Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Darlan Gonçalves Pereira

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: perímetros, áreas e volumes, seguindo os preceitos do princípio de Cavalieri.

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Orientador: Dr. Eduardo Sarquis Soares

Ouro Branco
2017

Dissertação de Mestrado defendida em 01 de dezembro de 2017 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Professores.

Eduardo Sarquis Soares

Prof. Dr. Eduardo Sarquis Soares
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Gabriel Dias de Carvalho Júnior
Instituto Federal de Minas Gerais - Ouro Branco

José Eloy Ottoni

Prof. Dr. José Eloy Ottoni
Universidade Federal de São João del-Rei

RESUMO

Darlan Gonçalves Pereira [1]
Eduardo Sarquis Soares[2]

O presente estudo é resultado de uma atividade prática realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio de escola particular de Sete Lagoas/MG envolvendo o princípio de Cavalieri e o cálculo de perímetros, áreas e volumes. O foco do estudo consistiu na proposição de atividades que contribuam para a construção do conhecimento da relação entre perímetro e área de uma forma geométrica, retângulos e paralelogramos de mesma base e altura, e entre volumes de sólidos, e na observação e avaliação de como os alunos resolvem questões geométricas em grupo a partir de uma situação desafiadora apresentada a eles, seguindo o conceito de que a aprendizagem matemática pode ocorrer de forma mais natural a partir da zona de desenvolvimento proximal, ZDP, defendida por Vygostsky. A partir da proposição de uma investigação matemática, na tentativa do professor de fazer com que seus alunos aprendam os conceitos básicos do princípio de Cavalieri, questionou-se: que resultado seria possível colocar em evidência? Ao promover uma atividade prática aplicada, buscou-se incentivar interações entre alunos visando lançar desafios matemáticos para que os alunos pudessem verbalizar seu entendimento dos conteúdos de geometria e, assim, produzir o seu conhecimento de maneira coletiva. Como resultado a pesquisa aplicada realizada apontou indícios de que os alunos assimilaram os conceitos trabalhados ao responderem aos desafios propostos, por meio de cálculos e pela percepção na construção de figuras e sólidos, contribuindo assim, para a aprendizagem em geometria.

Palavras-chave: Princípio de Cavalieri. Investigação matemática. Interação entre alunos. Aprendizagem coletiva. Conhecimento geométrico.

[1]Aluno de Mestrado Prossional em Matemática-PROFMAT, Turma: 2015. Instituição: Universidade Federal de São Joao del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba – CAP .
e-mail: darlangpereira@bol.com.br
[2]Professor Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ/ Campus Alto Paraopeba – CAP.
e-mail: esarquis@ufsj.br

ABSTRACT

The present study is a result of a practical activity performed with students of the second year of high school in Sete Lagoas / MG, involving the Cavalieri principle and the calculation of perimeters, areas and volumes. The focus of the study is the proposition of activities that contribute to the construction of knowledge of the relation between perimeter and area of a geometric shape, rectangles and parallelograms of the same base and height, and between volumes of solids, and in the observation and evaluation of how the students solve geometric group questions from a challenging situation presented to them, following the concept that mathematical learning can occur more naturally from the zone of proximal development, ZPD, defended by Vygostsky. From the proposition of a mathematical investigation, in the teacher's attempt to get his students to learn the basic concepts of the Cavalieri principle, he wondered: what result could be put in evidence? In promoting an applied practical activity, we sought to encourage interactions among students aiming to introduce mathematical challenges so that students could verbalize their understanding of geometry contents and, thus, produce their knowledge collectively. As a result, applied research showed evidence that students assimilated the concepts worked by responding to the challenges proposed, through calculations and perception in the construction of figures and solids, thus contributing to learning in geometry.

key-words: Cavalieri principle. Mathematical research. Interaction among students. Collective learning. Geometrical knowledge.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

O presente estudo é resultado de uma atividade prática realizada com alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola da rede particular da cidade de Sete Lagoas, MG, envolvendo o princípio de Cavalieri e o cálculo de perímetros, áreas e volumes. O foco do estudo consistiu na proposição de atividades de construção do conhecimento da relação entre perímetro e área de uma forma geométrica, retângulos e paralelogramos de mesma base e altura, e entre volumes de sólidos, e na observação e avaliação de como os alunos resolvem questões geométricas em grupo a partir de uma situação desafiadora apresentada a eles.

Como há muito defendido por Vygotsky (2009), o desenvolvimento cognitivo do aluno ocorre por meio da sua interação com outros indivíduos e com o meio em que está inserido. Essa proposição é inspiradora para que o professor crie possibilidades diversificadas de aprendizagem que estimulem o desenvolvimento da capacidade de pensar, raciocinar de forma lógica, questionar, julgar e argumentar sobre como resolver as situações-problemas propostas. Nesse contexto, constatou-se um questionamento que motivou este trabalho: a partir da proposição de uma investigação matemática, é possível propiciar aos estudantes uma forma nova e mais aprofundada de aprendizagem à partir da utilização de uma atividade prática baseada no princípio de Cavalieri?

Para responder à questão lançada, traçou-se como objetivo geral:

- desenvolver uma forma diferenciada de ensinar geometria por meio de atividades com materiais manipulativos que envolvam os conceitos de perímetro, área e volume, seguindo os preceitos do princípio de Cavalieri;

E objetivos específicos:

- acompanhar a produção do raciocínio matemático por meio de atividades práticas visando a relação entre perímetro e área de uma forma geométrica, retângulos e paralelogramos de mesma base e altura, e entre volumes de sólidos;

- analisar episódios relacionados à aprendizagem dos alunos na execução de uma atividade investigativa prática e coletiva.

Acredita-se que perceber como os alunos analisam criticamente o desafio lançado, como se comportam na tentativa de resolvê-lo e comprovar suas ideias pode contribuir para que o professor perceba alguns resultados significativos da atividade proposta.

Ao promover uma atividade prática aplicada, buscou-se incentivar interações entre alunos. A atividade visou lançar desafios matemáticos para que os alunos possam verbalizar seu entendimento dos conteúdos de geometria e, assim, produzir o seu conhecimento de maneira coletiva.

O resultado esperado com o trabalho na sala de aula é, primeiramente, favorecer a aprendizagem do princípio de Cavalieri na geometria plana de uma forma significativa, para trabalhar então os conteúdos da geometria espacial.

Ao convidar os alunos a participar do processo de investigação matemática, espera-se que, por meio da análise e discussão das possibilidades de solução a um problema apresentado pelo professor, os alunos possam, juntos, encontrar caminhos para a sua solução.

Como procedimentos metodológicos adotados para a realização da atividade que resultou no presente estudo optou-se pela revisão de literatura para embasamento teórico, sobre a temática. E, como experimento, foram lecionadas oito aulas práticas elaboradas para alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola da rede particular de ensino, com a utilização de materiais manipuláveis.

A coleta de dados foi realizada por meio de observação participante, registros fotográficos e gravações audiovisuais de aulas para acompanhamento das etapas de apresentação e resolução de situações-problema. A análise dos dados foi feita de forma qualiquantitativa. Análises de episódios ocorreram logo após a implementação de cada uma das atividades, de modo a permitir o acompanhamento e direcionamento no processo proposto e, caso necessário, fazer adaptações e/ou mudanças mais substanciais.

2 Referencial teórico

Este referencial teórico compõe-se de 5 itens cujos temas variam entre discussões de conceitos como a aprendizagem e elementos do conhecimento matemático que serviram de referência para preparação de aulas.

Reconheço que esse referencial pode parecer muito amplo, no entanto, ele reflete a minha condição de professor e investigador. Ao mesmo tempo em que fui desafiado a criar uma metodologia inovadora para aulas de geometria, procurei por uma abordagem teórica que me auxiliasse a refletir sobre meu trabalho.

No primeiro item que segue, apresento elementos sobre a aprendizagem considerada como uma ideia ampla acerca de como os indivíduos aprendem. O segundo item aborda mais especificamente o conhecimento matemático. No terceiro item procurei detalhes sobre a utilização do princípio de Cavalieri em sala de aula. O quarto item apresenta uma reflexão sobre a investigação matemática e o quinto item se refere a produção de um ambiente propício à investigação matemática.

2.1 A aquisição da Aprendizagem

O intuito de abordar a aquisição da aprendizagem se fundamenta na necessidade de compreender como ela se desenvolve. Para tanto, buscou-se apoio nas ideias de Vygotsky (2009), que postula que a aprendizagem se dá a partir da produção coletiva do conhecimento, por meio da interação com o outro, seja em situações cotidianas ou na escola, favorecendo desenvolvimento da zona do desenvolvimento proximal (ZDP). A ZDP seria a distância existente entre o que o sujeito já tem internalizado (obtido de suas vivências culturais), o seu conhecimento real, e aquilo que ele (o sujeito) tem potencialidade para aprender interagindo com os outros, a partir da geração coletiva de um ambiente dialógico, rico em interações proporcionadas aos participantes.

Para Vygotsky (2009), a aprendizagem é um processo de reestruturação conceitual que acontece a partir das conexões interativas entre os conhecimentos adquiridos fora da escola e científicos. Do ponto de vista didático, a interação ativa da criança com o ambiente é de suma importância para o seu desenvolvimento cognitivo. Em sua obra "A construção do pensamento e da linguagem" (2009) o teórico defende que na ZDP há um processo que impulsiona o desenvolvimento do aluno para que a aprendizagem ocorra.

Vygotsky (2009) ainda defende que ao longo do desenvolvimento da criança, as múltiplas situações de interação social que ela vivenciará irão influenciar no desenvolvimento do pensamento e do seu raciocínio lógico. Cada aluno apresenta um nível de desenvolvimento e capacidade ou competência para a aprendizagem de certos conteúdos, de modo que a aprendizagem ocorre de acordo com a maturidade e com o conhecimento que o indivíduo vai adquirindo e compartilhando. Por meio da socialização ocorre o desenvolvimento dos processos mentais superiores (pensamento, linguagem etc.) e a internalização de comportamentos sócio-históricos e culturais (VYGOTSKY, 2009).

Diante dessa consideração, percebe-se na postura do teórico a defesa pela aprendizagem coletiva. Uma postura similar pode ser percebida nos PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002), Melchior(2002), Freire (2001) Luckesi (2002), Saramago e Cunha (2009).

Os PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) narram que o processo de aquisição da aprendizagem acontece a partir da interação entre aluno/aluno e o professor. E a partir dessa relação é que serão repassados os conceitos e informações que contribuirão para construção do conhecimento.

> [...] A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros, o que pensa e a dificuldade que enfrenta. Alunos que não falam sobre Matemática e não tem oportunidade de produzir seus próprios textos nesta linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nesta área. (BRASIL, 2002, p. 120)

Já Melchior (2002, p. 23), sustenta que se o professor acredita que "ensinar é propiciar condições ao indivíduo para desenvolver suas potencialidades, através da assimilação e transformação desses conhecimentos, no contexto de sua prática social", certamente ele vai desenvolver sua ação pedagógica propondo atividades que favoreçam esse crescimento.

(BRASIL 2002) incentiva a aprendizagem trabalhada com os alunos, que os leve a ter a percepção de que eles aprendem fundamentalmente pela experiência interativa, pelo que descobrem por si mesmos e compartilham com os demais colegas.

Complementa Freire (2001) que o educador deve respeitar os saberes dos educandos adquiridos em sua história, estimulando-os a sua superação através "do exercício da curiosidade que os instiga à imaginação, observação, questionamentos, elaboração de hipóteses e chega a uma explicação epistemológica" (FREIRE, 2001, p.85).

Saramago e Cunha (2009), atentam para a necessidade do professor considerar o aluno como protagonista no ensino de Matemática, o que significa criar momentos de "reflexão, análise e compreensão de sua vivência, de sua experiência, de sua realidade concreta e, especialmente, do que ele pode fazer nela e por ela, para transformá-la, para melhorá-la cada vez mais". (SARAMAGO, CUNHA, 2009, p. 109).

É importante destacar, dado que muitas vezes não é essa uma postura comum aos pesquisadores em educação matemática, e apesar do presente estudo apontar para o trabalho de Vygotsky, chamamos para dialogar sobre o assunto outros pesquisadores que não subscrevem linhas vygostskyanas, mas que contribuem para a validação da aprendizagem coletiva e para a produção (construção) do conhecimento, que norteia a pesquisa prática desenvolvida. Dentre esses autores destacam-se: Dante (2002), Braumann (2002), Bonjorno e Bonjorno (1995); Saramago, Cunha (2009) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) no tópico a seguir.

2.2 A Construção do Conhecimento Matemático

Para Dante (2002) um dos grandes objetivos do ensino de Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente. De modo que o conhecimento matemático é construído à medida que são propostas situações-problema que envolvam o aluno, desafiem-no e o motivem a querer resolvê-las. Segundo o autor, para que o conhecimento matemático se efetive é preciso:

- Fazer o aluno pensar produtivamente
- Estimular o raciocínio do aluno

- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas
- Oferecer uma boa base matemática às pessoas em geral.

Segundo apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), tanto na Matemática, quanto em qualquer outra disciplina, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno vai aprender enquanto utilizar seus recursos cognitivos e afetivos para alcançar um objetivo traçado. Quando o aluno é chamado a formular questões em torno dos conceitos trabalhados pelo professor, essa ação o faz parte ativa na sua aprendizagem (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2016).

Braumann (2002) chama atenção para o fato de que aprender Matemática, não está no simples fato de compreender a Matemática já feita. Para o matemático, aprender Matemática...

> [...] é ser capaz de fazer uma investigação de natureza matemática (ao nível adequado de cada ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão de mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode dominar os conhecimentos adquiridos[...] (BRAUMANN,2002,p.05).

Corroborando Saramago, Cunha (2009, p.111), enfatiza que o aluno, segundo sua capacidade de agir, vai se envolver ativamente com a proposta didática do professor e escolher a estratégia que usará para a solução dos desafios a ele apresentados. Para esse autor, para o que o aluno se envolva com a atividade e queira solucioná-la, é preciso que perceba a Matemática como dinâmica e criativa, à medida que encontra várias possibilidades e estratégias de solução de situações similares. Bonjorno e Bonjorno (1995) também defendem a aprendizagem construída na interação social, mas desde que seja útil pedagogicamente. Uma atividade sem sentido ou utilidade seria considerada perda de tempo.

> [...] O ensino da Matemática deve contribuir para a formação do aluno como ser social. Para esses autores, a Matemática foi e é estudada com a finalidade de resolver problemas e, consequentemente, espera-se que quem sabe Matemática saiba resolver problemas (BONJORNO; BONJORNO, 1995, p.12).

Por fim postulam os autores que uma atividade significativa é a que o aluno não conhece a solução, mas vai querer encontrá-la, com segurança de que é alguém capaz de resolver problemas e de aprender (BONJORNO; BONJORNO, 1995).

Visto que a aprendizagem matemática se efetiva testando, argumentando e provando, buscamos com o Princípio de Cavalieri, promover um momento de aprendizagem prática sobre áreas e volumes de figuras geométricas, iniciando com a apresentação de suas ideias e teorias. Segue uma apresentação sucinta de descobertas de Cavalieri.

2.3 O princípio de Cavalieri e seus preceitos

Segundo discorrem Paterlini (2010) e Lula (2013) no começo do século XVII, o Padre italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598- 1647), discípulo de Galileu, forneceu uma importante contribuição na matemática com seu livro Geometria dos Indivisíveis, estabelecendo uma fórmula de cálculo de área e volumes. Cavalieri considerava uma região plana como formada por cordas paralelas e um sólido como constituído de placas planas paralelas. (LULA, 2013).

Para Noé (2008), a geometria proposta por Cavalieri através de seu famoso livro Geometria Indivisibilibus, de 1635, ponderava que toda figura plana seria formada por retângulos de largura infinitesimal, chamados por Galileu de indivisíveis. "Duas figuras planas comprimidas entre retas paralelas formam uma relação constante, as áreas das figuras também possuem a mesma relação" (NOÉ, 2008, p.01)

Para Paterlini (2010, p.01) o Princípio de Cavalieri, que surge "adotado como postulado [3] nos textos para ensino da Matemática Elementar é na verdade um teorema para determinar fórmulas na Geometria Espacial. Para demonstrá-lo é suficiente usar alguns poucos conceitos da teoria de integração de funções reais".

De acordo com a descrição de Lula (2013, p.23) o Princípio de Cavalieri ao abordar o cálculo de área de figuras planas, estabelece:

> Teorema 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante (PRINCÍPIO DE CAVALIERI).

Cavalieri (citado por Garavello, 2011) propõe que para o cálculo de áreas de figuras planas tem-se que observar:

> Sejam duas figuras planas A e B, de mesma altura. Ao seccionarmos essas figuras com uma linha paralela à base na mesma altura e nessas secções as linhas tiverem o mesmo comprimento, podemos afirmar que essas regiões planas possuem a mesma superfície, ou seja, a mesma área. (GARAVELLO, 2011, p.04)

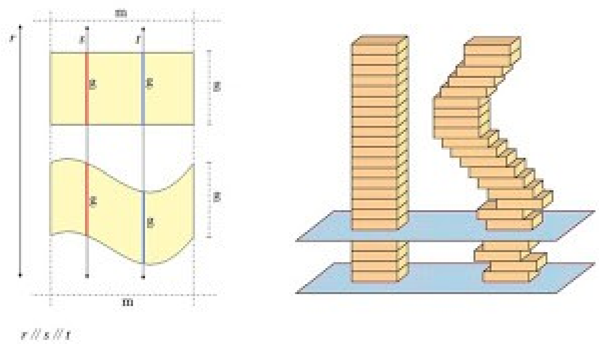
Segundo o autor, "o Princípio de Cavalieri pode ser bem empregado para demonstrar os resultados dos volumes de alguns sólidos, estudados no Ensino Médio e Fundamental do Ciclo Básico da Educação" (GARAVELLO, 2011, p.04). Eves (2004 citado por Weigel, 2010), aponta como se fundamenta o Princípio de Cavalieri.

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
>
> 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2004, p. 426)

[3] Postulado é uma sentença que não é provada ou demonstrada, e por isso se torna óbvia ou se torna um consenso inicial para a aceitação de uma determinada teoria. O postulado é uma proposição que, apesar de não ser evidente, é considerada verdadeira sem discussão.

Benk et. al (2016) acreditam que uma forma mais simples de compreender o Princípio de Cavalieri consiste em perceber que em se tratando de volume, dois sólidos com mesma altura terão o mesmo volume, se as seções planas numa mesma altura têm a mesma área. E para o cálculo de outras formas geométricas como prismas oblíquos, pirâmides inclinadas, cilindros e cones oblíquos se aplica o Princípio de Cavalieri.

Figura 1: Princípio de Cavalieri



Fonte:WEIGEL (2010).

Em se tratando de cálculos geométricos, Paterlini (2010) aponta que o estudo de volumes de sólidos no ensino médio tem como base o Princípio de Cavalieri. Para compreender a aplicação do Princípio de Cavalieri é importante compreender a ideia indutiva [4] de volume e área. Lula (2013) apresenta de forma sucinta os conceitos, a saber:

> Um conceito intuitivo do que vem a ser volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. O objetivo central seria exprimir esta quantidade de espaço que chamaremos daqui para frente de volume por um número real positivo. Para encontrarmos este número devemos comparar o espaço ocupado pelo sólido com certa unidade, o resultado desta comparação será o número desejado, a saber, o volume do sólido (LULA, 2013, p.17).

No que se refere ao cálculo do volume de cilindros oblíquos aplicando o Princípio de Cavalieri, Alhanti (2013) explica que se a área A for igual a área B, o volume do cilindro oblíquo será igual ao cilindro reto, como ilustra a FIG.2.

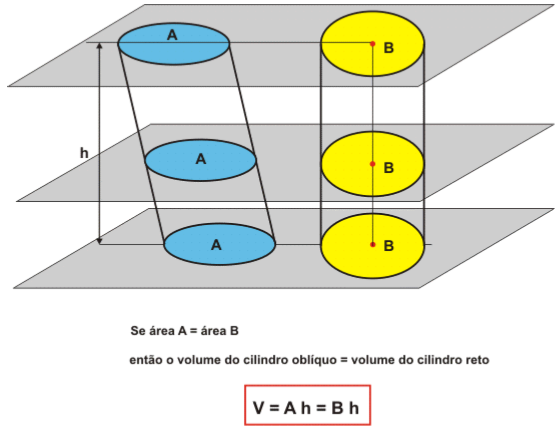
Já em se tratando do cálculo do volume de pirâmides inclinadas ao fazer a aplicação do Princípio de Cavalieri, Alhanti (2013) destaca se a área A for igual a área B e sua altura for a mesma, área A' é igual a área B' e o volume de uma pirâmide inclinada será igual a de uma pirâmide reta, conforme ilustra a FIG.3.

Finalizando, Alhanti (2013) ilustra cones inclinados da FIG.4 objetivando a aplicação do Princípio de Cavalieri.

A aplicação do princípio aponta que sendo a área A igual a área B, tendo ambas a mesma altura, o volume tanto do cone inclinado quanto do cone reto serão iguais. De posse

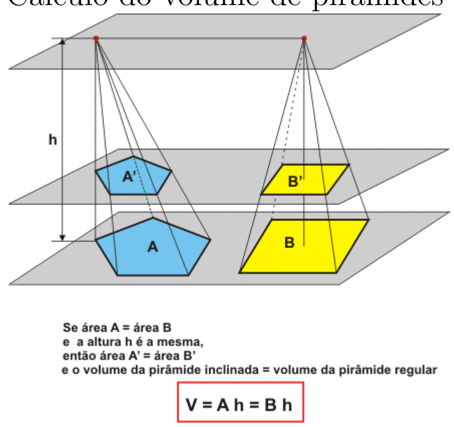
[4]Um conceito intuitivo do que vem a ser volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. (LULA, 2013)

Figura 2: Cálculo do volume de cilindros oblíquos



Fonte:ALHANATI (2013)

Figura 3: Cálculo do volume de pirâmides inclinadas

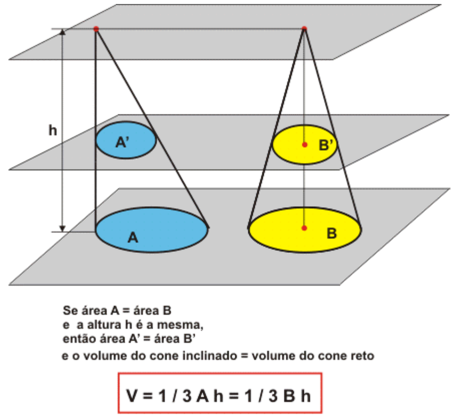


Fonte:ALHANATI (2013)

desse conhecimento, nota-se que a aplicação do Princípio de Cavalieri para o cálculo de área e volume de figuras geométricas não é algo impossível de se aprender e compreender, cabendo ao professor de matemática, utilizar de meios didáticos que facilitem a construção do conhecimento matemático por parte do aluno, fazendo com que ele perceba que é possível dominar o conteúdo trabalhado (GONÇALVES, 2015).

Diante do que foi levantado, acerca do Princípio de Cavalieri é identificada a possibilidade de se trabalhar em sala de aula seus conceitos de forma concreta, tornando a aprendizagem matemática rica em significados para os alunos. Visualiza-se a proposição de uma investigação matemática como uma metodologia aplicada que pode oferecer resultados bastante positivos para a produção do conhecimento matemático. Dada as suas particularidades destacadas no tópico seguinte.

Figura 4: Cálculo do volume de cones inclinados



Fonte:ALHANATI (2013)

2.4 A prática da Investigação Matemática

Apoiando-me em minha experiência profissional como professor, percebo que a realidade das salas de aula do ensino médio, nas quais fui professor, tem mostrado que a maioria dos alunos são questionadores, articulados e pesquisadores, de modo que já não cabe ensinar com base apenas em apresentação de conceitos, fórmulas e exercícios repetitivos presentes nos livros didáticos e apostilas. Acredito que adotar novas estratégias metodológicas que envolvam os alunos e promovam a aprendizagem se tornou uma busca incessante por parte dos professores. Nesse tópico são apresentadas as opiniões de estudiosos que defendem a adoção da investigação matemática como um método válido de aprendizagem.

Para Luckesi (2002), o planejamento de aulas motivadoras e interessantes aos olhos dos alunos, exige do professor, um conhecimento seguro do que se deseja fazer com a educação, quais valores propagar e seus significados. Em se tratando da defesa da aplicabilidade da investigação matemática, dentre os tantos estudiosos da temática, para nortear o estudo prático, buscou-se maior embasamento nas percepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que orientam para o desenvolvimento dessa metodologia em sala de aula de modo a contribuir para o aprendizado em áreas como geometria e estatística.

Defendem Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que, ao optar por desenvolver conteúdos da geometria por meio da investigação, é importante perceber que essa metodologia pode ser uma rica forma de construção do conhecimento dos alunos, independente do grau de complexidade das questões propostas pelo professor. Cabe ao professor de matemática que fará uso dessa metodologia, acreditar na real contribuição que ela traz para o aprendizado, como salientam esses autores:

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar

> com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2016, p.09).

Na visão dos estudiosos, é preciso saber se o professor está apto a promover uma investigação matemática, orientando os alunos quando necessário e principalmente se essa metodologia vai contribuir para a sua aprendizagem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.09).

Para Freire (2001) ao estimular o aluno a investigar, o professor o insere no mundo da informação mais aprofundada do que se está trabalhando em sala de aula. O aluno acaba tendo contato com um mundo diferente, coisas novas, curiosidades.

Diante dessas considerações feitas pelos estudiosos, cabe o questionamento: afinal o que significa “investigar em Matemática?”.

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações Matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração. (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p. 09).

Logo, a Investigação Matemática, é uma metodologia encontrada para ensinar e aprender Matemática, respeitando o conhecimento do aluno, numa atividade de ensino-aprendizagem. Na investigação, o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação com os demais alunos e o professor (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016).

> Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. [...]. Para matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades [...].Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de se admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações. (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2016, p.10-16).

Descrevem Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.20) que a investigação matemática envolve quatro momentos principais conforme se apresenta no quadro 1.

QUADRO 1 - Momentos na realização de uma investigação

Exploraçao e formulação de questões	• Reconhecer uma situação-problemática • Explorar a situação-problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio.

Fonte:(PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016,p.21)

Durante esses momentos, eles salientam que pode haver interação entre os envolvidos na investigação e que essa interação torna-se obrigatória na finalização da atividade, observando-se a divulgação e confirmação dos resultados reforçando atitudes de autonomia cooperação e capacidade de comunicação oral e escrita no caso de trabalho em grupo. (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2016).

Como qualquer outra atividade proposta aos alunos, a investigação Matemática deve ser justificada e avaliada:

> No final de todo o trabalho investigativo é importante a interação de toda a turma para que haja um balanço de toda a atividade realizada, das descobertas e da solução do problema inicial. Neste momento, também é muito importante que os alunos, juntamente com o professor, reflitam sobre toda a atividade realizada. Os alunos, desta forma, desenvolvem a capacidade de comunicação. O envolvimento ativo dos alunos é essencial para que haja a efetiva aprendizagem da matemática. Ao investigar, o aluno se torna um detetive matemático. Mas para que isto ocorra é necessário deixá-lo trabalhar de forma autônoma (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p. 23).

Numa avaliação acerca do conceito de investigação Matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, esses autores indicam que essa metodologia “ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da matemática genuína”. Na visão de Rocha e Ponte (2006), as investigações matemáticas desenvolvem conhecimentos transversais, como a capacidade de comunicação e trabalho em grupo, a contribuição para a formação de novas concepções e atitudes dos alunos em relação à Matemática.

Pelo exposto neste tópico nota-se a preocupação de fazer com que o método de investigação matemática seja capaz de movimentar os alunos para a solução de questões lançadas pelo professor, o que nos remete a perceber o quanto a criação de um ambiente propício à investigação matemática deve ser bem programado pelo professor, como corroboram Brasil (1997); Gonçalves (2015). Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.25) e Corradi (2011). Seguem considerações sobre a criação desse ambiente.

2.5 Criando um ambiente propício para a Investigação Matemática

No momento em que o professor se propõe a adotar a investigação Matemática, deve estar atento a detalhes importantes, apresentadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que vão desde a maturidade dos alunos em executar a investigação, a viabilidade da pesquisa, os objetivos bem determinados e soluções para entraves que surjam durante a investigação, os quais podem alterar os resultados esperados. O professor irá desempenhar um papel determinante nas aulas de investigação, visto que sua interação com os alunos necessita ser diferente das aulas tradicionais, diante das dificuldades e dilemas encontrados em atividades dessa natureza (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016).

De acordo com Gonçalves (2015), os PCNs de Matemática do Ensino Médio estabelecem como objetivo a ser alcançado que os alunos adquiram a percepção da importância da Matemática e suas aplicações nas mais variadas situações cotidianas, sendo seu conhecimento construído a partir de situações reais.

> Observando as orientações contidas nos norteadores de ensino, visualiza-se a motivação para a adoção de um ensino contextualizado e significativo com os alunos participando ativamente da construção do conhecimento matemático; utilizando seu poder análise e julgamento, de resolução de problemas, de comunicação e representação, principalmente nos momentos que exigem cálculos geométricos (GONÇALVES, 2015, p.14)

É importante antes de sua proposição, questionar a possibilidade de execução em sala de aula de matemática, a organização do trabalho, as etapas de desenvolvimento, os resultados esperados no desempenho dos alunos e o mais importante o papel do professor durante a investigação. Porque, como enfatizam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.25):

> [...] Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação (PONTE; BROCARDO, OLIVEIRA, 2006, p. 25).

Brocardo (2002) percebe que a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam ativamente, compreendem com mais facilidade os processos, ideias e a atividade matemática.

Conforme descrevem Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases, iniciando com a introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, a realização da investigação, individualmente ou em pares, em pequenos grupos ou com a turma toda, e discussão dos resultados, quando os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

O arranque da aula, segundo esclarecem Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.26): "[...] embora curto, é absolutamente crítico e dele dependem todo o resto".

> O professor tem que garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade. O cuidado posto nesses momentos iniciais tem especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com investigações (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016, p.26).

Para Corradi (2011):

> No arranque da atividade, o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a atividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representado a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes (CONRRADI, 2011,p171).

Corradi (2011) defende a manutenção do diálogo entre professor e os alunos no decorrer da execução da tarefa proposta, para na sua finalização, conduzir a discussão coletiva. "Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem" (CONRRADI, 2011, p.171).

Orientam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) que na aula de investigação matemática os alunos são convidados pelo professor a formularem situações e questões e a procurarem justificativas para suas ações.

- As ações em sala de aula são de forma coletiva e participativa;
- Os alunos são co-responsáveis pelo processo de aprendizagem;
- Os alunos usam materiais manipuláveis e novas tecnologias nas atividades de aprendizagem;
- Os alunos envolvem-se em projetos que poderão servir de base a investigações;
- Há uma co-relação professor e aluno no ensino e na aprendizagem.

Esses autores avaliam que o sucesso de uma investigação dependerá também do ambiente criado para a aprendizagem na sala de aula.

> É fundamental que o aluno se sinta á vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2016, p.28).

Diante de todas as opiniões levantadas, parte-se para a experiência prática com os alunos do 2º ano do ensino médio da referida escola da rede particular de Sete Lagoas/MG, descrita a seguir.

3 Metodologia

Como procedimentos metodológicos para a efetivação do presente estudo, foram consideradas as opiniões de autores como Gil (2008), Vergara (2003) e Bianchi e Bianchi (2003), que apontam como metodologia de pesquisa os procedimentos adotados para a realização de um estudo, considerando seus objetivos gerais (fins) e nos procedimentos de coleta de dados (meios) a serem utilizados.

A pesquisa prática realizada pode ser classificada quanto aos fins, como qualiquantitativa, já que promove uma análise do comportamento dos alunos em uma situação investigativa e visa apurar o percentual de alunos que apresentaram dificuldades na resolução do problema e necessitam de uma intervenção pedagógica por parte do professor para assimilação do conteúdo trabalhado durante a investigação matemática.

Quanto aos meios de investigação, esta pesquisa é um estudo de caso, porque tem "caráter de propriedade e detalhamento de uma situação" (VERGARA, 2003, p. 25). Para se alcançar o objetivo do estudo, a pesquisa bibliográfica desenvolveu-se a partir de material já publicado como: obras específicas, artigos, estudos, teses e artigos publicados em Língua Portuguesa e em Inglês (traduzido) sobre a temática.

Como método empírico de coleta de dados, foram utilizadas oito aulas de matemática com a participação de alunos do 2ºano do Ensino Médio de uma escola da Rede Particular de Ensino da cidade de Sete Lagoas, MG. Vale ressaltar que, além de assumir o papel de pesquisador, também sou o professor de uma das frentes de matemática dessas turmas. A investigação realizada pode ser identificada como um experimento didático formativo, uma vez que proporcionou aos alunos a participação na construção da aprendizagem sobre geometria.

Como instrumento de coleta de dados, foram utilizados registros fotográficos, gravações em vídeo e áudio de aulas. Pretendeu-se o acompanhamento das etapas da investigação matemática, a busca dos alunos pela solução do desafio proposto, a apresentação e interpretação dos resultados encontrados, além da identificação dos possíveis erros e resultados não esperados.

A análise da experiência vivenciada aconteceu no decorrer das atividades, possibilitando acompanhar o comportamento dos alunos, a interação entre eles para a resolução do desafio, o que permitiu a mediação do professor em momentos em que a orientação se fez necessária.

4 A aula prática

4.1 As turmas participantes

A atividade investigativa contou com a participação de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio, aqui identificadas como A e B, num total de 50 alunos. Essas turmas são compostas por alunos com idade ente 15 a 17 anos. A turma A contra com 11 alunas e 15 alunos, num total de 26 alunos e a turma B, com 14 alunas e 10 alunos, num total de 24 alunos.

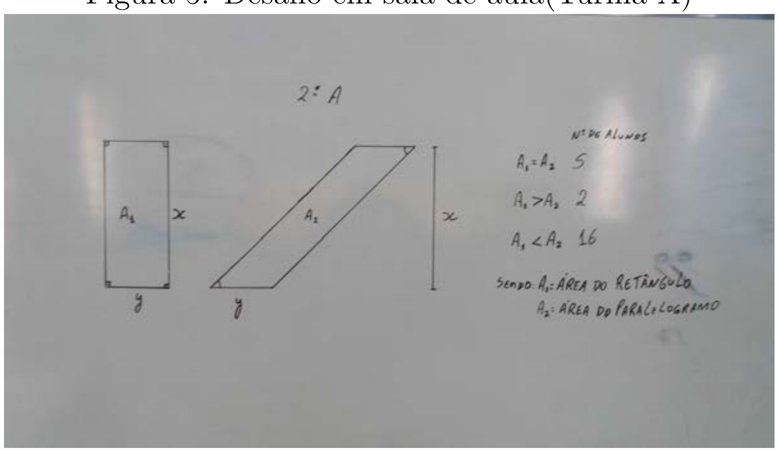
O perfil das turmas participantes é de alunos de diferentes faixas sócioeconômicas e que em sua maioria foram alunos da própria escola em anos anteriores e os demais oriundos de outras escolas particulares ou públicas. Dentre esses alunos, existem alguns poucos que frequentam a referida série pela 2ª vez. Existem ainda, alguns alunos que apresentam dificuldades cognitivas, o que por vezes pode influenciar na sua capacidade de aprendizagem.

De acordo com a avaliação diagnóstica, por mim realizada no início do ano letivo, detectou-se que os alunos apresentam uma defasagem do conteúdo curricular de geometria plana. Uma revisão dos conhecimentos básicos de geometria foi feita para corrigir essa falha e dar base para a aprendizagem da geometria espacial.

4.2 A construção do ambiente de pesquisa

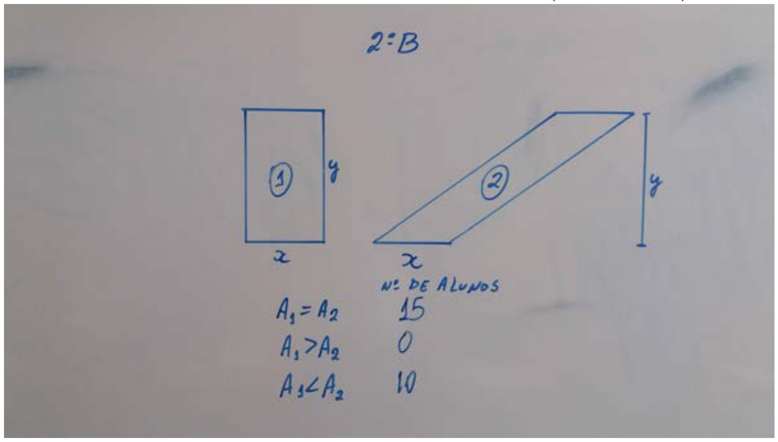
Para identificar o grau de conhecimento dos alunos quanto ao conteúdo de geometria plana, foram desenhados na lousa um retângulo e um paralelogramo de mesma base e altura. Em seguida foi perguntado aos alunos das duas turmas: qual a relação entre as áreas das figuras? O resultado da percepção de cada aluno foi registrado de forma quantitativa logo abaixo, conforme FIG. 5 e 6.

Figura 5: Desafio em sala de aula(Turma A)



Fonte:Acervo do autor.

Figura 6: Desafio em sala de aula(Turma B)



Fonte:Acervo do autor.

Levando em consideração que os resultados obtidos podem representar tanto o desconhecimento dos alunos com relação ao cálculo de áreas de figuras planas, como também pode representar um problema de percepção geométrica, antes da investigação matemática, foi necessário fazer uma revisão do conteúdo fazendo uso de uma oficina de matemática (Oficina1: Quadradinhos), tendo como referência o trabalho desenvolvido por Gonçalves (2015) e o Manual MEDIDA DE PERÍMETRO, ÁREA E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI: manual de orientações para professores de matemática desenvolvido por mestrandos do PROFMAT da Universidade Federal de São João Del Rei – UFSJ(2016).

4.2.1 O material utilizado nas aulas

Teve-se o cuidado de selecionar materiais simples e que não colocassem em risco os alunos, tentando evitar um possível acidente. Como:

- cartolinas
- 1 Régua de 30 cm e 50 cm
- Lápis
- 1 Tesoura sem ponta
- Folhas para anotações ou o caderno do aluno
- 50 canudinhos
- Papel colorset
- Barbante
- Fitas crepe
- Pedras de aquário

4.2.2 A preparação dos alunos e desenvolvimento da atividade

A aula conceitual contou a revisão dos conceitos do Principio de Cavalieri, com o intuito de fazer com que os alunos se familiarizem com o conteúdo a ser trabalhado, de forma coletiva e orientada pelo professor, para a iniciação da geometria espacial.

As duas primeiras oficinas foram pensadas para alunos compreenderem a relação entre perímetro e área, identificando formas geométricas de perímetros diferentes que têm a mesma área e, ainda, formas geométricas de mesmo perímetro que geram áreas diferentes.

4.3 Oficina Quadradinhos

Foi distribuída uma cartolina para cada grupo de 4 alunos para que confeccionassem quadradinhos de 5 cm de lado, nas exatas quantidades descritas abaixo:

- Dois grupos devem confeccionar 20 quadradinhos.
- Dois grupos devem confeccionar 16 quadradinhos.
- Dois grupos devem confeccionar 12 quadradinhos.
- Dois grupos devem confeccionar 10 quadradinhos.

Essa diferença na quantidade de quadradinhos por grupo se justifica devido à proposta de fazer explorações com números de quadrados diferentes entre os grupos. Ao mesmo tempo, fica a possibilidade de grupos com o mesmo número de quadrados poderem comparar seus resultados.

Com todos os grupos de posse dos quadradinhos, desafiou-se cada grupo a construir um retângulo usando todos os quadradinhos, para na sequência registrar seu retângulo na folha quadriculada. Em seguida, foi solicitado aos alunos a construção de outros retângulos diferentes do anterior, com a totalidade de quadradinhos do grupo, registrando todos os retângulos obtidos.

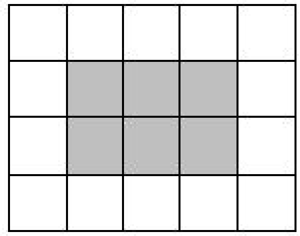
Terminado o desafio, cada grupo apresentou para a turma os seus resultados. Nesse momento promoveu-se uma discussão com o intuito de verificar se os grupos construíram todos os retângulos possíveis.

A tarefa seguinte configurou-se em medir o perímetro e a área dos retângulos construídos. Para essa tarefa, sugerimos que sejam definidos:

- O quadradinho como unidade de área e
- O lado do quadradinho como unidade de perímetro.

Exemplo: Perímetro igual a 10 lados e área igual a 6 quadradinhos, sendo que na figura a seguir, a parte sombreada representa um retângulo 2x3 com:

Figura 7: Retângulo 2x3



Fonte:Acervo do autor.

4.3.1 A aprendizagem na prática

Ao formarem os retângulos possíveis, era esperado que os alunos percebessem que a área é a mesma, mas os perímetros se alteram. Por exemplo: O grupo que recebeu 20 quadradinhos poderia formar os retângulos: 1x20; 2x10 e 4x5. Sendo que a área seria a mesma, ou seja, 20 quadradinhos. Os perímetros seriam respectivamente: 42 lados; 24 lados e 18 lados.

Os valores das medidas (base e altura do retângulo) variam em função dos divisores do número de quadradinhos. No exemplo acima, verifica-se que os divisores de 20 são: 1, 2, 4, 5, 10 e 20. Para formar os lados do retângulo, esses divisores devem ser agrupados da seguinte maneira: menor x maior (1x20), segundo menor x segundo maior (2x10) e assim sucessivamente. Quando o número de divisores resultar em uma quantidade ímpar, o divisor que ocupar a posição mediana, evidentemente, deve ser agrupado com ele mesmo, de modo que o retângulo formando seja um quadrado.

Exemplo: Sejam 16 quadradinhos.

Divisores 1, 2, 4, 8,16.

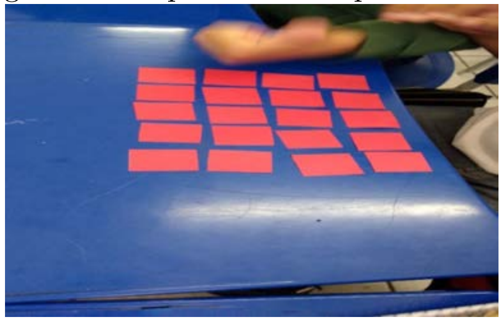
Nesse caso, o número quatro fica no meio dos divisores e indica a formação do quadrado 4x4. O professor poderá explorar um número de quadradinho ainda inédito, como por exemplo, 24, que tem como divisores os números 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24, e fazer junto com a turma uma antecipação dos retângulos possíveis. 1x24, 2x12, 3x8 e 4x6.

Em seguida, foram propostas outras atividades para a memorização dos conteúdos trabalhados. Exemplo: Determinar quantos retângulos podem ser formados com n quadradinhos, sendo n um número natural menor que 10. (Depois o professor pode ir aumentando, com n até 20, até 30,...)

Nesse exercício, os números primos foram explorados, de forma que os alunos puderam determinar quais números podem formar apenas um retângulo, como: 1x5, 1x11, 1x19, etc. Evidentemente, excluindo-se o quadrado 1x1, pois o 1 não é um número primo.

Notou-se a importância de se discutir com os alunos que os retângulos 4x6 e 6x4 são idênticos. Explorou-se também a possibilidade de se substituir cada quadradinho por dois triângulos e utilizar agora cada triângulo como unidade de medida de área.

Figura 8: Grupo 1 com 20 quadradinhos

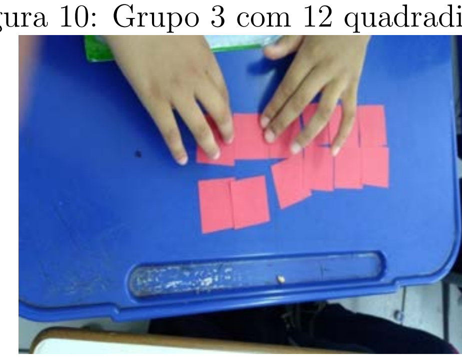


Fonte:Gonçalves et, al (2016)

Figura 9: Grupo 2 com 18 quadradinhos

Fonte:Gonçalves et, al (2016)

Figura 10: Grupo 3 com 12 quadradinhos



Fonte:Gonçalves et, al (2016)

Figura 11: Grupo 4 com 10 quadradinhos

Fonte:Gonçalves et, al (2016)

Encerrada a atividade, apresentados e discutidos os resultados com os alunos seguiu-se para a segunda oficina de investigação matemática.

4.4 Oficina Comparação de áreas de figuras com mesmo perímetro

Nesta oficina, cada grupo recebeu um barbante de 1 metro, para construirem formas geométricas que ocupem a maior área possível. Nesse momento, o professor lançou o seguinte problema como desafio: Um fazendeiro resolveu dar de presente de casamento ao seu filho, uma parte de seu terreno. Para isso, chamou a noiva e deu a ela 2000 metros de cerca. Após isso, propôs a ela cercar todos os lados do terreno que o casal gostaria de ganhar, utilizando toda a cerca.

Sabendo que ela cercou a maior área possível e que o terreno, além de plano, pode ter qualquer forma geométrica plana, qual polígono que representa a área cercada?

A intenção é fazer com que os alunos ao utilizarem o 1 metro de barbante, formem figuras com perímetro igual a 1 metro, mas que poderão ter áreas distintas.

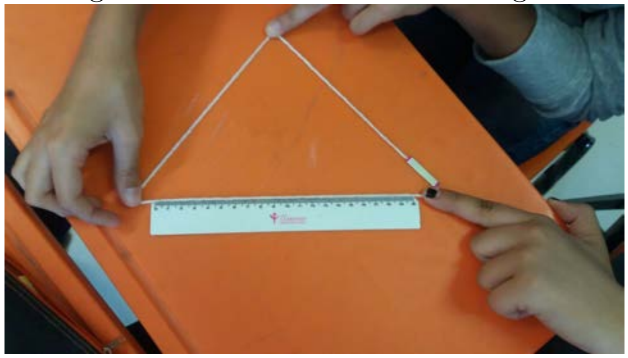
Exemplo: 1 quadrado de lados 25cm x 25cm com perímetro igual a 1 metro e com área igual 625cm^2.

1 retângulo de lados 10cm x 40cm com perímetro igual a 1 metro e com área igual a 400cm^2.

1 círculo de aproximadamente 15,9cm de raio, com perímetro de 1 metro e com área de aproximadamente 793,8cm^2.

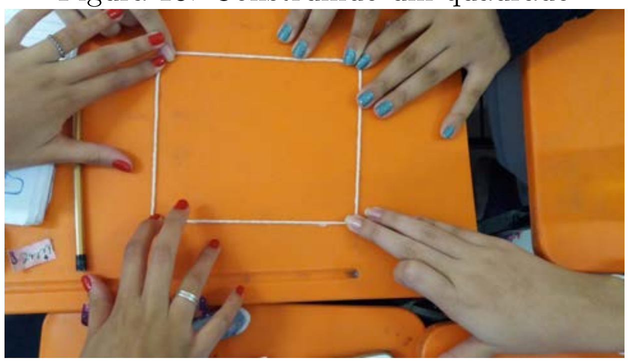
Nota-se que as três figuras possuem o mesmo perímetro, porém com áreas distintas. Vale ainda lembrar que a figura com maior área possível é o círculo.

Figura 12: Construindo um triângulo



Fonte:Dados da pesquisa.

Figura 13: Construindo um quadrado



Fonte:Dados da pesquisa.

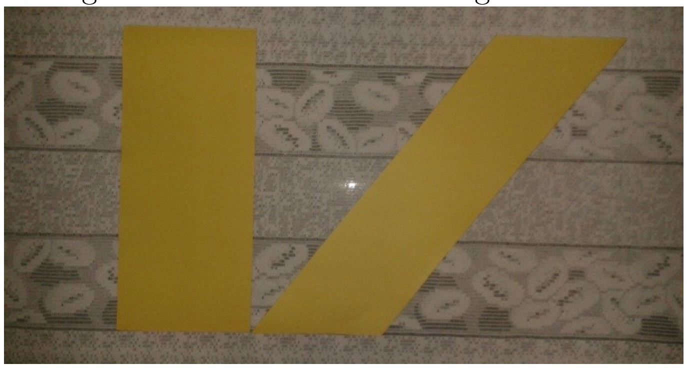
Figura 14: Construindo um hexágonoo

Fonte:Dados da pesquisa.

4.5 Oficina Retângulo e Paralelogramo

Inicialmente, foi apresentado aos alunos um retângulo e um paralelogramo, os dois com a mesma medida na base e na altura. Que deveriam ser construídos por eles e então se fez a seguinte pergunta que motivou a investigação: Qual das duas figuras tem maior área?

Figura 15: Modelo das formas geométricas

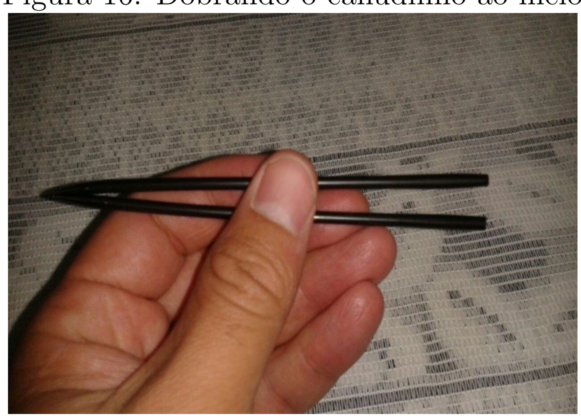


Fonte:GONÇALVES et. al (2016)

Os resultados deveriam ser comparados com o preenchimento de canudinhos cortados ao meio conforme ilustrado nas FIG. 19 e 20.

1º passo: Os alunos dobram cada canudinho ao meio para cortá-lo em seguida. Esse meio pedaço de canudinho servirá para fazer a base do retângulo e do paralelogramo. Em primeiro lugar o retângulo será desenhado na cartolina conforme as instruções seguintes.

Figura 16: Dobrando o canudinho ao meio



Fonte:GONÇALVES et. al (2016)

2º passo: Cada grupo com o seu meio pedaço de cartolina (no lado maior da folha), fará a base do retângulo com meio canudinho.

Os alunos devem posicionar o canudinho base em um dos cantos da folha de forma que o comprimento do canudinho fique na borda da folha. É necessário fazer uma marcação com um lápis até onde o canudinho alcançar; essa será a base do retângulo.

As ações seguintes são organizadas para que seja feita uma comparação de áreas. Os canudinhos são utilizados como unidade de medida de área. A ideia é: se a mesma quantidade canudinhos cobrir as duas figuras, teremos uma prova de que as áreas são iguais.

Em seguida, distribuir os canudinhos no retângulo até preencher toda a superfície da figura. É necessário alertar os alunos no sentido de proibir a sobreposição de canudinhos e a existência de espaços vazios. (FIG.19)

Figura 17: Colocando os canudinhos no retângulo

Fonte:GONÇALVES et. al (2016)

Figura 18: Canudinhos colocados no retângulo

Fonte:GONÇALVES et. al (2016)

Com as figuras construídas e o retângulo preenchido, contar o número de canudinhos utilizados e desafiar a turma: qual é a quantidade de canudinhos necessária para o preenchimento da área do paralelogramo?

Obtidas as respostas dos alunos, passa-se a prova experimental, ou seja, o preenchimento do paralelogramo oblíquo usando os mesmos canudinhos usados no retângulo, conforme ilustrado nas figuras a seguir.

Figura 19: Canudinhos colocados no paralelogramo

Fonte:GONÇALVES et. al (2016)

Culminância

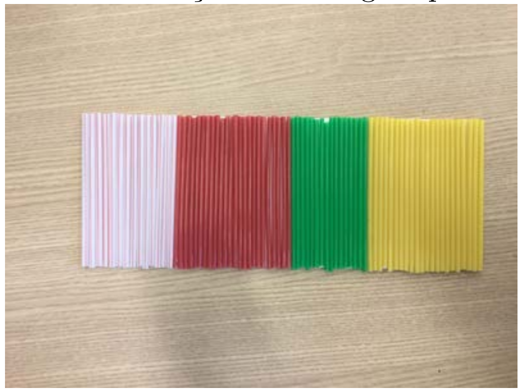
Cada grupo deverá verificar quantos canudinhos foram necessários nas duas figuras, registrar e discutir os resultados obtidos.

Comentários

Espera-se que ao final de toda a prática, os alunos percebam que a quantidade de canudinhos utilizada será a mesma para as duas figuras planas, independente do ângulo de inclinação. A atividade programada tem como finalidade fazer com que os alunos interpretem as figuras planas com a ideia de Cavalieri, considerando que as figuras planas podem ser pensadas como um conjunto de segmentos de retas.

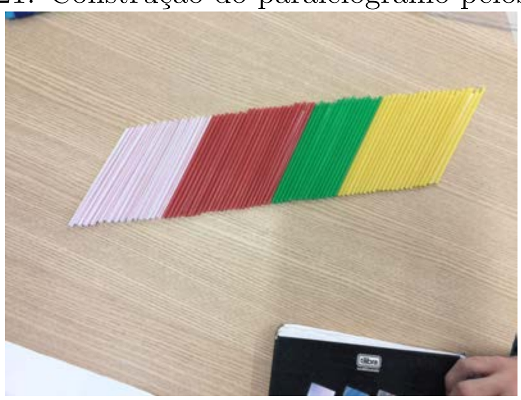
A atividade programada buscou explorar o lado perceptivo dos alunos e a sua concentração para analisar a situação-problema, pensar de forma lógica para chegar ao resultado do cálculo de áreas. Assim, poderiam assimilar na prática as ideias contidas no Princípio de Cavalieri.

Figura 20: Construção do retângulo pelos alunos



Fonte:Dados da pesquisa.

Figura 21: Construção do paralelogramo pelos alunos



Fonte:Dados da pesquisa.

4.6 Oficina Construção de Sólidos

Neste momento foi solicitado aos alunos que determinassem individualmente formas geométricas que possuíssem mesma área, dando prioridade a três formas específicas: quadrado, retângulo e triângulo. A execução desta atividade foi desenvolvida primeiramente no caderno, para construção posterior coletiva utilizando os seguintes materiais: papel colorset, régua, tesoura, lápis, cola e pedras de aquário. Após as formas serem construídas, elas serviram de base para a construção dos prismas, evidenciando-se que todos os prismas deveriam ter a mesma altura, podendo estes, serem retos ou oblíquos, à escolha. Vale registrar que a escolha dos polígonos citados se deu pela facilidade na construção dos sólidos que possuem essas bases.

Após a construção das formas geométricas, foi escolhida uma delas para ser preenchida com as pedras de aquário. Estando completamente preenchida, realizou-se a transferência das pedras para outro prisma, com a intenção de se constatar que a quantidade de pedras utilizadas para preencher o primeiro prisma foi a mesma utilizada para preencher o segundo e o terceiro prisma. Essa ação deveria fazer com que os alunos percebessem que o volume dos prismas é o mesmo.

Como deixou-se em aberto a escolha pela construção dos prismas retos e oblíquos, e a turma só construiu prismas retos, foi constatada a necessidade de mostrar também a igualdade de volumes entre sólidos retos e oblíquos de mesma base e altura.

Diante disso, foi proposta a construção de dois cilindros feitos de fita crepe. Inicialmente foi construído um cilindro reto utilizando 12 rolos de fita crepe, sendo preenchido com pedras de aquário. Posteriormente foi construído um cilindro oblíquo com a mesma quantidade de material, fazendo a transferência das pedras de aquário do cilindro reto para o seu interior. Novamente os alunos poderiam constatar a igualdade entre os volumes.

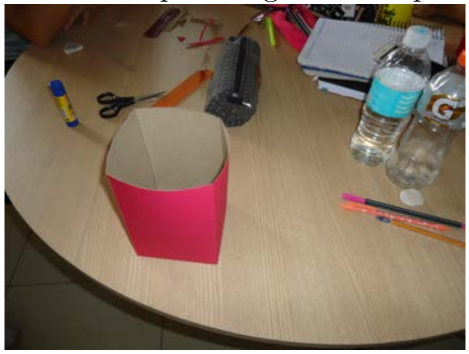
Figura 22: Planificação do prisma feita pelos alunos

Fonte:Dados da pesquisa.

Figura 23: Montagem do prisma feita pelos alunos

Fonte:Dados da pesquisa.

Figura 24: Prisma quadrangular feito pelos alunos



Fonte:Dados da pesquisa.

Figura 25: Prisma triangular feito pelos alunos

Fonte:Dados da pesquisa.

5 Análise de um episódio

Nesse topico será analisado o comportamento da aluna J, pois foi possível identificar o comportamento diferenciado dessa aluna que fez apontamentos considerados bastante pertinentes e que dão evidências de que houve algum tipo de aprendizado, mais expecificamente em dois episódios, durante a oficina quadradinhos e na oficina construção de sólidos. Devido ao fato de tal comportamento ter contrariado minhas expectativas, achei que a aluna seria um sujeito interessante para ser discutido neste trabalho, exatamente pela mudança comportamental que a aluna demonstrou na última oficina, o que me fez retornar à primeira oficina para observar o seu comportamento.

Há elementos da história escolar da referida aluna que confirmam sua dificuldade de aprender os conteúdos de Matemática. Por sempre apresentar um comportamento tímido, pouco interativo com os colegas de classe e professores, aluna J chamou a atenção pela vontade de participar de forma mais ativa nas oficinas.

5.1 O comportamento diferenciado da aluna

Para ilustrar essa percepção apresenta-se a seguir a transcrição do áudio que registra a conversa entre 4 alunos do grupo ao qual a aluna J pertencia. Tal diálogo se dá durante a primeira oficina.

1. G- Vamos fazer primeiro uma fila com os 16 quadradinhos.
2. J- Não vai caber na mesa.
3. G- Junta essa outra mesa aqui.
4. K- Deu um retângulo grandão de 16 por 1.
5. G- Agora vamos partir ele ao meio e colocar um do lado do outro.
6. J- Agora deu outro retângulo de 8 por 2.
7. G- Vamos partir ele ao meio de novo.
8. K- Deu outro retângulo de 4 por 4.
9. J- Mas deu foi um quadrado.
10. K- Mas o quadrado também é um retângulo, só que com os lados iguais.
11. J- Como assim? É retângulo ou quadrado. Cês tão me confundino.(sic)
12. K- (risada) Retângulo é todo polígono de 4 lados que possui os ângulos retos. Então o quadrado também é um retângulo, pois possui quatro lados e os quatro ângulos são de 90 graus.
13. J- Ó, não sabia disso. Achava que eram duas figuras diferentes.
14. G- Elas são diferentes, mas fazem parte de um mesmo grupo de figuras.
15. J- Entendi.
16. G- Vamos voltar aqui. Se Darlan pediu pra gente fazer isso aqui, deve ter alguma lógica envolvida nisso. Não deve ser só montar os retângulos.
17. J- Já está bom, fizemos o que ele pediu já.
18. A- Tem que calcular o perímetro ainda.
19. J- Então vamos calcular logo.
20. K- Concordo com G, acho que deve ter alguma coisa a mais nisso.
21. G - Olha aqui. Todos os valores que nós achamos são divisores de 16.
22. A- É mesmo.
23. G- Vamos listar eles aqui. Olha pra vocês verem, deve dar pra pensar alguma coisa com isso. Se a gente for multiplicando eles, alguns vão dar 16.
24. K- Mas tem uns que não dão.
25. G- Professor, olha aqui. Tem alguma lógica nisso aqui não tem? Quando a gente multiplica alguns dos divisores do total de quadradinhos, dá o total de quadradinhos.
26. P- E aí? Vocês acham que isso tem alguma explicação?
27. G- Não sei, mas deve ter.
28. J- Acho que o senhor deveria falar pra gente. (risos)
29. P- Prefiro que vocês pensem mais um pouco. Já deram um passo importante. Podem pensar mais um pouco, pois realmente há algo que eu quero que vocês percebam.
30. G- (grito) Já sei. É só ir juntando o menor com o maior, depois o segundo com o outro maior e aí sobra o do meio.
31. K- O do meio se fizer ele ao quadrado dá o 16. É isso professor?
32. P- Isso mesmo.
33. J- Então dá pra fazer sem montar?

34. K- É só a gente achar quais são os divisores do número primeiro.
35. A- Como que faz isso mesmo?
36. K- Tem que fazer aquele negócio do MMC.
37. G- É só fazer a fatoração.
38. K- Então, é isso mesmo.
39. J- Como que faz isso?
40. G- (O aluno faz a fatoração do número 16 e depois explica como achar os divisores)
41. J- Ó, é até tranquilo.
42. K- Vamos tentar fazer o de 20 então.
43. G- (faz a fatoração e o grupo vai montando as possibilidades de retângulos).
44. J- Nesse não sobrou o número do meio.
45. G- Dá pra gente montar uma formulazinha assim ó. (mostra para os colegas do grupo)
46. K- Dá até pra chamar de fórmula arco-íris.
47. J- (risada) Fala com Darlan pra ver.
48. G- Vamos só colocar aqui no relatório. (enquanto os alunos escreviam o relatório, o professor se aproximou)
49. P- E então? Pensaram em mais alguma coisa aí?
50. G- Acho que essa quantidade de retângulos que dá pra gente formar vai ser sempre menor ou igual à raiz do número de quadradinhos.
51. P- Acha?
52. G- Então, eu tô pensando nisso aqui agora, vamos tentar fazer uns testes aqui e ver se dá.
53. P- Ok. Vão pensando aí e qualquer coisa me chamem.
54. G- Como que olha quantos divisores que o número tem?
55. P- (Explica como fazer)
56. G- Vou tentar ver se consigo alguma coisa aqui.
57. K- Não inventa moda não G.

...Depois de algum tempo. O professor retorna ao grupo.

58. G- É, não deu não. Ficou muito complicado pra provar, mas fazendo uns testes aqui, com todos que eu fiz deu sempre menor ou igual à raiz de n.
59. P- Vamos tentar pensar em algo para a próxima aula.

Nota-se na conversação entre alunos do grupo que integra a aluna J que, mesmo ela apresentando certa dificuldade de aprendizagem em relação aos demais, ela está participando de igual para igual como os outros alunos, no momento em que ela argumenta, questiona e se posiciona perante os demais. Uma ação surpreendente, já que seu perfil é de uma aluna tímida, de rendimento escolar mediano e pouco expressiva nas aulas.

A mudança no seu comportamento pode ser observada no diálogo transcrito, a partir da linha 09 à linha 47. Onde ocorre o compartilhamento do conhecimento sobre geometria e aritmética.

Percebe-se nesse episódio, mais precisamente entre as linhas 11 e 15, que a aluna desconhecia que o quadrado é um tipo de retângulo. Até que os colegas de grupo K e G, nas linhas 12 e 14 explicam a ela as características das duas figuras que são polígonos, enfatizando os ângulos retos é que as caracterizam como retângulos.

Nota-se que a aluna tinha um entendimento equivocado que foi corrigido pelo colega, de uma forma simples como ele próprio aprendeu, e ela agora demonstra compreensão, conforme linha 15.

É possível perceber que a aluna se interessou pelo que seus colegas de grupo já dominavam e estavam dispostos a ensinar a ela. Mesmo apresentando certa resistência em dar continuidade no desenvolvimento da atividade, a mesma foi chamada a voltar a atenção ao solicitado conforme registram as linhas 16 e 19.

A atuação da aluna no grupo nos remete à ideia de ZDP (zona de desenvolvimento proximal) defendida por Vygotsky, pois ocorre o compartilhamento do entendimento de cada um dos alunos, ou seja, ocorreu uma motivação pelos demais para que ela se expressasse não ficando à margem da resolução da questão proposta para investigação.

Em um determinado momento da atividade, os alunos detectaram que poderiam utilizar os divisores da área dada, agrupando-os 2 a 2, para determinar o comprimento dos lados dos retângulos. Fato registrado entre as linhas 30 e 37.

A aluna nesse momento fica sem saber como fazer o cálculo do que foi exposto pelos colegas (linha 39), o que é sanado pelo colega na linha 40. Na sequência, a aluna dá indícios que compreendeu o que foi explicado pelo colega (linha 41). Isso fica evidente na linha 44, após o colega fazer a fatoração e o grupo testar as possibilidades de construção de retângulos, já que a aluna prontamente percebeu que nesta fatoração, na lista de divisores encontrados, não sobrou o termo central.

Esse episódio dá mostras da validade da atividade coletiva como contribuinte para que a aluna se sinta à vontade de expor suas dúvidas, algo pouco usual, dando a chance de seus colegas a ensinarem.

Na oficina de construção de sólidos, presenciei uma nova postura da aluna J que me chamou a atenção como professor. No momento em que os alunos estavam verificando quais poderiam ser as medidas dos lados dos polígonos pedidos, esta aluna me chamou até a sua mesa e questionou se poderia ser usado o que foi discutido na oficina dos quadradinhos, ou seja, usar os divisores da área do quadrado para construir os outros polígonos, conforme registrado aos 10':30" do vídeo feito da atividade, ilustrado pela figura 26.

Figura 26: Descoberta da aluna J.

Fonte:Dados da Pesquisa

Percebendo que os valores encontrados pela aluna como medidas dos lados do retângulo não seriam viáveis na contrução dos sólidos, orientei a aluna que tentasse determinar outros valores que possibilitassem tal construção, explicando-a o motivo da inviabilidade na construção. Tal inviabilidade se dá pela diferença entre as medidas do comprimento e da largura que, por serem muito distantes acarretariam em um sólido com expessura muito fina, o que dificultaria no momento do seu preenchimento pelas pedras de aquário.

Passados mais alguns minutos a aluna novamente conseguiu encontrar outros valores que serviriam para a construção dos sólidos, conforme registrado no minuto 19':40" e ilustrado pela figura 27.

Figura 27: Segunda descoberta da aluna J.

Fonte:Dados da Pesquisa

Figura 28: Aprovação do professor ao raciocínio da aluna J.

Fonte:Dados da Pesquisa

Após conseguir determinar os valores dos lados dos polígonos, a aluna notou que um colega de sala, que estava na mesa ao seu lado, estava com dificuldades em resolver a atividade. A aluna então me perguntou se ela poderia ajudar o colega, o que foi autorizado. Depois de alguns minutos ela me chamou novamente para mostrar que ela tinha conseguido explicar ao colega como chegar à solução do problema com o valor que ele tinha suposto inicialmente.

Figura 29: A aluna orientando o colega.

Fonte:Dados da Pesquisa

Figura 30: Interação entre a aluna, o colega e o professor.

Fonte:Dados da Pesquisa

5.2 Comentários sobre a atividade prática realizada

Ao propor uma atividade coletiva voltada à aprendizagem geométrica aplicando o Princípio de Cavalieri, foi possível perceber no comportamento dos alunos, indícios do grau de conhecimento que eles apresentam e como muitos se comportaram no decorrer das atividades propostas pelo professor.

Foi possível perceber que alguns alunos se organizaram para executar as tarefas, se apropriando dos conceitos a eles apresentados na aula conceitual para então, colocá-los em prática. Essa apropriação percebida, aponta que fazer uma revisão do conteúdo de geometria plana para identificar o grau de conhecimento dos alunos foi válida, para fazê-los relembrar o que aprenderam, e ainda proporcionar aos que não aprenderam naquele momento, fazê-lo agora.

Nota-se na experiência prática vivenciada um caminho facilitador e contribuinte da aprendizagem dos alunos pelo lado que foi programada e conduzida pelo professor, e sendo essa experiência coletiva, pode ser avaliada como um episódio rico e marcante no aprendizado dos conceitos do Princípio de Cavalieri.

Ao colocar em prática a proposta da aprendizagem coletiva nos moldes defendidos por Vygotsky, reforcei minha percepção em relação às turmas participantes da pesquisa. Nessas turmas, poucos alunos demonstraram um conhecimento prévio dos conceitos trabalhados. A maioria dos alunos em ambas as turmas apresentou evidências de avanços nas conversações entre os membros de cada grupo e na realização prática.

Em estudo realizado por Soares, Paula e Vieira (2016), encontramos apoio à ideia que as interações coletivas proporcionadas nesta pesquisa dão aos alunos elementos que os levam a melhor compreender o Princípio de Cavalieri. Mesmo que alguns comportamentos individuais se destacaram frente aos demais, a maioria deu indícios de que adquiriu algum aprendizado. Situação semelhante à vivenciada pelos autores Soares, Paula e Vieira (2016) em seu estudo, assim narrado por eles:

> [...]Sabemos que os comportamentos dos alunos foram bastante diversificados. Alguns aparentemente tentaram resolver o desafio de maneira mais individual; outros se uniram a companheiros e compartilharam descobertas; outros ainda alternaram entre trabalhar individualmente e interagir com grupos de colegas (SOARES, PAULA, VIEIRA, 2016, p.497).

Nesse contexto, à medida em que o professor investiga como se processa a aprendizagem de seus alunos, pode propor atividades mais dinâmicas e que exijam dos alunos um pensamento matemático mais avançado e embasado nas provas concretas testadas por eles próprios.

Os dois episódios que marcam a evolução da aprendizagem da aluna J, em relação ao Princípio de Cavalieri, ilustram o quanto o saber adquirido pode e deve ser compartilhado. A mesma surpreende ao encontrar caminhos para a resolução da questão que não foram pensados até mesmo por alguns alunos que apresentam certa facilidade em assimilar os conteúdos desenvolvidos em sala de aula. J identificou um caminho novo para resolver a atividade e interagiu com o professor expondo sua visão e como os colegas de sala.

Entende-se que ao adotar a estratégia da aprendizagem coletiva, promover a observação do comportamento dos alunos é favorável ao professor. Soares, Paula e Vieira (2016), sugerem como o processo de aprendizagem se desenvolve e como essa pode ser potencializada.

Vale salientar que as considerações feitas aqui refletem apenas o universo das turmas A e B da escola RP, não podendo ser generalizada. Pois como destacam Soares, Paula e Vieira (2016, p.498): "Cada movimento observado durante a aula guarda uma singularidade, a qual merece ser assim considerada antes que se pretenda partir para generalizações".

E tal qual no estudo realizado por esses autores, as impressões registradas da atividade realizada se apoiam nos dados coletados e analisados pelo professor e são resumo do que foi registrado por fotografias, áudios e vídeos. O que nos leva a crer que em outros momentos e com outros alunos, pode-se chegar a outras percepções diferentes das aqui registradas.

6 Considerações finais

Ao tentar criar uma situação de aprendizagem do Princípio de Cavalieri, na comparação de áreas e volumes de uma forma prática, fazendo uso da investigação matemática com o envolvimento de todos os alunos, pude perceber que esse tipo de metodologia contribui de forma positiva para o desenvolvimento da aprendizagem, no momento em que leva o aluno a dialogar com o outro e com o professor. Essa interação nos fornece pistas de que houve um aumento no nível de compreensão e conhecimento dos alunos acerca dos assuntos abordados.

Esse comportamento de investigação e análise coletiva nos dá pistas de que há alguma aprendizagem acontecendo nessa interação entre os alunos. Isso pode orientar o professor no sentido de trabalhar os conteúdos de forma mais desafiadora.

Conclui-se, portanto, que a atividade proposta para a aquisição da aprendizagem geométrica atingiu seu objetivo ao favorecer a aproximação entre os alunos. O despertar da análise crítica da situação-problema apresentada pelo professor permitiu chegar ao resultado correto da atividade.

De modo que fica a sugestão de novas investigações em torno da aprendizagem como forma de captar as atitudes comportamentais dos alunos em atividades de aprendizagem coletiva, com outros conteúdos da geometria.

7 Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que fez o tempo certo para tornar real meu sonho.

À minha mãe Geralda (In memorian), que deixou como seu legado o exemplo de que dedicação e amor à profissão é que faz o "excelente profissional".

À minha esposa Sheila, companheira de vida, obrigada por sempre me incentivar a melhorar a cada dia, por aguentar firme as minhas ausências, compreendendo que todo o tempo dedicado aos estudos era fundamental para que eu alcançasse meu objetivo.

Ao meu filho Enzo por aceitar, muitas vezes sem compreender porque nem sempre, eu estava disponível para as brincadeiras, tão comuns entre pai e filho. Agora, terei tempo para nós!

Ao meu pai pela compreensão da quase extinção das minhas visitas que até então eram quase que semanais.

Ao meu sogro e minha sogra por entenderem os muitos momentos em que estive ausente.

Aos meus irmãos pelo apoio e incentivo que me motivam diariamente a ser alguém melhor do que sou.

Ao Prof. Orientador Eduardo Sarquis Soares, por acreditar na minha proposta, me orientar e dividir comigo seu vasto conhecimento. Suas orientações foram de suma importância para a concretização deste estudo, incorporo à minha prática educativa muito do que compartilhou comigo.

Aos colegas e amigos que vivenciaram comigo toda luta na trajetória desse Mestrado. Sem o compartilhamento do que aprendemos, com certeza teria sido ainda mais difícil a vitória.

Aos professores do PROFMAT que compartilharam seu conhecimento ao longo do curso.

Aos meus alunos por participarem da pesquisa que resultou neste estudo.

À CAPES pelo apoio financeiro que foi de suma importância para a concretização desse curso.

E, por fim a todas as pessoas que nunca duvidaram do meu potencial, meus sinceros agradecimentos.

Referências

[1] ALHANATI, Lucien Silvano. Princípio de Cavalieri GEO16. In: GONÇALVES, André Tavares. Princípio de Cavalieri: aspectos históricos e aplicações práticas na resolução de cálculos de área e volumes. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais-Programa de Pós-Graduação em Matemática. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2015.

[2] BENK, Polyana. DA SILVA, Sérgio Marconi. FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. SIPLE, Ivanete Zuchi. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. II Colbeduca – 5 e 6 de setembro de 2016 – Joinville, SC, Brasil. Disponível em: http://www.periodicos.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8513/6132. Acesso em: 25. set. 2017.

[3] BONJORNO, Regina Azenha; BONJORNO, José Roberto. Pode contar comigo. Matemática. Vol. 2. São Paulo: FTD, 1995.

[4] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. V. 3: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio – Matemática. Brasília/MEC, 2002.

[6] BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, A. F. Dionísio (Eds.), Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

[7] BROCARDO, J. Investigações na aula de matemática: A história da Rita.In: CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. Investigações Matemáticas. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011 ISSN 2237-809X 162. Disponível em: http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/viewFile/346/303. Acesso em: 20.ago.2017.

[8] CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. Investigações Matemáticas. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011 ISSN 2237-809X 162. Disponível em: http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/viewFile/346/303. Acesso em: 20.ago.2017.

[9] DANTE, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de matemática, 1ª. a 5ª. séries: para estudantes do curso de Magistério e professores do 1º. Grau. 12. ed. São Paulo: Ática, 2002.176 p. (Série educação).

[10] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: Editora da UNICAMP, 2004. In: WEIGEL, Mauro. Bonaventura Cavalieri. Portal da matemática, 2010. Disponível em: http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura-cavalieri.html. Acesso em: 20.ago.2017.

[11] GONÇALVES, André Tavares. Princípio de Cavalieri: aspectos históricos e aplicações práticas na resolução de cálculos de área e volumes. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais-Programa de Pós-Graduação em Matemática. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2015.

[12] LULA, Kariton Pereira. Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo volumes e áreas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/533/2011 00432 KARITON PEREIRA LULA.pdf?sequence=1. Acesso em: 06.ago.2017.

[13] MELCHIOR, Maria Celina. Avaliação pedagógica: função e necessidade. Porto Alegre: Mercado Aberto, 2002.

[14] NOÉ, Marcos. Princípio de Cavalieri. In: Geometria métrica especial. Equipe Brasil Escola Disponível em: http://www.brasilescola.com/matematica/principiocavalieri.htm . Acesso em: 06.ago.2017.

[15] PATERLINI, Roberto Ribeiro. Os “Teoremas” de Cavalieri. In: Revista do Professor de Matemática, n. 72, 2° quadrimestre de 2010. Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/ ptlini/paterlini cavalieri.pdf. Acesso em: 06.ago.2017

[16] PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Editora Autêntica. 3.ed.rev.ampl, Coleção Tendências em Educação Matemática 7. 2016. 106p.

[17] PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. A aula de investigação. In: PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Editora Autêntica. 3.ed.rev.ampl, Coleção Tendências em Educação Matemática 7. 2016. 106p.

[18] PROULX Jérôme PIMM. David. Algebraic Formulas, Geometric Awareness and Cavalieri’s . Reviewed work(s):Source: For the Learning of Mathematics, Vol. 28, No. 2 (Jul., 2008), pp. 17-24 Published by: FLM Publishing Association Stable. Avaiable form: http://www.jstor.org/. Acess: 25. set. 2017.

[19] SARAMAGO, Guilherme; CUNHA, Ana Maria Oliveira. Ensinar Matemática: perspectivas teóricas e práticas dos professores. In: Selva Guimarães Fonseca. (Org.). Ensino Fundamental - conteúdos, Metodologias e Práticas. Campinas/SP: Alínea, 2009, v. p. 93-114.

[20] SOARES, EDUARDO SARQUIS; PAULA, GRACE MARISA MIRANDA DE; VIEIRA, MARIA LÚCIA. Aprendizagens no contexto de uma atividade: um confronto teórico analisado a partir de um exemplo prático. Rev. Bras. Educ., Rio de Janeiro, v. 21, n. 65, p. 477-503, Junho, 2016. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci arttextpid=S1413-24782016000200477lng=ennrm=iso. Acesso em: 06. Nov. 2017. http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782016216525.

[21] VYGOTSKY, L.S. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes,2009.

[22] VYGOTSKY, L.S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: Psicologia e Pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento. 2 ed. São Paulo: Centauro, p. 01-17, 2003.

[23] WEIGEL, Mauro. Bonaventura Cavalieri. Portal da matemática, 2010. Disponível em: http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura-cavalieri.html. Acesso em: 20.ago.2017.