2017: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Jogando cartas em sala de aula

Francilene Leite de Araújo [1]
Alexandre Celestino Leite Almeida[2]

Resumo: Neste trabalho propomos a utilização e a manipulação de cartas de baralho e o jogo de pôquer no desenvolvimento de atividades em sala de aula no estudo de probabilidade como alternativa pedagógica que possibilite despertar o interesse dos alunos para o estudo da Matemática e de sua aplicabilidade no contexto social. Descrevemos, brevemente, a origem e evolução histórica do pôquer, suas regras básicas e a dinâmica do Texas Hold'em, a modalidade de pôquer mais jogada. E, ainda, apresentamos uma sucinta descrição do surgimento da Teoria da Probabilidade na qual destacam-se: alguns nomes em razão de suas consideráveis contribuições nesse processo inicial; o famoso problema dos pontos que aguçou a curiosidade de muitos, despertando o interesse de matemáticos para sua resolução e, assim, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade; e, o importante princípio conhecido como Lei dos Grandes Números.

Palavras-chave: Teoria da probabilidade; Problema do ponto; Lei dos grandes números; Combinatória; Probabilidade; Ensino; Jogos; Pôquer.

1 Introdução

O uso da probabilidade acontece de uma forma intuitiva diariamente no nosso cotidiano. Ao observar ao nosso redor verificamos que, atualmente, o pensamento probabilístico se tornou dominante e está presente nas mais diversas áreas de atividades. Encontra-se aplicações da Teoria da Probabilidade nas ciências físicas, biológicas e sociais. São vários os cenários de incertezas em que configuram-se princípios da Teoria da Probabilidade: valores de seguros, previsões meteorológicas, incidência de doenças infecciosas, construção de loterias são apenas alguns exemplos. Por essa razão, segundo Gianella (2006), "faz-se necessário que tenhamos o domínio dos princípios probabilísticos para enfrentar os desafios da vida moderna". Para alcançar-se certo domínio destes princípios probabilísticos nada melhor do que começar pelo

[1]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2014
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
E-mail: fleitedearaujo@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ/CAP
E-mail: celestino@ufsj.edu.br

entendimento de como teve início o surgimento da Teoria da Probabilidade.

Desde a Antiquidade a humanidade tem lidado com a incerteza na tentativa de obter vantagens em disputas e evitar perdas advindas de fatores imprevisíveis. Os jogos de azar, por exemplo, têm sido parte de nossa civilização há milhares de anos, sendo vistos pelo homem como desafios e despertando bastante o seu interesse, e, ao longo do tempo, despertando, principalmente, o interesse de alguns matemáticos.

Nunes (2015) afirma que, "vários são os fatos históricos relatados que deram início ao surgimento e uso das probabilidades. A verdade é que a probabilidade surgiu do interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades". A imprevisibilidade e as possibilidades envolvidas em jogos de azar, certamente, representaram significativo interesse para o homem. E, de fato, notaremos que o interesse do homem em determinar as possibilidades de realização de uma determinada situação veio a ser um fator bastante relevante que teria impulsionado o surgimento da Teoria da Probabilidade.

Em relação ao surgimento da Teoria da Probabilidade, ressaltaremos alguns nomes que se destacam na literatura em razão de suas contribuições nesse desenvolvimento inicial: Luca Pacioli (1445-1514), Girolamo Cardano (1501-1576), Chevalier de Meré (1607-1684), Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Em relação a Girolamo Cardano, Alves (2015) descreve que ele teve uma vida bastante polêmica, destacou-se como médico e tornou-se conhecido na época pelas inúmeras desavenças que teve com alguns "colegas" de profissão. Era um amante dos jogos de azar e escreveu sobre probabilidades em seu livro "*Liber De Ludo Aleae*"(O livro dos jogos de azar), o qual considera ser o primeiro documento que se tem registro sobre o tema. Ainda, acrescenta que, embora, seu trabalho na área da probabilidade seja pouco conhecido devemos a ele os primeiros trabalhos científicos feitos neste campo.

Segundo Alves (2015) muitos autores atribuem a Pascal e a Fermat o início do estudo das probabilidades, no entanto, ressalta que o livro de Cardano é anterior à existência dos mesmos. Esse fato ocorre porque embora seu trabalho tenha sido escrito por volta do ano 1526, somente foi publicado em 1663. Os autores Moreira (2015) e Sá (2015), por exemplo, fazem destaque ao fato de que para alguns estudiosos, a Teoria da Probabilidade teria se iniciado com Cardano e que sua obra representa o primeiro trabalho a desenvolver princípios estatísticos da probabilidade.

É notável a contribuição de Cardano para o surgimento da Teoria da Probabilidade. Entretanto, apesar de Cardano ter contribuído de forma notória para alguns aspectos da matemática, como o estudo sobre a probabilidade, existe, por parte de alguns autores, um certo demérito em relação a Cardano e ao seu trabalho pelo fato de ter sido um cidadão polêmico em sua época, devido ao seu livro "*Liber De Ludo Aleae*"(O livro dos jogos de azar) se apresentar um pouco confuso e com erros e em razão do mal entendido de que ele teria se apropriado indevidamente das ideias de Tartaglia.

Embora tenha cometido alguns erros em sua obra "*Liber De Ludo Aleae*"(O livro dos jogos de azar), Cardano contribuiu significativamente para o desenvolvimento da probabilidade, deixando seu nome na história da Matemática (SÁ, 2015). É considerado por muitos como o iniciador do estudo matemático das probabilidades, pois, apresentou um estudo simplificado de grande importância para o desenvolvimento do cálculo de probabilidades. Foi quem definiu a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados e, também, deu indicações da importância de métodos combinatoriais no desenvolvimento de uma Teoria da Probabilidade e, com isto, o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um evento aleatório e, assim, calcular a probabilidade da ocorrência de um evento como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao experimento. Todas essas técnicas foram escritas em seu tratado de 32 capítulos "*Liber De Ludo Aleae*"(O livro dos jogos de azar) (GADELHA, 2004; VIALI, 2016).

Para Gadelha (2004), a teoria matemática da probabilidade teria se originado, realmente, a partir de meados do século XVII, pois, antes disso havia apenas sido realizadas de forma esparsa considerações filosóficas sobre causalidade e acaso, investigações de problemas referentes a jogos de azar ou eventos sujeitos ao acaso. Ressalta-se que a aplicação sistemática de análise matemática e o estabelecimento de regras gerais para a solução de problemas específicos, que deu origem a teoria matemática da probabilidade, entendida como uma medida da chance de ocorrência de um evento sujeito ao acaso, somente teve início em 1654 com os resultados obtidos pelos dois ilustres franceses, Blaise Pascal e Pierre de Fermat, em resposta a um desafio para solucionar um problema proposto 160 anos antes pelo monge franciscano Luca Pacioli (1445-1514)(GADELHA, 2004).

Na época de Pascal e Fermat havia um famoso jogador profissional, conhecido como Chevalier de Meré com notável habilidade para problemas matemáticos. De Meré, por volta do ano de 1654, teria apresentado a Pascal um problema que havia fascinado jogadores e matemáticos desde a idade média. Tal problema referia-se ao que havia sido proposto 160 anos antes por Pacioli e consistia em como distribuir a aposta em um jogo de azar, realizado entre jogadores com igual chance de ganhar cada rodada, levando em conta a pontuação do jogo na rodada em que o mesmo seria interrompido. A partir daí, Pascal iniciou um estudo sobre a questão e, posteriormente, apresentou o problema a Fermat, dando origem a uma troca de correspondências, num total de sete cartas, as quais se tornaram históricas (ALVES, 2015).

Também, outros estudiosos como Callegari-Jacques (2007) e Cramér (1955), fazem considerações ao fato de que a moderna Teoria da Probabilidade teve sua origem nessa troca de correspondências, realizada quando o Chevalier de Meré teve a ideia de consultar o famoso matemático e filósofo Blaise Pascal, em Paris, sobre algumas questões relacionadas com certos jogos de azar, dando margem a correspondência entre Pascal e alguns de seus amigos matemáticos, sobretudo Pierre de Fermat, em Toulouse, e durante o restante do século XVII, os matemáticos discutiram as questões levantadas por De Meré e outras do mesmo tipo (CRAMÉR, 1955).

Observa-se que, para muitos estudiosos, a Teoria da Probabilidade teria iniciado-se verdadeiramente a partir da troca de correspondências entre Pascal e Fermat acerca do famoso "problema dos pontos"(SÁ, 2015). Já segundo Moreira (2015), para alguns estudiosos o cálculo de probabilidades simplesmente teria se fortalecido com Pascal e Fermat, visto que para muitos Cardano é considerado o iniciador do estudo matemático das probabilidades.

Também, há aqueles, como Nunes (2015), que declaram que o marco inicial da análise sistemática da probabilidade teria se estabelecido a partir de reflexões acerca do conhecido "problema dos pontos", que havia sido proposto inicialmente por Pacioli em 1494, e, posteriormente, apresentado por Antoine Gombauld (o qual se autodenominava Chevalier de Meré) à Pascal que, então, veio a partir daí estabelecer uma troca de correspondências com Fermat. Observa-se, ainda, estudiosos que destacam certo mérito ao próprio Chevalier de Meré por sua participação na gênese da Teoria da Probabilidade.

> "Um dos mais conhecidos problemas, e que marcou o início da análise sistemática da probabilidade, foi o proposto pelo monge Paccioli em 1494, conhecido como o Problema dos Pontos, que consiste em determinar como deverá ser feita a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do término. (...)
> Em 1654, o Problema dos Pontos foi colocado para Pascal por um intelectual francês apaixonado por jogos, Chevalier de Meré, que ficou imortalizado por essa participação no nascimento da teoria da probabilidade. Esse fato deu início a uma série de troca de cartas entre Pascal e Fermat, publicadas em 1679, onde estabeleceram uma forma para se calcular probabilidades e resolveram o problema proposto por Paccioli"(GADELHA, 2004 apud NUNES, 2015).

Assim como Nunes (2015), Fraga (2015) considera que a base do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade se encontra justamente nas reflexões que desencadearam as inúmeras propostas de resolução do famoso "problema dos pontos". Tal fato, segundo ele, se justifica em razão de tal problema ter despertado a atenção da comunidade matemática por volta de 1494, na publicação do livro "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*"(coleção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade).

Resumidamente, em relação ao surgimento da Teoria da Probabilidade, com base na literatura consultada, merecem nosso destaque: Luca Pacioli, por propor o famoso "problema dos pontos"em sua obra "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*"(coleção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade); Cardano, por seu livro "*Liber de Ludo Aleae*"(O livro dos jogos de azar) e seus estudos que tiveram grande importância para o desenvolvimento da probabilidade; Chevalier de Meré, pelo fato de ter proposto o "problema dos pontos"à Pascal; e, Pascal e Fermat, pelas valiosas contribuições desencadeadas por seus estudos em torno da resolução do "problema dos pontos"e de outros.

Mesmo seguindo, durante certo período, sem grandes avanços na Teoria da Probabilidade, o interesse pelo assunto crescia entre os matemáticos. O "problema dos pontos", como veremos adiante, também, veio a interessar Christiaan Huygens (1629-1695) que a partir deste iniciou o estudo propriamente dito da Teoria da Probabilidade e, ainda, incentivou a

Jacob Bernoulli (1654-1705) a enunciar e demonstrar um importante teorema para a Teoria da Probabilidade, a "Lei dos Grandes Números", o que possibilitou um avanço significativo neste campo.

Percebe-se que o interesse em determinar as possibilidades de realização de uma determinada situação, ou seja, "mensurar o acaso"e, com isto, ter certo controle acerca da realização de determinados eventos, impulsionou a descoberta do importante princípio que ficou conhecido como "*Lei dos Grandes Números: eventos aleatórios, após um grande número de experimentos, ocorrem em uma certa razão*". Este importante fato, a Lei dos Grandes Números, nos permite, por exemplo, observar que ao lançarmos um dado inúmeras vezes, notaremos que cada número de suas faces aparecerá em uma proporção que tende a se estabilizar, ou seja, um para seis. Nota-se que quanto maior o número de jogadas, mais nos aproximaremos dessa proporção de 1/6. Tal resultado obtido experimentalmente é chamado de probabilidade 'frequentista', pelo fato de medir a frequência do aparecimento da face marcada com o número.

Em 1713, é publicado um importante tratado sobre a Teoria das Probabilidades, denominado *"Ars Conjectandi"* (A Arte da Conjectura) de autoria do matemático Jacob Bernoulli (1654-1705), o qual foi finalizado por seu sobrinho Nicolaus Bernoulli (1687-1759). É nesta obra que Bernoulli enuncia e demonstra a "Lei dos Grandes Números", um poderoso teorema também conhecido como "Teorema de Bernoulli". O livro contém ainda considerações sobre esperança matemática e moral, sobre o significado de probabilidade como uma medida do grau de certeza e sobre probabilidades a priori e a posteriori. Esta contribuição marca o início de uma nova era na Teoria da Probabilidade. O livro "A Arte da Conjectura" proporcionou um significativo avanço das probabilidades (GADELHA, 2004).

1.1 O "Problema dos Pontos"

É provável que Chevalier de Meré tenha apresentado outras questões envolvendo jogos de azar à Pascal e, assim, o conhecido "problema dos pontos" que havia sido proposto inicialmente por Pacioli não teria sido o único. No entanto, o "problema dos pontos" teve papel fundamental na história do surgimento da Teoria da Probabilidade, pois, despertou a curiosidade e o interesse de alguns matemáticos para a sua resolução, destacando-se em função das reflexões e dos resultados obtidos a partir do seu estudo. O "problema dos pontos" é, também, conhecido por alguns estudiosos como "problema da divisão das apostas".

Segundo Sá (2015), usualmente, são apresentadas as duas versões a seguir deste problema:

> " 'Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?' (MERÉ, apud, BOYER, 2003, p. 250) (...)
> 'Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo de balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?' (PACIOLI, apud, SILVEIRA, 2001)."(SÁ, 2015).

Pascal e Fermat a partir de suas reflexões e estudos em torno do "problema dos pontos"e de suas soluções contribuiram de forma significativa para o desenvolvimento da probabilidade. As soluções apresentadas por eles ao problema foram diferentes, o primeiro buscou a resposta usando os valores esperados de duas ações alternativas enquanto que o segundo centrou a solução no cálculo de probabilidades de um evento. No entanto, os mesmos não publicavam seus resultados, o registro de suas contribuições encontram-se nas cartas por eles correspondidas e que somente foram publicadas em 1679.

Em 1655, o holandês Christiaan Huygens (1629-1695), astrônomo, físico e matemático, esteve na França, onde tomou conhecimento do problema da divisão das apostas, e não sabendo da solução dos dois franceses Pascal e Fermat, dedicou-se a buscar também uma resposta. Em 1657, Christian Huygens publicou um pequeno folheto, "*De ratiocinius in ludo aleae*" (Sobre o raciocínio em jogos de dados), o qual veio a ser considerado o primeiro livro a abordar o cálculo de probabilidades. Assim, a solução de Huygens acabou sendo publicada primeiro (1657) que as de Pascal e Fermat (1679) (CALLEGARI-JACQUES, 2007).

A seguir, uma resolução do problema dos pontos, na versão do questionamento de Luca Pacioli, apresentada por Sá (2015).

> "Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?"
>
> O primeiro jogador tem 5 pontos e o segundo jogador tem 3 pontos. Desse modo, o primeiro jogador precisa somente vencer mais uma partida no jogo da balla para ficar com o prêmio. O segundo jogador, por sua vez, necessita vencer três partidas seguidas para ficar com o prêmio. Assim, considerando que as chances de vitória em cada partida sejam iguais para os dois jogadores, a probabilidade do segundo jogador ganhar o prêmio é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, uma vez que dos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ resultados possíveis para as partidas, em somente um caso o segundo jogador ganha. Daí, utilizando a probabilidade do evento complementar, conclui-se que a probabilidade do primeiro jogador ganhar o prêmio é dada por $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ e, portanto, o primeiro jogador deve receber $\frac{7}{8}$ do valor do prêmio, ao passo que o segundo jogador deve receber $\frac{1}{8}$ do valor do prêmio (Sá, 2015, p.46).

Em resposta ao desafio do Chevalier de Meré sobre o velho problema dos pontos, Pascal e Fermat estabeleceram um método sistemático para calcular probabilidades e, como já mencionado, solucionaram o problema de Pacioli, cada um deles encarando o problema de uma perspectiva diferente: Fermat voltou-se para a álgebra pura; e, Pascal usou um formato geométrico para esclarecer a estrutura algébrica embutida (GIANELLA, 2006). Eles foram os pioneiros na solução de problemas genéricos.

A seguir uma solução de Fermat, segundo Gianella (2006),

> "Fermat discutiu o caso em que o jogador A precisava de dois pontos para ganhar o jogo e o jogador B de 3. Eis a solução de Fermat: Fica claro que mais quatro

> partidas decidem o jogo; seja a uma partida ganha por A e seja b uma partida ganha por B; considerando os dezesseis arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b:
>
> aaaa aaab abba bbab
>
> abaa baba aabb abbb
>
> baaa bbaa abab babb
>
> aaba baab bbba bbbb
>
> Os casos em que a aparece duas ou mais vezes são favoráveis a A e há onze deles. Os casos em que b aparece três ou mais vezes são favoráveis a B e há cinco deles. Portanto as apostas podem ser divididas na razão 11 : 5. Para o caso geral em que A precisa de m pontos para ganhar e B precisa de n, anotam-se os $2^{(m+n-1)}$ arranjos completos de ordem $(m+n-1)$, das duas letras a e b. Procura-se o número *alfa* de casos em que a aparece m ou mais vezes e o número *beta* de casos em que b aparece n ou mais vezes. As apostas devem então ser divididas na razão *alfa : beta*."(GIANELLA, 2006, p.43-44).

A solução proposta por Pascal, embora sem certeza, foi analisar todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo. Pascal utilizou de maneira inteligente o triângulo aritmético que, mesmo embora não tenha sido descoberto por ele, hoje é conhecido como triângulo de Pascal por tê-lo utilizado para solucionar o problema dos pontos. Pascal já havia comentado em uma carta a Fermat a respeito do seu manuscrito "*Traité du triangle arithmétique*" (Tratado do triângulo aritmético), escrito em 1653 (mas, só publicado em 1665), no qual havia realizado um estudo detalhado do triângulo compondo os coeficientes binomiais (VIALI, 2016; GADELHA, 2004).

Em 1303 o matemático chinês Chu Shih-Chieh apresentou um dispositivo que denominou "Espelho Precioso dos Quatro Elementos". O espelho começa com um diagrama aritmético que fornece os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência. Pascal em sua genialidade conseguiu extrair do Espelho Precioso a famosa fórmula $C_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ que ele, corretamente, afirmava que determinava o número de combinações simples de n objetos tomados k de cada vez (GIANELLA, 2006). O conhecimento de Pascal levou-o a perceber a conexão do triângulo aritmético, que tinha mais de 600 anos, com o cálculo de probabilidade e enunciar propriedades novas. Foi ele quem descobriu a maioria de suas propriedades e relações, o que justifica o nome que é dado ao triângulo.

Nesta breve descrição que realizou-se a respeito do desenvolvimento inicial da Teoria da Probabilidade, observa-se que há uma controvérsia entre os estudiosos a respeito do surgimento da Teoria da Probabilidade, se a contribuição inicial é devida a Cardano ou Pascal e Fermat. Verificamos que esse desentendimento existe pelo fato de seus trabalhos e resultados apesar de terem sido escritos num determinado tempo somente foram publicados tempos depois.

O trabalho de Cardano "*Liber De Ludo Aleae*"(O livro dos jogos de azar) foi escrito em 1526, mas, somente publicado em 1663. Quanto aos resultados obtidos por Pascal e Fermat que se encontravam nas cartas correspondidas por eles, estes foram escritos em 1654, mas, somente publicados em 1679. A obra de Cardano é anterior aos estudos realizados por Pascal e Fermat, mas, sua divulgação somente ocorreu após eles os terem realizado e a divulgação destes estudos somente ocorreu após a publicação da obra de Cardano. Ainda, observa-se que antes da publicação das contribuições destes matemáticos ocorreu a publicação do trabalho de Christiaan Huygens, "Sobre o raciocínio em jogos de dados", em 1657, com isto, alguns estudiosos apontam este como sendo o primeiro livro a abordar o cálculo de probabilidades.

Ao final destes apontamentos apresentados, constata-se que todas as contribuições iniciais ao surgimento da Teoria da Probabilidade se desenvolveram a partir do interesse do homem em estudar problemas específicos envolvendo a imprevisibilidade e as possibilidades dos jogos de azar. Assim, os conceitos básicos de Combinatória e Probabilidade que apresentamos a seguir representam o resultado destas contribuições.

2 Conceitos Básicos

2.1 Combinatória

A seguir alguns conceitos sobre Combinatória baseados em Lima (2006), Morgado (2006) e Prado (2015).

A Combinatória visa definir métodos para a contagem de elementos de um conjunto devidamente agrupados sob certas condições. Dois conceitos são de suma importância para a Combinatória: Fatorial de um número e Princípio Fundamental da Contagem. No processo de contagem é fundamental a construção desses agrupamentos: permutações, arranjos e combinações (PRADO, 2015).

2.1.1 Fatorial de um número

O fatorial de um número natural n, indicado por $n!$, é definido como o produto do número natural n pelos seus antecedentes até chegar à unidade.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1. \tag{1}$$

Essa definição é válida para $n \geq 1$. Para $n = 0$, convenciona-se que $0! = 1$.

2.1.2 Princípio Fundamental da Contagem

Embora o enunciado do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) (ou princípio multiplicativo) tenha sido formulado para experimentos com duas etapas, a afirmação permanece válida quando o número de etapas é finito. Então, se determinado experimento ocorre em n etapas diferentes e, quaisquer que tenham sido os resultados nas etapas anteriores, cada etapa

i ocorre em k_i maneiras distintas $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, o Princípio Fundamental da Contagem afirma que o número total N de ocorrer o experimento será

$$N = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n. \tag{2}$$

2.1.3 Permutações

"*De quantos modos é possível ordenar n objetos distintos?*"

Determinar todas as ordenações possíveis de n objetos distintos significa encontrar todas as possíveis ordens que se obtém fazendo a troca da posição de cada um dos n objetos. Assim, tem-se que a escolha do objeto que ocupará a primeira posição poderá ser feita de n modos; para a escolha do objeto que ocupará a segunda posição teremos $(n-1)$ modos; para a terceira posição teremos $(n-2)$ modos; $\ldots$, e, 1 modo de escolher o objeto que ocupará a última posição. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de modos possíveis de ordenar n objetos distintos é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$.

"Permutar significa trocar". Permutação é cada sequência (ou ordenação) formada a partir de uma coleção inicial de objetos trocando-os de posição. A permutação é considerada simples se todos os objetos forem distintos uns dos outros. Escreve-se P_n para indicar o número de permutações obtidas a partir de n objetos distintos. O número de permutações simples de n objetos distintos é

$$P_n = n!. \tag{3}$$

Se tivermos n objetos, sendo α objetos idênticos, quando trocarmos entre si esses α objetos, obteremos uma mesma ordenação (sequência) e não uma ordenação diferente. Com isso essa ordenação está sendo contada várias vezes, exatamente $\alpha!$ vezes, pois, há $\alpha!$ modos de trocar os α objetos. Então, o número de permutações que podem ser obtidos com n objetos sendo α objetos idênticos, é dado por:

$$\frac{n!}{\alpha!}.$$

De modo geral teremos o seguinte:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}, \tag{4}$$

onde $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ expressam quantidades de objetos repetidos e $n!$ é o número total de objetos.

Exemplo: Seja o número 1356, se trocarmos de posição os algarismos das extremidades teremos o número 6351. Como 1356 é diferente de 6351, estamos diante de uma permutação. A fórmula da permutação demonstra a quantidade de grupos distintos que se pode formar. No exemplo, $n = 4$, logo $P_n = P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ grupos distintos.

Podemos chegar ao mesmo resultado aplicando o princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo). Note que o grupo é formado por 4 posições P1, P2, P3 e P4. Na posição P1 pode ser colocado qualquer dos 4 algarismos (3,5,6 ou 7), portanto o número de eventos dessa posição é 4. Na posição P2, temos à disposição 3 algarismos (pois um já ocupa a posiçãp P1), portanto o número de eventos dessa posição é 3. Na posição P3, temos à disposição 2 algarismos (pois dois já ocupam a P1 e a P2), portanto o número de eventos dessa posição (P3) é igual a 2. Resta apenas a posição P1, com 1 algarismo à sua disposição. Assim, pelo princípio multiplicativo podemos demonstrar que o total de permutações possíveis com elementos distintos será: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modos.

2.1.4 Arranjos

O Arranjo tem o mesmo significado da permutação, porém o número de elementos no grupo pode ser menor do que a quantidade de elementos a serem permutados.

Tendo à disposição n objetos, as sequências de k objetos ($k \leq n$) são denominadas de arranjos de n objetos tomados k a k. O número total destes arranjos é indicado por $A_{n,k}$. O Princípio Fundamental da Contagem nos permite calcular essa quantidade de arranjos de forma simples, pois temos n escolhas para o primeiro objeto, $(n-1)$ para o segundo, $\ldots$, $(n-k+1)$ para o k-ésimo objeto, sendo assim:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \tag{5}$$

Multiplicando e dividindo o resultado acima por $(n-k)!$, temos o seguinte resultado:

$$A_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{6}$$

Exemplo: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar utilizando $1, 3, 5$ e 6? Temos a disposição 4 objetos distintos que devem ser tomados 2 a 2, ou seja,

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Pelo princípio multiplicativo: O grupo é formado por 2 posições (P1 e P2). Na posição P1 pode ser colocado qualquer dos 4 algarismos (1, 3, 5 ou 6), portanto o número de eventos dessa posição é 4. Na posição P2, temos à disposição 3 algarismos (pois um já ocupa a posição P1), portanto o número de eventos dessa posição é 3. Assim, pelo princípio multiplicativo podemos demonstrar que o total de arranjos possíveis com elementos distintos será: $4 \cdot 3 = 12$.

2.1.5 Combinações

"*De quantos modos podemos escolher (ou selecionar) k objetos distintos entre n objetos distintos dados?*"

Isto é o mesmo que determinar a quantidade de subconjuntos com k elementos do conjunto inicial. Para formar um subconjunto com k elementos, é preciso escolher esses elementos. Assim, podemos pensar: a escolha do 1º elemento do subconjunto poderia ser feita de n modos; do 2º elemento de $(n-1)$ modos; do 3º elemento de $(n-2)$ modos; $\ldots$, e, do k-ésimo elemento de $(n-k+1)$ modos, o que resultará, a princípio, em $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ subconjuntos. Entretanto, ao utilizar este raciocínio, temos um problema, algumas combinações são idênticas foram contadas como se fossem diferentes (a ordem dos elementos foi considerada). Estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem utilizada para dispor seus elementos. Como em cada subconjunto há k elementos, em cada combinação os elementos podem ser escritos em $k!$ ordens diferentes. Sendo assim, cada combinação foi contada $k!$ vezes. Logo, temos $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$ modos de escolher k objetos distintos entre n objetos distintos dados.

Então, se dispormos de um conjunto, não vazio, com n elementos e necessitarmos dividi-los em subconjuntos com k elementos, distintos pelos objetos e não pela ordem, será natural perguntar quantos subconjuntos com k elementos sob essas condições podemos formar. Cada um destes subconjuntos é uma combinação de n objetos tomados k a k. Representamos por $C_{n,k}$ (também indicado por C_n^p, ou ainda, $\binom{n}{p}$) o número de combinações de n objetos tomados k a k. Portanto,

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{A_{n,k}}{P_k}. \tag{7}$$

(A expressão $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ é também o resultado de análise feita por Pascal sobre o triângulo aritmético (GIANELLA, 2006). Este número $\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dbinom{n}{k}$ é conhecido como Número Binomial.)

2.1.6 Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm diversas relações entre si. A seguir apresentamos o Triângulo de Pascal formado com os diversos valores de C_n^k (chamados Números Binomiais, Coeficientes Binomiais ou ainda Números Combinatórios).

$$\begin{array}{lllll}
C_{0,0} & & & & \\
C_{0,1} & C_{1,1} & & & \\
C_{0,2} & C_{1,2} & C_{2,2} & & \\
C_{0,3} & C_{1,3} & C_{2,3} & C_{3,3} & \\
C_{0,4} & C_{1,4} & C_{2,4} & C_{3,4} & C_{4,4} \\
\ldots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

Ao numerar as linhas e as colunas do Triângulo a partir de zero, C_n^k é o elemento que aparece na linha n e coluna k.

Além de fazer uso do triângulo em suas discussões sobre probabilidade, Pascal, também, utilizava-o na determinação dos coeficientes binomiais. Os elementos ao longo da linha n são os coeficientes de uma expansão binomial, por exemplo, os números ao longo da linha $n = 3$

$(1, 3, 3, 1)$ são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a + b)^3$.

É possível construir rapidamente o Triângulo de Pascal por meio de uma propriedade dos números binomiais, a relação de Stifel. A seguir apresentamos algumas relações importantes:

Relação de Stifel: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
Somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.

Teorema das Linhas: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
A soma dos elementos da linha n vale 2^n.

Relação das Combinações Complementares: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
Em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

2.2 Probabilidade

A Teoria da Probabilidade é um segmento da Matemática que estuda e desenvolve modelos visando analisar experimentos ou fenômenos aleatórios. Todos esses modelos apresentam variações segundo sua complexidade, mas possuem aspectos básicos em comuns. Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos de Probabilidade segundo Lima (2006), Morgado (2006), Moreira (2015) e Sá (2015).

2.2.1 Definições básicas

Definição 2.1 (Experimento Determinístico) *É o experimento que quando repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos.*

O experimento determinístico é um acontecimento previsível, ou seja, o resultado é o mesmo em cada ocorrência do experimento ou fenômeno. Por exemplo, a temperatura de fusão da água.

Definição 2.2 (Experimento Aleatório) *É o experimento que quando repetido sob as mesmas condições, produz resultados geralmente diferentes.*

O experimento aleatório é algo que não se sabe ao certo se ocorrerá, mas é possível, a partir de informações prévias, verificar quais são as chances de ocorrência. São inúmeras as exemplificações de experimentos aleatórios, vejamos algumas:

- lançar uma moeda e observar a face de cima.
- lançar um dado e observar o número da face superior;
- retirar uma carta de um baralho normal e verificar o seu naipe;
- retirar uma bola ao acaso de uma urna contendo 5 bolas pretas e 4 bolas brancas e observar sua cor;

- a medição da quantidade de chuva que cai em uma determinada localidade.

Todo experimento aleatório possui as seguintes características: o resultado não pode ser previsto com certeza; é possível listar um conjunto de todos os possíveis resultados, a que chamamos de espaço amostral.

Definição 2.3 (Espaço Amostral) *Espaço amostral associado a um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis deste experimento. Ele será representado pela letra grega Ω (ômega). Os elementos do espaço amostral são chamados eventos elementares. Seus subconjuntos serão chamados eventos e o conjunto vazio (conjunto sem elementos) é denotado por $\varnothing$.*

A seguir, algumas exemplificações de espaços amostrais associados a experimentos aleatórios.

- Lançar uma moeda e observar a face de cima.
  $\Omega = \{K, C\}$, onde K representa cara e C representa coroa.

- Lançar um dado e verificar o número da face superior.
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Lançar uma moeda três vezes e observar a sequência obtida de caras e coroas.
  $\Omega = \{(K; K; K); (K; K; C); (K; C; K); (K; C; C); (C; K; K); (C; K; C); (C; C; K); (C; C; C)\}$

- Um dado honesto é lançado até que apareça o número 5 na face superior pela primeira vez. Observa-se em que lançamento isso acontece. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Neste último exemplo, evidencia-se que o espaço amostral é um conjunto infinito, ao passo que nos demais exemplos o espaço amostral é um conjunto finito.

Definição 2.4 (Evento) *Evento é todo subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. É representado pelas letras latinas maiúsculas do alfabeto, como A, B, etc. É também conhecido como evento simples. Quando coincide com o espaço amostral, é denominado evento certo. Se for vazio, será um evento impossível.*

Ao lançar um dado e verificar a face voltada pra cima, já sabemos que teremos o seguinte espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Desse experimento, podemos citar alguns eventos:

- Evento A:"ocorrência de número par" dado por $A = \{2, 4, 6\}$.

- Evento B:"ocorrência de número primo maior que 2" dado por $B = \{3, 5\}$.

- Evento C:"ocorrência de número quadrado perfeito maior que 4" dado por $C = \varnothing$ **(Evento Impossível)**.

- Evento D: "ocorrência de número inteiro positivo menor que 7" dado por $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ **(Evento Certo)**.

Quando o evento é formado por apenas um elemento do espaço amostral, este é chamado **evento elementar**.

2.2.2 Operações Básicas com Eventos

Tendo em vista que eventos são subconjuntos do Espaço Amostral, as operações básicas entre conjuntos são verificadas normalmente para eventos. Assim, tem-se:

a) Reunião (União) de dois eventos A e B, denotada por $A \cup B$, corresponde ao evento que ocorre se ao menos um deles ocorre. Isso quer dizer que pode ocorrer apenas o evento A, apenas o evento B ou ambos simultaneamente.

b) Interseção de dois eventos A e B, denotada por $A \cap B$, é o evento que ocorre quando ambos ocorrem.

c) Diferença de dois eventos A e B, denotado por $A \setminus B$ ou $A - B$, é o evento que ocorre se, e somente se, o evento A ocorre, mas não ocorre o evento B.

d) Complementar de um evento A, denotado por A^c ou $\overline{A}$, é a negação de A. O complementar de A corresponde ao evento que ocorre quando A não ocorre, ou seja, é formado pelos elementos que não fazem parte do evento A. Temos $\Omega = A \cup A^c$.

Exemplo 2.1 *Consideremos os eventos, do espaço amostral Ω, lançamento de um dado e observação da face voltada para cima. Sejam os eventos A:"obter como resultado um número par" e B:"obter como resultado um número maior que 3", ou seja, $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. Temos:*

- *Evento $A \cup B$:"obter como resultado um número par ou maior que 3" dado por $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.*
- *Evento $A \cap B$:"obter como resultado um número par e maior que 3" dado por $A \cap B = \{4, 6\}$.*
- *Evento $A \setminus B$:"obter como resultado um número par e menor ou igual a 3" dado por $A \setminus B = \{2\}$.*
- *Evento A^c:"obter como resultado um número ímpar" dado por $A^c = \{1, 3, 5\}$.*

e) Diz-se que um evento A implica o evento B, $A \subset B$, se para todo $x \in A$, então $x \in B$. Nesta situação, a ocorrência de A leva à ocorrência de B inevitavelmente.

f) Diz-se que A e B são eventos iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$.

g) Diz-se que A e B são eventos mutuamente exclusivos (ou excludentes), se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, eles não podem ocorrer simultaneamente. Em outras palavras, quando os eventos não possuírem elementos em comum.

Exemplo 2.2 *Consideremos os eventos, do espaço amostral Ω, lançamento de dois dados e observação das faces voltadas para cima. Sejam os eventos A:"obter soma das faces igual a* *um número primo" e B:"obter soma das faces igual a um número maior que 11", ou seja,* $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *e* $B = \{12\}$*. Temos:*

- *Evento* $A \cap B$*:"obter soma das faces igual a um número primo maior que 11" dado por* $A \cap B = \varnothing$*, ou seja, os eventos A e B são mutuamente excludentes.*

h) O evento $B_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, união infinita de eventos, corresponde ao evento que ocorre quando ao menos um dos eventos A_i ocorre, em que $i = 1, 2, 3, \ldots$.

i) O evento $C_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, interseção infinita de eventos, é o evento que ocorre quando todos os eventos A_i ocorrerem, com $i = 1, 2, 3, \ldots$.

2.3 Probabilidade: algumas abordagens

2.3.1 Definição Clássica (ou de Laplace) de Probabilidade

A probabilidade é uma medida que quantifica a incerteza de um determinado fato ou evento futuro ocorrer. Para alguns estudiosos a primeira obra a respeito do estudo de Probabilidade é de Cardano, sendo considerado o primeiro a concluir que a probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual a razão entre os resultados favoráveis (evento) e o total de resultados (espaço amostral).

> A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis (LAPLACE apud MORGADO, 2006, p.127).

Essa definição apresentada é conhecida como definição clássica de probabilidade. Segundo Morgado (2006), a definição de probabilidade como quociente do número de "casos favoráveis" foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *"Liber de Ludo Aleae"* (O livro dos jogos de azar) de Cardano.

Entretanto, devemos a Laplace a definição apresentada a seguir, pois, ele referia-se aos elementos de A (ou eventos elementares que compõem A) como os casos favoráveis e aos elementos do espaço amostral (Ω) como casos possíveis.

Definição 2.5 (Probabilidade Clássica) *Define-se a probabilidade de um evento A da seguinte forma*

$$\text{Probabilidade de } A = P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}, \tag{8}$$

onde, $\#(A)$ é o número de elementos do evento A e $\#(\Omega)$ é o número de elementos do espaço amostral Ω.

Essa abordagem para calcular probabilidades é bastante simples e direta, mas só pode ser usada em espaços amostrais equiprováveis, isto é, quando num fenômeno aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma "chance" de ocorrer.

São propriedades válidas para eventos satisfazendo a **definição 2.5**:

1. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\varnothing) = 0$, porque $\#(\varnothing) = 0$;
4. Se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, A e B são eventos mutuamente excludentes, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Na maioria das situações práticas, os resultados não tem a mesma chance de ocorrer, deste modo, a probabilidade dos eventos deve ser calculada pela frequência relativa.

2.3.2 Definição Frequentista de Probabilidade

Em espaços nos quais não vale a equiprobabilidade uma maneira de calcular probabilidades em situações desta natureza é repetindo o experimento um número suficientemente grande de vezes, sob condições rigorosamente idênticas, de modo que se faça a extração das frequências relativas atribuídas a cada evento. Esta maneira de determinar probabilidade de um evento é dita frequentista na qual o cálculo de probabilidade é estabelecido por meio de observações sucessivas do experimento.

Seja um experimento aleatório do espaço amostral $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Consideremos que o experimento seja repetido n vezes, nas mesmas condições, e que sejam anotados os resultados do número de vezes que o evento A_i ocorreu nas n experiências realizadas. Sendo n_i o número de vezes em que o evento A_i ocorreu, denomina-se frequência relativa do evento A_i ao número $f_i = \dfrac{n_i}{n}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Repetindo o experimento aleatório um número grande de vezes, nas mesmas condições e de modo que o resultado de um independa dos resultados anteriores obtidos, a frequência relativa aproxima-se do valor real da probabilidade. Essa constatação é devida a Jacob Bernoulli, foi publicada em sua obra *"Ars Conjectandi"* (A Arte da Conjectura), em 1713, sendo encontrada na denominada "Lei dos Grandes Números".

E, segundo a Lei dos Grandes Números, um dos resultados mais importantes da Teoria da Probabilidade, a aproximação da probabilidade pela frequência relativa aumenta quando o número de observações do experimento aumenta, com poucas observações esse número pode não convergir, enquanto com uma quantidade crescente de observações a estimativa tende a convergir para um valor cada vez mais preciso.

Definição 2.6 (Probabilidade Frequentista) *Seja E um experimento e A_i um evento de um espaço amostral associado Ω. Suponhamos que E é repetido "n"vezes e seja f_i a frequência relativa do evento. Então a probabilidade de A_i é definida com sendo o limite de f_i quando "n"tende ao infinito. Ou seja,*

$$P(A_i) = \lim_{n\to\infty} f_i. \tag{9}$$

Deve-se notar que a frequência relativa do evento A_i é uma aproximação da probabilidade de A_i. As duas se igualam apenas no limite. Em geral, para uma valor de n, razoavelmente grande a f_i é uma boa aproximação de $P(A_i)$. É o que chamamos "**Lei dos Grandes Números**".

2.3.3 Definição Axiomática de Probabilidade

Em razão de alguns problemas apresentados pela definição clássica e pela definição frequencial, desenvolveu-se a Teoria Axiomática das Probabilidades.

A estruturação axiomática de probabilidade foi proposta pelo matemático Russo Andrei Kolmogorov (1903-1987) e envolve espaços finitos e infinitos, no entanto, abordaremos apenas os espaços finitos. A abordagem axiomática estabelece um conjunto de propriedades que uma função de probabilidades deve satisfazer. Estas propriedades são relativamente diretas e fáceis de serem compreendidas a partir da noção intuitiva de probabilidade.

Definição 2.7 *Seja Ω um espaço amostral (conjunto). Uma probabilidade é uma função P que associa a cada evento A de Ω, um número real $P(A)$, de forma que:*

i) $0 \leq P(A) \leq 1$, *para todo evento* $A \subset \Omega$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A partir da definição de Probabilidade apresentada acima, outras propriedades importantes podem ser derivadas. O teorema a seguir nos apresenta algumas dessas propriedades mais simples que advém dessa definição.

Teorema 2.1 *Se A e B são eventos, então:*

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii) $P(\varnothing) = 0$.

iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Se $A \supset B$, então $P(A) \geq P(B)$.

Demonstração:

i) Sabe-se que $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + (\overline{A})$. Donde, segue-se que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii) $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$ pois Ω e $\varnothing$ são mutuamente excludentes. Logo, tem-se: $P(\varnothing) = 0$.

iii) $P(A) = P[(A-B) \cup (A \cap B)] = P(A-B) + P(A \cap B)$ pois $A-B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes. Daí, segue-se $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $P(A \cup B) = P[(A-B) \cup B] = P(A-B) + P(B)$ pois $A-B$ e B são mutuamente excludentes. Como $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Se $A \supset B$ então $A = B \cup (A - B)$, portanto, $P(A) = P(B) + P(A - B)$; desta última igualdade decorre $P(A) \geq P(B)$.

$\square$

2.4 Probabilidade Condicional

Para introduzir a noção de probabilidade condicional Prado (2016) baseou-se na análise de uma situação. Apresentamos a seguir a situação e sua abordagem realizada.

Situação: Tendo sido retirada uma carta de um baralho, qual a probabilidade de ter sido obtido uma carta de valor oito, sabendo que a carta foi preta?

Observando a situação apresentada verifica-se que existe uma informação parcial (carta preta) a respeito do resultado do experimento.

Detalhando a situação tem-se: espaço amostral formado pelas 52 cartas possíveis do baralho; o evento A, "obter uma carta de valor oito"; e, o evento B, "obter uma carta preta".

Precisamos calcular a probabilidade de obter uma carta de valor oito dado que obteve-se uma carta preta que será representada por $P(A/B)$, lê-se, probabilidade de A, dado que B ocorreu.

Recorrendo à probabilidade clássica temos:

$$P(A/B) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13},$$

pois, nesse caso podemos raciocinar com o espaço amostral constituído apenas pelas 26 cartas pretas do baralho já que a carta sorteada é uma destas cartas pretas. Além disso, como é nosso interesse que a carta seja um oito, poderá ser o oito de espadas ou oito de paus e, portanto, o número de casos favoráveis é 2.

Dividindo o numerador e o denominador por 52 que é o número de cartas no baralho temos:

$$P(A/B) = \frac{1/52}{13/52} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

observa-se que essa essa definição não se aplica quando $P(B) = 0$.

Em resumo, para calcular a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B ocorreu, recorreremos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{10}$$

Note que se fossemos considerar apenas o evento A, "obter uma carta de valor oito", teríamos $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$. Essa é a probabilidade de A *a priori*, isto é, antes que a experiência se realize. Agora, supondo que, realizada a experiência, seja informado que o resultado é uma carta preta, isto é, o evento B, "obter uma carta preta", ocorreu. Neste caso, com esta informação a opinião em relação ao evento A se altera. Pois, passa-se a ter apenas 26 casos possíveis, dos quais 2 são favoráveis à ocorrência de A. Com isto, a ideia apresentada passa a ser quantificada com uma probabilidade *a posteriori*, ou probabilidade de A dado que o evento B ocorreu.

Verificamos, ainda, que os casos possíveis não são mais todos os elementos do espaço amostral Ω e sim os elementos de B, e que os casos favoráveis à ocorrência de A não são mais todos os elementos de A e sim os elementos de $A \cap B$, pois, só os elementos que pertencem a B podem ocorrer.

Definição 2.8 *Dados dois eventos A e B, $P(B) \neq 0$, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é dada por*

$$(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{11}$$

Convém ressaltar que a forma $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ é bem mais utilizada para cálculo da probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente.

2.5 Independência de Eventos

Em certos experimentos podemos observar que a ocorrência de um evento em nada influência a probabilidade de ocorrência do outro, isto é, o conhecimento da ocorrência de que um evento ocorreu não afeta a probabilidade do outro ocorrer. Neste tipo de situação, dizemos que estes eventos são *independentes*.

Dados dois eventos de um mesmo experimento, A e B, a independência de A em relação ao evento B estabelece que a probabilidade condicional de A dado B é igual probabilidade de A, isto é, $P(A/B) = P(A)$, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu é simplesmente igual a probabilidade do evento A ocorrer.

Definição 2.9 (Independência de Eventos) *Sejam A e B dois eventos e suponha que $P(B) > 0$. O evento A é independente de B se $P(A/B) = P(A)$, ou seja, um evento A é considerado independente de B quando a ocorrência de B não altera a probabilidade da ocorrência de A e, portanto,*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{12}$$

Além disso, evidencia-se que, se A independe de B, então B independe de A , uma vez que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B). \tag{13}$$

De maneira geral, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos independentes, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n). \tag{14}$$

3 Teorema ou Lei dos Grandes Números

O Teorema ou Lei dos Grandes Números (LGN) é um dos resultados mais importantes da Teoria da Probabilidade, sendo devida a Jacob Bernoulli e encontrada em sua obra *Ars Conjectandi* (A Arte da Conjectura), publicada em 1713. Em seu livro Jacob Bernoulli provou a Lei dos Grandes Números e com isto fez uma contribuição que marcou o início de uma nova era na Teoria da Probabilidade. Essa lei é o primeiro teorema limite da probabilidade, um resultado que estabelece uma relação entre os conceitos de probabilidade e frequência relativa e que é fundamental para a teoria moderna de amostragem (GADELHA, 2004).

Inicialmente, Jacob Bernoulli descreveu a LGN de uma forma muito simples, cuja ideia é bastante intuitiva sendo qualquer um capaz de compreendê-la. Segundo a LGN, "repetindo um experimento aleatório um número grande de vezes, nas mesmas condições e de modo que o resultado de um independa dos resultados anteriores obtidos, a frequência relativa aproxima-se do valor real da probabilidade e essa aproximação da probabilidade pela frequência relativa aumenta quando o número de observações do experimento aumenta, com poucas observações esse número ainda não converge, enquanto com uma quantidade crescente de observações a estimativa tende a convergir para um valor cada vez mais preciso".

Aproveitemos o exemplo a seguir para analisarmos a ideia intuitiva da LGN:

Exemplo 3.1 *Seja X uma variável aleatória que representa o lançamento de uma moeda honesta, no qual $X(cara) = 1$ e $X(coroa) = 0$. Se lançarmos essa moeda n vezes então teremos que a média aritmética dos valores observados tendem a 1/2, ou seja, tendem ao valor esperado ($E[X] = \mu$).*

De modo simples, o que a LGN diz é que a média de uma amostra com valores sucessivos extraídos de forma independente de uma população converge para a média dessa população. Tal fato não é de supreender, pois, se tomarmos um número cada vez maior de valores, certamente, iremos exaurir a população e calcular a média de todos os seus elementos. Agora, a importância prática desse resultado é que se tomarmos um número suficientemente grande, já será possível ter uma boa aproximação para a média global. A Lei dos Grandes Números garante a validade de procedimentos que realizamos diariamente na nossa vida cotidiana. Quando observamos um certo número de pessoas tendo uma determinada característica, tomamos a proporção desse grupo como a proporção de toda a população. Isso é aproximadamente verdade; quem garante isso é a LGN. E essa aproximação será tão boa quanto maior for o tamanho da amostra que observamos (GAMERMAN, 2014).

A LGN nos permite, através da observação ou experimentação, estimar a probabilidade associada a fenômenos nos quais não é possível fazer uso da definição clássica e, é provável que este seja seu maior mérito, ser válida para qualquer tipo de experimento aleatório.

Prosseguindo-se os estudos, vários outros matemáticos contribuíram para o refinamento da LGN. Estes novos estudos permitiram destacar duas formas da LGN, a lei “fraca” e a lei “forte”, ou seja, dois modos diferentes de representar a convergência da probabilidade medida ou observada, para a probabilidade real.

Antes de enunciarmos as leis fraca e forte dos grandes números, apresentemos algumas definições e duas importantes desigualdades, conhecidas como desigualdade de Markov e desigualdade de Chebyshev.

Definição 3.1 (Esperança Matemática) *Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(x_i)$. A definição de esperança matemática da variável aleatória X que assume valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dada por*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i), \tag{15}$$

onde $p(x_i)$ é a probabilidade da variável aleatória assumir o valor x_i.

A esperança de X é também chamada de *média* de X, ou *valor esperado* de X.

Definição 3.2 (Variância) *Seja X uma variável aleatória (v.a.) discreta. Define-se a variância da v.a. X, denotada por $Var(X)$ ou $\sigma^2(X)$ como*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2. \tag{16}$$

Definição 3.3 (Desvio Padrão) *O desvio padrão $\sigma(X)$ é dado pela raiz quadrada da variância*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}, \tag{17}$$

e mede a dispersão de X em torno de sua média. O desvio-padrão tem a mesma unidade de medida de X.

Teorema 3.1 (Desigualdade de Markov) *Seja $u(X)$ uma função não negativa da variável aleatória (v.a.) X. Se $E[u(X)]$ existe, então para qualquer constante positiva c temos:*

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}. \tag{18}$$

A desigualdade de Chebyshev pode ser encarada como um corolário da desigualdade de Markov.

Corolário 3.1 (Desigualdade de Chebyshev) *Seja X uma v.a. qualquer com média μ e variância σ^2, ambas finitas. Então, para qualquer número positivo k temos:*

$$P[|X - \mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}. \tag{19}$$

Analogamente, tem-se:

$$P[|X - \mu| < k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}. \tag{20}$$

Demonstração: Tomando $u(X) = (X - \mu)^2$, temos $E[u(X)] = E[(X - \mu)^2] = Var(X)$. Aplicando a desigualdade de Markov,

$$P[u(X) \geq k] = P[(X - \mu)^2 \geq k^2] \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2} = \frac{Var(X)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

$\square$

Lei Fraca dos Grandes Números

Uma vez que existam variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas, cada uma com valor esperado μ e exista um valor $\epsilon > 0$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0. \tag{21}$$

Nota-se $\lim_{n \to \infty} \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mu$, ou seja, a média aritmética acima é a mesma usada no modelo frequentista, em que a frequência relativa é o valor esperado dado um n suficientemente grande.

Assim, pode-se dizer que dado um $\epsilon > 0$ existe um n grande o bastante para que a probabilidade da frequência relativa diferir não mais que ϵ do valor esperado aproximasse de 1 quanto quisermos.

A Lei Fraca dos Grandes Números nos informa que a probabilidade das médias aleatórias se afastarem da média da população converge para 0 quando o tamanho da amostra cresce. Ou seja, à medida que o tamanho da amostra cresce, aumenta a probabilidade da média amostral se aproximar da média da população. É, portanto, observado que na Lei Fraca dos Grandes Números, dada uma variável aleatória X, a sua média amostral converge em probabilidade para o seu valor esperado. A principal ideia da convergência em probabilidade é que, quando n é arbitrariamente grande, a probabilidade da diferença $|X_n - \mu|$ ser maior do que qualquer número positivo ε tende a zero.

Teorema 3.2 *(Lei Fraca dos Grandes Números) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, contínuas ou discretas, cada uma com valor esperado $E[X_i] = \mu$ e variância $Var(X_i) = \sigma^2$. Seja $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ e $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$. Então para qualquer $\epsilon > 0$.*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0. \tag{22}$$

Equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \epsilon\right) = 1. \tag{23}$$

Demonstração:
Uma vez que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes e possuem a mesma distribuição, temos que:

$$Var(S_n) = n\sigma^2 \text{ e } Var(S_n/n) = Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Pela desigualdade de Chebyshev segue diretamente,

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Portanto, para um dado $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) = 0.$$

□

Lei Forte dos Grandes Números

Dadas as mesmas condições da Lei Fraca e com um $\epsilon > 0$, a Lei Forte diz que:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mu\right) = 1. \tag{24}$$

A probabilidade da média amostral ser igual ao valor esperado dado um n suficientemente grande é 1. Ou seja, para um ϵ positivo e fixo tem-se probabilidade 1 que $\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right|$ será maior que ϵ apenas para um número finito de n.

De outra maneira, a lei garante que a partir de um determinado valor de n é quase certo que $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mu$. Como $\epsilon > 0$ é um valor muito pequeno pode-se dizer que a média amostral é igual ao valor esperado. A média amostral irá diferir do valor esperado não mais que ϵ, um valor mínimo, sendo assim é quase certo que a média amostral será igual ao valor esperado.

A Lei Forte dos Grandes Números nos informa que a probabilidade do limite dessas médias (também aleatório) coincidir com a média populacional é 1. Ou seja, essa versão forte da Lei afirma que é certo (e não apenas muito provável) que a média amostral eventualmente coincidirá com a média da população. É, portanto, observado que na Lei Forte dos Grandes Números, dada uma variável aleatória X, a sua média amostral converge quase certamente para o seu valor esperado. A convergência quase certa é uma convergência pontual, com probabilidade 1.

4 A Probabilidade na Educação Básica

É muito comum situações e informações das quais fazem-se necessário o entendimento de conceitos da Teoria da Probabilidade, por isso, a importância do estudo de probabilidade na Educação Básica. Para uma melhor compreensão de situações da vida diária e de informações apresentadas pela mídia é necessário adquirirmos certo conhecimento da "Teoria da Probabilidade". Isso, também, nos permitirá tomar decisões coerentes e corretas em relação a situações de nossa vida cotidiana.

Em relação ao estudo de probabilidade na Educação Básica, o documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* orienta que,

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. (BRASIL, 2006, p.79-80)

A atualidade, os avanços tecnológicos e os meios de comunicação vem justificar uma necessidade que é indispensável a todos cidadãos e, consequentemente, aos alunos da Educação Básica, que é apresentar uma base mínima de conhecimento probabilístico que permita-os inserir-se e ter uma participação ativa neste contexto social atual. A compreensão de ideias abordadas pela Teoria da Probabilidade nos auxilia na realização de projeções, na construção de previsões e na tomada de decisões. A respeito da necessidade do estudo da probabilidade, Lorenzato & Vila apresentam,

> Probabilidade e Estatística, hoje, é um conhecimento de base que deve fazer parte da cultura matemática mínima de todos os cidadãos, porque estamos vivendo num

> mundo onde as informações são processadas e apresentadas estatisticamente. Para verificar isso, basta abrir um jornal ou uma revista ou, então, ligar a televisão ou o rádio. Aí encontramos exemplos corriqueiros onde estes conteúdos são abordados. (LORENZATO & VILA, 1993 apud CENTURIÓN, 2012, p.11)

A Educação básica tem um papel fundamental na vida cotidiana do cidadão na medida em que deve proporcionar conhecimento matemático fundamental e básico para que nossos alunos ao concluir o Ensino Médio tenham condições de resolver situações práticas do cotidiano que exijam-lhes tais conhecimentos básicos. A Educação Básica deve, ainda, buscar motivar e ser capaz de promover em nossos alunos o entendimento em relação a indispensabilidade do conhecimento matemático no avanço tecnológico em nossa sociedade.

Segundo o documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, a respeito do conhecimento matemático ao concluir o Ensino Médio apresenta,

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

Certamente, um dos grandes desafios no ensino da Matemática é fazer com que os alunos "saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico", ou seja, que tenham ou adquiram um certo "gosto" pela matemática. Se, alcançarmos isso, com certeza, o restante virá em consequência.

Ao consultar a Proposta Curricular da rede estadual de ensino de Minas verifica-se a definição dos conteúdos básicos comuns (CBC) de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio na qual verifica-se que o tópico de probabilidade é um dos itens da disciplina de Matemática abordados na Educação Básica (ensinos fundamental e médio). O desenvolvimento da Teoria da Probabilidade na Educação Básica permite ao aluno observar a aplicabilidade da Matemática e a sua utilização na resolução de problemas da vida diária.

De acordo com a proposta do CBC de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio em relação ao estudo da Teoria da Probabilidade, propõe-se:

	Anos finais do E.F.	**1º ano do Ensino Médio**	**2º ano do EM**	**3º ano do EM**
Eixo Temático	Tratamento de dados	Números, contagem e análise de dados	Números, contagem e análise de dados	Números, contagem e análise de dados
Tema	Probabilidade	Probabilidade	Probabilidade	Probabilidade

Tópicos	Contagem e conceitos	Probabilidade	Probabilidade	Probabilidade condicional (conteúdo complementar)
Habilidades	Resolver problemas simples de contagem utilizando listagens ou o diagrama da árvore; relacionar o conceito de probabilidade com o de razão; resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos simples.	Reconhecer o cárater aleatório de variáveis em situações problemas; identificar o espaço amostral em situações-problema; resolver problemas simples que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis; utilizar o princípio multiplicativo no cálculo de probabilidades.	Identificar o espaço amostral em situações-problemas; resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos.	Identificar eventos independentes e não independentes em situações problemas; resolver problemas que envolvam o conceito de probabilidade condicional; utilizar probabilidades para fazer previsões aplicadas, em diferentes áreas do conhecimento.

Ao analisar a Proposta Curricular do CBC de Matemática observa-se que, ao concluir a Educação Básica, espera-se que alunos tenham adquirido uma compreensão básica em relação ao tema "Probabilidade", ou seja, que os mesmos tenham: compreensão de experimento aleatório, espaço amostral, evento, conceito de probabilidade (abordagem clássica de probabilidade); e, capacidade para resolver situações que envolvam probabilidade de um evento ocorrer em um espaço amostral finito, probabilidade de união de eventos, probabilidade condicional. A partir do domínio destes conhecimentos básicos, em relação ao estudo de probabilidade, espera-se ser possível aos nossos alunos inserir-se e ter uma participação ativa no contexto social.

5 O baralho de cartas e o jogo de pôquer

Na maioria das vezes, no estudo de probabilidade é bastante comum a apresentação de situações envolvendo o lançamento de moedas, o lançamento de dados e a retirada de cartas de um baralho. A utilização destas situações no estudo da probabilidade encontra justificativa na sua própria gênese, ou seja, no contexto dos jogos de azar. A partir dessas situações tem-se a oportunidade de explorar a construção de conceitos da Teoria da Probabilidade.

Nessa seção propõe-se a utilização e manipulação de cartas de baralho para o estudo e a compreensão de conceitos básicos da Teoria da Probabilidade; a apresentação do jogo de pôquer, suas regras básicas e a dinâmica na modalidade Texas Hold'em; e, o desenvolvimento em sala de aula de situações que permitam explorar a matemática (da combinatória e da probabilidade) envolvida no jogo de pôquer.

É fato que o uso de materiais concretos permitem tornar as aulas mais dinâmicas e ricas. O baralho de cartas, por exemplo, tem seu destaque entre as ferramentas que podem ser usadas como facilitadores no processo de aprendizagem, pois, auxiliam no entendimento e nas dificuldades que podem surgir neste processo. A utilização do baralho de cartas na sala de aula se apresenta como um importante material didático para uma melhor compreensão de conceitos da Teoria da Probabilidade.

Em relação a utilização de jogos no ensino de Matemática, acredita-se que por meio deles é permitido aos alunos ter a oportunidade de aprender Matemática de forma criativa e dinâmica. Através dos jogos é possível desenvolver habilidades de raciocínio lógico que estão envolvidas no processo de jogar como a investigação, o levantamento e a checagem de hipóteses. O uso de jogos com cartas de baralho como instrumento pedagógico no estudo de probabilidade permite estimular e atrair os alunos para a construção de conhecimento. E, o jogo de pôquer apresenta-se como uma fonte muita rica em situações e exemplos que auxiliam nesse estudo da probabilidade.

5.1 A probabilidade envolvida no baralho de cartas

O baralho padrão é constituído por 52 cartas (Figura 2), elas são divididas em 4 grupos, chamados de naipes (Figura 1). Os naipes são identificados por nomes e símbolos, são eles: Ouros, Copas, Paus e Espadas. São 26 cartas vermelhas (Copas e Ouros) e 26 cartas pretas (Paus e Espadas). Cada naipe possui 13 cartas com valores A(Ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(Valete), Q(Dama) e K(Rei).

Figura 1: Naipes das cartas de baralho

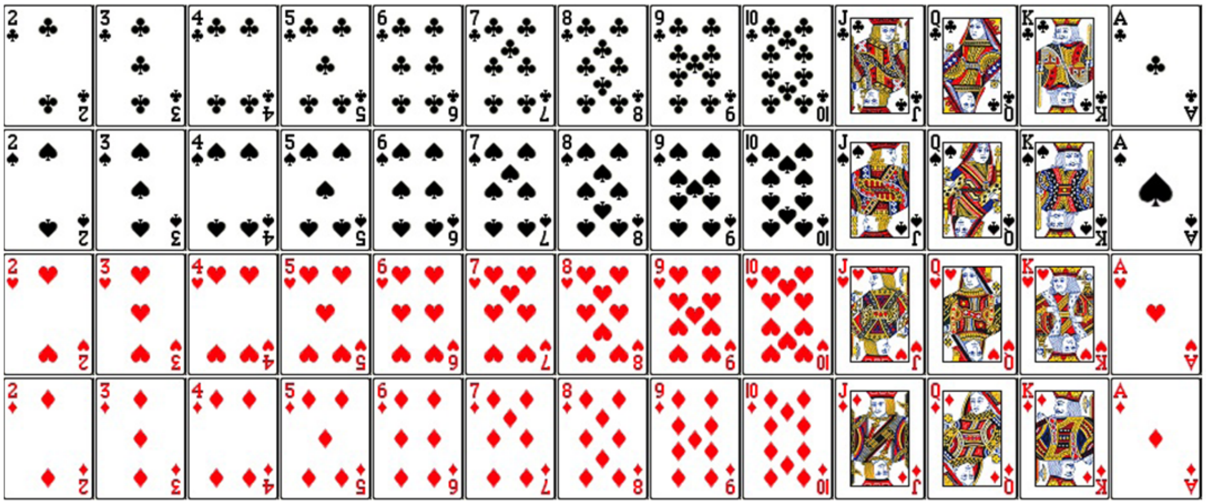


Figura 2: As 52 cartas que compõem o baralho

5.1.1 Atividade 1 - Conceitos Básicos: Experimento, espaço amostral e eventos

Para a aplicação desta Atividade é necessário um baralho de cartas padrão (52 cartas) e o conhecimento de sua composição. Esta Atividade é direcionada tanto aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio. Apresentaremos situações que permitam explorar os conceitos básicos de probabilidade: experimento (aleatório ou determinístico), espaço amostral e eventos.

Com um baralho de cartas em mãos deve-se realizar a retirada de uma ou mais cartas e observar o(s) resultado(s) obtido(s). Ao fazer isso, estamos realizando um experimento no qual não é possível prever com certeza o resultado que será obtido, mas, temos o conhecimento de todos os seus possíveis resultados (pois, conhece-se a composição do baralho). Se, ao realizar um determinado experimento não for possível prever seu resultado, mas, apenas listar seus possíveis resultados, o experimento é considerado aleatório. E, o conjunto de todos os possíveis resultados deste experimento formam o seu espaço amostral.

No experimento aleatório "retirar ao acaso uma carta do baralho" temos um espaço amostral formado por 52 elementos ou resultados possíveis (que são as 52 cartas do baralho). Nesse conjunto verificar-se que há elementos que apresentam certas características em comum, formando subconjuntos de elementos com mesmas características. Esses subconjuntos de elementos com determinada característica em comum são chamados de evento. Um evento é um subconjunto do espaço amostral, podendo ele ser vazio (não conter nenhum elemento do espaço amostral) ou, até mesmo, coincidir com o próprio espaço amostral (conter todos elementos do espaço amostral). Para o experimento mencionado podemos citar alguns eventos, isto é, subconjuntos deste espaço amostral:

- Evento A: "ocorrência de uma carta preta" formado por 26 elementos;
- Evento B: "ocorrência de uma carta de copas" formado por 13 elementos;

- Evento C: "ocorrência de uma carta de Reis" formado por 4 elementos;
- Evento D: "ocorrência de uma carta três de ouros" formado por 1 elemento;

A partir da manipulação do baralho de cartas, também, é possível desenvolver a compreensão das operações básicas com eventos. Com um baralho de cartas em mãos, separemos de um lado todas as cartas pretas e de outro todas as cartas de Reis, ao fazer isso verifica-se que há cartas em comum. Essas cartas em comum são os elementos de uma interseção de dois eventos, neste caso, o evento A "ocorrência de uma carta preta" e o evento C "ocorrência de uma carta de Reis". Vejamos alguns exemplos de operações com eventos.

- União de dois eventos: $A \cup C$ é o evento formado por "todas cartas pretas, Rei de copas, Rei de ouros";
- Interseção de dois eventos: $A \cap C$ é o evento formado por "Rei de espadas, Rei de paus";
- Complementar de um evento: A^c é o evento formado por "todas cartas vermelhas";

O baralho é um importante material concreto que ao ser utilizado em sala de aula possibilita uma melhor apreensão e compreensão de espaço amostral e eventos, conceitos da Probabilidade.

5.1.2 Atividade 2 - Calculando probabilidades

Nessa Atividade 2, além, do baralho de cartas e do conhecimento de sua composição, é preciso ter a compreensão dos conceitos básicos (experimento aleatório, espaço amostral e evento) desenvolvidos na Atividade 1. Essa Atividade é direcionada ao aluno dos anos finais do Ensino Fundamental e, também, do Ensino Médio. Apresenta-se situações e problemas que espera-se possibilitar a compreensão de eventos equiprováveis, conceito de probabilidade e cálculo de probabilidade.

Um baralho de cartas padrão possui 52 cartas. Ao realizar o experimento "retirar ao acaso uma carta do baralho", o espaço amostral será formado por 52 elementos, cada elemento representa um resultado possível na realização desse experimento. Sugere-se apresentar a seguinte questão referente a esse experimento "*qual a possibilidade de ocorrer uma carta três de ouros (ou, de qualquer outra carta específica do baralho)?*". Deve-se observar que o evento "ocorrer uma carta três de ouros" apresenta apenas um elemento e, portanto, há apenas 1 possibilidade. Se considerarmos qualquer outra carta, a resposta é a mesma, há uma possibilidade, para qualquer uma das 52 cartas, isto é, para qualquer elemento do espaço amostral, a possibilidade de ocorrer é a mesma na realização do experimento. Cada elemento do espaço amostral é considerado um evento elementar. Se em um experimento aleatório com espaço amostral finito, todo evento elementar desse espaço amostral tem a mesma "chance" de ocorrer, então, tem-se um espaço amostral equiprovável, isto é, os eventos elementares são equiprováveis.

Vejamos algumas situações envolvendo noções de possibilidades, chances, conceito de probabilidade e cálculo de probabilidade. Para a realização das questões apresentadas a seguir, propõe-se a manipulação do baralho de cartas pelos alunos. Espera-se que a partir dessa manipulação, isto é, de situações concretas, o aluno seja capaz de fazer observações pertinentes e, assim, resolver as situações apresentadas.

1. Consideremos o experimento aleatório “retirar ao acaso uma carta do baralho”.

   (a) Quantas são as possibilidades de ocorrer uma carta de Paus? Conhecendo a composição de um baralho ou manipulando-o, verifica-se que há 13 possibilidades de ocorrer uma carta de Paus ao retirar ao acaso uma carta do baralho.

   (b) Quantas são as possibilidades de ocorrer uma carta de Reis? Há 4 possibilidades.

   (c) Qual dos dois eventos “ocorrer uma carta de paus” ou “ocorrer uma carta de Reis” tem maior chance de ocorrer? Neste caso será “ocorrer uma carta de paus”, pois, tem mais possibilidades de ocorrer.

   (d) Quais as “chances” de ocorrer uma carta de paus? Observa-se que dentre as 52 cartas do baralho há 13 possibilidades favoráveis e 39 possibilidades não favoráveis, portanto, as chances são de 13 para 39.

   (e) Qual a probabilidade de ocorrer uma carta de Reis? Observa-se que dentre as 52 cartas do baralho há 4 possibilidades favoráveis, portanto, a probabilidade é de 4 em 52.

   As chances de um determinado evento ocorrer é uma relação entre as possibilidades de ocorrência de um evento e as possibilidades de não ocorrência desse evento.

   A probabilidade de um evento representa uma relação entre as possibilidades de ocorrência desse evento e o seu espaço amostral. Ou seja, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de possibilidades favoráveis ao evento e o número de possibilidades da realização do experimento.

2. Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de ocorrer uma Dama ou uma carta de ouros?

   A partir da manipulação do baralho de cartas, espera-se que os alunos realizem as seguintes observações:

   O espaço amostral (Ω) é formado por 52 elementos, portanto $\#(\Omega) = 52$.

   O evento A_1 :“ocorrer uma Dama”, apresenta 4 elementos, então, $\#(A_1) = 4$.

   O evento A_2 :“ocorrer uma carta de ouros”, apresenta 13 elementos, então, $\#(A_2) = 13$.

   Os eventos A_1 e A_2 apresentam um elemento em comum, isto é, $A_1 \cap A_2 = \{Dama\ de\ ouro\}$. Portanto, $A_1 \cup A_2 =${todas as cartas de ouros, Dama de espadas, Dama de paus, Dama de copas}. Logo, o evento A :“ocorrer uma Dama ou uma carta de ouros” apresenta 16 elementos, pois, $\#(A) = \#(A_1 \cup A_2) = \#(A_1) + \#(A_2) - \#(A_1 \cap A_2) = 4 + 13 - 1 = 16$.

   Assim, tem-se que: $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \approx 0,3077$ ou $30,77\%$.

No decorrer desta resolução esteve envolvido noções de operações com eventos (união, interseção) e propriedades do Teorema 2.1.

3. Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de ocorrer um Rei sabendo que ocorreu uma carta de copas?

   Inicialmente, observa-se que o objetivo é determinar a probabilidade de ocorrer um Rei, sabendo que ocorreu uma carta de copas. Assim, é preciso determinar os resultados favoráveis a este evento "ocorrer um Rei dado que ocorreu uma carta de copas". Para isto, deve-se observar quais os resultados favoráveis à ocorrência de uma carta de copas e, em seguida, dentre esses resultados quais os resultados favoráveis à ocorrência de um Rei. Utilizando a manipulação do baralho de cartas para resolver esse problema deve-se separar as cartas de copas e, em seguida, dentre estas separar as cartas de Reis. Com isto, será observado que há 1 resultado favorável. Assim, a probabilidade de ocorrer um Rei sabendo que ocorreu uma carta de copas é de 1 em 13.

   Outro raciocínio: Nesta situação queremos determinar a probabilidade de ocorrer um Rei dado que ocorreu uma carta de copas. Sejam os eventos B_1 :"ocorrer um Rei" (possui 4 elementos) e B_2 :"ocorrer uma carta de copas" (possui 13 elementos). Se fossemos considerar apenas o evento B_1 :"ocorrer um Rei", teríamos $P(B_1) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$. Sabendo-se que ocorreu uma carta de copas, a opinião em relação ao evento B_1 se altera, pois, passa-se a ter 13 resultados possíveis, dos quais 1 é favorável a ocorrência de B_1. Portanto, a probabilidade de ocorrer B_1 dado que ocorreu B_2 é:

$$P(B_1/B_2) = \frac{1}{13} \approx 0,0769 \text{ ou } 7,69\%.$$

   Ou seja,

$$P(B_1/B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13} \approx 0,0769 \text{ ou } 7,69\%.$$

   No decorrer desta resolução esteve envolvido noções de probabilidade condicional.

4. De dois baralhos de 52 cartas retiram-se, simultaneamente, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo. Qual a probabilidade da carta do primeiro baralho ser um Rei e a do segundo ser o 5 de paus?

   Já observamos que no experimento "retirar ao acaso uma carta do baralho", o espaço amostral é formado por 52 elementos, ou seja, há 52 resultados possíveis para este experimento. Se formos retirar, simultaneamente, de dois baralhos uma carta em cada um deles, observaremos que o resultado é uma combinação de duas cartas, portanto, o espaço amostral deste experimento (que é a realização de dois experimentos simples simultâneos) será formado por elementos que são uma combinação de duas cartas. Nota-se que para cada carta do primeiro baralho é possível formar uma combinação com cada carta do segundo baralho, o que resulta em 52 combinações, totalizando

$52 \cdot 52 = 2704$ combinações possíveis de duas cartas. Logo, o espaço amostral desse experimento "retirar, simultaneamente, de dois baralhos uma carta em cada um deles" apresenta 2704 elementos.

Agora, que se conhece o número de resultados possíveis para o experimento "retirar, simultaneamente, de dois baralhos uma carta em cada um deles", vamos determinar o número de resultados favoráveis ao evento "carta do primeiro baralho ser um rei e do segundo ser o 5 de paus". Os resultados favoráveis a ocorrência de um rei no primeiro baralho são 4 e, os resultados favoráveis a ocorrência de um 5 de paus no segundo é 1. Assim, para cada um dos 4 resultados favoráveis do primeiro baralho há 1 resultado favorável no segundo baralho, portanto, teremos $4 \cdot 1 = 4$ combinações possíveis. Com isso, a probabilidade da carta do primeiro baralho ser um Rei e a do segundo ser o 5 de paus é de 4 em 2704, ou seja, de 1 em 676.

Outro raciocínio: Sejam os eventos C_1 :"retirar um Rei" e C_2 :"retirar um 5 de paus". Deve-se notar que temos dois eventos independentes e simultâneos. A probabilidade da carta do primeiro baralho ser um rei é: $P(C_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; e, a probabilidade da carta do segundo baralho ser um 5 de paus é: $P(C_2) = \frac{1}{52}$. Como os eventos são independentes, a probabilidade de que eles se realizem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de realização dos dois eventos, ou seja,

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{1}{13}.\frac{1}{52} = \frac{1}{676} \approx 0,0015 \text{ ou } 0,15\%.$$

No decorrer desta resolução esteve envolvido noções de independência de eventos.

5. De um baralho de 52 cartas retiram-se, ao acaso, duas cartas sem reposição. Qual a probabilidade da carta da primeira carta ser o Ás de paus e a segunda ser o Rei de paus?

   Ao realizar o experimento "retirar, ao acaso, duas cartas sem reposição de um baralho" deve-se observar que os resultados possíveis são uma combinação de duas cartas, onde para a primeira carta há 52 possibilidades e para a segunda há 51 possibilidades (pois, a primeira já foi retirada), ou seja, para cada uma das 52 possibilidades de selecionar-se a primeira carta haverá 51 possibilidades de combinações possíveis, portanto, tem-se no total $52 \cdot 51 = 2652$ combinações possíveis. Em relação aos resultados favoráveis ao evento "ocorrer Ás de paus na primeira carta e Rei de paus na segunda carta", para a primeira carta há 1 possibilidade e para a segunda carta há 1 possibilidade, portanto, há apenas uma combinação favorável. Com isso, a probabilidade da primeira carta ser um Ás de paus e a da segunda carta ser um Rei de paus é de 1 em 2652.

   Outro raciocínio: Sejam os eventos D_1 :"ocorrer Ás de paus na primeira carta" e D_2 :"ocorrer Rei de paus na segunda carta". A probabilidade de ocorrer o Ás de paus na primeira carta é: $P(D_1) = \frac{1}{52}$. Após a retirada da primeira carta, restam 51 cartas no baralho, já que a carta retirada não foi reposta. Assim, a probabilidade da segunda ser o Rei de paus é: $P(D_2) = \dfrac{1}{51}$. Como esses dois acontecimentos são independentes, temos:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2) = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{1}{2652} \approx 0,0004 \text{ ou } 0,04\%.$$

No decorrer desta resolução esteve envolvido noções de independência de eventos.

5.2 O Jogo de Pôquer

Poker, ou pôquer, é um jogo de cartas tradicional de cassinos, em que dois ou mais jogadores tomam lugar em uma mesa e participam das rodadas de apostas em dinheiro (real ou fictício), vencendo aquele que tiver a combinação mais forte conforme a hierarquia das cartas. O pôquer possui diversas versões de jogo, sendo as mais famosas: Texas Hold'em, Omaha, Seven Card Stud, Seven Card Draw, Five Card Stud e Five Card Draw.

Nesta seção, inicialmente, apresenta-se uma breve descrição da origem e evolução histórica do pôquer [3] baseado no texto de Silva (2015). Em seguida, apresentaremos um pouco da modalidade mais popular, o Texas Hold'em, o ranking das mãos de pôquer, regras, ações e a dinâmica do pôquer Texas Hold'em e as melhores mãos iniciais.

O pôquer é considerado por muitos apreciadores como o esporte do século XXI. Este esporte cresceu muito nos últimos dez anos, embora, o preconceito tenha sido um empecilho para o seu desenvolvimento. Após muitos anos cercado de polêmicas em relação a sua proibição ou permissão, o jogo passou a ser regulamentado pela Federação Internacional de Pôquer (International Federation of Poker - IFP) desde 2009 e ganhou um reconhecimento internacional como esporte mental. Por ser um esporte de habilidades cognitivas e inteligência emocional, o pôquer, praticamente não apresenta restrições. É possível que qualquer pessoa (homem ou mulher, de qualquer idade, profissional ou não) jogue com igualdade de condições, sem nenhum tipo de prevalecimento ou desvantagem.

Não há um consenso entre os estudiosos a respeito da origem do pôquer. Os estudiosos até hoje não conseguiram dizer com precisão como e quando ele surgiu. Uma das teorias mais recorrentes diz que pôquer derivou de antigos jogos de carta, como o Az-Nas da Pérsia, o ganjifa da Índia, o pochen da Alemanha e o poche da França. O poche é a versão antiga do jogo mais parecida com a versão contemporânea. O que se sabe é que o jogo não nasceu nos Estados Unidos. O jogo chegou aos Estados Unidos no século XVIII com um grupo de colonizadores franceses que eventualmente fundaram a cidade de New Orleans. A partir de então, difundiu-se ao longo da rota do Rio Mississippi, durante o século XVIII, e se popularizaria nos Estados Unidos durante o século XIX, quando o país começou sua expansão até o oeste. Há referências de que nesta época o pôquer era jogado com 20 cartas e 4 jogadores. O pôquer moderno surgiu por volta de 1820, na Luisiana, às margens do Rio Mississipi.

[3] Disponível em: http://www.efdeportes.com/efd206/poker-origem-e-evolucao-historica.htm

No final do século XIX, após a Guerra Civil americana (1861-1865), o pôquer passou a ser jogado com 52 cartas. A guerra contribuiu enormemente para a difusão e para a elaboração das regras do pôquer, já que este era o jogo preferido dos soldados. Atualmente, o pôquer é o jogo de cartas mais popular do mundo e a partir do surgimento do pôquer online o número de jogadores cresce cada dia mais.

Há muitas variantes do pôquer, categorizadas livremente como:

- *Draw Poker (pôquer fechado)*: cada jogador recebe um grupo de cartas que apenas ele pode ver e que pode melhorar seu jogo trocando cartas, como o five-card draw;
- *Stud Poker (pôquer aberto)*: são os jogos em que cada jogador recebe uma combinação de cartas reveladas e cartas privadas em várias rodadas de apostas, como o seven-card stud; e,
- *community card poker*: nesta modalidade, cada jogador recebe uma quantidade variável de cartas fechadas que formam uma mão a ser completada através da combinação com as cartas comunitárias, como o Texas hold'em e Omaha; entre outros.

5.2.1 O Texas Hold'em

O Texas Hold'em[4] é a modalidade mais jogada no mundo e surgiu no início do século XX, em Robstown, no estado do Texas, Estados Unidos. Logo depois, o jogo foi introduzido em Las Vegas por um grupo de apostadores e jogadores de cartas texanos.

O Texas Hold'em é um jogo de pôquer com cartas comunitárias, no qual utiliza-se um baralho padrão de 52 cartas. Nessa modalidade podem participar de 2 a 10 jogadores, em que cada jogador recebe duas cartas fechadas (que somente o próprio jogador pode ver) e cinco cartas comunitátias (que são cartas abertas dispostas na mesa no decorrer da rodada e utilizadas simultaneamente por todos os jogadores). Para ganhar é preciso ter a melhor mão, este é o objetivo do jogo, formar a melhor mão de pôquer de acordo com a hierarquia das mãos do pôquer. Cada mão é definida pela combinação de cinco cartas entre as sete (cinco na mesa mais as duas da sua mão) que são diponíveis ao jogador. Assim, nem sempre as duas cartas da mão do jogador serão utilizadas para formar um jogo.

5.2.2 Ranking das Mãos do Pôquer

Há diversas combinações possíveis e, é extremamente importante conhecê-las. Cada combinação possui uma estrutura diferente, isso permite variadas jogadas e o uso de diferentes estratégias. Portanto, para fazer uso de alguma estratégia, é necessário conhecer os tipos de combinações e suas relevâncias.

Cada mão do pôquer consiste de 5 cartas. No Texas Hold'em, o jogador usa cinco das sete cartas que estão à sua disposição para compor a melhor mão possível. Não há diferença

[4]Disponível em: http://www.universidadedopoker.com/regras-de-poker/baralho-de-poker/

entre os naipes. A hierarquia das cartas é da menor para a maior: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. O Ás é a maior carta, exceto quando ocorre uma sequência ou um Straight Flush, que começa no Ás e vai até o 5.

Figura 3: Hierarquia das cartas

O objetivo no jogo de pôquer é construir a melhor formação possível a partir das disposições de cinco cartas. Portanto, para entendimento do pôquer é fundamental conhecer os tipos de jogos a formar numa mão do pôquer. A seguir apresentaremos as combinações ou mãos do pôquer[5] que todo jogador deve conhecer.

A hierarquia das mãos do pôquer, em ordem decrescente, de valor, é a seguinte:

1. *Royal Straight Flush:* A mão mais famosa do Pôquer, um Royal Flush não pode ser batido. Ela é composta pelo Ás, Rei, Dama, Valete e dez do mesmo naipe, ou seja, combinação das cinco maiores cartas do mesmo naipe em sequência.

Figura 4: Royal Straight Flush ou Sequência Real

2. *Straight Flush:* Cinco cartas na sequência, do mesmo naipe. Em caso de uma mão similar, o valor da carta mais alta da sequência vence. Se as cartas altas forem iguais, serão comparadas as subsequentes (a segunda, a terceira, etc.). Haverá empate se as cinco cartas de dois jogadores tiverem os mesmos valores, obrigando, assim, a divisão das apostas.

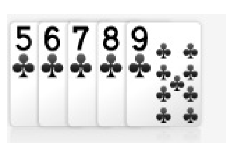


Figura 5: Straight Flush

[5]Disponível em: https://www.pokerstars.com/br/poker/

3. *Four of a kind ou Quadra:* Quatro cartas de mesmo valor, e uma outra carta como 'kicker'. Em caso de empate, havendo duas ou mais quadras, vence aquela constituída pelas cartas mais altas.

Figura 6: Four of a kind ou Quadra

4. *Full House ou Full Hand:* Três cartas do mesmo valor, e duas outras cartas diferentes de mesmo valor, ou seja, uma trinca e um par. Em caso de empate, as três cartas de mesmo valor mais altas vencem.

Figura 7: Full House ou Full Hand

5. *Flush:* Cinco cartas do mesmo naipe, não em sequência. Em caso de empate, o jogador com a carta de maior valor vence. Se as cartas altas forem iguais, serão comparadas as subsequentes (a segunda, a terceira, etc.). Haverá empate se as cinco cartas de dois jogadores tiverem os mesmos valores, obrigando, assim, a divisão das apostas.

Figura 8: Flush

6. *Straight ou sequência:* Cinco cartas de naipes diferentes em sequência. Em caso de uma mão similar, o valor da carta mais alta da sequência vence. Se as cartas altas forem iguais, serão comparadas as subsequentes (a segunda, a terceira, etc.). Haverá empate se as cinco cartas de dois jogadores tiverem os mesmos valores, obrigando, assim, a divisão das apostas.

Figura 9: Straight ou sequência

7. *Three of a Kind ou trinca:* Três cartas do mesmo valor, e duas outras cartas não relacionadas. Em caso de empate, a trinca mais alta é a vencedora.

Figura 10: Three of a Kind ou trinca

8. *Two pairs ou Dois pares:* Duas cartas de mesmo valor e mais duas cartas diferentes de mesmo valor, além do kicker. Caso ocorra empate, o par mais alto vence. Se nesse quesito houver novo empate, a quinta carta mais alta ('kicker') define a vitória. Com empate absoluto, as apostas são divididas.

Figura 11: Two pairs ou Dois pares

9. *Pair ou Um Par:* Duas cartas do mesmo valor, e três outras cartas não relacionadas. Em caso de empate, o par de cartas mais altas é vitorioso. Se ainda existir empate, o ganhador é quem tiver a terceira, quarta ou quinta carta mais alta. Com empate absoluto, o valor total das apostas é dividido.

Figura 12: Pair ou Um Par

10. *High card ou Carta Alta:* Qualquer mão que não esteja nas categorias acima, ou seja, quando não há combinações, a carta mais alta vence. Caso exista um empate, prevalece a segunda carta maior, e assim por diante. Em caso de empate absoluto, o valor total das apostas é dividido.

Figura 13: High card ou Carta Alta

5.2.3 Regras, Ações e Dinâmica do Texas Hold'em

A seguir apresentaremos as regras básicas[6], ações e dinâmica do Texas Hold'em.

(i) A Escolha Dealer (ou Crupier)

Antes que quaisquer cartas sejam distribuídas, os jogadores precisam determinar quem será o Dealer. Assim que a partida começa, cada jogador recebe uma carta aberta, aquele que receber a carta de maior valor será o Dealer, que irá distribuir as cartas. Em cada rodada, um dos jogadores terá o botão do dealer em sua frente, indicando que a ação começará com o jogador a sua esquerda. Assim, o jogador que tem o botão a sua frente terá a vantagem de ser o último a agir, pois já conhecerá a ação dos demais adversários. O Dealer passa a ser a última posição da mesa (LATER POSITION). A partir dele as jogadas acontecerão no sentido horário (em cassinos, existe um profissional responsável pela distribuição das cartas, nesse caso o Dealer apenas marcará a última posição e no poker online essa distribuição é automática). Para reconhecer o dealer da mão, uma ficha especial é colocada em frente a ele. Esta ficha é chamada de BUTTON, ou DEALER BUTTON.

(ii) Etapa 1 (PRÉ-FLOP)

Antes das cartas serem distribuídas, o primeiro jogador após o dealer no sentido horário faz uma aposta obrigatória de valor pré-determinado. Por estar nesta posição, este jogador é conhecido como SMALL BLIND, ou seja, aquele que aposta no escuro, antes de jogar, sem ver suas cartas. O jogador após o small blind faz a segunda aposta obrigatória, que é o dobro do valor do small blind. Esse jogador é chamado de BIG BLIND. Essas apostas forçadas existem para criar ação no jogo. É preciso entender que elas são apostas antecipadas, os blinds ainda não tiveram sua vez de jogar. Os demais jogadores não são obrigados a apostar se não quiserem participar desta partida.

Assim que os blinds apostaram, o dealer distribui as cartas fechadas, começando pelo SMALL BLIND, até que todos os jogadores recebam duas cartas. A primeira rodada de apostas começa pelo jogador após o big blind que, então, tem três ações possíveis:

- **FOLD**: sair da partida (isso pode ser feito quando se percebe que tem uma mão ruim). O FOLD significa desistir de sua mão, com isto suas cartas são abandonadas e a pessoa fica fora da partida).

[6]Disponível em:http://www.universidadedopoker.com/regras-de-poker/

- **CALL**: igualar a aposta do jogador anterior a sua posição (isso é feito geralmente quando se tem uma boa mão). Com o Call a pessoa se mantém no jogo, mas sem aumentar o valor da aposta.
- **RAISE**: aumentar o valor da aposta (isso é feito quando se tem uma excelente mão). Após um raise quem quiser participar da partida tem que igualar a aposta ou os que já apostaram tem que pelo menos completar o valor da aposta.

A rodada continua com os outros jogadores: cada um pode tomar uma dessas três decisões.

Se em algum momento de uma rodada, algum jogador fizer uma aposta e todos os demais desistirem, a mão é decidida ali mesmo, ganha a rodada este jogador e não haverá a abertura das cartas comunitárias restantes.

(iii) Etapa 2 (FLOP)

No final da primeira rodada quando as apostas são igualadas, o flop é aberto na mesa, isto é, o Dealer coloca no centro da mesa três cartas abertas e visíveis a todos. FLOP são as três primeiras cartas comunitárias. Neste momento, é preciso observar e ver quais combinações elas podem formar ao se juntarem com suas cartas.

Com o flop na mesa, uma nova rodada de aposta é iniciada, sempre começando pelo small blind. Pode-se apostar (BET) ou passar (CHECK), se ninguém ainda apostou. Geralmente se opta pelo CHECK quando se quer aguardar os outros jogadores antes de tomar uma decisão. Quem dar CHECK no início da partida, depois, se quiser continuar na partida é preciso apostar. A opção CALL não existe quando não há nenhuma aposta para igualar. A partir do momento que alguém aposta, não é mais possível passar, só se pode seguir (CALL), relançar (RAISE) ou sair fora (FOLD). O BET é quando você aposta sendo o primeiro jogador a fazê-lo. Também, é possível dar um RE-RAISE que é uma resposta ao raise (é dado quando se quer aumentar um raise do seu adversário).

(iv) Etapa 3 (TURN)

Depois do fim da segunda rodada, quando todas as apostas são igualadas, o Dealer coloca mais uma carta no centro da mesa, ou seja, o TURN é aberto. Deve-se lembrar que o turn é a 4ª carta das cinco comunitárias. É preciso ver se o turn ajuda a formar alguma combinação. Com o turn na mesa, a terceira rodada de aposta é iniciada, sempre começando pelo small blind.

(v) Etapa 4 (RIVER)

Todas as apostas foram igualadas, o RIVER é aberto na mesa. O river é a última das cinco cartas comunitárias. É preciso verificar se o river ajuda a formar alguma combinação. Com o river na mesa, uma nova rodada de apostas é iniciada.
Caso um jogador aposte e um ou mais oponentes paguem a aposta (call), no final deste quarto turno de apostas é realizado o show down.

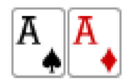
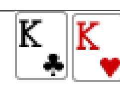
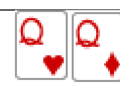
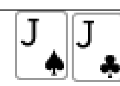
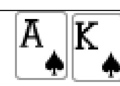
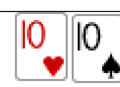
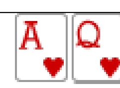
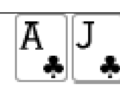
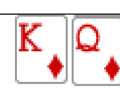
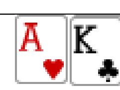
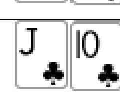
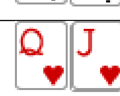
(vi) Etapa 5 (SHOWDOWN)

Agora que as apostas do river estão igualadas, os jogadores devem mostrar suas cartas, é o chamado SHOWDOWN, onde se confere o vencedor da rodada e uma nova rodada se inicia. Em uma outra versão, quando termina a última rodada, o último jogador que abriu ou relançou é quem deverá mostrar o jogo. Se for o melhor, este ganha. Senão, o que tiver o melhor jogo o mostra e, então, ganha, os outros não tem obrigação nenhuma de mostrar seus jogos.

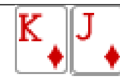
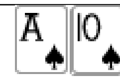
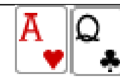
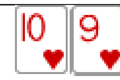
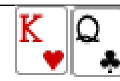
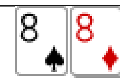
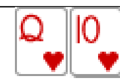
Ao iniciar uma nova rodada, o atual small blind é o novo dealer. E assim, no sentido horário, o jogo prossegue.

5.2.4 As melhores mãos iniciais do Texas Hold'em

No site Universidade do Poker (2016)[7] encontramos a descrição das vinte melhores mãos iniciais do pôquer Texas Hold'em que apresentamos a seguir. Estas mãos iniciais são consideradas as melhores porque possibilitam ao jogador maior probabilidade de formar um jogo vencedor, ou seja, uma mão do pôquer forte, em uma partida de pôquer Texas Hold'em.

1 -	Par de Ases	
2 -	Par de Reis	
3 -	Par de Damas	
4 -	Par de Valetes	
5 -	Ás e K do mesmo naipe	
6 -	Par de 10	
7 -	Ás e Q do mesmo naipe	
8 -	Ás e J do mesmo naipe	
9 -	K e Q de mesmo naipe	
10 -	Ás e K de naipes diferentes	
11 -	Par de 9	
12 -	J e 10 do mesmo naipe	
13 -	Q e J do mesmo naipe	

[7]Disponível em: http://www.universidadedopoker.com/regras-de-poker/melhores-maos-iniciais-poker/

14 -	K e J do mesmo naipe	
15 -	Ás e 10 do mesmo naipe	
16 -	Ás e Q de naipes diferentes	
17 -	10 e 9 do mesmo naipe	
18 -	K e Q de naipes diferentes	
19 -	Par de 8	
20 -	Q e 10 do mesmo naipe	

O par de Ases (AA) é a melhor mão do pôquer Texas Hold'Em, com esta mão inicial a vitória está a caminho. O par de Reis (KK) é a segunda melhor mão que se pode ter e, também, permite grandes possibilidades de ganhar. Outra boa mão é o par de Damas (QQ), pois, permite superiorizar-se perante os Valetes e cartas inferiores. Quanto ao Ás e Reis no mesmo naipe (AKs) ou não (AKo), essa é uma excelente mão, pois, com o flop (momento em que são dispostas as três primeiras cartas abertas na mesa) é possível conseguir um par de "Reis" ou "Ases" e, também, pode-se facilmente conseguir uma sequência. E, ainda, temos o par de Valetes (JJ) que permite boas chances. Estas são as mãos especiais (monster hands ou premium hands) consideradas as mãos iniciais mais poderosas no Texas Hold'em.

Um jogador deve ser capaz de saber quando seguir ou parar no jogo. No início do jogo, o jogador recebe duas cartas fechadas, a partir destas duas primeiras cartas já é possível ter uma ideia em relação a mão inicial, se ela será jogável ou não. Se o jogador perceber que sua mão inicial é fraca ou se, no decorrer de uma rodada perceber que tem a probabilidade baixa de formar-se uma mão de pôquer forte o suficiente para a partida, certamente, a melhor opção será descartar suas cartas e esperar por uma mão melhor.

5.3 Proposta de Atividades em Sala de Aula

> "O jogo de pôquer é uma fonte bastante rica em exemplos e problemas interessantes que podem ser utilizados para ilustrar as aulas de análise combinatória e probabilidade no ensino médio." (RODRIGUES, 1985 apud EHLERT & BELLICANTA, 2015)

A seguir apresentamos algumas propostas de atividades envolvendo técnicas de contagem e o estudo de probabilidade, direcionadas a alunos do Ensino Médio. Para a aplicação dessas atividades não é necessário conhecer todas as regras ou saber jogar o Texas Hold'em. Apenas é preciso a utilização de alguns conceitos básicos do jogo.

5.3.1 Atividade 1 - Calculando o número de combinações possíveis e a probabilidade de ocorrência para cada mão do pôquer

A realização dessa Atividade 1, direcionada a alunos do Ensino Médio, permite apresentar uma justificativa matemática para a hierarquia das mãos do pôquer. Para isso, inicialmente, deve-se determinar o número de casos favoráveis a cada uma das dez mãos do pôquer, conforme a ordem do ranking e, em seguida, determinar a probabilidade de ocorrência de cada mão. Será observado que mãos fortes tem menor probabilidade de serem formadas, enquanto, mãos fracas tem maior probabilidade. Ou seja, quanto mais forte a mão do pôquer, menor é o número de combinações possíveis e, quanto mais fraca a mão do pôquer, maior é o número de combinações possíveis para formá-la com um baralho.

Total de Combinações

Cada mão do pôquer é uma combinação de 5 cartas das 52 cartas que há no baralho. Para determinar o total de combinações possíveis, ou seja, de quantos modos podemos selecionar 5 cartas distintas entre as 52 cartas distintas do baralho deve-se observar que, dispõe-se de um conjunto com 52 elementos e pretende-se dividi-lo em subconjuntos com 5 elementos, distintos pelos objetos e não pela ordem. Logo, o total de combinações possíveis será:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960,$$

ou seja, há 2598960 modos de selecionar 5 cartas distintas entre as 52 cartas distintas que compõem o baralho.

Determinando o número de combinações possíveis para cada mão do pôquer e a probabilidade de ocorrência das mesmas.

1. **Royal Straight Flush ou Sequência Real**
Como essa combinação é composta pelo Ás, Rei, Dama, Valete e dez do mesmo naipe, então, existe apenas 4 sequências reais no baralho padrão de 52 cartas. Portanto, a probabilidade de se obter uma sequência real numa mão de pôquer é de:

$$P(Royal\ Straight\ Flush) = \frac{4}{2598960} \approx 0,0000015 \text{ ou } 0,00015\%.$$

2. **Straight Flush (SF)**
Essa combinação é composta por cinco cartas de mesmo naipe em sequência exceto os royals straight flush. Na composição de cada naipe temos uma sequência de 13 cartas da qual é possível formar 9 sequências de cinco cartas, podem ser desde A-2-3-4-5 a 9-10-J-Q-K. Portanto, no total serão 36 sequências, pois, são 4 naipes distintos. Logo, a probabilidade de se obter um straight flush numa mão de pôquer é:

$$P(Straight\ Flush) = \frac{36}{2598960} \approx 0,0000138 \text{ ou } 0,00138\%.$$

3. **Four of a kind ou Quadra**
   Nesta combinação deve constar quatro cartas de mesmo valor. De Ás ao Rei temos 13 valores disponíveis para formar uma quadra e restará 48 cartas para ser a quinta carta da mão. Portanto, são $13 \cdot 48 = 624$ combinações possíveis. Assim, a probabilidade de ocorrer uma quadra é:

$$P(Quadra) = \frac{624}{2598960} \approx 0,00024 \text{ ou } 0,024\%.$$

4. **Full House ou Full Hand**
   Para essa combinação é necessário três cartas do mesmo valor, e duas outras cartas diferentes de mesmo valor. De Ás ao Rei temos 13 valores disponíveis para formar a trinca e 12 valores para o par. Mas, sendo 4 naipes diferentes, teremos $C_{4,3} = 4$ modos diferentes de formar uma trinca e $C_{4,2} = 6$ modos diferentes de formar um par. Com isto, teremos um total de $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$ combinações possíveis para formar um full house. Portanto, a probabilidade de ocorrer um full house é:

$$P(Full\ House) = \frac{3744}{2598960} \approx 0,00144 \text{ ou } 0,144\%.$$

5. **Flush**
   Combinação composta por cinco cartas do mesmo naipe, mas não em sequência. Como cada naipe apresenta 13 cartas, ao agrupar cinco cartas, temos $C_{13,5} = 1287$ possibilidades de agrupamentos, entretanto, 10 dessas combinações são sequências (straight flush ou royal), devendo ser excluídas dessa contagem, $1287 - 10 = 1277$. Logo, para os quatro naipes, temos $4 \cdot 1277 = 5108$ combinações possíveis para formar um flush. Portanto, a probabilidade de se obter um flush numa mão do pôquer é de:

$$P(Flush) = \frac{5108}{2598960} \approx 0,00196 \text{ ou } 0,196\%.$$

6. **Straight ou Sequência**
   Combinação composta por cinco cartas de naipes diferentes em sequência. Para isto, sendo cada naipe formado por 13 valores e podendo o Ás ocupar a menor ou a maior posição dependendo da sequência, então, temos 10 possibilidades de valores para iniciar uma sequência (do Ás ao 10), ou seja, podem ir de A-2-3-4-5 a 10-J-Q-K-A, e, por naipe serão $10 \cdot 4 = 40$ maneiras diferentes. A partir daí para cada uma das cartas restantes temos 4 possibilidades sendo no total $40 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 10240$ combinações, das quais é necessário excluir as sequências de mesmo naipe (straight flush ou royal, que são ao todo 40). Portanto, temos $10240 - 40 = 10200$ possibilidades para um straight. Dessa forma, a probabilidade de obter uma straight é:

$$P(Straight) = \frac{10200}{2598960} \approx 0,00392 \text{ ou } 0,392\%.$$

7. **Three of a Kind ou Trinca**
   Para a composição dessa combinação são três cartas do mesmo valor, e duas outras

cartas não relacionadas. Há 13 valores possíveis para a trinca e $C_{4,3} = 4$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca. Quanto às duas cartas restantes, em cada naipe, há $C_{12,2} = 66$ modos de selecioná-las e há 4 modos de escolher o naipe de cada uma delas, sendo no total $66 \cdot 4 \cdot 4 = 1056$ combinações. Assim, tem-se um total de $13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 4 = 54912$ possibilidades de formar uma trinca. Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento é:

$$P(Trinca) = \frac{54912}{2598960} \approx 0,02113 \text{ ou } 2,113\%.$$

8. **Two pairs ou Dois pares**
Combinação formada por duas cartas de mesmo valor e mais duas cartas diferentes de mesmo valor, e uma quinta carta de valor diferente das outras. Nesta situação há $C_{13,2} = 78$ modos de escolher os grupos das cartas que formarão os dois pares e $C_{4,2} = 6$ modos de escolher os seus naipes de cada par. Para a quinta carta há 11 modos de selecioná-la e 4 modos de escolher seu naipe. Totalizando $78 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 4 = 123552$ combinações com dois pares. Dessa forma, a probabilidade de obter dois pares é:

$$P(Dois\ pares) = \frac{123552}{2598960} \approx 0,04754 \text{ ou } 4,754\%.$$

9. **Pair ou Um par**
Essa combinação é composta por duas cartas do mesmo valor, e três outras cartas não relacionadas. Em cada naipe há 13 valores possíveis para o par e há $C_{4,2} = 6$ modos distintos de combinar os naipes das duas cartas do par. Para as demais cartas há $C_{12,3} = 220$ combinações possíveis por naipe, totalizando $220 \cdot 4 = 880$ combinações e, ainda, temos $C_{4,3} = 4$ modos de escolher os naipes dessas três cartas. Portanto, temos um total de $13 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 880 \cdot 4 = 1098240$ possibilidades para essa combinação. Assim, a probabilidade de obter um par é:

$$P(Um\ par) = \frac{1098240}{2598960} \approx 0,42257 \text{ ou } 42,257\%.$$

10. **High card ou Carta alta**
Para essa combinação satisfaz qualquer mão que não esteja nas categorias anteriores. Assim, temos $C_{13,5} = 1287$ possibilidades de 5 cartas em 13. No entanto, 10 dessas possibilidades formam uma sequência e, excluindo-as restam 1277 possibilidades. Ainda é necessário considerar que cada uma das 5 cartas pode ser de um dos quatro naipes, portanto, temos $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ possibilidades. Entretanto, devemos excluir as combinações em que todas tem o mesmo naipe, que são 4 (uma por naipe), obtendo assim, $1024 - 4 = 1020$ possibilidades. Assim, há $1277 \cdot 1020 = 1302540$ combinações sem valor.
Ou, simplesmente, pode-se determinar o número total de combinações de 5 cartas de um baralho de pôquer que é dado por $C_{52,5} = 2598960$ mãos possíveis. Assim o número de mãos que representam carta alta é dado por $C_{52,5}$ descontando todas as mãos calculadas anteriormente. Portanto a quantidade de mãos carta alta é $2598960 - (4 + 36 + 624 +$

$3744 + 5108 + 10200 + 54912 + 123552 + 1098240) = 1302540$.
E, a probabilidade que ocorra esse evento é:

$$P(Carta\ alta) = \frac{1302540}{2598960} \approx 0,50118 \text{ ou } 50,118\%.$$

A tabela abaixo resume as probabilidades encontradas para as mãos do pôquer apresentadas acima.

Mão do pôquer	**Probabilidade**
Royal Straight Flush	0,00015%
Straight Flush	0,00138%
Four of a kind ou Quadra	0,02400%
Full House ou Full Hand	0,14400%
Flush	0,19600%
Straight ou Sequência	0,39200%
Three of a Kind ou Trinca	2,11300%
Two pairs ou Dois pares	4,75400%
Pair ou Um par	42,25700%
High card ou Carta alta	50,11800%

5.3.2 Atividade 2 - Calculando a probabilidade de receber uma determinada mão inicial

Essa Atividade 2 é direcionada a alunos do Ensino Médio e propõe-se calcular a probabilidade de um jogador, numa partida de pôquer Texas Hold'em, receber uma determinada mão inicial (as duas cartas fechadas que somente o próprio jogador pode ver).

A seguir apresenta-se o cálculo da probabilidade de obter-se determinadas mãos iniciais.

1. **Um par de Ases**

   Ao receber uma mão inicial, qual a probabilidade de que seja um par de Ases?

   Para calcularmos essa probabilidade é necessário determinarmos o número de elementos do espaço amostral dessa situação e o número de elementos favoráveis ao evento "ocorrer um par de Ases". O espaço amostral será formado por todas as combinações das 52 cartas do baralho tomadas 2 a 2, ou seja, $C_{52,2} = 1326$ combinações possíveis. O baralho possui quatro Ases, portanto, ao selecionar dois Ases dentre os quatro teremos $C_{4,2} = 6$ combinações de pares de Ases. Assim, a probabilidade do evento ocorrer é dado por:

   $$P(um\ par\ de\ Ases) = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221} \approx 0,0045 \text{ ou } 0,45\%.$$

   Outro raciocínio: Quando for calcular a probabilidade de receber um par pode-se considerar a primeira carta conhecida. Como há quatro Ases no baralho de 52 cartas, assim, a probabilidade de receber um Ás na primeira carta é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e de receber um

Ás na segunda carta é $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$. Portanto, a probabilidade de que as duas situações aconteçam é:

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221} \approx 0,0045 \text{ ou } 0,45\%.$$

Isto, significa que em média a probabilidade de receber um par de Ases na mão inicial é de 1 em 221 mãos.

Para o caso de um outro par qualquer específico (par de Reis, de Damas, de Valetes, ou outro valor) vale essa mesma probabilidade.

Pode-se, ainda, propor o cálculo da probabilidade de receber qualquer par na mão inicial (de 22 até AA). Neste caso, basta considerar a primeira carta conhecida. Assim, a probabilidade da segunda carta ter valor igual a primeira é de:

$$\frac{3}{51} = \frac{1}{17} \approx 0,0588 \text{ ou } 5,88\%.$$

Isto, significa que em média a probabilidade de receber qualquer par na mão inicial é de 1 em 17 mãos.

2. **Um Ás e um Rei**

   Ao receber uma mão inicial, qual a probabilidade de que seja um Ás e um Rei?

   Como o baralho possui 4 Ases e 4 Reis é possível formar $4 \cdot 4 = 16$ duplas de Ás e Rei. Os resultados favoráveis são 16. O espaço amostral, já conhecemos, é formado por $C_{52,2} = 1326$ combinações. Portanto, a probabilidade do evento ocorrer é:

$$P(\textit{um Ás e um Rei}) = \frac{16}{1326} = \frac{8}{663} \approx 0,012 \text{ ou } 1,2\%.$$

   Outro raciocínio: O baralho possui quatro Ases e quatro Reis. Para a primeira carta há oito resultados favoráveis dentre as 52 cartas do baralho, assim, a probabilidade da primeira carta ser favorável é $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$. Caso a primeira carta seja um Ás, ao receber a segunda carta teremos quatro Reis favoráveis dentre as 51 cartas restantes; ou, caso tenha sido um Rei na primeira carta, haverá quatro Ases favoráveis dentre 51 cartas. Assim, a probabilidade da segunda carta ser favorável é: $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Logo, a probabilidade de ocorrer esse evento é:

$$P(\textit{um Ás e um Rei}) = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{169} \approx 0,012 \text{ ou } 1,2\%.$$

   Ao receber uma mão inicial, qual a probabilidade de que seja um Ás e um Rei do mesmo naipe?

   Receber um Ás e um Rei do mesmo naipe na mão inicial é uma situação um pouca mais rara, tem menor probabilidade de ocorrer, pois, na segunda carta, é preciso receber o naipe exato da primeira. Enquanto para a primeira carta há oito resultados favoráveis dentre as 52 cartas do baralho, e a probabilidade de ser favorável é $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$; a probabilidade da segunda carta ser favorável é $\frac{1}{51}$, pois, haverá apenas 1 resultado favorável dentre as 51 cartas restantes. Logo, a probabilidade de ocorrer esse evento é:

$$P(um\ \acute{A}s\ e\ um\ Rei\ do\ mesmo\ naipe) = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{51} = \frac{2}{663} \approx 0,003 \text{ ou } 0,3\%.$$

3. **Duas cartas do mesmo naipe**

   Ao receber uma mão inicial, qual a probabilidade de que seja duas cartas do mesmo naipe?

   Como já observado, o espaço amostral apresenta $C_{52,2} = 1326$ combinações possíveis de pares. Deve-se lembrar que o baralho apresenta 4 naipes e cada naipe possui 13 cartas. Em cada naipe, calculando todas as combinações das 13 cartas tomadas 2 a 2, teremos $C_{13,2} = 78$ combinações possíveis de pares com mesmo naipe. Como são 4 naipes distintos, no total serão $4 \cdot 78 = 312$ combinações possíveis de pares com mesmo naipe dentre as 52 cartas do baralho. Assim, a probabilidade para o evento é dada por:

$$P(duas\ cartas\ do\ mesmo\ naipe) = \frac{312}{1326} = \frac{4}{17} \approx 0,235 \text{ ou } 23,5\%.$$

   Outro raciocínio: Sabendo que um baralho possui 52 cartas e cada naipe possui 13 cartas. Então, probabilidade de receber a primeira carta é $\frac{52}{52} = 1$, pois, pode ser qualquer uma das 52 cartas do baralho. Ao receber a segunda carta é preciso que esta tenha o mesmo naipe da primeira, portanto, teremos 12 resultados favoráveis dentre as 51 cartas restantes. Portanto, a probabilidade de que as duas cartas sejam do mesmo naipe é:

$$1 \cdot \frac{12}{51} \approx 0,2353 \text{ ou } 23,53\%.$$

5.3.3 Atividade 3 - Calculando a probabilidade das cartas comunitárias serem favoráveis em relação a uma mão inicial

A seguir algumas situações nas quais se conhece as duas cartas abertas de um jogador. Diante dessas situações propõe-se determinar a probabilidade das cinco cartas comunitárias ser favorável a uma determinada mão do pôquer. Essa Atividade 3 é direcionada a alunos do Ensino Médio.

Nesse caso, desconsiderando a ordem em que as cartas comunitárias são abertas, o espaço amostral é formado pelas combinações de 50 cartas tomadas 5 a 5, ou seja, o número de elementos do espaço amostral será:

$$C_{50,5} = \frac{50!}{5!45!} = 2118760.$$

Vejamos algumas situações em que um jogador tenha recebido uma mão inicial especial e, a partir daí, deve-se determinar a probabilidade de completar determinadas mãos do poker, considerando que todas as cartas comunitárias estão fechadas.

- **Par de Ases (AA)**

  Um “par de Ases” (ou, qualquer outro par de cartas do mesmo valor) na mão inicial, já garante a mão do pôquer “um par”. Essa mão inicial, ainda, permite maior possibilidade de obter-se uma mão do pôquer melhor, como por exemplo, “dois pares”, “trinca”, “full house”, “quadra”, ou, até mesmo um “royal straight flush”.

  Considerando que um jogador tem um par de Ases na mão inicial (ou, analogamente, um par de cartas com mesmo valor). Então,

  (a) Para formar a mão “dois pares” será necessário obter-se um par (de valor diferente de Ases) entre as cartas comunitárias.

  Em cada naipe há 13 valores possíveis para o par. Mas, como pretende-se determinar a probabilidade de formar-se a mão “dois pares”, vamos excluir as possibilidades em que ocorra Ases, assim, cada par será uma combinação de duas das quatro cartas com mesmo valor para cada um dos 12 valores possíveis, ou seja, há $12 \cdot C_{4,2} = 12 \cdot 6 = 72$ possibilidades de pares.
  Para as três cartas restantes, de valor diferente do par e entre si, teremos para a terceira carta $(52-4-4) = 44$ possibilidades, pois, não deve coincidir com os dois pares; para a quarta e a quinta cartas, teremos $(44-4) = 40$ e $(40-4) = 36$ possibilidades, respectivamente, pois, não devem coincidir com o valor das cartas anteriores e nem entre si. Como a ordem das três cartas não importa, devemos dividir o total das possibilidades pelo total das permutações, que é $3! = 6$, ou seja, há $\dfrac{44 \cdot 40 \cdot 36}{3!} = \dfrac{63360}{6} = 10560$ possibilidades de selecionar as três cartas restantes. Assim, temos um total de $72 \cdot 10560 = 760320$ possibilidades favoráveis a obter um outro par e três cartas não relacionadas. Logo, a probabilidade de obter um outro par e, assim, obter a mão “dois pares” é:

  $$P(um\ par) = \frac{760320}{2118760} \approx 0,3589 \text{ ou } 35,89\%.$$

  Uma outra maneira de determinar as possibilidades de selecionar as três cartas restantes é: Determinar em cada naipe os agrupamentos possíveis de 3 cartas em 11 cartas (pois, devem ter valor diferente das cartas anteriores e entre si). Assim, há $C_{11,3} = 165$ modos de selecioná-las e há $C_{4,1} = 4$ modos de escolher o naipe de cada uma delas, sendo no total $165 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 10560$ possibilidades.

  (b) Para formar a mão “trinca” será necessário obter-se um Ás entre as cartas comunitárias.

  Tendo em vista, que já se tem em mãos um par de Ases, então, restam dois Ases entre as 50 cartas restantes, portanto, há duas possibilidades para obter-se um Ás. Para as quatro cartas restantes, segunda, terceira, quarta e quinta cartas, teremos, respectivamente, 48, 44, 40 e 36 possibilidades, pois, o valor não deve coincidir com o da trinca e devem ser diferentes entre si. Como a ordem destas quatro cartas não importa, devemos dividir o total das possibilidades pelo total de permutações, que é $4! = 24$, ou seja, $\dfrac{48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{4!} = \dfrac{3041280}{24} = 126720$ possibilidades ao selecionar as quatro cartas restantes. Assim, temos um total de $2 \cdot 126720 = 253440$ possibilidades favoráveis a obter um Ás e quatro cartas não relacionadas. Assim, a probabilidade de obter um Ás e, assim, formar a mão "trinca" é:

$$P(um\ \acute{A}s) = \frac{253440}{2118760} \approx 0,1196 \text{ ou } 11,96\%.$$

Uma outra maneira de determinar as possibilidades de selecionar as quatro cartas restantes é: Determinar em cada naipe os agrupamentos possíveis de 4 cartas em 12 cartas (pois, devem ter valor diferente das cartas anteriores e entre si). Assim, para as demais cartas há $C_{12,4} = 495$ modos de selecioná-las e há $C_{4,1} = 4$ modos de escolher o naipe de cada uma delas, sendo no total $495 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 126720$ possibilidades.

(c) Para formar a mão "full house" será necessário obter-se um Ás e um par (de valor diferente de Ases) ou uma trinca entre as cartas comunitárias.

(c.1) Já observou-se que há 2 possibilidades para obter-se o Ás e 72 possibilidades de pares. Para as duas cartas restantes, de valor diferente de Ás e do par e diferentes entre si, teremos para a quarta carta $52 - 4 - 4 = 44$ possibilidades, pois, não deve coincidir com os valores do par e da trinca; e, para a quinta carta, teremos $44 - 4 = 40$ possibilidades, pois não deve coincidir com as cartas anteriores e nem entre si. Como a ordem destas duas cartas não importa, devemos dividir o total das possibilidades pelo total de permutações, que é $2! = 2$, ou seja, $\frac{44 \cdot 40}{2!} = \frac{1760}{2} = 880$ possibilidades ao selecionar as duas cartas restantes. Portanto, temos um total de $2 \cdot 72 \cdot 880 = 126720$ possibilidades favoráveis a obter um Ás e um par. Assim, a probabilidade de obter um Ás e um par é:

$$P(um\ \acute{A}s\ e\ um\ par) = \frac{126720}{2118760} \approx 0,0598 \text{ ou } 5,98\%.$$

Uma outra maneira de determinar as possibilidades de selecionar as duas cartas restantes é: Determinar em cada naipe os agrupamentos possíveis de 2 cartas em 11 cartas (pois, devem ter valor diferente das cartas anteriores e entre si). Assim, para as demais cartas há $C_{11,2} = 55$ modos de selecioná-las e há $C_{4,1} = 4$ modos de escolher o naipe de cada uma delas, sendo no total $55 \cdot 4 \cdot 4 = 880$ possibilidades.

(c.2) Em cada naipe há 13 valores possíveis para a trinca e há $C_{4,3} = 4$ modos distintos de combinar os naipes das três cartas da trinca. Como a trinca terá valor diferente de Ases, teremos 12 valores possíveis para a trinca e 4 modos distintos de combinar os naipes, totalizando $12 \cdot 4 = 48$ possibilidades de trincas. Para as duas cartas restantes, de valor diferente do par inicial e da trinca e diferentes entre si, teremos para a quarta carta $52 - 4 - 4 = 44$ possibilidades, pois, não deve coincidir com os valores do par e da trinca; e, para a quinta carta, teremos $44 - 4 = 40$ possibilidades, pois não deve coincidir com as cartas anteriores e nem entre si. Como a ordem destas duas cartas não importa, devemos dividir o total das possibilidades pelo total de permutações, que é $2! = 2$, ou seja, $\frac{44 \cdot 40}{2!} = \frac{1760}{2} = 880$. Portanto, temos um total de $48 \cdot 880 = 42240$ possibilidades para essa combinação. Assim, a probabilidade de obter uma trinca é:

$$P(uma\ trinca) = \frac{42240}{2118760} \approx 0,0199 \text{ ou } 1,99\%.$$

Portanto, a probabilidade de formar uma mão de pôquer "full house" é $\frac{126720 + 42240}{2118760} \approx 0,0797$ ou $7,97\%$.

(d) Para formar a mão "quadra" será necessário obter-se um par de Ases entre as cartas comunitárias.

Tendo em vista, que já se tem em mãos um par de Ases, então, resta somente um par de Ases entre as 50 cartas restantes, portanto, há apenas 1 possibilidade para obter-se um par de Ases. Para as três cartas restantes, de valor diferente do par e entre si, teremos para a terceira carta $52-4 = 48$ possibilidades; para a quarta e a quinta cartas, teremos $48 - 4 = 44$ e $44 - 4 = 40$ possibilidades, respectivamente, pois não devem coincidir com as cartas anteriores e nem entre si. Como a ordem destas três cartas não importa, devemos dividir o total das possibilidades pelo total de permutações, que é $3! = 6$, ou seja, $\frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = \frac{84480}{6} = 14080$ possibilidades ao selecionar as três cartas restantes. Portanto, temos um total de $1 \cdot 14080 = 14080$ possibilidades para essa combinação. Assim, a probabilidade de obter um par de ases e, assim, obter-se a "quadra" é:

$$P(par\ de\ Ases) = \frac{14080}{2118760} \approx 0,0066 \text{ ou } 0,66\%.$$

Uma outra maneira de determinar as possibilidades de selecionar as três cartas restantes é: Para as demais cartas há $C_{12,3} = 220$ modos de selecioná-las e há $C_{4,1} = 4$ modos de escolher o naipe de cada uma delas, sendo no total $220 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 14080$ possibilidades.

(e) Para obter um "Royal Straight Flush" é necessário formar uma combinação composta pelo Ás, Rei, Dama, Valete e dez do mesmo naipe. Sendo assim, é preciso obter dentre as cartas comunitárias a combinação de Rei, Dama, Valete e dez do mesmo naipe e igual a um dos dois Ases da mão inicial. No baralho há quatro combinações de Rei, Dama, Valete e dez do mesmo naipe e duas delas serão favoráveis a formar a mão. Quanto à quinta carta, esta poderá ser selecionada de 46 modos distintos. Portanto, serão $2 \cdot 46 = 92$ combinações favoráveis. Logo, a probabilidade de obter-se um "royal straight flush" é:

$$P(Royal\ Straight\ Flush) = \frac{92}{2118760} \approx 0,00004 \text{ ou } 0,004\%.$$

O raciocínio e os cálculos para as situações em que a mão inicial de pôquer é um par de cartas com mesmo valor (par de Reis, par de Damas, par de Valetes, ou outro valor qualquer) são análogos a essa situação em que tem-se um "par de Ases" na mão inicial.

- **Ás e Rei (do mesmo naipe)**

  Com essa mão inicial tem-se uma maior possibilidade de obter-se um "Royal Straight Flush" ou um "Flush".

  Para obter um "Royal Straight Flush" será necessário que entre as cinco cartas abertas dispostas na mesa tenha-se a sequência Dama, Valete e dez de mesmo naipe e que o naipe seja igual ao do Ás e Rei da mão.

  Para que isto ocorra há apenas uma sequência favorável. Quanto às outras duas cartas, há $C_{47,2} = 1081$ modos de selecioná-las. O número de casos favoráveis é: $1 \cdot 1081 = 1081$. Portanto, a probabilidade do evento ocorrer é:

  $$P(Royal\ Straight\ Flush) = \frac{1081}{2118760} \approx 0,00051 \text{ ou } 0,051\%.$$

  Para obter um "Flush" será necessário que entre as cinco cartas abertas dispostas na mesa tenha-se três cartas com mesmo naipe.

  Primeiramente, observa-se que temos apenas um modo de escolher o naipe, pois, deve ser igual ao naipe do Ás e Rei da mão. Cada naipe possui 13 cartas, mas, já temos 2 cartas com mesmo naipe, portanto, restará 11 cartas. Ao agrupar 3 cartas dentre as 11, temos $C_{11,3} = 165$ possibilidades de agrupamentos. Entretanto, 1 dessas combinações formará um "Royal Straight Flush" com as duas cartas da mão, devendo ser excluída dessa contagem, $165 - 1 = 164$. Quanto às outras duas cartas, há $C_{47,2} = 1081$ modos de selecioná-las. O número de casos favoráveis é: $164 \cdot 1081 = 177284$. Portanto, a probabilidade do evento ocorrer é:

  $$P(Flush) = \frac{177284}{2118760} \approx 0,0837 \text{ ou } 8,37\%.$$

  Se formos considerar que as outras duas cartas devem ter naipes diferentes do flush, então, há $C_{39,2} = 741$ modos de selecioná-las. O número de casos favoráveis é $164 \cdot 741 = 121524$. E, a probabilidade de se obter nessas condições um flush com essa mão inicial é:

  $$P(Flush) = \frac{121524}{2118760} \approx 0,0574 \text{ ou } 5,74\%.$$

- **Ás e Rei (de naipes diferentes)**

  Essa mão inicial possibilita uma maior probabilidade de formar-se pelo menos um "Straight".

  Para isto, é necessário que entre as cinco cartas abertas dispostas na mesa tenha-se uma Dama, um Valete e um dez. Neste caso temos apenas uma possibilidade de valor para iniciar a sequência (do 10 ao Q) e $1 \cdot 4 = 4$ maneiras de escolher o naipe para a carta dessa sequência, pois, são 4 naipes. A partir daí para as outras duas cartas temos 4 possibilidades, sendo no total $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Quanto às outras duas cartas restantes, há $C_{47,2} = 1081$ modos de selecioná-las (dos quais incluem pares de cartas de mesmo valor, que poderiam formar uma trinca com qualquer uma das cartas anteriores, entretanto, a mão straight é mais forte do que a mão trinca). O número de casos favoráveis é

$64 \cdot 1081 = 69184$. Portanto, a probabilidade de se obter pelo menos um Straight com essa mão inicial é:

$$P(Straight) = \frac{69184}{2118760} \approx 0,0327 \text{ ou } 3,27\%.$$

5.3.4 Atividade 4 - Calculando a probabilidade de uma mão do pôquer ganhar de outra

Essa Atividade 4 é direcionada a alunos do Ensino Médio e propõe-se calcular a probabilidade de uma deteminada mão do pôquer ganhar de outra.

Como exemplo será considerado uma partida disputada por dois jogadores, X e Y. O jogador X tem a mão inicial par de Ases e o jogador Y, par de Reis. O par de Ases é considerado a melhor mão inicial e o par de Reis a segunda melhor mão inicial. Inicialmente, é observado que o jogador X tem a melhor mão, pois, um par de Ases é mais forte que um par de Reis. Se, no decorrer do jogo as cartas comunitárias não ajudar a nenhum dos dois jogadores a formar uma mão melhor do que um par, o vencedor será o jogador X com o seu par de Ases.

A mão inicial do jogador X apresenta possibilidades de formar a melhor mão do pôquer, um Royal Straight Flush, para isto, é necessário que entre as cartas comunitárias obtenha-se a sequência de K, Q, J e 10 do mesmo naipe e igual ao naipe de um dos Ases da mão. Há apenas duas possibilidades favoráveis de sequências e para a quinta carta comunitária, há 44 modos de selecioná-la (aqui, excluirmos as quatro cartas que se encontram nas mãos dos jogadores e as quatro cartas da sequência). Assim, há $2 \cdot 44 = 88$ resultados favoráveis. O espaço amostral apresenta $C_{48,5} = 1712304$ resultados possíveis (aqui excluirmos as quatro cartas que se encontram nas mãos dos jogadores). A probabilidade do evento ocorrer é $\frac{88}{1712304} \approx 0,000051$ ou 0,0051%.

Para o jogador Y também existe a possibilidade de formar um Royal Straight Flush com as cartas comunitárias, para isto teria que obter a sequência de cartas de A, Q, J e 10 do mesmo naipe e igual ao naipe de um dos Reis da mão. E, a probabilidade é a mesma calculada para o jogador X. Entretanto, cada um dos jogadores tem uma carta que o outro, talvez, precise para formar essa mão, o que pode diminuir a probabilidade de cada um de formá-la com as cartas comunitárias. Com isso a probabilidade diminuiria para $\frac{1 \cdot 44}{1712304} \approx 0,000026$ ou 0,0026%. As mãos iniciais dos jogadores X e Y possibilitam maior probabilidade de obter outras mãos do pôquer.

Analisemos algumas possibilidades que podem ocorrer em uma partida disputada por esses dois jogadores, X e Y, a partir da questão *"Quando uma mão inicial par de Reis ganha de um par de Ases"*? Observemos as situações a seguir.

Com base na hierarquia das mãos do pôquer tem-se:

- Um par ganha de carta alta:

Não há essa possibilidade pois, ambos jogadores possuem um par na mão inicial.

- Dois pares ganha de um par:

  Ambos jogadores já apresentam um par na mão inicial. Caso, as cartas comunitárias apresentem um outro par de valor diferente de Ás ou Rei, o jogador X ganha, pois, ele terá um par de cartas mais altas (de Ases). Portanto, não há possibilidade do jogador Y ganhar do jogador X com uma mão dois pares.

- Trinca ganha de dois pares

  Para que o jogador Y forme no mínimo uma trinca é necessário que entre as cartas comunitárias obtenha-se um Rei, para isto, temos duas possibilidades de obter-se um Rei, para as demais cartas teremos combinações de 47 cartas tomadas 4 a 4, ou seja, $C_{47,4} = 178365$ combinações possíveis quando seleciona-se 4 cartas num conjunto de 47. O espaço amostral é formado pelas combinações de 48 cartas tomadas 5 a 5, isto é, $C_{48,5} = 1712304$ resultados possíveis. Assim, a probabilidade para que o evento ocorra é $\dfrac{2 \cdot C_{47,4}}{C_{48,5}} = \dfrac{2 \cdot 178365}{1712304} \approx 0,2083$ ou 20,83%.

  Considerando conhecida uma das cartas comunitárias e que com esta carta o jogador Y obteve a trinca de Reis. Observa-se que com no mínimo a trinca de Ases o jogador X ganha de Y, pois a trinca de Ases é mais forte que a de Reis. Diante disto, "qual a probabilidade do jogador X obter pelo menos uma trinca de Ases?" Neste caso, agora restam 47 cartas que tomadas 4 a 4 formam $C_{47,4} = 178365$ combinações possíveis. Para que o jogador X obtenha no mínimo uma trinca de Ases entre as quatro cartas comunitárias (ainda não conhecidas), há 2 possibilidades para formar a trinca com o par de Ases da mão e para as demais cartas teremos combinações de 46 cartas tomadas 3 a 3, portanto, são $2 \cdot C_{46,3} = 2 \cdot 15180 = 30360$ possibilidades favoráveis. Assim, a probabilidade de que isto ocorra é $\dfrac{30360}{178365} \approx 0,1702$ ou 17,02%.

  Portanto, sabendo que ocorreu um Rei entre as cartas comunitárias, a probabilidade do jogador X de formar no mínimo uma trinca de Ases passa a ser de 17,02%.

  Outro raciocínio: Conhecendo apenas uma das cartas comunitários e sabendo que ela possibilita ao jogador Y formar a mão trinca, ainda, há possibilidades do jogador X obter mãos melhores ou igual a trinca, dando-lhe assim a vitória na partida. Entre as demais cartas comunitárias poderia ocorrer um Ás e formar a trinca, ou um par de Ases e formar a quadra, ou ocorrer um Ás e um par e formar um full house.

  Para evitar possibilidades favoráveis ao jogador X, para as demais cartas, ao invés de combinações de 47 cartas tomadas 4 a 4, vamos excluir as possibilidades de Reis ou Ases, pois, o jogador Y formaria uma quadra e o jogador X, uma trinca ou uma quadra, e, também, excluir as possibilidades de que sejam formadas na mesa pares, trinca ou quadra, assim, temos em cada naipe $C_{11,4} = 330$ modos de selecioná-las e há 4 modos de escolher o naipe de cada uma delas, sendo no total $330 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 84480$ combinações. Portanto, tem-se um total de $2 \cdot 84480 = 168960$ possibilidades do jogador Y formar uma trinca. A probabilidade do evento ocorrer é $\dfrac{1689600}{1712304} \approx 0,0987$ ou 9,87%.

Neste cálculo descartamos as possibilidades de que o jogador X formasse uma trinca, ou uma quadra, ou um full house. Mas, ainda há possibilidades de que ele possa obter um straight, um flush ou um royal straight flush que são mãos superiores à trinca.

- Straight ganha de trinca

  Para que o jogador Y forme a mão Straight (sequência de 5 cartas com naipes diferentes) é necessário obter entre as cartas comunitárias, as cartas de valores A, Q, J e 10, ou as cartas de valores Q, J, 10 e 9. Para a primeira situação há 2, 4, 4, e 4, possibilidades para os valores A, Q, J e 10, respectivamente, sendo no total $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 128$ modos de obter essa sequência, dos quais vamos excluir 2 sequências que formam a mão Royal Straight Flush, $128 - 2 = 126$. Para a segunda situação há 4, 4, 4 e 4 possibilidades para os valores Q, J, 10 e 9, respectivamente, sendo no total $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ modos de obter essa sequência, dos quais vamos excluir 2 delas que formam a mão Straight Flush, $256 - 2 = 252$. Assim, há $126 + 254 = 380$ possibilidades de obter as cartas que formem a mão Straight. Para a quinta carta comunitária há 44 possibilidades de obtê-la. Portanto, há $380 \cdot 44 = 16720$ resultados favoráveis a formar a mão Straight. O espaço amostral é formado pelas combinações das 48 cartas tomadas 5 a 5, ou seja, $C_{48,5} = 1712304$. Logo, a probabilidade do evento ocorrer é dada por $\dfrac{16720}{1712304} \approx 0,00976$ ou 0,976%.

  Considerando conhecidas quatro cartas comunitárias e com estas cartas o jogador Y obteve um Straight. No caso de ter ocorrido a primeira situação, onde há 126 modos de obtê-la para que o jogador Y obtenha um Straight, o jogador X obteria apenas uma trinca, mas, ainda, teria possibilidades de ganhar obtendo uma mão melhor com a quinta carta comunitária. Para isto seria necessário ocorrer um outro Ás (1 possibilidade), pois formaria uma quadra, ou um Rei (2 possibilidades), pois formaria um Straight (que apresentaria uma carta mais alta, o Ás). O que resulta em $126 \cdot 3 = 378$ possibilidades favoráveis a bater a mão do jogador Y.

  No caso de ter ocorrido a segunda situação, onde há 254 modos de obtê-la, o jogador X obteria uma trinca, mas, ainda, teria possibilidades de ganhar obtendo uma mão melhor com a quinta carta comunitária. Para isto seria necessário ocorrer um Rei (duas possibilidades), pois formaria um Straight. O que resulta em $254 \cdot 2 = 508$ possibilidades favoráveis a bater a mão do jogador Y. No total, tem-se $378 + 508 = 886$ possibilidades favoráveis ao jogador X de modo a bater a mão de Straight do jogador Y. A probabilidade do evento ocorrer é $\dfrac{886}{1712304} \approx 0,00052$ ou 0,052%.

Se, eventualmente o jogador Y formar um Straight com as cartas comunitárias, o jogador X terá uma menor probabilidade de formar uma mão melhor com a quinta carta comunitária e, com isso, ganhar a partida.

- Flush ganha de Straight

  Para que o jogador Y forme a mão Flush é necessário que entre as cartas comunitárias obtenha-se quatro cartas do mesmo naipe e igual a um dos dois naipes que ele possui em sua mão inicial. Dois dos quatro naipes existentes são favoráveis. Em cada naipe há 13 cartas, mas, o jogador já possui uma carta do naipe em mãos, então de 12 cartas tomadas 4 a 4 temos $C_{12,4} = 495$ combinações possíveis, excluindo a sequência que forma um Straight Flush são 494 combinações por naipe. No total são $2 \cdot 494 = 988$ combinações favoráveis. Para a quinta carta comunitária, excluindo a possibilidade de ser do mesmo naipe das cartas do Flush, há 39 possibilidades. Portanto, o total de combinações favoráveis é $988 \cdot 39 = 38532$. O espaço amostral é formado pelas combinações de 48 cartas tomadas 5 a 5, ou seja,$C_{48,5} = 1712304$ resultados possíveis. A probabilidade do evento ocorrer é $\dfrac{38532}{1712304} \approx 0,0225$ ou 2,25%.

  Se, eventualmente, com as cartas comunitárias o jogador Y obter a mão Flush, então, também, o jogador X pode obter esta mesma mão basta que um dos Ases da sua mão inicial tenha o mesmo naipe das cartas da mesa que possibilitaram o Flush do jogador Y. E, no desempate quem ganharia seria o jogador X por ter cartas mais altas.

- Full House ganha de Flush

  Para que o jogador Y forme um Full House é necessário que entre as cinco cartas comunitárias obtenha-se um Rei e um par (diferente de Reis ou Ases, para que não se forme quadras) ou uma trinca.

  Na primeira situação, temos 2 possibilidades para o Rei e, para o par 11 possibilidades de valores. Para as demais cartas, excluiremos as cartas de valores Rei, Ás e do par, pois, não queremos obter uma quadra de Rei, ou que o jogador X forme um Full House com uma trinca de Ás, ou que na mesa aconteça uma trinca ou quadra de valor igual ao do par, pois, com isso quem ganharia seria o jogador X. Então, teremos combinações de 40 cartas tomadas 2 a 2, ou seja, $C_{40,2} = 780$ combinações possíveis. Portanto, o total de resultados favoráveis é $2 \cdot 11 \cdot 780 = 17160$. A probabilidade do evento ocorrer é $\dfrac{17160}{1712304} \approx 0,01$ ou 1%.

  Caso ocorra a segunda situação, ou seja, uma trinca na mesa, os jogadores X e Y, formariam uma mão Full hhuse cada um com a trinca da mesa e o par das suas mãos. Haveria um empate de mãos, mas, no momento do desempate, o jogador X ganha, pois, como a trinca é a mesma para ambos, o desempate é nas cartas mais altas do par.

- Quadra ganha de Full House

  Para formar a mão quadra será necessário que o jogador Y obtenha um outro par de Reis entre as cartas comunitárias. Para isto, temos 1 possibilidade para o par. Para as demais cartas, como não queremos que o jogador X forme uma quadra, excluiremos os Ases, assim, teremos combinações de 44 cartas tomadas 3 a 3, ou seja, $C_{44,3} = 13244$ combinações possíveis. Assim, o total de resultados favoráveis é $1 \cdot 13244 = 13244$. A probabilidade do evento ocorrer é $\frac{13244}{1712304} \approx 0,00773$ ou 0,773%.

  Considerando que o jogador Y tenha formado a mão quadra, ainda há a possilibilidade do jogador X vencer caso ele obtenha a mão Royal Straight Flush, para isto, seria necessário que entre as três cartas comunitárias restantes obtivesse as cartas de valores Q, J e 10 do mesmo naipe e igual ao naipe de um dos dois Reis da mesa e de um dos dois Ases da mão. Portanto, há apenas uma possibilidade. E a probabilidade disto ocorrer é $\frac{1}{1712304} \approx 0,0000006$ ou 0,00006%.

- Straight Flush ganha de Quadra

  Para formar um Straight Flush o jogador Y precisará obter entre as cartas comunitárias as cartas de valores Q, J, 10 e 9 do mesmo naipe e de naipe igual a um dos dois Reis de sua mão inicial. Assim, há duas possibilidades favoráveis de sequências. Para a quinta carta comunitária, há 42 modos de selecioná-la (excluindo-se os Ases, pois, não queremos formar um Royal Straight Flush). Portanto, há $2 \cdot 42 = 84$ resultados favoráveis. O espaço amostral é formado pelas combinações 48 cartas tomadas 5 a 5, $C_{48,5} = 1712304$ resultados possíveis. A probabilidade do evento ocorrer é $\frac{84}{1712304} \approx 0,000049$ ou 0,0049%.

  Se o jogador Y formar a mão Straight Flush, não há possibilidades do jogador X bater essa mão com uma mão igual ou melhor, pois, ele precisaria que as cartas da mesa utilizadas pelo jogador Y tivessem o mesmo naipe de um dos seus Ases e, também, de um Rei com este mesmo naipe, mas, este Rei estaria na mão do jogador Y. Então, apesar do jogador X ter a melhor mão inicial, o jogador Y seria o ganhador se ele formar um Straight Flush.

- Royal Straight Flush ganha de Straight Flush

  O jogador Y tem um par de Reis em sua mão inicial, para que ele possa formar um Royal Straight Flush é necessário que se obtenha as cartas de valores A, Q, J e 10 do mesmo naipe e de naipe igual a um dos dois Reis. Para isto, há apenas duas possibilidades favoráveis de sequências. E, para a quinta carta comunitária, há 44 modos de selecioná-la. Assim, há $2 \cdot 44 = 88$ resultados favoráveis. O espaço amostral é formado pelas combinações das 48 cartas tomadas 5 a 5, ou seja, $C_{48,5} = 1712304$ resultados possíveis. A probabilidade do evento ocorrer é $\frac{88}{1712304} \approx 0,000051$ ou 0,0051%.

Se o jogador Y formar a mão Royal Straight Flush, então, não há possibilidades do jogador X ganhar, pois, ele precisaria ter uma mão igual ou melhor, mas, para isso, ele precisaria que as cartas utilizadas pelo jogador Y tivessem o mesmo naipe de um dos seus Ases e, também, de um Rei com este mesmo naipe, mas, este Rei estaria na mão do jogador Y. Então, apesar do jogador X ter a melhor mão inicial, o jogador Y seria o vencedor caso ele viesse a formar um Royal Straight Flush, pois, não teria como o jogador X bater sua mão.

6 Considerações Finais

A realização deste trabalho permitiu verificar que o surgimento da Teoria da Probabilidade vincula-se aos jogos de azar e que seu desenvolvimento foi impulsionado pelo interesse do homem em estudar os fenômenos envolvendo possibilidades. Observou-se que jogos e problemas despertaram e, ainda, continuam despertando, a curiosidade e o interesse do homem. Os conceitos básicos da combinatória e da probabilidade apresentados no decorrer deste trabalho representam o resultado do interesse e dos estudos realizados pelos precursores que contribuiram para o surgimento e desenvolvimento da Teoria da Probabilidade.

O estudo da Teoria da Probabilidade é um dos assuntos da disciplina de matemática abordados na educação básica e acredita-se que o seu desenvolvimento permite ao aluno perceber a aplicabilidade da matemática e a sua utilização na resolução de problemas da vida diária. A partir do domínio de conhecimentos básicos de probabilidade é permitido ao aluno, ao final educação básica, inserir e ter uma participação ativa no contexto social atual no qual as informações são processadas e apresentadas estatisticamente.

As atividades apresentadas neste trabalho propõe-se a desenvolver um ensino de probabilidade através da utilização e manipulação de cartas de baralho e do jogo de pôquer. Tem-se que, o baralho de cartas, além de ser facilmente acessível, é uma importante ferramenta no estudo da Teoria da Probabilidade capaz de proporcionar um melhor entendimento do assunto. Assim, espera-se que a partir da realização em sala de aula das atividades propostas envolvendo a utilização e manipulação de cartas de baralho e o jogo de Pôquer seja possível promover aulas mais ricas e prazerosas na educação básica.

Acredita-se que o professor dotado de certa criatividade seja capaz de explorar as muitas possibilidades de abordaqens que as atividades apresentadas têm a oferecer para o estudo de probabilidade e, ainda, basear-se nessa sugestão para apresentar e explorar outras atividades que possam contribuir para uma compreensão mais ampla pelos alunos. Também, tem-se o texto deste trabalho como base de conhecimento ao professor do ensino básico.

Agradecimentos

A DEUS, sem o qual nada existiria.
Ao professor Alexandre Celestino pela orientação.
Aos colegas de mestrado pelo convívio, amizade e ajuda.
A minha família pela ajuda e incentivo.
A todos que de alguma forma me ajudaram nesta caminhada.
Por fim, à CAPES, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Alves, M.M.O; *Um estudo sobre jogos de azar*. Dissertação de Mestrado. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de janeiro. 2015.

[2] Brasil. *Orientações Currilares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2006.

[3] Centurión, M.; Jakubovic, J. *Matemática: teoria e contexto, 8º ano*. Manual do Professor. 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

[4] Cramér, H; *Elementos da teoria da probabilidade e algumas de suas aplicações*. São Paulo: Mestre Jou, 1955.

[5] Callegari-Jacques, S. M. *Bioestatística [recurso eletrônico]: princípios e aplicações*. - Dados eletrônicos - Porto Alegre: Artmed, 2007.

[6] Ehlert, S. J.; Bellicanta, L. B. *A Matemática no pôquer: Explorando problemas de probabilidade*. Ciência e Natura, v.37, Ed Especial, PROFMAT, 2015, p.265-277. Disponível em: $https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/14609/pdf$. Acesso em: 09 jan. 2017.

[7] Fraga, R. R. *O Estudo das Loterias: Uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. 2013

[8] Gadelha, A. *Uma Pequena História da Probabilidade*. 2004. Disponível em: $www.mat.ufrgs.br/\sim viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist\_prob\_Gadelha.pdf$. Acesso em: 13 nov. 2015.

[9] Gamerman, D. *A Lei dos Grandes Números*. 2014. Disponível em: $http://www.statpop.com.br/2014/03/lei-dos-grandes-numeros.html$. Acesso em: 22 nov. 2016.

[10] Gianella, R. *Teoria das probabilidades: aleae geometria principia mathematica*. Teoria dos jogos: o futuro administrando o presente. São Paulo: Edições Mandacaru Letra e Arte, 2006.

[11] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A matemática do ensino médio*. volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] Moreira, A. P. M. *Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP : [s.n.], 2015.

[13] Morgado, A. C.; Carvalho, J. B. P.; Carvalho, P. C. P.; Fernandez, P. *Análise combinatória e probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] Nunes, V. A. *A utilização dos jogos lotéricos para o ensino de probabilidade no ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas. Seropédica: UFRRJ, 2015

[15] Prado, J. W. de S. *Noções de Probabilidade por meio de jogos de azar*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas. Feira de Santana: UEFS, 2015

[16] Sá, M. A. A. F. *Análise e resolução de problemas clássicos de probabilidade para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza. Teresina: UFPI, 2015.

[17] Silva, L. P. *Poker: origem e evolução histórica*. EFDeportes, Revista Digital. Buenos Aires. ano 20, n.206, jul. 2015. Disponível em: $http://www.efdeportes.com/efd206/poker-origem-e-evolucao-historica.htm$. Acesso em: 06 nov. 2016.

[18] Viali, L. *Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade*. Disponível em: $euler.mat.ufrgs.br/\sim viali/estatistica/mat2006/material/textos/Hist\_Prob.pdf$. Acesso em: 06 nov. 2016.