3 Considere um pêndulo simples de massa m .

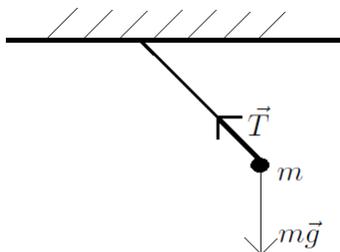


Figura 5: Pêndulo Simples.

A força peso é a que chamamos de força aplicada e a força \vec{T} , tensão no fio, é a força de vínculo pois é a tração no fio que mantém a massa m sempre a uma distância fixa do ponto de suspensão. Então a força responsável pelo vínculo é tensão no fio.

Vínculos cujas forças associadas não realizam trabalho durante deslocamentos virtuais são chamados de vínculos ideais, ou seja

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (8)$$

Para um sistema em equilíbrio a força resultante sobre cada partícula é zero, ou seja,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{pois cada} \quad \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (9)$$

Substituindo (7) em (9) temos:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (10)$$

Como o trabalho virtual das forças de vínculo é zero, temos o princípio dos trabalhos virtuais

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (11)$$

Este princípio é válido para qualquer sistema em equilíbrio, com uma condição que só envolve as forças aplicadas, ou forças ativas, onde as forças de vínculo não fazem mais parte.

A segunda lei de Newton, declara que

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i.$$

Contudo note que da expressão do momento linear

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i,$$

se derivarmos ambos os lados da equação acima em relação ao tempo, onde a massa m_i de cada partícula é constante, temos:

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i. \quad (12)$$

Substituindo este resultado na segunda lei de Newton obtemos

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0}. \quad (13)$$

Usando o fato de que a força resultante \vec{F}_i sobre a i -ésima partícula pode ser decomposta como uma soma de forças de vínculo com forças aplicadas, equação (7), reescrevemos a equação acima como:

$$\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)} = \vec{f}_i. \quad (14)$$

Multiplicando escalarmente ambos os lados pelo deslocamento virtual $\delta \vec{r}_i$ temos para um sistema de N partículas.

$$\sum_{i=1}^N (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i. \quad (15)$$

Supondo que os vínculos sejam ideais, o lado direito da equação acima é nulo, equação (8), e temos o Princípio de d'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (16)$$

Uma vantagem do Princípio de d'Alembert com relação ao formalismo newtoniano é que ele simplifica o problema eliminando as forças de vínculo.

Portanto nos casos em que os vínculos são holônomos e ideais é mais vantajoso trabalhar com o Princípio de d'Alembert, pois não precisa usar forças de vínculos.

Exemplo 2.4 A máquina de Atwood consiste em dois corpos de massas m_1 e m_2 que estão suspensos por uma corda inextensível, de modo que esta corda esteja apoiada sobre uma polia de massa desprezível e presa num suporte rígido.

Utilizando o princípio de d'Alembert, vamos encontrar as equações de movimento para o sistema mecânico da figura abaixo, conhecido como máquina de Atwood.

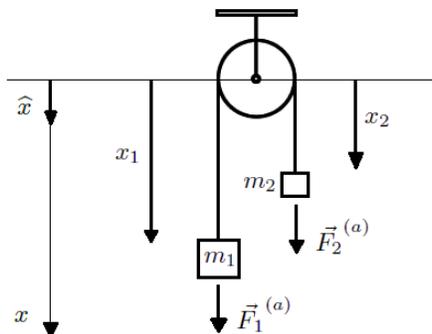


Figura 6: Máquina de Atwood.

Seja $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i}$ o vetor posição da massa m_1 e $\vec{r}_2 = x_2 \hat{i}$ o vetor posição da massa m_2 . A força ativa na massa m_1 é:

$$\vec{F}_1^{(a)} = m_1 \vec{g} = m_1 g \hat{i}$$

analogamente a força aplicada na massa m_2 é:

$$\vec{F}_2^{(a)} = m_2 g \hat{i}.$$

onde g é módulo da aceleração da gravidade.

Temos também um vínculo, pois somando x_1 e x_2 temos uma constante.

$$x_1 + x_2 = l. \quad (17)$$

Tendo o vínculo $x_1 + x_2 = l$, os deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_1$ e $\delta \vec{r}_2$ não são independentes. Logo de (17) decorre:

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \delta x_2 = -\delta x_1.$$

Isto é, os deslocamentos das massas m_1 e m_2 consistentes com os vínculos são deslocamentos em que se m_1 sobe (ou desce) δx_1 e m_2 tem que descer (ou subir) $-\delta x_1$. Com isso os deslocamentos virtuais são dados por

$$\delta \vec{r}_1 = \delta x_1 \hat{i} \quad \text{e} \quad \delta \vec{r}_2 = \delta x_2 \hat{i} = -\delta x_1 \hat{i} \quad (18)$$

Como há duas partículas no sistema, temos, a partir do princípio de d'Alembert

$$0 = \sum_{i=1}^2 \left(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \left(\dot{\vec{p}}_1 - \vec{F}_1^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{r}_1 + \left(\dot{\vec{p}}_2 - \vec{F}_2^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{r}_2, \quad (19)$$

vamos substituir (12), (18) e as forças aplicadas $\vec{F}_1^{(a)}$ e $\vec{F}_2^{(a)}$ em (19) logo:

$$(m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_1 g \hat{i}) \cdot \delta x_1 \hat{i} + (m_2 \ddot{\vec{r}}_2 - m_2 g \hat{i}) \cdot (-\delta x_1 \hat{i}) = 0. \quad (20)$$

Como $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i}$ e $\vec{r}_2 = x_2 \hat{i}$ temos:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{x}_1 \hat{i} \quad \text{e} \quad \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{x}_2 \hat{i}. \quad (21)$$

Agora derivando o vínculo duas vezes em relação ao tempo temos

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \quad \text{logo} \quad \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1.$$

E assim podemos reescrever $\ddot{\vec{r}}_2$ como

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{x}_2 \hat{i} = -\ddot{x}_1 \hat{i}. \quad (22)$$

Substituindo (21) e (22) em (20):

$$\begin{aligned} (m_1 \ddot{x}_1 \hat{i} - m_1 g \hat{i}) \cdot \delta x_1 \hat{i} + (m_2 (-\ddot{x}_1 \hat{i}) - m_2 g \hat{i}) \cdot (-\delta x_1 \hat{i}) &= 0 \\ m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 - m_1 g \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 g \delta x_1 &= 0, \end{aligned}$$

colocando δx_1 em evidência

$$(m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g + m_2 \ddot{x}_1 + m_2 g) \delta x_1 = 0,$$

como δx_1 é arbitrário temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g + m_2 \ddot{x}_1 + m_2 g) \\ &= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 - (m_1 - m_2) g \end{aligned}$$

logo

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_1 - m_2) g.$$

Portanto a aceleração da massa m_1 é

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

e a aceleração de m_2 é $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$.

Neste caso, temos que a aceleração \ddot{x}_1 e \ddot{x}_2 são constantes, onde facilmente obtemos a velocidade e a posição de m_1 e m_2 .

Exemplo 2.5 Considerando um pêndulo de comprimento fixo e com dissipação, vamos encontrar suas equações de movimento, analisando seu comportamento.

Para o nosso exemplo temos uma única partícula, logo do princípio de d'Alembert ou seja de (16) temos que:

$$\sum_{i=1}^N (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = (\dot{\vec{p}} - \vec{F}) \cdot \delta \vec{r} = 0,$$

ou seja,

$$\dot{\vec{p}} \cdot \delta \vec{r} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}.$$

De (12) em que $\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$ temos a seguinte equação do movimento (d'Alembert)

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}. \quad (23)$$

como

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta) = x(\theta)\hat{i} + y(\theta)\hat{j}, \quad (24)$$

derivando r em relação ao tempo temos

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{d\theta} \dot{\theta} \hat{i} + \frac{dy}{d\theta} \dot{\theta} \hat{j}, \quad (25)$$

derivando $\dot{\vec{r}}$ em relação ao tempo novamente:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{d^2x}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 \hat{i} + \frac{dx}{d\theta} \ddot{\theta} \hat{i} + \frac{d^2y}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 \hat{j} + \frac{dy}{d\theta} \ddot{\theta} \hat{j} \\ &= \left(\frac{d^2x}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dx}{d\theta} \ddot{\theta} \right) \hat{i} + \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dy}{d\theta} \ddot{\theta} \right) \hat{j}. \end{aligned} \quad (26)$$

Considerando l o comprimento do pêndulo, temos:

$$x(\theta) = l \sin(\theta) \quad \text{e} \quad y(\theta) = l \cos(\theta) \quad (27)$$

derivando x e y em relação a θ temos:

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos(\theta)l \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = -\sin(\theta)l \quad (28)$$

a derivada de segunda ordem de x em relação a θ é:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = -\sin(\theta)l. \quad (29)$$

Analogamente, temos que a derivada de segunda ordem de y em relação a θ é:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -\cos(\theta)l. \quad (30)$$

O nosso objeto é reescrever a equação (23). Para isso vamos trabalhar primeiramente com o lado esquerdo da equação, ou seja, com $m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}$. Substituindo (28), (29) e (30) em (26) temos

$$\ddot{\vec{r}} = \left(-\text{sen}(\theta)l\dot{\theta}^2 + \text{cos}(\theta)l\ddot{\theta} \right) \hat{i} + \left(-\text{cos}(\theta)l\dot{\theta}^2 - \text{sen}(\theta)l\ddot{\theta} \right) \hat{j}.$$

então :

$$m\ddot{\vec{r}} = m \left[\left(-\text{sen}(\theta)l\dot{\theta}^2 + \text{cos}(\theta)l\ddot{\theta} \right) \hat{i} + \left(-\text{cos}(\theta)l\dot{\theta}^2 - \text{sen}(\theta)l\ddot{\theta} \right) \hat{j} \right]. \quad (31)$$

De (24) onde $\vec{r} = x(\theta)\hat{i} + y(\theta)\hat{j}$ temos

$$\delta\vec{r} = \delta x(\theta)\hat{i} + \delta y(\theta)\hat{j}, \quad (32)$$

como $\delta x(\theta) = \frac{dx}{d\theta}\delta\theta$ e $\delta y(\theta) = \frac{dy}{d\theta}\delta\theta$, substituindo $\delta x(\theta)$ e $\delta y(\theta)$ em (32):

$$\delta\vec{r} = \frac{dx}{d\theta}\delta\theta\hat{i} + \frac{dy}{d\theta}\delta\theta\hat{j}, \quad (33)$$

agora vamos substituir (28) em (33) ou seja:

$$\delta\vec{r} = [\text{cos}(\theta)l\hat{i} - \text{sen}(\theta)l\hat{j}] \delta\theta. \quad (34)$$

Para obter a nova equação do lado esquerdo da equação de (23), vamos fazer o produto escalar de (31) por (34)

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} &= m\delta\theta \left(-\text{sen}(\theta)l\dot{\theta}^2 + \text{cos}(\theta)l\ddot{\theta} \right) \cdot \text{cos}(\theta)l + m\delta\theta \left(-\text{cos}(\theta)l\dot{\theta}^2 - \text{sen}(\theta)l\ddot{\theta} \right) \cdot (-\text{sen}(\theta)l) \\ &= m\delta\theta \left[-\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)l^2\dot{\theta}^2 + \text{cos}^2(\theta)l^2\ddot{\theta} + \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)l^2\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2(\theta)l^2\ddot{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima, cancelando alguns termos e usando a identidade trigonométrica $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$, chegamos em:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = ml^2\ddot{\theta}\delta\theta \quad (35)$$

Vamos agora analisar o lado direito da equação de d'Alembert, $\vec{F} \cdot \delta\vec{r}$, em que a nossa equação inclui dissipação. Uma boa forma de modelar a dissipação é considerar que a força de arraste aerodinâmico é proporcional ao quadrado da velocidade. O módulo da força de dissipação, neste caso, é $A = \gamma v^2$, em que γ é a constante de dissipação.

A força dissipativa é contrária ao movimento conforme a figura abaixo. Sendo assim o vetor força de arraste aponta na direção oposta ao vetor velocidade e é dado por $\vec{A} = -\gamma v^2 \frac{\vec{v}}{v}$, em que v é o módulo da velocidade.

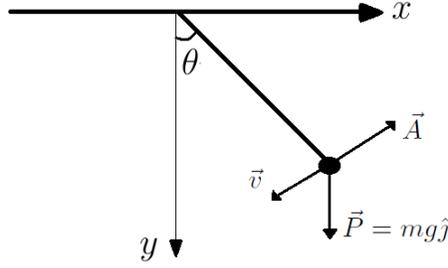


Figura 7: Dissipação do pêndulo.

Logo temos que a força $\vec{F} = \vec{P} + \vec{A}$ pode ser reescrita como:

$$\vec{F} = mg\hat{j} - \gamma v^2 \frac{\vec{v}}{v}, \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = mg\hat{j} - \gamma v \vec{v}. \quad (36)$$

Substituindo (28) em (25):

$$\vec{v} = \cos(\theta)l\dot{\theta}\hat{i} - \sin(\theta)l\dot{\theta}\hat{j}. \quad (37)$$

onde o módulo de \vec{v} é

$$v = \sqrt{(\cos(\theta)l)^2 \dot{\theta}^2 + (-\sin(\theta)l)^2 \dot{\theta}^2},$$

simplificando a expressão acima utilizando a identidade trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, chegamos em:

$$v = |\dot{\theta}|l, \quad (38)$$

e que

$$v^2 = \dot{\theta}^2 l^2. \quad (39)$$

Substituindo (38) e (37) em (36), temos

$$\vec{F} = mg\hat{j} - \gamma |\dot{\theta}|l \cdot [\cos(\theta)l\hat{i} - \sin(\theta)l\hat{j}] \dot{\theta}. \quad (40)$$

Vamos tirar o módulo de $\dot{\theta}$, tomando cuidado com o sinal ou seja $|\dot{\theta}| = \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}$ e reescrever (40) como: ⁴

$$\vec{F} = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \cos(\theta)\hat{i} + \left[mg + \gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \sin(\theta) \right] \hat{j}. \quad (41)$$

Fazendo o produto escalar de (41) por (34) vamos obter uma nova equação para o lado direito de (23):

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \delta \vec{r} &= \left[-\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \cos(\theta)\hat{i} + \left(mg + \gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \sin(\theta) \right) \hat{j} \right] \\ &\quad \cdot (\cos(\theta)l\hat{i} - \sin(\theta)l\hat{j}) \delta \theta, \end{aligned}$$

⁴Por exemplo, se $x = -\pi$ então $\alpha \text{sinal}(x) = -\alpha$.

ou seja,

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 l^3 \cos^2(\theta) \delta\theta - mg \text{sen}(\theta) l \delta\theta - \gamma \text{sinal}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 l^3 \text{sen}^2(\theta) \delta\theta.$$

Simplificando a expressão acima e usando a identidade trigonométrica novamente chegamos em:

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 l^3 \delta\theta - mg \text{sen}(\theta) l \delta\theta. \quad (42)$$

Portanto, para obter a nova equação de (23):

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

basta igualar (35) e (42), ou seja:

$$ml^2\ddot{\theta}\delta\theta = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 l^3 \delta\theta - mg \text{sen}(\theta) l \delta\theta,$$

cancelando os $\delta\theta$, colocando $\dot{\theta}^2$ em evidência e dividindo todos os termos por m , chegamos na seguinte equação diferencial não linear:

$$l^2\ddot{\theta} + \text{sinal}(\dot{\theta}) \frac{\gamma}{m} l^3 \dot{\theta}^2 + g \text{sen}(\theta) l = 0. \quad (43)$$

que é a equação de movimento do pêndulo de comprimento fixo e com dissipação.

Equações de Lagrange

Nesta seção determinamos as equações de Lagrange, reduzindo o princípio de d'Alembert (que ainda exige trabalhar com mais coordenadas do que o necessário) a uma soma de produtos de expressões por deslocamentos virtuais em que todos esses deslocamentos virtuais sejam independentes. Como exemplo encontramos as equações de movimento do pêndulo de comprimento fixo e com dissipação, visto na seção anterior. Para alguns casos do exemplo e com o auxílio do geogebra ⁵, analisamos graficamente o comportamento das equações.

Partindo do Princípio de d'Alembert

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (44)$$

onde $\dot{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i$, vamos reformular cada termo de (44) separadamente e chegar nas equações de Lagrange.

⁵O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Link : www.geogebra.org

Primeiramente vamos relacionar os deslocamentos virtuais ($\delta\vec{r}_i$) das posições das partículas com os deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas, onde os \vec{r}_i são funções dos q_s e possivelmente do tempo, equação (5), e como os deslocamentos virtuais são feitos a t fixo então:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (45)$$

Substituindo (45) em (44):

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = 0$$

aplicando a distributiva temos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (46)$$

Definição 2.1 *Seja*

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (47)$$

a k-ésima componente da força generalizada.

Substituindo (47) em (46) temos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (48)$$

Para encontrarmos as equações de Lagrange precisamos manipular o lado esquerdo da equação acima. Note que

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (49)$$

Além disso, como cada vetor posição é função das coordenadas generalizadas e possivelmente do tempo temos, de (5) em que $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$, $i = 1, \dots, N$, e pela regra da cadeia que:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} = \vec{v}_i, \quad (50)$$

onde $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$. Portanto,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (51)$$

pois $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ é função das coordenadas generalizadas e do tempo. De fato

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{em que} \\ \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} &= \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}. \end{aligned}$$

Além disso temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (52)$$

Supondo que as funções $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$ sejam diferenciáveis o número necessário de vezes, podemos reescrever (52) como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \quad (53)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}, \quad (54)$$

onde usamos (50). Substituindo (51) e (54) em (49) temos:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}. \quad (55)$$

Note agora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) \\ &= \frac{m_i}{2} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \vec{v}_i \right) \\ &= m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}. \end{aligned}$$

Semelhantemente temos que

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right). \quad (56)$$

Substituindo estas duas últimas expressões em (55) temos:

$$m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right). \quad (57)$$

Agora substituindo a equação acima em (48)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (58)$$

Rearranjando a última equação

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \right) - Q_k \right\} \delta q_k = 0. \quad (59)$$

Seja $T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2$ a energia cinética do sistema. Então

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0. \quad (60)$$

Como todos os δq_s são independentes e arbitrários, esta última igualdade só pode ser satisfeita se o coeficiente de cada δq_k for zero, ou seja

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (61)$$

As equações acima às vezes são chamadas de equações de Lagrange. Note que as equações acima foram derivadas sem restringir os tipos de forças aplicadas.

Vejamos que podemos utilizar tanto o princípio de d’Alambert quanto as equações de Lagrange para resolver o mesmo exemplo.

Exemplo 2.6 *Considerando um pêndulo de comprimento fixo e com dissipação, vamos determinar suas equações de movimento, analisando seu comportamento.*

Usando as Equações de Lagrange para resolver o exemplo proposto, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q. \quad (62)$$

Lembrando que o exemplo dado apresenta uma partícula, e que no lugar das coordenadas generalizadas q_s temos o ângulo θ , a energia cinética que vamos usar na equação acima é dada por:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (63)$$

Na equação (39) do exemplo 2.5, temos $v^2 = l^2\dot{\theta}^2$. Logo

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (64)$$

A derivada parcial de T em relação a $\dot{\theta}$ é:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta},$$

logo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}. \quad (65)$$

Observando que a energia cinética não depende da coordenada θ , temos que a derivada parcial de T em relação a θ é:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0. \quad (66)$$

Portanto o lado esquerdo da igualdade de (62) é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta}. \quad (67)$$

Para reescrever o lado direito da igualdade de (62), ou seja, de Q que por definição é

$$Q = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \quad (68)$$

basta encontrar $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, pois \vec{F} já foi calculado no exemplo 2.5. Lembrando que:

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta) = x(\theta)\hat{i} + y(\theta)\hat{j},$$

então a derivada de r em relação a θ é:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\hat{i} + \frac{dy}{d\theta}\hat{j}. \quad (69)$$

Substituindo (28)

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos(\theta)l \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = -\text{sen}(\theta)l$$

em (69) temos:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos(\theta)l\hat{i} - \text{sen}(\theta)l\hat{j}. \quad (70)$$

Para fazermos o produto escalar $\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, vamos substituir (41) que é:

$$\vec{F} = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \cos(\theta)\hat{i} + \left[mg + \gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \text{sen}(\theta) \right] \hat{j}$$

e (70) em (68), ou seja:

$$\begin{aligned} Q &= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \\ &= \left[-\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \cos(\theta)\hat{i} + \left(mg + \gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^2 \text{sen}(\theta) \right) \hat{j} \right] \\ &\quad \cdot \left[\cos(\theta)l\hat{i} - \text{sen}(\theta)l\hat{j} \right] \\ &= -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^3 \cos^2(\theta) - mg \text{sen}(\theta)l - \gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^3 \text{sen}^2(\theta). \end{aligned}$$

Simplificando a expressão usando a identidade trigonométrica temos:

$$Q = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^3 - mg \text{sen}(\theta)l. \quad (71)$$

Substituindo o lado esquerdo (67) e o lado direito (71) na igualdade (62)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q$$

temos

$$ml^2 \ddot{\theta} = -\gamma \text{sinal}(\dot{\theta})\dot{\theta}^2 l^3 - mg \text{sen}(\theta)l.$$

Dividindo todos os termos por m , chegamos na seguinte equação diferencial:

$$l^2 \ddot{\theta} + \frac{\gamma}{m} \text{sinal}(\dot{\theta})l^3 \dot{\theta}^2 + g \text{sen}(\theta)l = 0 \quad (72)$$

obtendo a mesma equação diferencial (43) não linear do exemplo 2.5.

Com o auxílio do geogebra, que resolve a EDO numericamente, geramos a figura 8. Nesta figura a dissipação é diferente de zero e utilizamos várias condições iniciais.

Tomando as condições iniciais CI_8 e CI_7 onde a velocidade angular é maior, o pêndulo fica girando até começar a oscilar e depois tende a parar. Para CI_8 o pêndulo fica girando em sentido anti-horário, sua velocidade angular diminui e por final o pêndulo começa a oscilar até parar. A diferença da CI_7 para CI_8 é o sentido que os pêndulos começam a girar, no caso da CI_7 o pêndulo gira em sentido horário.

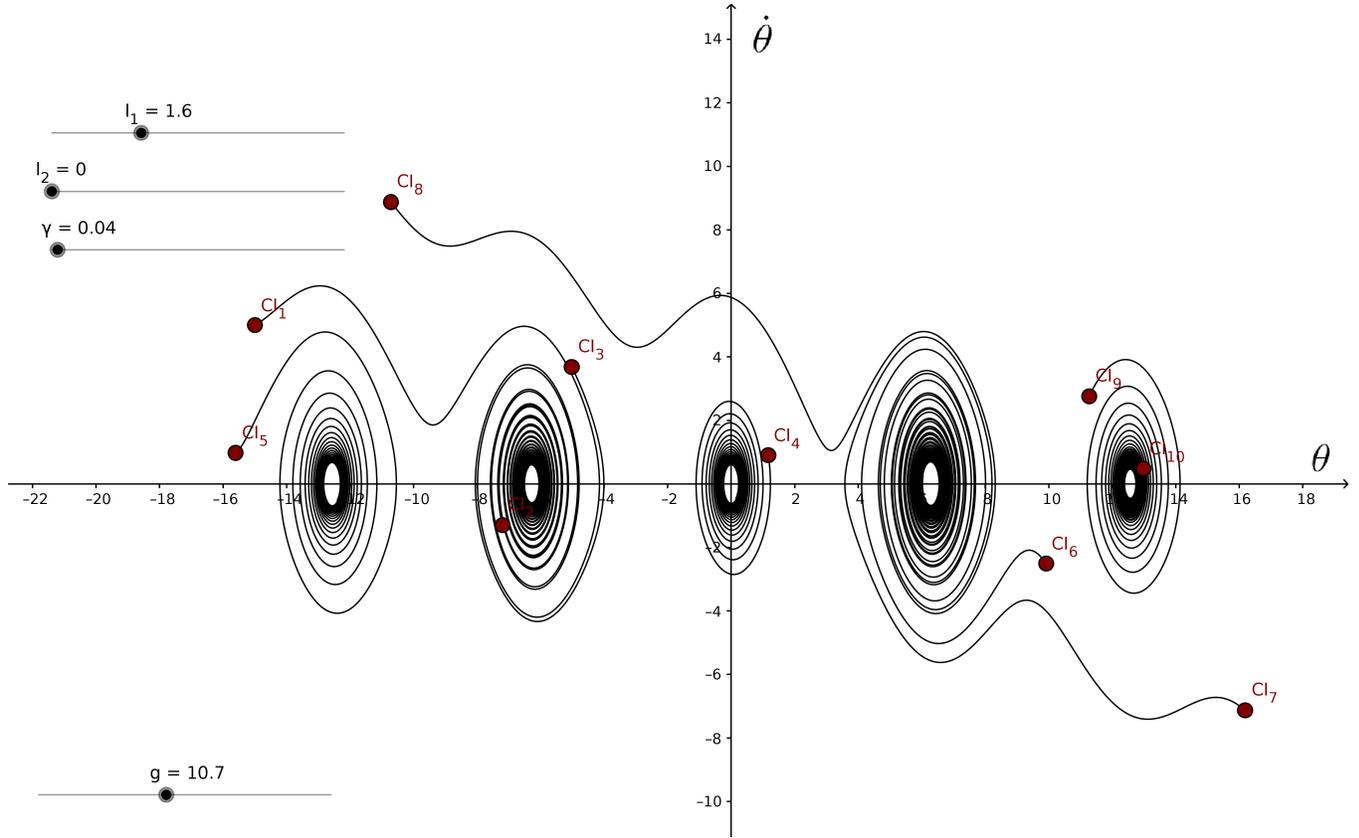


Figura 8: Gráfico do pêndulo com dissipação e de comprimento fixo. Fonte própria

Para obter a equação do movimento do pêndulo simples sem dissipação ($\gamma = 0$) e de comprimento fixo, ou seja l constante, um exemplo clássico⁶, temos da equação diferencial (72), a equação do movimento do pêndulo simples.

$$l^2\ddot{\theta} - g(-\text{sen}(\theta)l) = 0$$

que pode ser escrito como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0$$

e seu comportamento, tomando várias condições iniciais é representado pela figura 9. Quando as condições iniciais apresentam velocidades angulares maiores como CI_8 , CI_1 e CI_7 o pêndulo tende a girar. No caso das condições CI_8 e CI_1 o pêndulo gira em sentido anti-horário, já na CI_7 o pêndulo gira no sentido horário. Para velocidades angulares menores, quando tomamos as condições iniciais CI_3 , CI_2 e CI_4 o pêndulo tende a oscilar.

⁶Inúmeros avanços tecnológicos só se tornaram possíveis através do estudo dos pêndulos na física, visto que são descritos como objetos de fácil previsão de movimentos.

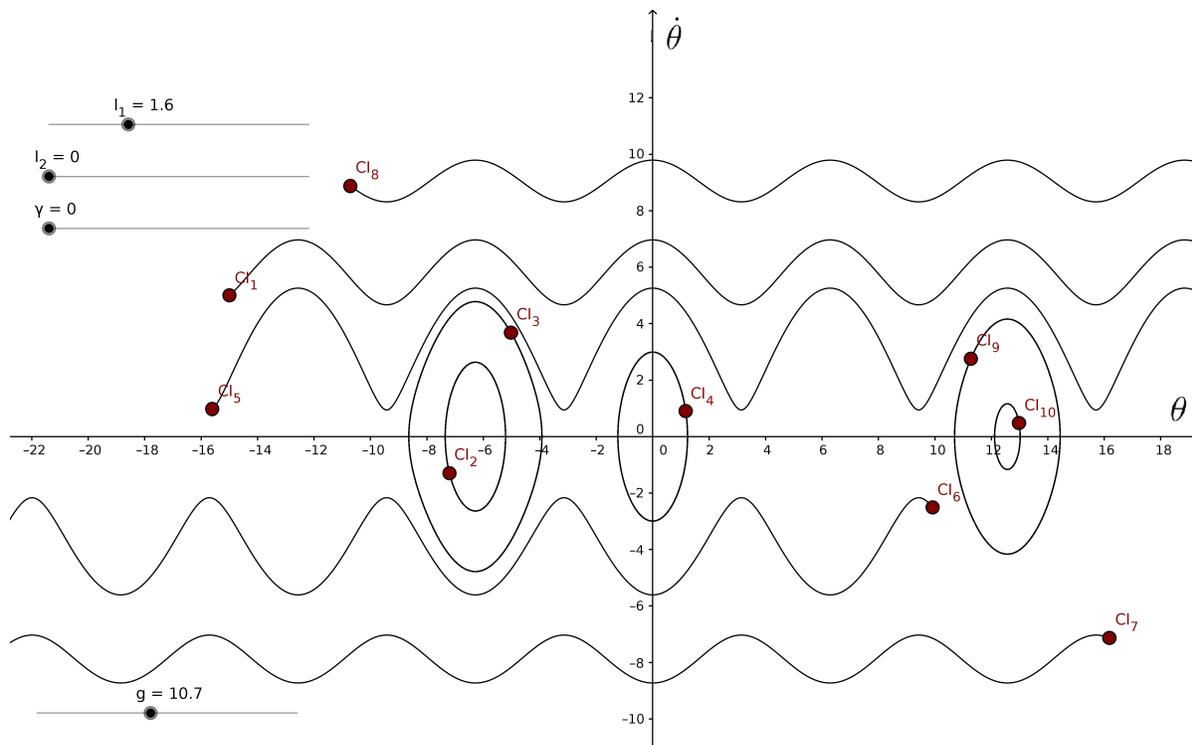


Figura 9: Gráfico do pêndulo simples sem dissipação e de comprimento fixo. Fonte própria

As equações de Lagrange envolvem um número mínimo de coordenadas, além de eliminar qualquer referência às forças de vínculo. Portanto é mais vantajoso usar as equações de Lagrange em relação ao Princípio de d'Alembert, para encontrar as equações de movimento.

Equações de Lagrange - Caso Conservativo

Nesta seção escrevemos as equações de Lagrange de outra forma, quando as forças aplicadas são conservativas, ou seja, as forças aplicadas derivam de potenciais. Como exemplo encontramos as equações de movimento do sistema mecânico da máquina de Atwood e do pêndulo duplo usando o formalismo lagrangiano.

Para forças aplicadas conservativas, vamos supor que existe uma função das posições da partículas $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ tal que

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V$$

onde $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_i} \hat{k}$ é o operador nabla em relação à variável \vec{r}_i . Portanto

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \hat{k} \right) \quad (73)$$

logo podemos escrever as forças generalizadas Q_k como:

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia:

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (74)$$

Substituindo a equação acima em (61), ou seja, em

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$$

que ainda pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0. \quad (75)$$

Como V por hipótese é função das posições, se substituirmos $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ por suas expressões em termos das coordenadas generalizadas, temos V como função das coordenadas generalizadas, portanto não depende das velocidades generalizadas (\dot{q}_k). Sendo assim $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ e, portanto, podemos reescrever (75) como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0. \quad (76)$$

Definindo a função de Lagrange L , ou Lagrangiana, como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial

$$L = T - V \quad (77)$$

temos as equações de Lagrange na forma padrão:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (78)$$

A lagrangiana em geral é uma função

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

de n coordenadas generalizadas, n velocidades generalizadas e em alguns casos pode depender explicitamente do tempo. Portanto qualquer derivada parcial da lagrangiana em relação a suas variáveis também é função dessas variáveis. Quando se toma derivada em relação ao tempo aparecem segundas derivadas das coordenadas generalizadas. Então as equações de Lagrange formam um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Exemplo 2.7 Refazendo o exemplo da máquina de Atwood vamos encontrar as equações de movimento para o mesmo sistema conservativo.

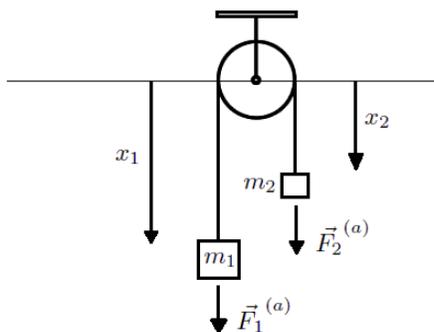


Figura 10: Máquina de Atwood.

Utilizando as coordenadas indicadas da figura acima, o vínculo é dado por $x_1 + x_2 = l$, onde l é uma constante determinada pelo comprimento da corda e pelo raio da roldana. Além disso, escolhamos x_1 como coordenada generalizada.

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_1^2 = \frac{(m_1 + m_2) \dot{x}_1^2}{2},$$

pois de $x_1 = l - x_2$ deduz-se $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$. Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano horizontal que passa pelo centro da polia, temos

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \\ &= -m_1 g x_1 - m_2 g (l - x_1) \\ &= -m_1 g x_1 - m_2 g l + m_2 g x_1 \\ &= (m_2 - m_1) g x_1 - m_2 g l. \end{aligned}$$

Logo a lagrangiana é

$$L = T - V = \frac{(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2}{2} - (m_2 - m_1)gx_1 + m_2gl.$$

Temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(m_2 - m_1)g, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1.$$

Utilizando as equações de Lagrange encontramos a equação de movimento da massa m_1

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \text{ou seja} \quad (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + (m_2 - m_1)g = 0,$$

portanto a aceleração da massa m_1 é

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

De forma análoga encontramos a equação de movimento da massa m_2 . Ou podemos lembrar que $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$.

Exemplo 2.8 *Vamos encontrar as equações de movimento de um pêndulo duplo plano, usando o formalismo lagrangiano.*

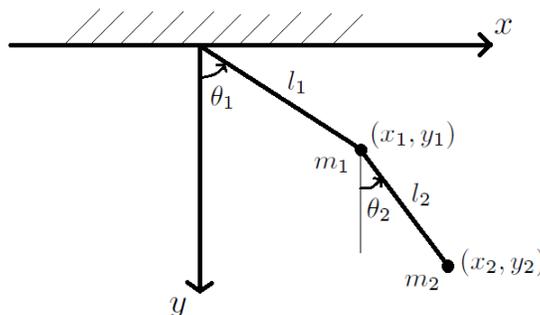


Figura 11: Pêndulo duplo plano.

Com base na figura acima, temos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como coordenadas cartesianas das massas m_1 e m_2 , respectivamente. Os ângulos θ_1 e θ_2 são as coordenadas generalizadas. Em termos das coordenadas generalizadas temos

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_1 &= l_1 \cos \theta_1, & y_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad , \quad \dot{y}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

ou seja,

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Substituindo os valores de $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2$ na equação acima temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \left[(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] \\ &+ \frac{m_2}{2} \left[(l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] \\ &= \frac{m_1}{2} \left(l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \right) \\ &+ \frac{m_2}{2} \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \right. \\ &\left. + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \end{aligned}$$

colocando alguns termos em evidência , temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) \\ &+ \frac{m_2}{2} \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) \right. \\ &\left. + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right] \end{aligned}$$

Utilizando as identidades trigonométricas $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ e $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$:

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_2}{2} 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

ou seja,

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Adotando o nível zero do potencial gravitacional no plano horizontal que contém o ponto de suspensão de m_1 , temos

$$\begin{aligned} V &= -m_1gy_1 - m_2gy_2 \\ &= -m_1g(l_1 \cos \theta_1) - m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Potanto a Lagrangiana $L = T - V$ é:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2.$$

Substituindo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1, \end{aligned}$$

na equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0.$$

obtemos a primeira equação do movimento do pêndulo duplo:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0. \quad (79)$$

Substituindo agora

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 gl_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

na equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0,$$

temos a segunda equação do movimento do pêndulo duplo

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 gl_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (80)$$

As equações (79) e (80) formam um sistema de EDOs não lineares acopladas cuja solução fornece os valores de θ_1 e θ_2 (ou $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$) em função do tempo.

Todas as interações fundamentais da física são tipicamente representadas por forças conservativas ou mesmo que não sejam conservativas, por exemplo, no caso da força eletromagnética ainda sim é possível dar uma forma Lagrangiana para as equações de movimento para uma partícula no campo eletromagnético. O fato é que todas as forças fundamentais da natureza conduzem a equações de movimento que podem ser colocadas na forma Lagrangiana.

Considerações Finais

A Matemática é uma ciência bela por si só em sua formulação e desenvolvimento. Porém ela vai além disso. A Matemática é uma ferramenta universal no sentido de que ela é usada para quantificar, descrever e fornecer previsões nas diversas áreas do conhecimento como biologia, química, engenharias em geral e física, entre outras.

A proposta deste trabalho é apresentar o princípio de d'Alembert e as equações de Lagrange de forma que o professor do ensino básico ou até mesmo alunos graduação possam aprofundar seus conhecimentos e tomar o texto como parte introdutória para o estudo da mecânica analítica.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me possibilitou oportunidades de estudar e me dedicar à Matemática.

Agradeço minha digníssima, Ludmila Alves Rioga, que tem uma grande participação em cada uma das minhas vitórias. Você me fortaleceu e tranquilizou nos momentos em que mais precisei, me deu conselhos e ajuda em momentos difíceis. Obrigado por tudo!

À minha mãe Solange, avó Maria Francisca, que sempre acreditaram em minha capacidade e me inspiraram a fazer o melhor de mim. Meus irmãos, tias, primos e amigos pela parceria, amizade e força que deram ao longo dos anos.

Aos meus sogros, em especial a minha sogra que não está mais entre nós mas que sempre torceu por mim.

Aos colegas de curso que sempre contribuíram nos momentos em que as dificuldades surgiam. Aos professores do PROFMAT/UFSJ, mediadores importantes nessa ca-

minhada, em especial ao meu orientador Denis Gouvêa Ladeira que acreditou no meu trabalho, tendo muita paciência e ao meu coorientador Marcelo Veloso pela ajuda e disponibilidade.

À UFOP e os professores pelo apoio e também por serem a porta de entrada para o PROFMAT.

Finalmente agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] Goldstein, Herbert; Poole, Charles; Safko, John. *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison Wesley, 2002.
- [2] Halliday, David and Resnick, Robert. *Física I, volume 1* . Livros Técnicos e científicos, Rio de Janeiro, 2008.
- [3] Henrique Alves Monteiro, Luiz. *Sistemas dinâmicos* , Editora Livraria da Física, 2006.
- [4] Lemos, Nivaldo. *Mecânica Analítica* . Editora Livraria da Física, 2004.
- [5] Stewart, James. *Cálculo, Vol. 2*, 7ª edição. Editora Cengage Learning, 2013.