UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

- UFSJ -

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

ADRIANO ROBERTO CAPILUPE

São João del-Rei

2017

Adriano Roberto Capilupe

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS: APLICAÇÕES EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO E EM MODELOS POPULACIONAIS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila.

São João del-Rei

2017

Capilupe, Adriano Roberto

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS: SUAS APLICAÇÕES EM CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO E EM MODELOS POPULACIONAIS.

Adriano Roberto Capilupe - 2017. 58 páginas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila.

Dissertação de Mestrado Universidade Federal de São João del-Rei. Departamento de Matemática e Estatística. Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, 2017

1. Equações de Diferenças.

2. Aplicações do conceito de Equações de Diferenças em conteúdos do Ensino Médio.

3. Modelos populacionais da Biomedicina

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a Deus que nunca me deixou perder a fé e a esperança de seguir honradamente meus caminhos. Dedico aos amigos e familiares que acreditaram em mim. Em especial eu divido essa conquista com os amores da minha vida: minhas filhas, Lívia e Duda. Foi olhando pra elas que encontrei as forças que precisava para nunca desistir desse difícil desafio. Meus pais, Wanderley e Aparecida, que sempre me deram a melhor educação que podiam, por sentirem orgulho de mim e por serem anjos em minha vida. Minha irmã, Aline, pelo carinho, amizade e cuidado de uma vida toda. Em especial eu dedico à minha esposa Aline. Essa conquista é nossa! Sozinho eu não seria capaz, foi o seu incentivo, companheirismo e amor que fizeram acreditar que eu sou mais capaz.

Não foi fácil cumprir essa difícil jornada de trabalhar, estudar e ser um pai, filho, irmão, amigo e esposo presente, fiz o melhor que eu podia, e peço desculpa se falhei em alguma delas. Hoje sei que sou muito mais forte. Muito obrigado. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer! Ninguém é nada se não tiver fé, se não tiver amigos, e se não tiver uma família. Eu tenho tudo isso, um Deus que sempre foi mais generoso comigo, nem sei se mereço tanto. Tenho os melhores amigos e melhor família que alguém pode ter.

Muitos acompanharam as minhas aflições e angústias, mas poucos sabem o quanto foi realmente muito difícil chegar ao final desse curso. Não é fácil cumprir uma jornada de quarenta aulas semanais e ter tempo e disposição para um curso de mestrado, enfrentar estrada toda semana, às vezes debaixo de chuva, deixar minha filha ainda muito pequena que precisava mais da minha atenção. Uma das melhores coisas que esse curso me trouxe foram as treze novas amizades que fiz: Danila, Eliane, Expedito, Lilian, PH, Robson, Samir e em especial Luiz e Andrea, foi uma honra conhecer duas pessoas que passei a admirar profundamente e gostaria de nunca perder o contato. Lívia, Thiago, Jéssica e Wagner, foi muito bom reencontrar vocês na mesma UFSJ, que possamos nos reunir para mais momentos de alegrias e menos aflições de aula, prova, Exame de Qualificação e Dissertação.

Aproveito para agradecer à querida Marianna, que foi muito mais que uma professora, foi um anjo que com toda sua competência nunca nos abandonou. Muito Obrigado!

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Andrés Julca Avila. Obrigado pela paciência e por compreender minhas dificuldades.

Não posso me esquecer da minha amiga de sempre, Edna, que me incentivou a fazer o exame de aceso ao curso e por me emprestar seu material tão bem organizado.

Agradeço aos amigos da Família Desafio e Família Salesianas, não posso citar todos, mas alguns acompanharam mais de perto as minhas preocupações. O meu muito obrigado às minhas diretoras, orientadoras, coordenadoras, psicóloga, meus amigos professores e todos os funcionários. Espero que meu mau humor nunca tenha chegado até vocês.

Quero deixar um agradecimento especial aos meus alunos. Ser professor por vocação é raro nos dias de hoje, mas faço isso com muito prazer! É por vocês, que tanto me ensinam, que estou me qualificando. Obrigado por fazerem parte dos meus objetivos de vida.

Agradeço aos meus familiares, em especial uma grande incentivadora da minha vida profissional, sempre com seu jeito doce e carinhoso, Tia Márcia, essa conquista também é pra você!

Meus amigos, em especial aos “Friends” vocês foram os que mais acompanharam minha rotina nos últimos dois anos e merecem minha gratidão.

Por último e mais importante, agradeço mais uma vez as pessoas que estão sempre ao meu lado. Preciso dizer a vocês:

- Pai, você é a melhor pessoa desse mundo, quero ser um dia, pelo menos um pouco do que você representa. Obrigado por fazer o impossível por mim e minhas meninas.

- Mãe, desculpa por todas as vezes que peguei estrada pra estudar e te deixei preocupada. Obrigado por viver por nós e cuidar de tudo. Amo você!

- Minha irmã querida, obrigado por sempre ter me incentivado e por me achar sempre mais inteligente do que sou, isso me deixa mais confiante.

- Dudinha, você é um presente para mim, tenho muito orgulho da pessoa linda que você é. Espero ser pra você uma referência de confiança e amor. Obrigado pelo carinho infinito.

- Livinha, um dia eu vou te contar que quando você era bem pequena e ficava em casa chorando eu também chorava por não poder dar toda a atenção que precisava naquele momento, doía em mim, mas estava pensando no seu futuro! Obrigado por me ensinar a amar!

- Meu amor, Aline. Nem sei por onde começar. Obrigado por ser a companheira de uma vida, por todo amor, por acreditar em mim e por me fazer acreditar. Minha maior força vem de você. Sei que cada dia me torno uma pessoa melhor e você é a responsável!

Peço perdão se, na ansiedade de entregar esse trabalho eu deixei de agradecer devidamente alguém. Mesmo não sendo citado, agradeço muito a todos que convivem comigo e que torceram e torcem por mim.

Muito obrigado!

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os conceitos, definições, classificação e aplicações das Equações de Diferenças. Estas equações apresentam características similares com as Equações Diferenciais Ordinárias, com a diferença que, em vez, de utilizar variáveis contínuas utilizam-se variáveis discretas. São aplicadas em alguns conteúdos do Ensino Médio, principalmente, em exercícios que são utilizados regularmente, mas com outra visão, dando-lhe ao aluno uma nova possibilidade de conhecimento. Também, são aplicadas a problemas que estão presentes na Biomatemática, em modelos que tratam de variações populacionais e como elas podem ser usadas no conhecimento das características de modelos de crescimento tumoral.

Palavras-chave: Equações de diferenças, Ensino Médio, Funções, Sequências, Matemática Financeira, Exponenciais e Logarítmos, Modelo Tumoral, Modelo de Ricker, Modelo de Gompertz, Modelo de Verhulst (Modelo Logístico Discreto).

ABSTRACT

In this work we present the concepts, definitions, classification and applications of Differences Equations. These equations have similar characteristics with the Ordinary Differential Equations, with the difference that, instead of using continuous variables, discrete variables are used. They are applied in some contents of High School, mainly in exercises that are used regularly, but with another vision, giving the student a new possibility of knowledge. Also, they are applied to problems that are present in Biomathematics, models that deal with population variations and how they can be used in the knowledge of the characteristics of tumor growth models.

Key words: Difference Equations, Secondary Education, Functions, Sequences, Financial Mathematics, Exponential and Logarithms, Tumor Model, Ricker Model, Gompertz Model, Verhulst Model (Discrete Logistic Model).

LISTA DE GRÁFICOS E FIGURAS

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

UFSJ – Universidade Federal de São João Del Rei.

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

INCA – Instituto Nacional de Câncer José Alencar Gomes da Silva

UICC - International Union Against Cancer

$\mathbb{R}$ – Conjunto dos números Reais.

$\mathbb{N}$ – Conjunto dos números Naturais.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{Z}_-$ – Conjunto dos números Inteiros não negativos.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Podemos dizer de uma forma bem simples que uma Equação de Diferenças é uma relação entre valores de uma função, onde o valor atual depende de um valor obtido anteriormente. Por exemplo, uma aplicação financeira rende no último dia de cada mês um valor que corresponde a certa porcentagem fixa do valor que se tinha no último dia do mês passado. Em notação matemática:

$$M(t) = rM(t-1)$$

onde $M(t)$ é o montante obtido ao final do mês t, o valor r representa o valor da taxa de rendimento e $M(t-1)$ corresponde o montante obtido ao final do mês anterior. Sendo dado também um valor inicial, que no caso, desse exemplo, é conhecido como um capital inicial $M(0) = C_0$.

As equações de diferenças possuem aplicações nas mais diversas áreas da ciência e das engenharias, sendo representadas, de forma geral, pela seguinte equação:

$$x(n+1) = f\left(x(n)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

onde x e f são funções reais. Seu conceito já vem sendo trabalhado há muito tempo. Em 1202 o matemático italiano Leonardo Fibonacci desenvolveu uma sequência conhecida como Sequência de Fibonacci. Esta sequência consiste em que os dois primeiros termos são iguais a 1, e cada termo geral da sequência é igual à soma dos seus dois antecessores mais próximos. Essa ideia de desenvolver uma sequência a partir de elementos anteriores pode ser aplicada, principalmente, em fenômenos que descrevem diferentes comportamentos ao longo do tempo. As variáveis envolvidas devem ser interpretadas com uma variável discreta (valores inteiros). Por exemplo, se estudamos o efeito de um medicamento no organismo, então a variável temporal pode ser dada em minutos ou horas. Se acompanharmos o rendimento de um investimento bancário o tempo pode ser dado em meses ou anos.

O objetivo inicial do nosso trabalho é definir alguns conceitos preliminares que levam a definição principal do conceito de Equações de Diferenças. Trabalharemos seus conceitos, classificações, soluções e aplicações como os sistemas dinâmicos discretos, este último, estão mais relacionado a aspectos geométricos e topológicos. O objetivo principal, desse trabalho, é apresentar suas aplicações na educação básica – mais especificamente no ensino médio. É muito interessante perceber a quantidade de conteúdos ensinados nos anos finais do ensino regular de matemática que podem ser abordados de forma que se encaixem de maneira simples no conceito do nosso tema principal. O intuito é então, apresentar aos alunos de forma simples e clara, na linguagem e notação que estão acostumados, o conceito de se trabalhar as equações de diferenças. A ideia é de trabalhar conceitos como funções, sequências, problemas de movimentações financeiras, exponenciais, etc. E através de exemplos vamos mostrar que alguns exercícios podem ser adaptados para que o conceito das equações de diferenças se encaixe melhor e em outros casos podemos resolver de duas formas distintas o mesmo exercício.

Outro ponto importante que destacaremos são as aplicações em questões que envolvem conceitos da área de ciências biológicas e da saúde. Usar a modelagem matemática para entender o crescimento populacional, em especial ao crescimento de células pode ajudar e muito no tratamento de uma doença que têm alcançado cada vez mais um número maior de vítimas. O câncer é uma doença que precisa de tratamento rápido e específico para cada tipo. Compreender o crescimento de um tumor ajuda nesse sentido, e uma ferramenta fundamental é a modelagem matemática que pode ser obtida, também, através das equações de diferenças.

Apresentaremos, de forma simples, alguns modelos de crescimento populacional conhecidos na biologia que podem ser trabalhados com essas equações, como por exemplo, os modelos de Ricker, Gompertz e de P. F. Verhulst (Modelo Logístico).

Vamos então apresentar os conceitos e definições sobre o tema, com o objetivo de que eles possam ser trabalhados no ensino básico e compreender suas aplicações e contribuições em modelos matemáticos importantes.

2. DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Nesse capítulo descreveremos os resultados mais importantes que nos ajudarão a entender o tema principal desse trabalho.

2.1 Funções

Definição 2.1 (Função)

Sejam A e B dois conjuntos, não vazios. Uma relação f de A em B recebe o nome de função se, a todo elemento de A lhe corresponde um único elemento em B, ou seja,

$$\forall a,b \in A,\ a = b \ \Rightarrow\ f(a) = f(b)$$

Observação 2.1

a) O conjunto A é chamado Domínio da função (denotado por D_f), e B é chamado Contradomínio da função.

b) A imagem de f, denotada por, $\operatorname{Im}(f)$, é definida por

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B :\ \exists x \in A,\ y = f(x)\} \tag{1}$$

c) Em nosso estudo de funções, fica estabelecido que tanto o domínio quanto o contradomínio da função serão subconjuntos de números reais.

Definição 2.2 (Função Composta)

Dados os conjuntos A, B e C, e as seguintes funções: $f : A \to B$, $g : B \to C$ tal que $\operatorname{Im}(f) \subset D_g$. Chama-se função composta de g e f, denotada por $g \circ f$, a função $h : A \to C$ tal que, $h(x) = \left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right)$ para todo $x \in A$.

Observações 2.2 (Notações e ilustrações baseadas em [4]).

a) A função composta $g \circ f$ (lê-se *“g bola f”*) é representada na Figura 2.1.

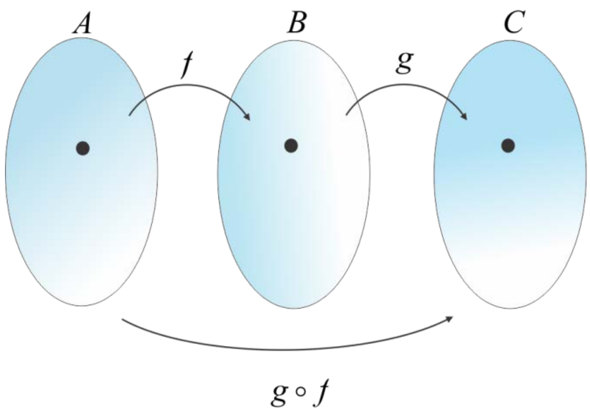

Figura 2.1. Diagrama da função composta.

b) Usaremos algumas vezes a notação:

$$f^2(x) \text{ para representar } f(f(x))$$

$$f^3(x) \text{ para representar } f(f(f(x)))$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) \text{ para representar } \underbrace{f(f(...(f(x))...))}_{n-vezes}$$

2.2 Limite e Derivada de uma Função

Seja f uma função que está definida próxima à um valor x_0. (Isso significa que f é definida em algum intervalo aberto que contenha x_0, exceto possivelmente no próprio x_0.) Então escrevemos, segundo [10],

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{2}$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ é igual a L quando x tende a x_0. E se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quando quisermos), tornando x suficientemente próximo de x_0 (por ambos os lados de x_0), mas não igual a x_0.

Definição 2.3 (Ponto de Acumulação) Seja $X \subset \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, se

$$\forall \varepsilon > 0,\ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \left(X - \{x_0\} \right) \neq \varnothing \tag{3}$$

Definição 2.4 (Limite de uma Função) Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Definimos o limite de uma função por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \to\ |f(x) - L| < \varepsilon \tag{4}$$

Definição 2.5 (Derivada de uma Função)

Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in X$ um ponto de acumulação de X. Definimos a derivada de f em x_0, denotado por $f'(x_0)$, por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5}$$

quando o limite existir e for finito. Se f admite derivada em x_0, então dizemos que f é derivável ou diferenciável em x_0.

2.3 Tempo Contínuo e Discreto

Em uma função a variável independente, em geral, é um número real, nesse caso dizemos que essa variável é contínua, por causa da natureza do conjunto dos números reais. Por exemplo, se essa variável for o tempo dizemos que o tempo é contínuo. Assim, quando a variável independente for contínua o limite de uma função tem sentido. Quando a variável independente é um número inteiro, dizemos que essa variável é discreta. Por exemplo, se o tempo assume apenas valores inteiros dizemos que o tempo é discreto. Desse modo o conceito de limite de uma função perde sentido, a derivada perde sua aplicabilidade e o padrão de mudanças da variável dependente é descrito pelas chamadas diferenças.

2.4 Função Discreta

Definição 2.6 (Função Discreta) Dizemos que toda função real x definida no conjunto dos números naturais é chamada função discreta. Simbolicamente,

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x(n) \end{aligned}$$

2.5 Equação Diferencial Ordinária – EDO

Definição 2.7 (EDO) Seja $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto. Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem n é definida pela seguinte relação:

$$F\left(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{6}$$

A equação (6) estabelece uma relação entre a função incógnita $f(t)$, a variável independente t e as derivadas de f até ordem n.

2.6 Método Iterativo

Um método é chamado iterativo quando toda vez que se deseje calcular o próximo passo, precisa-se do anterior ou dos anteriores.

Cada passo do Método Iterativo chama-se de iteração. O termo iteração é sinônimo de repetição. Na álgebra, é o processo de estabelecer funções, ou equações mediante operações em que sucessivamente o objeto de cada uma é o resultado da que a precede.

3. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Neste capítulo descreveremos as equações de diferenças, sua relação com Sistemas Dinâmicos Discretos, a classificação dessas equações, algumas formas de resolução e aplicações com exemplos.

Observação 3.1. A sigla ED refere-se à "Equação de Diferenças".

3.1 Equações de Diferenças

As equações de diferenças, de forma geral, descrevem a evolução de certos fenômenos ao longo do tempo e isso não acontece de forma contínua como nas equações diferencias, ou seja, a variável independente passa a ser discreta. Como já foi dito, o conceito de derivada perde sua aplicabilidade e o padrão de mudanças da variável dependente é descrito pelas chamadas diferenças.

Por exemplo, uma aplicação financeira, tem montantes durante períodos discretos de tempo, como dias, meses ou anos. O montante $x(n+1)$ obtido na $(n+1)-$ésima etapa é uma função do montante $x\left(n\right)$ obtido na $n-$ésima etapa. Essa situação pode ser expressa como uma equação de diferenças:

$$x(n+1) = f\left(x(n)\right) \tag{7}$$

De uma forma mais prática, podemos olhar esse problema de outro ponto de vista, estabelecendo valores numéricos.

Partindo de um valor Capital inicial de $R\$\,1000,00$ com juros compostos de 5% ao mês. Podemos gerar uma sequência com os montantes obtidos ao final de cada mês.

$$R\$1000,00 \;\;;\;\; R\$1050,00 \;\;;\;\; R\$1002,50 \;\;;\;\; R\$1157,625 \;\;;\;\; ...$$

Considerando a função $f(x)=1,05x$. Obtemos a sequência acima através de composições da função f. Veja:

$$\text{Valor inicial: } 1000.$$

$$\text{Após o 1º mês: } f\left(1000\right)=1,05\cdot\left(1000\right)=1050$$

$$\text{Após o 2º mês: } f\left(f\left(1000\right)\right)=f\left(1050\right)=1,05\cdot\left(1050\right)=1102,5$$

Após o 3º mês: $f\left(f\left(f\left(1000\right)\right)\right)=f\left(f\left(1050\right)\right)=f\left(1102,5\right)=1,05\cdot 1102,5=1157,625$ e, assim por diante.

De forma geral, partindo de um valor inicial x_0 pode-se gerar uma sequência:

$$x_0 \quad ; \quad f\left(x_0\right) \quad ; \quad f\left(f\left(x_0\right)\right) \quad ; \quad f\left(f\left(f\left(x_0\right)\right)\right) \quad ; \ldots$$

Que também pode ser representado em outra notação:

$$x_0 \quad ; \quad f\left(x_0\right) \quad ; \quad f^2\left(x_0\right) \quad ; \quad f^3\left(x_0\right) \quad ; \ldots$$

$f(x_0)$ é a primeira iteração de x_0 pela função f, $f^2(x_0)$ é a segunda iteração de x_0 pela função f, e assim por diante.

Definição 3.1 (Equações de Diferenças) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real. Para todo $n\in\mathbb{N}$, definimos uma equação de diferenças, como

$$x(n+1)=f\left(x(n)\right) \tag{8}$$

onde, x é uma função discreta.

Dado $x_0\in\mathbb{R}$. Considere a condição inicial da ED (8) dado por $x(0)=x_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
&n=0: && x(1)=f\left(x(0)\right)=f(x_0)\\
&n=1: && x(2)=f\left(x(1)\right)=f\left(f(x_0)\right)=\left(f\circ f\right)(x_0)=f^2(x_0)\\
&n=2: && x(3)=f\left(x(2)\right)=f\left(f^2(x_0)\right)=\left(f\circ f^2\right)(x_0)=f^3(x_0)\\
&\vdots\\
&n=k-1: && x(k)=f\left(x(k-1)\right)=f\left(f^{k-1}(x_0)\right)=\left(f\circ f^{k-1}\right)(x_0)=f^k(x_0)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, a solução de (8), é dada por

$$x(n)=f^n\left(x_0\right) \tag{9}$$

Note que a solução (9) depende da $n-ésima$ composição de f e da condição inicial.

Exemplo 3.1 Considere a seguinte ED: $x(n+1)=x^2(n)$ com condição inicial $x(0)=x_0$. A solução é obtida do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
&n = 0: && x(1) = f\left(x(0)\right) = f(x_0) = x_0^2 = x_0^{2^1}\\
&n = 1: && x(2) = f\left(x(1)\right) = f\left(x_0^{2^1}\right) = x_0^{2^1 2} = x_0^{2^2}\\
&n = 2: && x(3) = f\left(x(2)\right) = f\left(x_0^{2^2}\right) = x_0^{2^2 2} = x_0^{2^3}\\
&\vdots && \\
&n = k-1: && x(k) = f\left(x(k-1)\right) = f\left(x_0^{2^{k-1}}\right) = x_0^{2^{k-1} 2} = x_0^{2^k}\\
&\vdots &&
\end{aligned}
$$

Assim, a solução é

$$x(n) = x_0^{2^n}.$$

3.2 Sistemas Dinâmicos Discretos

Em geral, os sistemas dinâmicos estudam as soluções de equações diferenciais que evoluem no tempo, qualquer que seja sua natureza, por exemplo, sistemas físicos, biológicos, químicos, sociais, econômicos, etc. Quando a evolução é descrita (modelada) em intervalos de tempo discretos são chamados sistemas dinâmicos discretos. As equações de diferenças são consideradas um caso particular destes sistemas.

Processos iterativos da função f em relação a um valor inicial x_0 é um exemplo de Sistema Dinâmico Discreto, que é um sistema para o qual queremos saber o seu estado durante uma sequência de tempos discretos. Provavelmente o estado do sistema muda em forma discreta no final de cada intervalo, mas também é possível que o estado mude continuamente, mas só estamos interessados em saber o estado no início de cada intervalo. O estado de um sistema discreto, em uma dimensão, é determinado completamente por um valor x_0. Os valores da variável de estado nos instantes $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ será uma sequência

$$\{x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2,\ \ldots\} \tag{10}$$

O intervalo de tempo entre dois instantes sucessivos t_n e t_{n+1} é $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ e pode não ser constante.

Assim, partindo do instante inicial $t_0 = 0$: $x(0)$ temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_n) \end{aligned} \tag{11}$$

A equação (11) pode ser reescrita por $x(n+1) = f\left(x(n)\right)$ que é uma equação de diferenças conforme já citada em (8).

Observação 3.2.

Sistemas dinâmicos discretos e equações de diferenças estão intimamente ligados, o primeiro termo está mais relacionado a aspectos geométricos e topológicos, já as equações de diferenças referem-se à teoria analítica, [1].

3.3 Equação de Diferenças Autônomas e Não-Autônomas

Note que o lado direito de (8) não depende explicitamente da variável *n*. A equação de diferenças (8) é chamada de *equação de diferenças autônoma*, pois representa um fenômeno conhecido como tempo-invariante. Vamos analisar agora uma situação em que a função f, em (8), pode ser substituída por uma função g de duas variáveis. Essa equação é chamada de ED não-autônoma ou tempo-variante.

Definição 3.2 (Equação de Diferenças Não-Autônoma) Seja g uma função real de duas variáveis, cujo domínio é o produto cartesiano do conjunto dos Números Naturais com o conjunto dos Números Reais, ou seja,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (n, x) &\mapsto g(n, x) \end{aligned}$$

Definimos a equação de diferenças não-autônoma por,

$$x\left(n+1\right) = g\left(n, x\left(n\right)\right) \tag{12}$$

onde x é uma função discreta.

Observação 3.3.

De acordo com [1], o estudo de ED não-autônomas é mais complexo que as ED autônomas. Porém, quando fixamos o valor para n, em (12), ela pode ser comparada com a equação de diferenças, dada em (8).

3.3.1 Solução de uma ED não-Autônoma

Vejamos uma solução para a equação (12):

Para $n_0 \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ considere a seguinte condição inicial $x(n_0) = x_0$. Agora, para todo $n \geq n_0$ existe uma única solução $x(n)$ para (12). Como x_0 e n_0 são valores constantes é equivalente a dizer que essa única solução pode ser escrita na forma $x(n, n_0, x_0)$. Ou seja, $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$ (onde o símbolo $\equiv$ indica notação). Da mesma forma temos $x(n_0, n_0, x_0) \equiv x(n_0) = x_0$.

Agora,

$$\begin{aligned} x(n_0+1) \equiv x(n_0+1, n_0, x_0) &= g\left(n_0, x(n_0)\right) \\ &= g(n_0, x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n_0+2) \equiv x(n_0+2, n_0, x_0) &= g\left(n_0+1, x(n_0+1)\right) \\ &= g\left(n_0+1, g(n_0, x_0)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n_0+3) \equiv x(n_0+3, n_0, x_0) &= g\left(n_0+2, x(n_0+2)\right) \\ &= g(n_0+2, g\left(n_0+1, g(n_0, x_0)\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Continuando o processo, concluímos que a solução da ED não-autônoma deve ser:

$$x(n) \equiv x(n, n_0, x_0) = g\left[n-1, g\left(n-2, g\left(n-3, \ldots, g(n_0, x_0)\right)\right)\right] \tag{13}$$

Se $n_0 = 0$, temos $x(0) = x_0$ e,

$$x(n) \equiv x(n, x_0) = g\left[n-1, g\left(n-2, g\left(n-3, \ldots, g(0, x_0)\right)\right)\right]$$

Exemplo 3.2 Considere a seguinte ED não-autônoma: $x(n+1)=x(n)+n$ com condição inicial $x(0)=x_0$. A solução é obtida do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
n=0: &\quad x(1)=g\left(0,x(0)\right)=g(0,x_0)=x_0+0\\
n=1: &\quad x(2)=g\left(1,x(1)\right)=g\left(1,x_0\right)=x_0+1\\
n=2: &\quad x(3)=g\left(2,x(2)\right)=g\left(2,x_0+1\right)=x_0+1+2\\
n=3: &\quad x(4)=g\left(3,x(3)\right)=g\left(3,x_0+1+2\right)=x_0+1+2+3\\
&\vdots\\
n=k-1: &\quad x(k)=g\left(k-1,x(k-1)\right)=g\left(k-1,x_0+1+2+...+k-2\right)\\
&\qquad =x_0+1+2+...+(k-2)+(k-1)\\
&\qquad =x_0+\frac{(k-1)k}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Assim, a solução é

$$x(n)=x_0+\frac{(n\text{-}1)n}{2}.$$

3.4 Classificação das Equações de Diferenças

Nesta seção classificaremos as EDs pela ordem.

3.4.1 Equação de Diferenças de Primeira e Segunda Ordem

A seguir, definiremos uma ED de primeira e segunda ordem.

Definição 3.3 (ED de Primeira Ordem). Dados $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0\in\mathbb{R}$. Uma equação de diferenças de 1ª ordem é do tipo

$$\begin{cases} x(n+1)=F\left(x(n)\right)\\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{14}$$

Desta forma, uma equação de diferenças de primeira ordem e uma sequência dada por uma fórmula de recorrência, onde cada termo $x(n+1)$ depende apenas do anterior $x(n)$.

Definição 3.4 (ED de Segunda Ordem). Dados $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $x_0,x_1\in\mathbb{R}$. Uma equação de diferenças de 2ª ordem é do tipo

$$\begin{cases} x(n+2) = F\left(x(n+1), x(n)\right) \\ x(0) = x_0,\ x(1) = x_1 \end{cases} \tag{15}$$

Desta forma, uma equação de diferenças de segunda ordem e uma sequência dada por uma fórmula de recorrência, onde cada termo $x(n+2)$ depende dos anteriores $x(n+1)$ e $x(n)$ com valores iniciais $x(0)$ e $x(1)$ dados.

3.5 Equações de Diferenças de Primeira Ordem Lineares

A linearidade de uma ED de primeira ordem depende de como está definido a função F em (14).

Definição 3.5 (ED de Primeira Ordem Linear). Uma ED de primeira ordem linear é definida por

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n) \tag{16}$$

onde o coeficiente $a(n)$ é uma função discreta não nula e $g(n)$ uma função discreta.

Definição 3.6 (ED de Primeira Ordem Linear Homogênea). Uma ED de primeira ordem linear é homogênea se

$$x(n+1) = a(n)x(n) \tag{17}$$

onde o coeficiente $a(n)$ é uma função discreta não nula.

Considerando a condição inicial $x(n_0) = x_0$, $n \geq n_0 \geq 0$, e usando um processo de iteração, podemos determinar uma solução para a equação (17):

$$x(n_0) = x_0 \quad (\text{condição inicial})$$

$$x(n_0+1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0$$

$$x(n_0+2) = a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0$$

$$x(n_0+3) = a(n_0+2)x(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0$$

$$\vdots$$

Continuando o processo, concluímos que:

$$x(n) = a(n-1)a(n-2)\ \ldots\ a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0 \tag{18}$$

De forma equivalente:

$$x(n) = x_0 \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \tag{19}$$

Note que a solução de (17) depende do coeficiente a, da condição inicial x_0, de n e, não de x.

Definição 3.7 (ED de Primeira Ordem Linear não Homogênea). Uma ED de primeira ordem não homogênea é dada por

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n) \tag{20}$$

onde o coeficiente $a(n)$ e o termo não homogêneo $g(n)$ são funções discretas não nulas.

Determinaremos agora uma solução para a equação não homogênea associada a (20):

Consideremos a condição inicial $x(n_0) = x_0$, $n \geq n_0 \geq 0$,

$$x(n_0) = x_0$$

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) + g(n_0) \\ &= a(n_0)x_0 + g(n_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)\left[a(n_0)x_0 + g(n_0)\right] + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)x_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n_0+3) &= a(n_0+2)x(n_0+2) + g(n_0+2) \\ &= a(n_0+2)\left[a(n_0+1)a(n_0)x_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1)\right] + g(n_0+2) \\ &= a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0 + a(n_0+2)a(n_0+1)g(n_0) \\ &\quad + a(n_0+2)g(n_0+1) + g(n_0+2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Continuando o processo, concluímos que:

$$\begin{aligned} x(n) = {} & a(n-1)a(n-2)\ldots a(n_0+1)a(n_0)x_0 \\ & +a(n-1)a(n-2)\ldots a(n_0+1)g(n_0) \\ & +a(n-1)a(n-2)\ldots a(n_0+2)g(n_0+1) \\ & +a(n-1)a(n-2)\ldots a(n_0+3)g(n_0+2) \\ & +\ldots \\ & +a(n-1)a(n-2)g(n-3) \\ & +a(n-1)g(n-2) \\ & +g(n-1) \end{aligned}$$

Tomando em conta que $\prod_{i=n}^{n-1} a(i) = 1$, a última expressão é dada, equivalentemente, por

$$x(n) = x_0 \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \tag{21}$$

A fórmula (21) pode ser provada por indução matemática.

Suponha que (21) seja válida para $n = k$. E que para $n = k$ verdadeira implica em $n = k+1$ também verdadeira. Ou seja, vamos mostrar que

$$x(k+1) = x_0 \prod_{i=n_0}^{k} a(i) + \sum_{r=n_0}^{k} \left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i) \right] g(r)$$

De fato, pela Hipótese de indução temos que

$$x(k) = x_0 \prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) \tag{22}$$

e por (20) temos que

$$x(k+1) = a(k)x(k) + g(k) \tag{23}$$

Substituindo (22) em (23), temos

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a(k)\left(x_0 \prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) \right) + g(k) \\ &= x_0 \prod_{i=n_0}^{k} a(i) + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i) \right] g(r) + g(k) \end{aligned}$$

Considerando que $\prod_{i=k+1}^{k} a(i)=1$, temos

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right) g(k) \\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r) + \sum_{i=k}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r) \\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r)
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.5.1 Casos Especiais das ED de Primeira Ordem Lineares

Vamos analisar dois casos especiais da equação linear (16). No primeiro caso consideramos $a(n)$ como uma constante a. No segundo caso consideramos também $g(n)$ como uma constante b.

Vejamos,

$$x(n+1) = ax(n) + g(n) \quad ; \quad x(0) = x_0 \tag{24}$$

$$x(n+1) = ax(n) + b \quad ; \quad x(0) = x_0 \tag{25}$$

Da equação (24) obtemos:

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \\
x(1) &= ax(0) + g(0) = ax_0 + g(0) \\
x(2) &= ax(1) + g(1) \\
&= a\left(ax_0 + g(0)\right) + g(1) \\
&= a^2 x_0 + ag(0) + g(1) \\
x(3) &= ax(2) + g(2) \\
&= a\left(a^2 x_0 + a \cdot g(0) + g(1)\right) + g(2) \\
&= a^3 x_0 + a^2 g(0) + ag(1) + g(2) \\
&\vdots \\
x(n) &= a^n x_0 + a^{n-1} g(0) + a^{n-2} g(1) + \ldots + ag(n-2) + g(n-1)
\end{aligned}$$

Essa última equação pode ser escrita na forma:

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)} g(k) \tag{26}$$

Retomando a equação (25) e relacionando-a à equação (26) temos:

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)} b \\ &= a^n x_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)} \\ &= a^n x_0 + b\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^3 + a^2 + a + 1\right) \end{aligned}$$

De forma equivalente, podemos escrever:

$$x(n) = \begin{cases} a^n x_0 + b\left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right) & \text{se} \quad a \neq 1 \\ x_0 + bn & \text{se} \quad a = 1 \end{cases} \tag{27}$$

3.6 Exercícios que envolvem Equações de Diferenças

Vejamos agora alguns exemplos de resoluções de problemas que envolvem o conceito de Equações de diferenças de acordo com os resultados obtidos acima.

Exercício 3.1

Resolva a equação de diferenças $x(n+1)-(n+1)x(n) = 2^n(n+1)!$ com condição inicial $x(0) = c$.

Solução:

Por se tratar de uma ED primeira ordem linear não homogênea, como foi vista em (20), temos que $a(n) = n+1$ e $g(n) = 2^n(n+1)!$. Segundo (21), temos

$$\begin{aligned} x(n) &= c\left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}(i+1)\right]2^k(k+1)! \\ &= cn! + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}(i+1)\right]2^k(k+1)! = cn! + \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+2)(k+3)\ldots(n)\right]2^k(k+1)! \\ &= cn! + \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n)\right]2^k k! = cn! + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!}2^k k! = cn! + n!\sum_{k=0}^{n-1}2^k \\ &= cn! + n!\frac{1\left(2^n - 1\right)}{2-1} = cn! + n!\left(2^n - 1\right) \\ &= n!\left(c + 2^n - 1\right) \end{aligned}$$

Exercício 3.2

Resolva a equação de diferenças:

$$x(n+1) = x(n) + e^n, \quad x(0) = c$$

Solução:

Trata-se de ED de primeira ordem linear não homogênea com coeficiente constante, onde $a(n) = 1$ e $g(n) = e^n$. Pela equação (26) temos:

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k) \\ &= 1c + \sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-k-1} e^k = c + \sum_{k=0}^{n-1} e^k \\ &= c + \frac{(e^n - 1)}{e-1} \end{aligned}$$

Exercício 3.3

Em um laboratório, certa substância é submetida a análise de sua temperatura, em graus Celsius. Seja $T(n)$ a temperatura da substância no $n-ésimo$ intervalo de tempo. A temperatura varia de acordo com uma fração p durante cada intervalo de tempo. Se a temperatura inicial for T_0. Encontrar $T(n)$ e $\lim_{n\to\infty} T(n)$.

Solução:

A temperatura da substância no momento $(n+1)$ é igual a temperatura inicial mais a temperatura no momento n menos a fração p da temperatura no momento n, ou seja,

$$T(n+1) = (1-p)T(n) + T_0 \tag{28}$$

Desse modo temos uma ED de primeira ordem linear não homogênea de coeficiente e termo não homogêneo constantes.

Pela equação (27) temos:

$$T(n) = (1-p)^n T_0 + T_0 \left[\frac{(1-p)^n - 1}{1-p-1} \right]$$

$$= (1-p)^n T_0 + T_0 \left[\frac{1-(1-p)^n}{p} \right] = T_0 \left[\frac{1-(1-p)^n}{p} + (1-p)^n \right] = \frac{T_0}{p} \left[1 - (1-p)^n + p(1-p)^n \right]$$

$$= \frac{T_0}{p} \left[1 - (1-p)(1-p)^n \right]$$

Assim, a solução de (28), é dada por

$$T(n) = \frac{T_0}{p}\left[1-(1-p)^{n+1}\right] \qquad (29)$$

ou, de forma equivalente,

$$T(n) = \frac{T_0}{p} - \frac{T_0}{p}(1-p)^{n+1} \qquad (30)$$

Como $T_0/p > 0$ e $0 < 1-p < 1$ (lembrando que p representa uma fração), temos que

$$\lim_{n\to\infty} T(n) = \frac{T_0}{p} \qquad (31)$$

Exercício 3.4

Refaça o Exercício 3.3 supondo $T_0 = 20°C$ e $p = \dfrac{1}{4}$

Solução:

Substituindo esses valores em (28), temos

$$T(n+1) = \left(1-\frac{1}{4}\right)T(n) + 20, \quad T(0) = 20$$
$$T(n+1) = \left(\frac{3}{4}\right)T(n) + 20$$

Pela equação (29),

$$T(n) = \frac{20}{\frac{1}{4}}\left[1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$
$$= 80\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

Podemos montar uma tabela com os valores para os instantes $0 \le n \le 10$. Veja Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Valores para os instantes $0 \leq n \leq 10$.

n	$T(n)$
0	20°C
1	35°C
2	46,25°C
3	54,69°C
4	61,02°C
5	65,76°C
6	69,32°C
7	71,99°C
8	73,99°C
9	75,49°C
10	76,62°C

Além disso, pela equação (31), $\lim_{n\to\infty} T(n) = \frac{T_0}{p}$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} T(n) = \frac{20}{\frac{1}{4}} = 80$$

A temperatura $T = 80°C$ é chamada temperatura de equilíbrio da substância submetida à experiência.

Exercício 3.5

Uma pessoa toma um empréstimo e ele será pago por uma sequência de parcelas periódicas, por exemplo, pagamentos mensais. Cada uma dessas parcelas pagas é composta pelos juros e pela parte que reduz a dívida total.

Sejam:

$P(n)$ o valor da dívida após o $n-ésimo$ pagamento, $P(n+1)$ o valor da dívida após o $(n+1)-ésimo$ pagamento, P_0 o valor da dívida inicial, r a taxa de juros compostos e $g(n) = T$ o $n-ésimo$ pagamento, ou seja, T valor fixo de cada parcela.

Se o empréstimo for pago em n parcelas iguais, qual seria o valor de cada pagamento mensal?

Solução:

Vamos criar um modelo matemático para representar a situação, onde o valor total da dívida após o $(n+1)-ésimo$ pagamento é igual ao valor total da dívida após o $n-ésimo$ pagamento mais o juros $rP(n)$ ocorrido durante o período $(n+1)$ menos o $n-ésimo$ pagamento $g(n)$. Ou seja,

$$P(n+1) = P(n) + rP(n) - g(n)$$

De forma equivalente:

$$P(n+1) = (1+r)P(n) - g(n), \quad P(0) = P_0 \tag{32}$$

A equação (32) trata-se de uma ED de primeira ordem linear não homogênea de coeficiente constante, onde $a(n) = 1 + r$.

Pela equação (26) temos:

$$P(n) = (1+r)^n P_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-(k+1)} g(k)$$

O pagamento de cada parcela mensal é um valor fixo. Então temos:

$$\begin{aligned} P(n) &= (1+r)^n P_0 - \left[(1+r)^{n-1} g(0) + (1+r)^{n-2} g(1) + \ldots + (1+r) g(n-2) + g(n-1) \right] \\ &= (1+r)^n P_0 - \left[T \left(\frac{(1+r)^n - 1}{1 + r - 1} \right) \right] \\ &= (1+r)^n P_0 - \left(\frac{T}{r} \right) \left[(1+r)^n - 1 \right] \end{aligned}$$

O valor de cada pagamento T é dado por:

Se quisermos que a dívida seja quitada em exatamente n pagamentos, teríamos $P(n) = 0$, então:

$$\begin{aligned} (1+r)^n P_0 - \left(\frac{T}{r} \right) \left[(1+r)^n - 1 \right] &= 0 \\ \left(\frac{T}{r} \right) \left[(1+r)^n - 1 \right] &= (1+r)^n P_0 \\ T \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right) &= rP_0 \end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada parcela é dado por:

$$T = P_0 \left(\frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \right) \tag{33}$$

4. APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NO ENSINO MÉDIO

Apresentaremos exemplos de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula no sentido de propiciar ao aluno uma melhor compreensão acerca dos elementos estruturantes de uma função que definimos na seção anterior. Neste capítulo vamos abordar assuntos discutidos no Ensino Médio que podem facilmente ser trabalhados com outra abordagem, usando as Equações de Diferenças sem que fuja da realidade intelectual do aluno que pertence à esse nível de ensino. Apresentaremos exemplos de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula no sentido de propiciar ao aluno uma melhor compreensão de conceitos que já foram citados nesse trabalho, e estão presentes no conteúdo programático da disciplina *Matemática no Ensino médio*, como por exemplo, funções, sequências, matemática financeira, exponenciais e muitas outras. Alguns desses tópicos serão apresentados com o uso das equações de diferença neste capítulo.

4.1 Como apresentar as ED no Ensino Médio

Deve ser claro estabelecer que o nome equações de diferenças não é sequer citado no ensino médio. A diferença que existe entre os conceitos discreto e contínuo, também é pouco trabalhada. Esse seria um bom assunto para uma introdução ao conteúdo.

4.1.1 Introdução do conceito de ED no Ensino Médio

Uma variável a é dita contínua se pode assumir todos os valores reais intermediários entre os valores discretos da sequência $\{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Por exemplo, se considerarmos a massa corporal de uma ave, e sabendo que esse valor a está entre 0,8 e 4,3 (valores em quilogramas), os valores da massa corporal dessas aves podem ser dados, por exemplo, por $a_1 = 0,8;\ a_2 = 0,956;\ a_3 = 1,41;\ ...;\ a_n = 4,3$. Se a variável b não for contínua, será dita discreta, o que significa que somente pode assumir valores em um conjunto discreto – lembrando que um conjunto é dito discreto quando existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos e o conjunto dos números naturais. Existem situações em que as equações de variáveis discretas, conhecidas como equações de diferenças são mais apropriadas para uma modelagem além de serem mais simples do ponto de vista computacional.

4.1.2 Definição das ED de forma simples

Na linguagem do aluno, uma equação de diferenças pode ser definida da seguinte forma:

As equações de diferenças, de forma geral, descrevem a evolução de certos fenômenos ao longo do tempo e isso não acontece de forma contínua a variável independente passa a ser discreta (valores inteiros). Por exemplo, uma aplicação financeira, tem montantes durante períodos discretos de tempo, como dias, meses ou anos. O montante M_{10} obtido na 10^a etapa é uma função do montante M_9 obtido na 9^a etapa. Essa situação pode ser expressa como uma equação de diferenças:

$$M_{10} = f(M_9) \tag{34}$$

ou de forma geral,

$$M_n = f(M_{n-1}) \tag{35}$$

onde, f é uma função que relaciona o montante obtido no mês n, $n \in \mathbb{N}^*$ com o montante obtido no mês anterior $n-1$. Sendo dada uma condição inicial M_0 como sendo o valor inicial aplicado.

4.2 Aplicações

Veremos agora, com exemplos, como as ED podem ser aplicadas, de forma prática, nos seguintes conteúdos do ensino médio: funções, sequências, matemática financeira, exponenciais e logarítmicas.

4.2.1 Funções

Faremos uma comparação entre um exercício clássico de funções que trabalha no aluno a construção do conceito de função, resolvido dentro do contexto desse aluno, e uma adaptação dele para o uso do conceito de equações de diferenças.

Exemplo 4.1

(Exemplo original retirado do livro do 1º ano do Ensino médio ([6]) sobre o conteúdo "Introdução aos Estudos das Funções").

Todo equipamento: móveis, veículos e instalações de uma empresa sofrem depreciação. Um ar condicionado foi adquirido por uma empresa pelo valor de $R\$\,4.800,00$ *e seu valor diminui* $R\$\,300,00$ *ao ano por depreciação.*

Para compreender a depreciação, observe a Tabela 4.1, na qual se relaciona o número de anos a partir da venda e valor do equipamento.

Tabela 4.1. Número de anos vs. Valor do equipamento (Exemplo 4.1).

Número de anos a partir da venda x	Valor do equipamento y
0	$4800-0\cdot 300=4800$
1	$4800-1\cdot 300=4500$
2	$4800-2\cdot 300=4200$
3	$4800-3\cdot 300=3900$
4	$4800-4\cdot 300=3600$
5	$4800-5\cdot 300=3300$
...	...

A expressão $y=4800-300x$ representa o valor de y do equipamento em função do número x de anos (que não necessariamente tem que ser um valor inteiro) decorridos desde sua compra.

Pode-se determinar, por exemplo, quando o valor do equipamento chegará a zero. Observe:

Para $y=0$, obtém-se:

$$4800-300x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4800=300x \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{4800}{300}=16$$

Em 16 anos o valor do equipamento é zerado, conforme mostra a Figura 4.1.

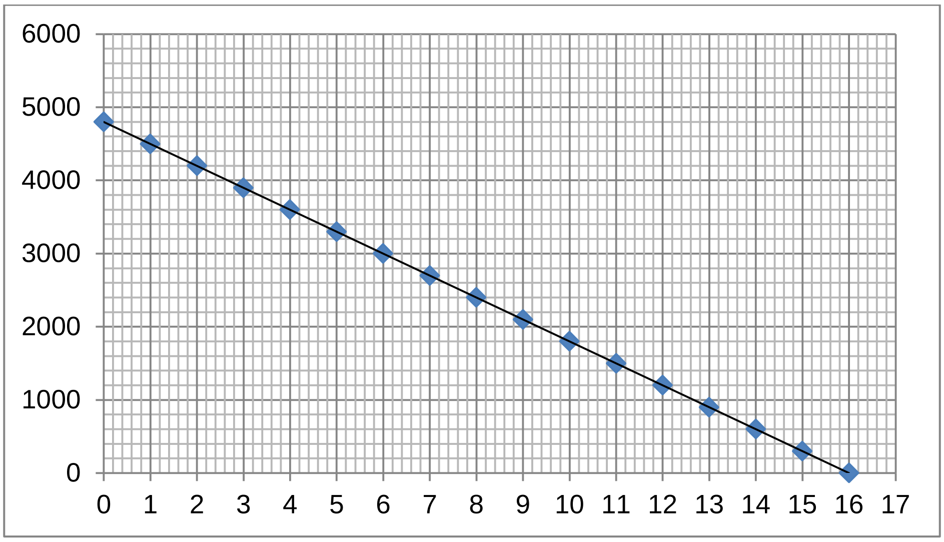

Figura 4.1. Gráfico do Exemplo 4.1.

Exemplo 4.2

(Exemplo adaptado para que o conceito de ED possa ser trabalhado no Ensino Médio).

Todo equipamento: móveis, veículos e instalações de uma empresa sofrem depreciação. Um ar condicionado foi adquirido por uma empresa pelo valor de $R\$4.800,00$ *e seu valor ao final de cada ano diminui* 5% *do valor que era no final do ano anterior. Qual é o valor do equipamento ao final do quinto ano?*

Para compreender a depreciação, observe a Tabela 4.2, na qual se relaciona o número de anos a partir da venda e valor do equipamento.

Tabela 4.2. Número de anos vs. Valor do Equipamento (Exemplo 4.2).

Número de anos a partir da venda x	Valor do equipamento y
0	4800
1	$4800-0,05(4800)=4560$
2	$4560-0,05(4560)=4332$
3	$4332-0,05(4332)=4115,4$
4	$4115,4-0,05(4115,4)=3909,63$
5	$3909,63-0,05(3909,63)=3714,15$
...	...

Uma expressão que representa o valor $y = f(x)$ do equipamento no final de um ano x depende do valor que o equipamento tinha no ano $x-1$. Portanto, usando a notação de função:

$$y = f(x) = f(x-1) - 0,05f(x-1) \quad \text{ou} \quad f(x) = 0,95f(x-1)$$

dado que $x \in \mathbb{N}^*$ e $f(0) = 4800$.

A função $f(x) = 0,95f(x-1)$ pode ser considerada como uma ED linear, homogênea de primeira ordem, como destacamos em (25) dada por $y(n+1) = ay(n) + b$, $y(0) = y_0$, onde $a = 0,95$, $b = 0$ e $y(0) = 4800$ pode ser resolvida de acordo com o resultado obtido em (27) dado por: $y(n) = a^n y_0 + b\left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right)$ e substituindo tempos:

$$y(n) = 0,95^n 4800 + 0$$
$$y(5) = 0,95^5 \cdot 4800 = 3714,15$$

E o valor do equipamento ao final do quinto ano é R$ 3714,15, conforme mostra a Figura 4.2.

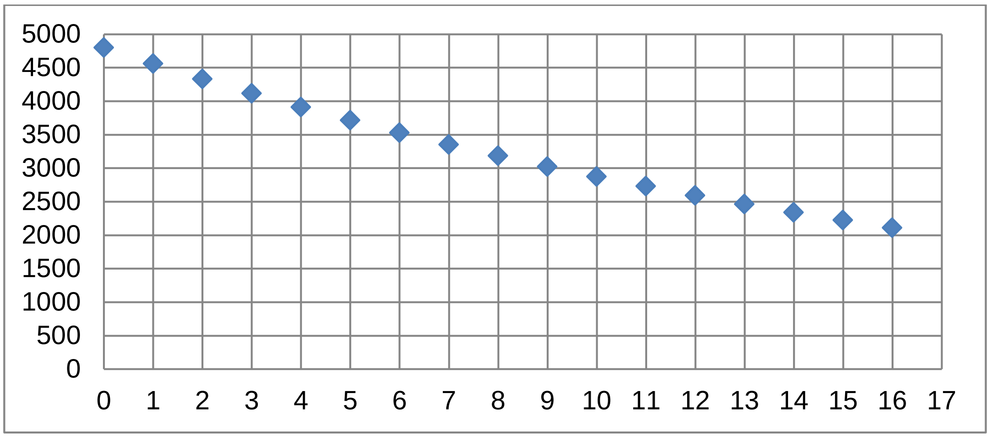

Figura 4.2. Gráfico do Exemplo 4.2.

4.2.2 Sequências

O conteúdo "Sequências" é aprendido, geralmente, no primeiro ano do Ensino Médio. É claramente o conteúdo em que o tema de nosso trabalho mais pode ser explorado. Normalmente esse assunto é dividido em três partes:

A primeira parte é Sequências – que de forma geral, os termos podem ser dados por uma propriedade, ou por uma fórmula de recorrência em que cada termo está em função da posição que ele ocupa na sequência ou em função dos termos anteriores.

A segunda parte são as chamadas Progressões Aritméticas, que são sequências em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a um valor constante, chamado razão.

A terceira parte são as Progressões Geométricas, que são as sequências em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um valor constante, também denominado razão.

Exemplo 4.3

Determine os 10 primeiros termos da sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \qquad\qquad (n \in \mathbb{N};\ n > 2) \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \tag{36}$$

Observamos que Esse exercício pode ser representado por uma ED de segunda ordem, já que um termo de ordem n (para valores naturais maiores que 2) depende de seus dois antecessores mais próximos, ou seja:

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n); \quad x(1) = x(2) = 1 \quad \text{e } n \in \mathbb{N}^*$$

Não trabalhamos as resoluções das ED de segunda ordem, mas esse exemplo pode ser dado ao aluno para que ele saiba classificar uma equação desse tipo, e encontrar os 10 termos pedidos de forma manual e gradativa.

Solução:

Os valores dos dez primeiros termos da sequência (36) são dados na Tabela 4.3 $(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55)$ Essa é parte de uma sequência muito famosa, conhecida como Sequência de Fibonacci [1].

[1] Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, nascido em Pisa em 1170, viveu até o ano de 1250. Na maioria das vezes, conhecido simplesmente como Fibonacci foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático da Europa Cristã medieval. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

Tabela 4.3. Valores da sequência (36).

n	a_n
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 1$
3	$a_3 = a_2 + a_1 = 1+1 = 2$
4	$a_4 = a_3 + a_2 = 2+1 = 3$
5	$a_5 = a_4 + a_3 = 3+2 = 5$
6	$a_6 = a_5 + a_4 = 5+3 = 8$
7	$a_7 = a_6 + a_5 = 8+5 = 13$
8	$a_8 = a_7 + a_6 = 13+8 = 21$
9	$a_9 = a_8 + a_7 = 21+13 = 34$
10	$a_{10} = a_9 + a_8 = 34+21 = 55$

Exemplo 4.4

O Ministro Apressado (Exemplo obtido em [5])

Um rei decidiu distribuir pelos seus ministros, uma grande quantia em moedas de ouro. Esse rei tinha uma estranha ideia de justiça e por isso resolveu distribuir as moedas do seguinte modo:

- para o primeiro ministro, 5 moedas;
- para o segundo, o dobro das moedas do primeiro menos 2 moedas;
- para o terceiro, o dobro das moedas do segundo menos 3 moedas; e assim sucessivamente, de tal modo que cada ministro receberia o dobro do anterior menos o número de moedas igual ao seu número de ordem.

O décimo ministro, ávido de receber a sua parte, quer saber quantas moedas receberá. Será possível saber este valor sem calcular primeiro todos os valores anteriores? Quantas moedas receberá este ministro?

Solução:

Antes de tudo vamos resolver esse problema por dois métodos distintos: o primeiro pela forma por substituição e, o segundo, pelo método de equações de diferenças.

Os termos a_i representarão cada ministro. Sendo $i \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$. A forma de resolução usualmente usada no Ensino Médio para exercícios como este é o método de substituição, ou seja, escrever todos os termos numa tabela, por exemplo, assim como fizemos no Exemplo 4.3 até chegar ao valor pedido do número de moedas do décimo ministro. Esses números são obtidos na Tabela 4.4.

Tabela 4.4. Termos da sequência do Exemplo 4.4

i	a_i
1	$a_1 = 5$
2	$a_2 = 2a_1 - 2 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$
3	$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$
4	$a_4 = 2a_3 - 4 = 2 \cdot 13 - 4 = 22$
5	$a_5 = 2a_4 - 5 = 2 \cdot 22 - 5 = 39$
6	$a_6 = 2a_5 - 6 = 2 \cdot 39 - 6 = 72$
7	$a_7 = 2a_6 - 7 = 2 \cdot 72 - 7 = 137$
8	$a_8 = 2a_7 - 8 = 2 \cdot 137 - 8 = 266$
9	$a_9 = 2a_8 - 9 = 2 \cdot 266 - 9 = 523$
10	$a_{10} = 2a_9 - 10 = 2 \cdot 523 - 10 = 1036$

E, portanto, o décimo ministro receberia 1036 moedas.

Vamos, agora, a resolver o mesmo problema usando equações de diferenças.
Escrevendo alguns termos, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 2a_1 - 2 \\ a_3 &= 2a_2 - 3 \end{aligned}$$

Notamos que o número de moedas recebidas por cada ministro pode ser dado pela seguinte fórmula de recorrência: $a_{n+1} = 2a_n - (n+1)$ com $a_1 = 5$ e $n \in \{1, 2, ..., 9\}$.

Essa equação pode ser comparada a equação (16) que é dada por:

$$y(n+1) = a(n)\,y(n) + g(n)$$

onde, $a(n) = 2$ e $g(n) = -(n+1)$. Uma solução para esse tipo de equação pode ser dado por (21), ou seja,

$$y(n) = y_0 \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r)$$

$$y(10) = 5\prod_{i=1}^{9} 2 + \sum_{r=1}^{9} \left[\prod_{i=r+1}^{9} 2 \right] (-r-1)$$

$$y(10) = 5\cdot 2^9 - 2\cdot 2^8 - 3\cdot 2^7 - 4\cdot 2^6 - 5\cdot 2^5 - 6\cdot 2^4 - 7\cdot 2^3 - 8\cdot 2^2 - 9\cdot 2^1 - 10\cdot 2^0$$

$$y(10) = 1036$$

Portanto, o décimo ministro receberá 1036 moedas, que coincide com o mesmo valor usado pelo método de substituição.

4.2.3 Matemática Financeira

Uma aplicação imediata das equações de diferenças lineares de primeira ordem pode ser encontrada em problemas de capitalização, amortização e financiamento.
De forma geral, os conceitos de juros simples e compostos podem ser dados por:
Considere um capital inicial C_0 aplicado a uma taxa de juros r. Para encontrar o valor do resgate depois de passados k períodos de tempo. Teríamos:

a) Juros Simples: $C_{n+1} = C_n + rC_0$;
b) Juros Composto: $C_{n+1} = C_n + rC_n$.

Exemplo 4.5

Uma pessoa toma um empréstimo de $R\$1000,00$ *e ele será pago por uma sequência de parcelas cinco parcelas mensais iguais. Cada uma dessas parcelas pagas é composta pelos juros e pela parte que reduz a dívida total. Considerando a taxa de juros igual a* 5% ao mês. *Qual é o valor de cada parcela?*

Solução:

A Tabela 4.5 mostra os cálculos do problema desse exemplo.

Tabela 4.5. Tabela dívida vs. Valor de cada parcela.

Dívida inicial	1000
Dívida ao final do 1º mês	$1,05 \cdot 1000$
Dívida após pagar a 1ª parcela T	$1,05 \cdot 1000 - T$
Dívida ao final do 2º mês	$1,05(1,05 \cdot 1000 - T) = 1,05^2 \cdot 1000 - 1,05T$
Dívida após pagar a 2ª parcela T	$1,05^2 \cdot 1000 - 1,05T - T$
Dívida ao final do 3º mês	$1,05(1,05^2 \cdot 1000 - 1,05T - T) = 1,05^3 \cdot 1000 - 1,05^2T - 1,05T$
Dívida após pagar a 3ª parcela T	$1,05^3 \cdot 1000 - 1,05^2T - 1,05T - T$
Dívida ao final do 4º mês	$1,05^4 \cdot 1000 - 1,05^3T - 1,05^2T - 1,05T$
Dívida após pagar a 4ª parcela T	$1,05^4 \cdot 1000 - 1,05^3T - 1,05^2T - 1,05T - T$
Dívida ao final do 5º mês	$1,05^5 \cdot 1000 - 1,05^4T - 1,05^3T - 1,05^2T - 1,05T$

Mas a dívida ao final do 5º mês tem que ser igual ao valor de cada parcela T. Ou seja:

$$1,05^5 \cdot 1000 - 1,05^4T - 1,05^3T - 1,05^2T - 1,05T = T$$

$$1,05^5 \cdot 1000 = T + 1,05^4T + 1,05^3T + 1,05^2T + 1,05T$$

$$1,05^5 \cdot 1000 = T(1,05^4 + 1,05^3 + 1,05^2 + 1,05 + 1)$$

$$1276,28 = 5,525T$$

$$T \cong 230,97$$

Portanto, o valor de cada parcela mensal será aproximadamente $R\$230,97$.

Outra forma seria modelar a situação através de equações de diferenças:

Sejam:

$P(n)$ o valor da dívida após o $n-ésimo$ pagamento, $P(n+1)$ o valor da dívida após o $(n+1)-ésimo$ pagamento, $P_0 = 1000$ o valor da dívida inicial, $g(n)$ o $n-ésimo$ pagamento, $r = 0,05$ a taxa de juros compostos e T valor fixo de cada parcela. Vamos criar um modelo matemático para representar a situação, onde o valor total da dívida após o $(n+1)-ésimo$

pagamento é igual ao valor total da dívida após o $n-ésimo$ pagamento mais o juros $rP(n)$ ocorrido durante o período $(n+1)$ menos o $n-ésimo$ pagamento $g(n)$, ou seja,

$$P(n+1) = P(n) + rP(n) - g(n)$$

De forma equivalente:

$$P(n+1) = (1+r)P(n) - g(n), \quad P(0) = P_0$$

Uma solução para descobrir o valor de T é dado pela fórmula (33), ou seja:

$$T = P_0\left(\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right)$$

$$T = 1000\left(\frac{0,05}{1-(1,05)^{-5}}\right) \cong 230,97$$

Portanto, o valor de cada parcela mensal é aproximadamente $R\$230,97$.

4.2.4 Exponenciais e Logarítmicas

Os problemas de exponenciais e logaritmos são muito utilizados nas situações práticas de vários assuntos diferentes da Física, Química, Biologia, entre outras. Vejamos dois exemplos, o primeiro é um exercício clássico da meia vida de certo material ([14]). O segundo exercício foi a adaptado para que o uso dos conceitos das equações de diferenças possam ser aplicados.

Exemplo 4.6

Datação através do carbono-14 ([14])

Foi observado que a proporção de carbono14 nas plantas e animais é a mesma que a da atmosfera desde que a planta ou o animal esteja vivo. Quando o animal ou a planta morre o carbono-14 dos seus tecidos começa a decrescer segundo uma razão r.

1. A "meia-vida" do material radioativo é o tempo necessário para que metade do material se dissipe. Se a "meia-vida" do carbono-14 é de 5700 *anos, qual é a razão de decrescimento?*

2. Se a quantidade de carbono-14 observada num osso de um animal é 70% *da quantidade original de carbono-14, que idade tem a ossada?*

Solução:

1. Uma função do tipo exponencial é dada por $C(t) = C_0(1-r)^t$, onde C é a massa da substância, C_0 é a massa inicial, r é a taxa de crescimento ou decrescimento e t é o tempo. Como a meia vida do material é de 5700 anos, temos que $\frac{C_0}{2} = C_0(1-r)^{5700}$ e dividindo cada membro por C_0 , obtemos $0,5 = (1-r)^{5700}$ que é equivalente a $r = 1-(0,5)^{\frac{1}{5700}}$.

2. Se a quantidade de carbono-14 é de 70% da original, e utilizando o valor de r, obtido acima, temos que $0,7C_0 = C_0\left\{1-\left[1-(0,5)^{\frac{1}{5700}}\right]\right\}^t$. Dividindo cada membro por C_0 , obtemos $0,7 = [(0,5)^{\frac{1}{5700}}]^t$. Aplicando logaritmo de base 10 aos termos, temos que $\log 0,7 = \frac{t}{5700}\log 0,5$. O valor de t é dado por $t = 5700\frac{\log 0,7}{\log 0,5} \cong 2933$ anos.

Exemplo 4.7

Datação através do carbono-14 (é o mesmo exemplo 4.6, adaptado para o uso das ED em sua resolução).

Foi observada que a proporção de carbono14 nas plantas e animais é a mesma que a da atmosfera desde que a planta ou o animal esteja vivo. Quando o animal ou a planta morre o carbono-14 dos seus tecidos começa a decrescer segundo uma razão r *. Sabendo que a razão* r *é dada por* $1-(0,5)^{\frac{1}{5700}}$ *e a quantidade de carbono-14 observada num osso de um animal é* 70% *da quantidade original de carbono-14, que idade tem a ossada?*

Solução:

Seja $R(n)$ a quantidade de carbono-14 que o osso contém no ano n . A quantidade de carbono-14 nesse ano é igual a quantidade de carbono-14 no ano anterior, ou seja, no ano $n-1$ menos a quantidade referente à razão de decrescimento, ou seja, $R(n) = R(n-1) - rR(n-1) = \left(1-r\right)R(n-1)$. Considerando $R(0) = C_0$ como a quantidade original de carbono-14.

Como a equação $R(n) = \left(1-r\right)R(n-1)$ é linear homogênea de primeira ordem como a apresentada em (25) podemos aplicar a resolução obtida em (27).

Temos então, que

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right) & \text{se} \quad a \neq 1 \\ y_0 + bn & \text{se} \quad a = 1 \end{cases}$$

pode ser dado por:

$$\begin{aligned} R(n) &= (1-r)^n C_0 + 0\left[\frac{(1-r)^n - 1}{1-r-1}\right], \;\; 1-r \neq 1 \\ &= (1-r)^n C_0 \end{aligned}$$

Considerando $R(n) = 0,7C_0$ e $r = 1-(0,5)^{\frac{1}{5700}}$, temos

$$0,7C_0 = \left[1-\left(1-(0,5)^{\frac{1}{5700}}\right)\right]^n C_0$$

Dividindo cada membro por C_0, obtemos $0,7 = [(0,5)^{\frac{1}{5700}}]^n$. Aplicando logaritmo de base 10 aos termos, temos que $\log 0,7 = \left(t/5700\right)\log 0,5$. O valor de t é dado por

$$t = 5700\frac{\log 0,7}{\log 0,5} \cong 2933 \text{ anos}.$$

5. AS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E O COMPORTAMENTO ALGUNS MODELOS BIOLÓGICOS

Vamos analisar agora, como as Equações de Diferenças podem estar presentes em alguns modelos conhecidos e muito estudados nas áreas de Medicina e Biologia. O câncer é uma doença terrível que tem alcançado cada vez mais um número maior de pessoas em todo o mundo, conhecer o comportamento do crescimento de uma célula cancerígena pode ajudar e muito no tratamento. Vamos citar também alguns modelos populacionais que são estudados na Biologia, como o modelo de Ricker, Gompertz , Verhulst e outros.

5.1 Um Modelo Matemático para Prever a Progressão do Câncer

O câncer é responsável por mais de 12% de todas as causas de óbito no mundo: até 2006 mais de sete milhões de pessoas morriam anualmente da doença. A última divulgação estatística do INCA [17] em 2015 apontava projeções de 8,2 milhões de novos casos por ano no mundo para 2016 e 2017. Segundo estes dados, somente no Brasil, o número de novos casos em 2016 chegaria a 596 mil. Como a esperança de vida no planeta tem melhorado gradativamente, a incidência de câncer, estimada em 2002 em 11 milhões de casos novos, alcançará mais de 15 milhões em 2020. Esta previsão, feita em 2005, é da International Union Against Cancer (UICC).

Câncer é o nome dado a um conjunto de mais de 100 doenças que têm em comum o crescimento desordenado de células que invadem os tecidos e órgãos, podendo espalhar-se para outras regiões do corpo. Dividindo-se rapidamente, estas células tendem a ser muito agressivas e incontroláveis, determinando a formação de tumores (acúmulo de células cancerosas). Os diferentes tipos de câncer correspondem aos vários tipos de células do corpo. Outras características que diferenciam os diversos tipos de câncer entre si são a velocidade de multiplicação das células e a capacidade de invadir tecidos e órgãos vizinhos ou distantes (metástases). Um diagnóstico adequado é essencial para o tratamento eficaz, pois cada tipo de câncer requer um tratamento específico.

Entender o crescimento de uma célula cancerígena é de fundamental importância para prever a progressão da doença e realizar um tratamento.

O crescimento de um tumor pode ser descrito por equações diferenciais e por equações de diferenças. Em alguns casos, quando não há sobreposição na população entre cada geração, o mais adequado é o modelo discreto, usando as ED.

Um modelo bem simples para o crescimento de uma única espécie pode ser dado por:

$$T(n+1) = f\left(T(n)\right) \tag{37}$$

que de acordo a (14) é uma ED de primeira ordem. Um caso particular de (37), conhecida como *modelo exponencial ou geométrico*, é uma ED de primeira ordem linear homogênea, onde se usa um parâmetro r, que determina a proporção do tamanho de uma célula no instante n em relação ao seu tamanho no instante anterior $n-1$. Essa ED é dada por:

$$T(n+1) = rT(n) \tag{38}$$

De acordo com a equação (25) podemos aplicar a resolução obtida em (27) . Então,

$$T(n) = \begin{cases} r^n T(0) & \text{se} \quad r \neq 1 \\ T(0) & \text{se} \quad r = 1 \end{cases} \tag{39}$$

e mais, para valores grandes de n, temos $T(n)$ tende ao infinito quando $r > 1$ e tende a 0 quando $r < 1$. Nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3, apresentamos os seguintes casos $r = 2$, $r = 1$ e $r = 0,5$, respectivamente, com a mesma condição inicial $T(0) = 0,001$.

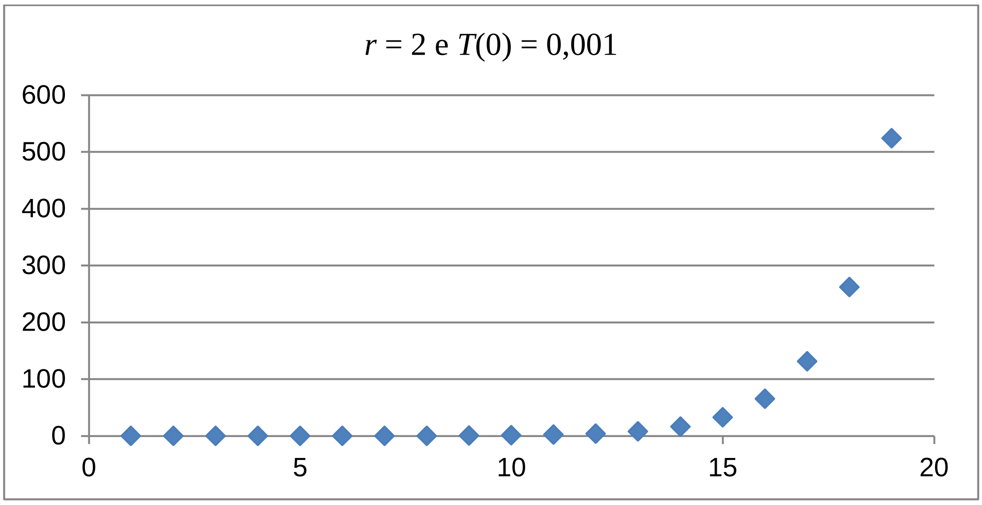

Figura 5.1. Modelo tumoral, $r = 2$; $T(0) = 0,001$.

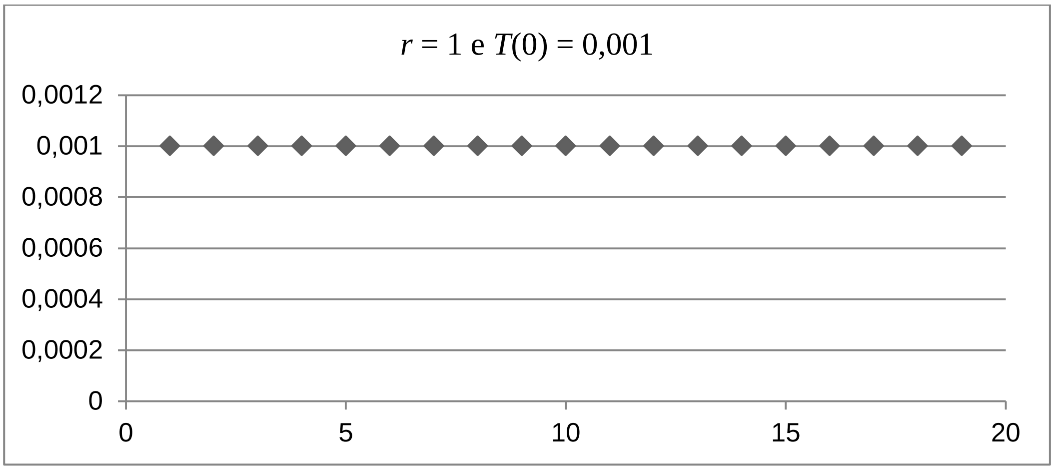

Figura 5.2. Modelo tumoral, $r = 1$; $T(0) = 0,001$.

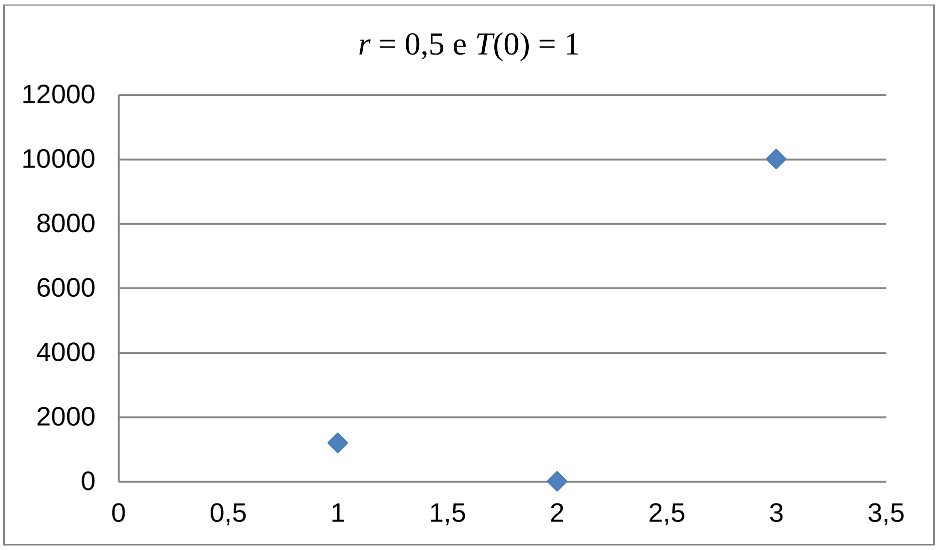

Figura 5.3. Modelo tumoral, $r = 0,5$; $T(0) = 1$.

5.2 Modelo de Ricker

Uma extensão do modelo simples dado por (38) é chamado de modelo de Ricker[2], que inclui uma redução da taxa de crescimento para valores grandes de $T(n)$.

O modelo de Ricker é mais utilizado em questões ecológicas como o aumento ou diminuição numa população de peixes, ou seja, apresenta mais aplicação em fatores ambientais na

[2] O modelo de Ricker foi desenvolvido e aplicado por Ricker em 1954 para descrever o crescimento e reprodução de peixes. Tal modelo também pode ser utilizado para descrever a dinâmica vital de outras espécies em que ocorre competição intraespecífica (entre indivíduos da mesma população). Isso ocorre geralmente entre indivíduos de espécies em que os adultos alimentam-se dos indivíduos mais jovens (canibalismo). Essa mortalidade de indivíduos se agrava para grandes valores da população de adultos.

limitação do crescimento populacional. Existem, no entanto, interações complexas que surgem no seio de uma população. Nos grandes aglomerados populacionais poderá ocorrer uma diminuição da reprodução devido ao aumento do stress ou redução na nutrição (diminuição de nutrientes essenciais). Assim, à medida que a população aumenta a sua taxa de crescimento poderá vir a diminuir. Neste contexto, o modelo de Ricker surge como uma interessante função de reprodução. Por exemplo, em algumas espécies, os adultos alimentam-se das suas crias, desta forma, em populações de adultos demasiado grandes poderão surgir alterações no tamanho populacional. Este fenômeno é ilustrado pelo modelo de Ricker [7], [9]:

$$N(t+1) = N(t)\exp\left[r\left(1-\frac{N(t)}{k}\right)\right], \quad r,k>0 \tag{40}$$

cujos parâmetros positivos k e r representam, respectivamente, a capacidade suporte do meio ambiente e a taxa de crescimento intrínseca da população. Essa ED é de primeira ordem autônoma não linear. A solução dessa ED não é direta por métodos analíticos.

Consegue-se estabelecer o comportamento, mas não a solução, do modelo anterior considerando algumas restrições para os valores de r, k, e $N(0)$. Por exemplo, considerando uma população inicial de 1 indivíduo, ou seja, $N(0)=1$. Além disso, sejam os parâmetros $r=1,05$ e $k=10$. Então, o fenômeno pode ser descrito pela seguinte ED:

$$N(t+1) = N(t)e^{\left[1,05\left(1-\frac{N(t)}{10}\right)\right]} \tag{41}$$

Podemos calcular alguns valores de N para alguns valores de t :

$$\text{para } t=0 \text{ temos: } N(1) = N(0)e^{\left[1,05\left(1-\frac{N(0)}{10}\right)\right]}$$

$$N(1) = e^{\left[1,05\left(1-\frac{1}{10}\right)\right]} = e^{0,945} \cong 2,5728$$

$$\text{para } t=1 \text{ temos: } N(2) = N(1)e^{\left[1,05\left(1-\frac{N(1)}{10}\right)\right]}$$

$$N(2) = 2,5728e^{\left[1,05\left(1-\frac{2,5728}{10}\right)\right]} \cong 5,610$$

Os valores de (41) são apresentados na Tabela 5.1 e na Figura 5.4 os valores plotados.

Tabela 5.1. Valores da equação (41).

t	$N(t)$
0	1
1	2,572561302
2	5,610849983
3	8,895230089
4	9,989194924
5	10,00053325
6	9,999973381
7	10,00000133
8	9,999999934
9	10,00000000331
10	9,99999999984
11	10,00000000001
12	10,00000000000

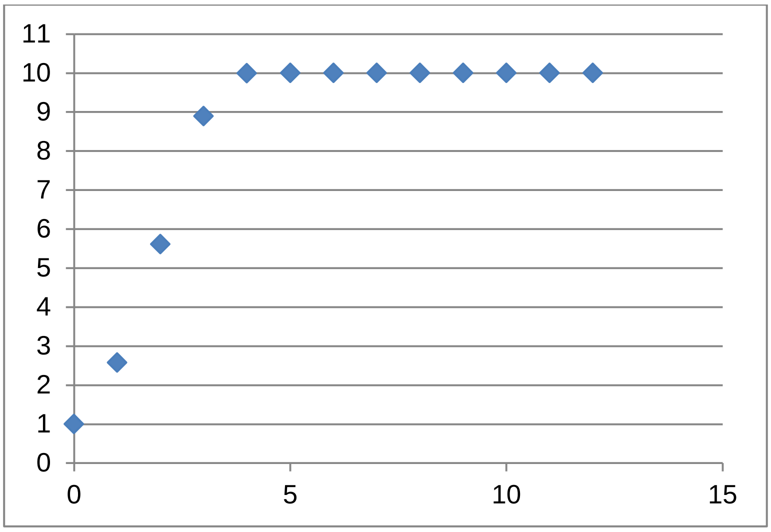

Figura 5.4. Gráfico (Modelo de Ricker).

5.3 Modelo de Gompertz

Um dos modelos mais utilizados na descrição do crescimento de uma única espécie é o Modelo de Gompertz[3]. Em [9] e [19] encontramos a equação diferencial do modelo de Gompertz e, em [2] a ED do modelo de Gompertz. Destes modelos obteve-se a seguinte ED:

[3] Benjamin Gompertz (Londres, 5 de março, 1779 — Londres, 14 de julho de 1865) foi um matemático e atuário judeu, que comprovou que a taxa de mortalidade cresce geometricamente. Gompertz desenvolveu os principais estudos sobre mortalidade do século XIX. Apresentou uma lei que descrevia o crescimento geométrico da taxa de mortalidade.

$$N(t+1) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \tag{42}$$

onde K e r são constantes positivas. Esta ED de primeira ordem autônoma e não linear modela matematicamente o crescimento de determinados tipos de populações. Em especial, o estudo pode ser feito para populações tumorais. Mas especificamente, o parâmetro r é a constante de crescimento populacional e K é a capacidade de carga do ambiente. Podemos considerar, por exemplo, que $N(t)$ é a função que determina a cada instante t, qual é a população de células cancerígenas; r é a constante de crescimento intrínseco dessas células, com $r > 0$ e que K é a maior quantidade de células que um tumor maligno pode atingir com os nutrientes disponíveis, e que se denomina capacidade de carga, portanto $K > 0$.

Conseguimos estabelecer o comportamento do modelo (42) considerando alguns valores para r, K e $N(0)$.

Por exemplo, considerando uma população inicial igual a $N(0) = 10^6$ e os parâmetros $r = 1{,}01$ e $K = 10^9$. Assim, (42) pode ser dada

$$N(t+1) = (1{,}01)N(t)\ln\left(\frac{10^9}{N(t)}\right) \tag{43}$$

Na Tabela 5.2 apresentam-se os diferentes valores de (43), e na Figura 5.5 seu respectivo gráfico. Observa-se na figura o comportamento clássico da letra “s” esticada da solução do modelo de Gompertz.

Tabela 5.2. Valores da equação (42).

t	$N(t+1)$
0	13953,6657
1	157558,7367
2	1393334,3489
3	9254270,5781
4	43768043,5610
5	138313138,1856
6	276352056,4070
7	358964866,1689
8	371448253,0225
9	371540808,1544
10	371539894,0199
11	371539903,1624
12	371539903,0710
13	371539903,0719
14	371539903,0719
15	371539903,0719

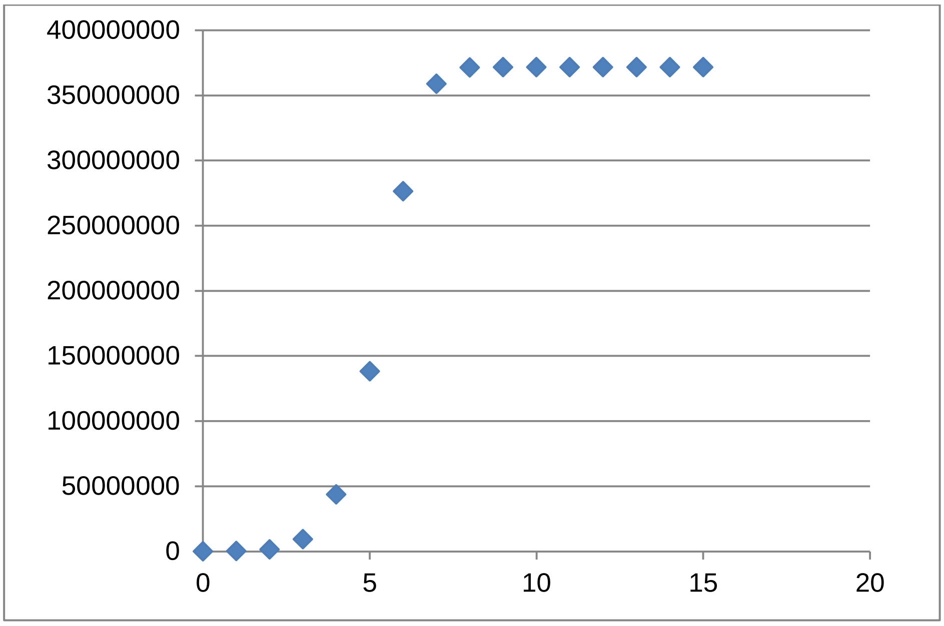

Figura 5.5. Gráfico (Modelo de Gompertz).

5.4 Modelo de Verhulst

O modelo de Verhulst[4] ou modelo logístico foi desenvolvido com as limitações de recursos do século XIX pelo matemático belga Pierre François Verhulst. No modelo logístico, o parâmetro K representa a capacidade de carga de uma população de acordo com os recursos disponíveis. P.F. Verhulst afirmou que a taxa de crescimento r de uma população é proporcional ao tamanho da população e a fração da capacidade de carga não utilizada pela população. O modelo de Verhulst (modelo logístico discreto) é dado por:

$$N(t+1) = rN(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right] \tag{44}$$

A taxa de crescimento r e a capacidade de carga K são valores positivos.

A equação (44) é uma Equação de Diferenças de primeira ordem autônoma não linear, como definida em (8), onde $f\left(N(t)\right) = rN(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right]$.

[4] Pierre François Verhulst (28 de Outubro de 1804, Bruxelas, Bélgica - 15 de Fevereiro de 1849, Bruxelas, Bélgica) foi matemático e doutor na teoria dos números da Universidade de Gante em 1825.

O modelo logístico discreto exibe comportamentos muito diferentes com apenas uma pequena alteração nas condições iniciais e parâmetros.

Vejamos:

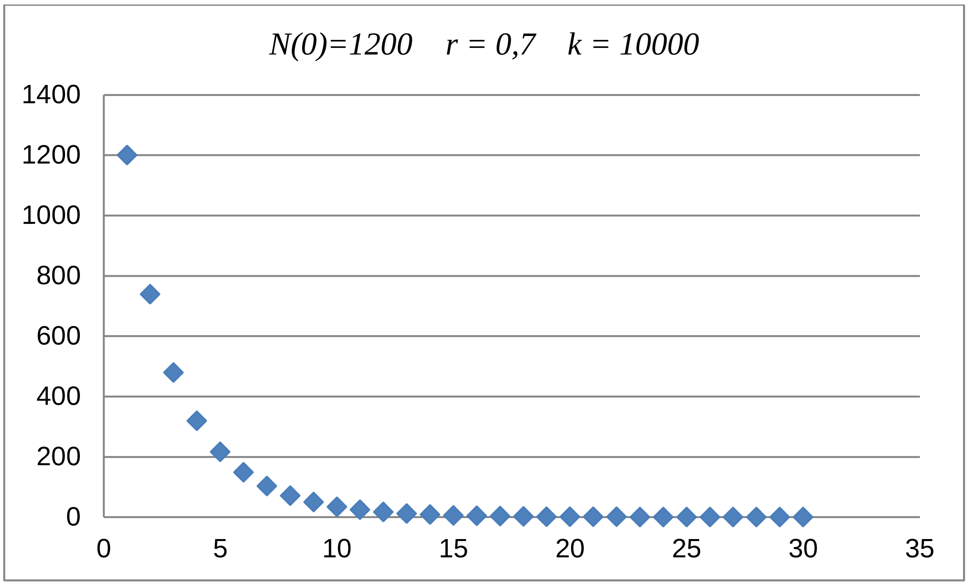

Figura 5.6. Gráfico 1 (Modelo Logístico Discreto).

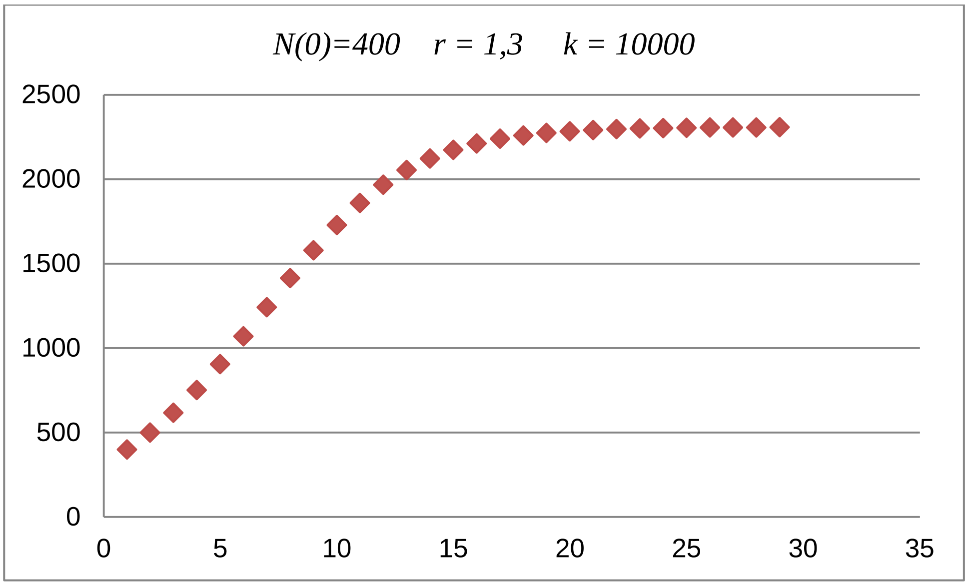

Figura 5.7. Gráfico 2 (Modelo Logístico Discreto).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para percorrer qualquer caminho é necessário ter alguma motivação. Para concluir o curso de Mestrado eu tive que buscar forças e motivações nas pequenas coisas. Tive que sair da chamada “zona de conforto” e relembrar como é ser aluno. Retornei depois de oito anos à mesma universidade que me graduei, reencontrei velhos amigos e professores que ajudaram a construir minha formação. O mais importante foi recordar como podemos aprofundar nos conteúdos da Matemática, de como essa matéria pode ser mais linda, quando se entende melhor suas raízes. O curso de Mestrado me fez lembrar como o rigor matemático é motivador e as dificuldades de outras épocas podem ser sanadas de forma mais rápida com a maturidade adquirida pelo tempo. Em contrapartida, a idade e a responsabilidade do trabalho me fizeram entender que não tenho a mesma energia da época da graduação. Hoje paro para pensar que nada foi fácil, o primeiro ano de curso e suas temíveis provas preparadas pelo IMPA, o sacrificante Exame Nacional de Qualificação e a espera pela sua aprovação. Por fim a escolha do tema para a dissertação. Tive que contar com a paciência do meu orientador na minha insegurança com os temas propostos até a escolha final das “Equações de Diferenças” que acabou me trazendo o prazer em estudar e a vontade de aplicar seus conceitos com meus alunos de Ensino Médio.

6.1 Conclusão

Ressaltamos que o objetivo principal foi buscar um tema que tivesse aplicações básicas nos conteúdos que fazem parte do cotidiano de um professor de Matemática da Educação Básica, em especial aos conceitos ensinados durante o Ensino Médio. A ideia inicial era apresentar o tema Equações de Diferenças desde os conceitos necessários para defini-lo de forma clara e objetiva. Conceitos como o tempo variando de forma contínua e discreta pode ser absorvido de forma simples por esses alunos e aplicados facilmente em exercícios que estão acostumados. A ideia do processo iterativo, muitas vezes é usada por eles sem que percebam, como por exemplo, nas sequências – principalmente as progressões aritméticas e geométricas que são aprendidas muitas vezes de forma superficial, geralmente no primeiro ano do ensino médio. Atualmente, o cálculo diferencial é trabalhado somente nas graduações, mas alguns problemas de equações diferenciais podem ser facilmente adaptados usando o conceito de variável discreta e aplicados para os alunos em questão.

Trabalhar problemas como, por exemplo, uma questão de matemática financeira, apresentado no Capítulo 4 desse trabalho (Exemplo 4.5) pode motivar o aluno a se interessar mais pela matéria, pois trabalha com a realidade de muitos deles. Ao apresentar o referido exemplo é dado ao aluno dois caminhos de resolução, veja Secção 4.2.3. Nas duas formas distintas de resolver o mesmo problema, temos como a primeira opção uma maneira mais algébrica e demorada, usando o recurso de construir resultados mês a mês. Vimos que ela pode ser substituída pela segunda resolução que trabalha o conceito de equações de diferenças de um jeito simples e menos demorado. Além disso, têm a oportunidade de entender que a matemática, como ciência exata, que possui vários caminhos, mas um só destino final e isso é gratificante.

Outro ponto que destacamos é a ideia de trabalhar modelos matemáticos difundidos e aplicados na Biomedicina. É importante entender que esses modelos podem salvar milhares de vidas já que podem prever o crescimento de células cancerígenas e consequentemente pensar no tratamento adequado. Ressaltamos modelos mais simples como o modelo exponencial para o aumento de uma população de células. Esse conceito não envolve nenhum conhecimento profundo e pode ser trabalhado também no ensino básico. Mesmo sem apresentar uma resolução mais trabalhosa, os modelos podem ser plotados em gráficos que deixam mais claro seu comportamento.

Naturalmente os assuntos aqui trabalhados podem ser muito mais aprofundados, mas fica clara a sua importância em questões práticas.

Finalmente, como temos visto, as Equações de Diferenças é um método para resolver problemas da ciência e da engenharia em tempos discretos, mas de uma forma simples utilizando ferramentas algébricas básicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ELAYDE, S. N. **An Introduction to Difference Equations**. 1st edition, New York, Springer International Edition, 1996.

[2] SELVAM, G. M.; DHANALAKSHMI, K. D**ynamic Behavior of a Tumor Growth Model in Discrete System**. International Journal for Innovative Research in Science & Technology, India, V. 3, 2016.

[3] SANTOS, J.P.; CARDOSO, L. C. **Modelo de Gompertz Fracionário**, Revista de Estatística UFOP, V.3, Ouro Preto, 2014.

[4] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 1 – Conjuntos e Funções, 9ª edição São Paulo, Atual Editora, 2013.

[5] PEREIRA, M. V. **Recorrências – Problemas e Aplicações**. 61 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília. 2014.

[6] SANTOS, C. A.; INAFUCO, J. K. **Matemática 1**, 1ª edição, Brasília, Editora Edebe, 2013.

[7] SILVA, A. L.; CARA, E. R., **Um modelo discreto especialmente estruturado para dinâmica populacional.** Anais do 8º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão – Universidade Federal do Pampa. Itaqui, 2016.

[8] ROSA, R. M. S. **Equações Diferenciais**. Apostila – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

[9] CABELLA, B. C. T. **Modelos Aplicados ao Crescimento e Tratamento de Tumores e a Disseminação da Dengue e Tuberculose**. 182 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto. 2012.

[10] STEWART, J. **Cálculo:** Volume 1, 7ª edição São Paulo, Editora Cengage Learning, 2014.

[11] NICOLAU, J. **Equações Diferenciais e Equações à Diferenças**. Universidade Técnica de Lisboa. Versão 2. Lisboa. 2003.

[12] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo –** Volume1. 5ª edição, São Paulo. Editora LTC, 2001.

[13] BASSANEZZI, R. **Modelagem Matemática**. Apostila – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2012.

[14] LUIZ, R. D. **Equações de Diferenças e Aplicações**. Dissertação (Especialização em Matemática) – Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

[15] LOPES, H. B. **A importância da noção de função homogênea**. Disponível em: http://www.ensino.eu/em-artigo19.pdf. Acesso em: 29 de março de 2011.

[16] http://www.mat.uc.pt/~mat1131/Fibonacci.html. Acesso em Abril de 2017.

[17] http://www.inca.gov.br/wcm/dmdc/2016/numeros-cancer-brasil.asp. Acesso em Abril de 2017.

[18] PEREIRA, W. R. L. S. **Pearl-Verhulst versus Ricker - contínua versus discreta estabilidade versus caos**. Disponível em: http://www.crbiodigital.com.br/01/williamroberto?txt=3577323338. Acesso em Maio de 2017.

[19] DOMINGUES, J. S. **Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento**. Biomatemática 21, p. 103-112, 2011.