Universidade Federal de João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Vladimir Boechat Braga Filho

Um estudo aprofundado sobre as funções quadráticas aplicado ao Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre(a) pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Orientador: Maurício Reis e Silva Júnior

Ouro Branco
2016

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de agosto de 2016 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Professores.

Prof. Dr. Maurício Reis e Silva Júnior
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Rogério Casagrande
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dra. Gilcélia Regiane de Souza
Universidade Federal de São João del-Rei

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é oferecer um material complementar aos livros didáticos adotados pelos professores, quando estes abordam as funções quadráticas. O texto do trabalho traz demonstrações sobre simetria, concavidade, crescimento e decrescimento das funções quadráticas sem o uso do Cálculo Diferencial e Integral, na medida do possível, que podem ser utilizadas como apoio no Ensino Médio e que geralmente são deixadas para os cursos superiores de exatas. Tais demonstrações também podem ser utilizadas no começo dos cursos superiores de exatas. Algumas definições sobre os conceitos citados são elencadas a fim de que as demonstrações tenham respaldo. Outro cuidado que foi tomado é a inserção de exercícios para serem resolvidos com o uso do software matemático gratuito Geogebra.

Palavras-chave: Funções quadráticas, parábola, gráficos de funções.

1 Introdução

As funções matemáticas estão presentes em nosso cotidiano, desde corridas de táxi até financiamento de imóveis. A forma dos gráficos de funções aparecem no arco-íris e nos fios da rede elétrica de nossas ruas (ambas as curvas são chamadas de catenária), nas antenas parabólicas e várias formas da natureza conservam propriedades de algumas curvas provenientes de relações matemáticas, como a espiral logarítmica que aparece nos caracóis [5]. O intuito deste trabalho é o de estudar as funções quadráticas utilizando, na medida do possível, uma abordagem diferente das que aparecem nos tradicionais livros de Ensino Médio de Matemática e trazendo para esse nível de ensino demonstrações que normalmente são deixados para o Ensino Superior. Conceitos como os de simetria, crescimento e decrescimento de funções, pontos de mínimo e de máximo global de funções, além de concavidade, ajudarão na demonstração de algumas proposições feitas ao longo do texto. Algumas definições serão apresentadas neste começo e, à medida que for necessário, outras surgirão.

2 Conceitos básicos

A associação entre elementos de dois conjuntos constitui talvez o conceito mais importante da Matemática e é intuitivamente utilizado pelas pessoas no dia-a-dia. Quando damos nomes às pessoas, por exemplo, temos uma função de um conjunto de sons, denominados "fonemas", em relação a um conjunto de indivíduos. Ao enchermos uma garrafa de líquido e vermos nele uma gradação, podemos determinar o volume a partir da altura do líquido. Temos aí uma função que associa números reais não negativos. A primeira definição abordada no trabalho é exatamente sobre o conceito de função em Matemática.

Definição 2.1 *Função é uma relação entre um conjunto $\mathbb{X}$ e um conjunto $\mathbb{Y}$ de forma que para cada elemento x de $\mathbb{X}$ exista um e somente um elemento y de $\mathbb{Y}$ que esteja relacionado a x.*

Para o presente estudo, trataremos de uma classe especial de funções definidas no corpo dos números reais que são chamadas de funções polinomiais. Antes, definiremos essa classe de funções.

Definição 2.2 *Funções polinomiais em relação a x são da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x^1 + a_0 x^0$, onde $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$.*

Observação 2.1 *Caso $n = 1$, a função é chamada de polinomial do primeiro grau, se $n = 2$ a função é polinomial do segundo grau e assim sucessivamente.*

A função quadrática é então uma função polinomial do segundo grau ($n = 2$), cuja representação algébrica pode ser feita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O gráfico de uma função definida em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pontos da forma $(x, f(x))$ no plano cartesiano. A definição de gráfico de funções relacionadas a este trabalho aparece logo a seguir:

Definição 2.3 *Uma função na forma $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada uma função real (pois seus valores são números reais, isto é, seu contradomínio é $\mathbb{R}$) de variável real (pois sua variável independente assume valores reais, isto é, seu domínio é um subconjunto de R). O gráfico de uma função desta forma é o seguinte subconjunto do plano cartesiano:*

$$\mathbb{R}^2 : G(f) = (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{D}, y = f(x)[1].$$

3 A função quadrática

Neste capítulo, dada a importância do tema e também ao fato de que várias relações não são demonstradas satisfatoriamente nos livros de Ensino Médio, serão mostradas as relações de simetria, a existência do vértice, crescimento e decrescimento, a fim de construir o gráfico da função quadrática, inclusive demonstrando que tal gráfico trata-se realmente de uma parábola. A concavidade da parábola também será retratada, bem como uma introdução às funções modulares do tipo quadráticas, que serão definidas ao longo do texto.

Diferentemente da função afim, que trata-se de uma função polinomial do primeiro grau, a taxa de crescimento da função quadrática não é constante, pois a diferença $f(x+h) - f(x) = 2axh + ah^2 + bh$ não depende apenas das constantes a e h, dependendo também da variável x, sendo a e $h \in \mathbb{R}$.

A função quadrática, apesar de não ser trivial a observação, aparece em várias situações do nosso dia a dia, como por exemplo, a posição vertical, ou a altura de um objeto que cai com aceleração da gravidade em função do tempo, é descrita por uma forma quadrática em t (tempo).

As propriedades da parábola são de grande importância no nosso cotidiano. Por exemplo, a coleção de pontos percorridos (trajetória) de um projétil tem a forma de uma parábola no plano onde se dá o movimento, além disso a definição geométrica de parábola é usada na fabricação de espelhos côncavos, telescópios, antenas parabólicas, refletores de faróis luminosos e lanternas, entre outros. No nosso cotidiano, as trajetórias descritas pelas gotas de água que saem de um bebedouro, ou por uma bola que é chutada para cima em uma partida de futebol, assemelham-se às parábolas.

Apesar de relativa simplicidade, a função quadrática apresenta características interessantes do ponto de vista algébrico. A procura pelas raízes da função quadrática leva ao questionamento sobre existência dos números complexos, pois a solução da equação $f(x) = 0$ apresenta três casos distintos, com duas soluções distintas, ou duas soluções iguais (ou uma única solução, dependendo do ponto de vista), ou nenhuma solução dentro dos números reais.

A função quadrática nos permite estudar aspectos geométicos e suas relações algébricas correspondentes. Isso se refere a relações de simetria, crescimento e decrescimento e ao momento que essas relações são aprofundadas, outras aparecem, como a existência de um ponto de máximo, ou de mínimo global, também chamado de vértice, e de uma fórmula que determina os zeros da função quadrática.

3.1 O gráfico da função quadrática

Uma forma eficiente de se observar o comportamento de uma função é visualizar seu gráfico. Neste sentido, serão apresentados alguns conceitos que ajudarão na construção dos gráficos das funções quadráticas. Para começar, usaremos a técnica de demonstração por redução ao absurdo para demostrar que o gráfico de uma função quadrática não é uma reta, mas antes será necessária a definição de uma fórmula para a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Definição 3.1 *A distância entre dois pontos* $P_1 = (x_1, y_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2)$ *é dada pela fórmula* $dist(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ *[7], em que* $dist(P_1, P_2)$ *é o segmento de reta que une os dois pontos citados.*

Proposição 3.1 *O gráfico da função quadrática não é uma reta.*

Demonstração: Suponha que tal gráfico seja uma reta. Sejam os pontos

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1 - h, a(x_1 - h)^2 + b(x_1 - h) + c = f(x_1 - h)) \\ P_2 &= (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c = f(x_1)) \\ P_3 &= (x_1 + h, a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c = f(x_1 + h)) \end{aligned}$$

A soma das medidas das partes de um segmento de reta é igual à medida do segmento de reta, ou seja:

$$Dist(P_1, P_2) + Dist(P_2, P_3) = Dist(P_1, P_3)$$

caso tais pontos pertençam a um mesmo segmento de reta.

$$
\begin{aligned}
Dist(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - h - (x_1))^2 + ((ax_1^2 + bx_1 + c) - (a(x_1 - h)^2 + b(x_1 - h) + c))^2} \\
&= \sqrt{(h^2 + (h^2 - 2x_1h - bh)^2)}
\end{aligned}
$$

Analogamente:

$$
\begin{aligned}
Dist(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_1 + h - (x_1))^2 + (a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c - (ax_1^2 + bx_1 + c))^2} \\
&= \sqrt{(h^2 + (h^2 + 2x_1h + bh)^2)}
\end{aligned}
$$

Dessa forma:

$$
Dist(P_1, P_2) + Dist(P_2, P_3) = \sqrt{(h^2 + (h^2 - 2x_1h - bh)^2)} + \sqrt{(h^2 + (h^2 + 2x_1h + bh)^2)} \quad \mathbf{(1)}
$$

Ainda:

$$
\begin{aligned}
Dist(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_1 + h - (x_1 - h))^2 + ((ax_1^2 + bx_1 + c) - (a(x_1 - h)^2 + b(x_1 - h) + c))^2} \\
&= \sqrt{(h^2 + (h^2 - 2x_1h - bh)^2)} \quad \mathbf{(2)}
\end{aligned}
$$

Para mostrar que $Dist(P_1, P_2) + Dist(P_2, P_3) \neq Dist(P_1, P_3)$, ou seja, que **(1)** $\neq$ **(2)** é só substituir a, x_1, h e b por 1, por exemplo, em **(1)** e **(2)**, chegando-se à conclusão de que $\sqrt{5} + \sqrt{17} \neq \sqrt{5}$, o que é um absurdo, já que a soma das medidas das partes de um segmento de reta deve ser igual à medida do segmento de reta. Tal absurdo veio da suposição de que o gráfico da função quadrática é uma reta. Dessa forma, tal gráfico não é uma reta.

□

A utilização da simetria ajuda a encontrar pontos notáveis da parábola, como seu vértice e suas raízes, mas para utilizá-la é necessário demonstrar que realmente a parábola tem propriedades de simetria, o que geralmente não ocorre nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio brasileiro atual. Para entender melhor essa ideia, precisamos estabelecer preliminarmente o que vem a ser o conceito de simetria a ser utilizado e quais propriedades do gráfico da função quadrática estão relacionadas a este conceito.

Definição 3.2 *O gráfico de uma função é simétrico em relação a uma reta $x = k$ (eixo de simetria) com $k \in \mathbb{R}$, caso exista k tal que $f(k+x) = f(k-x)$, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.*

Proposição 3.2 *O gráfico da função quadrática é simétrico em relação à uma reta paralela ao eixo das ordenadas (eixo de simetria).*

Demonstração: Seja novamente $f(x) = ax^2 + bx + c$ e também $v_x \in \mathbb{R}$. Pela definição 3.2, para que a parábola seja simétrica a uma reta $x = v_x$ (eixo de simetria), basta existir um v_x que torne a equação que $f(v_x + x) = f(v_x - x)$ verdadeira.

A ideia aqui é supor que $f(v_x + x) = f(v_x - x)$ para que, caso a igualdade tenha solução, o valor de v_x seja exibido:

$$\begin{aligned} f(v_x + x) &= a(v_x + x)^2 + b(v_x + x) + c \\ &= a(v_x^2 + 2v_x x + x^2) + bv_x + bx + c \\ &= av_x^2 + 2av_x x + ax^2 + bv_x + bx + c \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Analogamente:

$$f(v_x - x) = av_x^2 - 2av_x x + ax^2 + bv_x - bx + c. \quad \textbf{(2)}$$

Igualando-se **(1)** e **(2)**:

$$\begin{aligned} f(v_x + x) &= f(v_x - x) \\ av_x^2 + 2av_x x + ax^2 + bv_x + bx + c &= av_x^2 - 2av_x x + ax^2 + bv_x - bx + c \\ 4av_x x &= -2bx \\ v_x &= \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

Como existe $v_x = \frac{-b}{a}$ tal que $f(v_x + x) = f(v_x - x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então a função polinomial do segundo grau é simétrica em relação à reta $x = v_x$ (eixo de simetria). A ordenada de v_x é $f(v_x) = -\frac{b^2-4ac}{4a} = y_v$. Fica implícito também que $f(x) = ax^2 + bx + c$ não é injetiva em $\mathbb{R}$, pois $f(v_x + x) = f(v_x - x)$. $\square$

3.1.1 Uma fórmula para se encontrar as raízes de uma equação polinomial do segundo grau

As soluções da equação $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ a função quadrática, são atribuídas ao matemático indiano Bháskara, que viveu no século XII [6]. Contudo, há indícios de que os chineses já utilizavam essas soluções antes mesmo do nascimento de Bháskara. Normalmente, a demonstração da fórmula de Bháskara é realizada utilizando-se a técnica de completamento de quadrados, contudo, neste texto, usaremos o fato aqui demonstrado de que o gráfico da função quadrática é simétrico em relação à reta $x = x_v$.

A definição a seguir será necessária.

Definição 3.3 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma:*

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, se\ x \geq 0, ou \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

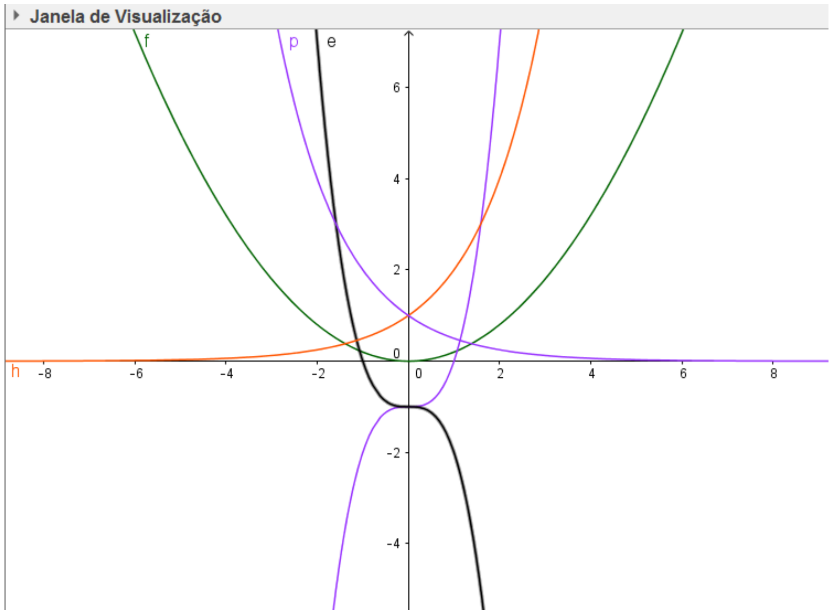

Figura 1: Simetria no gráfico de funções

Proposição 3.3 *As soluções da equação $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ a função quadrática são da forma* $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Demonstração: Utilizando a demonstração da proposição anterior, o número $\frac{-b}{2a} + x$, com x, a e $b \in \mathbb{R}$, pode assumir qualquer valor entre os números reais. Dessa forma, sendo a e b os coeficientes dos termos de x^2 e x, respectivamente, na lei da função quadrática, é natural supor que caso uma equação polinomial do segundo grau tenha raiz, exista um ou mais valores de x que tornem a equação $f(\frac{-b}{2a} + x) = 0$ verdadeira, sendo $f(x)$ a função quadrática.

Assim:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{-b}{2a} + x\right) &= 0 \\
a\left(\frac{-b}{2a} + x\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} + x\right) + c &= 0 \\
b^2 + 4abx + 4a^2x^2 - 2b^2 - 4abx + 4ac &= 0 \\
x^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a raiz da equação polinomial do segundo grau é:

$$\frac{-b}{2a} + x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Usou-se definição 3.3 aqui, já que caso $a < 0$, $\sqrt{4a^2} = -4a$ e inverte o sinal de $\pm$, o que não faz diferença no resultado final. $\square$

Observação 3.1 *Uma boa maneira de motivar os alunos é utilizar exercícios do cotidiano. Num problema em que envolve uma partida de futebol, a trajetória que a bola descreve quando o goleiro bate um tiro de meta pode ser aproximada por uma parábola, com a reta que passa pelo local onde a bola está parada e que é perpendicular à linha de fundo coincidindo com o eixo das abscissas. Supondo que a bola esteja no chão na abscissa 2 metros e que a bola atinja o chão novamente no ponto de abscissa 34 metros, seria interessante que o professor encontrasse a função quadrática que descreve essa situação, deixando a altura máxima que a bola atinge em aberto. Escrever $f(x) = ax^2 + bx + c$ de outro modo em que apareça as raízes da função pode ser uma solução.*

Proposição 3.4 *A lei da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita como $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, onde r_1 e r_2 são as raízes de $f(x)$.*

Demonstração: Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, com r_1 e r_2 como suas raízes reais (caso existam).

Para encontrarmos o resto de $p(x)$ por $(x - r_1)(x - r_2)$ temos (algoritmo de Euclides):

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) + x(b + ar_2 + ar_1) - ar_1r_2 + c \quad \mathbf{(1)}.$$

Como $p(r_1) = 0$ e $p(r_2) = 0$, substituindo x pelos os valores de r_1 e r_2 em **(1)**, temos:

$$\begin{cases} br_1 + ar_1^2 + c = 0 & \mathbf{(2)}; \\ br_2 + ar_2^2 + c = 0 & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

$$\mathbf{(2)} - \mathbf{(3)} \Rightarrow b(r_1 - r_2) + a(r_1^2 - r_2^2) = 0 \Rightarrow (r_1 - r_2)(b + ar_1 + ar_2) = 0$$

Se $r_1 \neq r_2$, então $(b + ar_1 + ar_2) = 0 \quad \mathbf{(4)}$

Voltando a **(1)**:

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) + x(b + ar_2 + ar_1) - ar_1r_2 + c$$

Utilizando **(4)** em **(1)**:

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) + 0 - ar_1r_2 + c \quad \mathbf{(5)}$$

Ainda,

$$r_1r_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \mathbf{(6)}$$

Utilizando **(6)** em **(5)**:

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) + 0 - a\frac{c}{a} + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Dessa forma,

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$

No caso em que $r_1 = r_2$ é de se esperar que $f(x)$ possa ser escrita como

$$a(x - r_1)(x - r_1) = ax^2 - 2axr_1 + ar_1^2 \quad \textbf{(7)}.$$

Temos também que

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac \quad \textbf{(8)}$$

e

$$r_1 = \frac{-b}{2a} \quad \textbf{(9)},$$

ou seja, a raiz da função quadrática torna-se o próprio vértice. De **(7)**, **(8)** e **(9)**:

$$ax^2 - 2axr_1 + ar1^2 = ax^2 - 2ax\left(\frac{-b}{2a}\right) + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = ax^2 + bx + \frac{4ac}{4a} = ax^2 + bx + c.$$

E dessa forma, a fórmula é válida também quando $r_1 = r_2$.

$\square$

Voltando ao problema do tiro de meta em uma partida de futebol e utilizando a forma $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, a lei da função que o professor procura é $f(x) = a(x - 2)(x - 34)$. Como $a < 0$ para que o vértice da parábola (Vide proposição 3.5 e observação 3.2) seja ponto de máximo global da função (vide definição 3.4 mais adiante), fica a cargo do professor usar o valor de a que entender melhor, desde que o resultado final seja próximo do que realmente acontece em uma situação real de jogo, como usar um valor factível para a altura máxima alcançada pela bola. Caso seja interessante saber, por exemplo, qual é a parábola que tenha raízes r_1 e r_2 e que passe pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, é só substituir os valores conhecidos na lei $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$:

$$p(x_0) = a(x_0 - r_1)(x_0 - r_2) = y_0 \Rightarrow a = \frac{y_0}{x_0^2 - x_0r_2 - x_0r_1 + r_1r_2}$$

Dessa forma,

$$p(x) = \frac{y_0(x - r_1)(x - r_2)}{x_0^2 - x_0r_2 - x_0r_1 + r_1r_2}.$$

Uma função pode assumir valores que são os maiores, ou os menores possíveis que a função pode atingir. Por exemplo, a parábola que descreve a trajetória da bola no exemplo anterior deverá ter um ponto que representa a altura máxima alcançada pela bola em relação ao chão. Esses valores máximos e mínimos são muito explorados em otimização. Por exemplo, entre os retângulos de lados $(x+1)$ e $(6-x)$, com $x \in \mathbb{R}$, o que possui a maior área possível é um quadrado de lados $\frac{7}{2}$. A definição a seguir, caracteriza os conceitos de máximo global e de mínimo global de funções.

Definição 3.4 *O ponto (x_0, y_0) é ponto de máximo global de $f(x)$ da forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se para qualquer $x \neq x_0$, $y_0 > f(x)$. O ponto (x_0, y_0) é ponto de mínimo global de tal função se para qualquer $x \neq x_0$, $y_0 < f(x)$.*

Dessa forma, a parábola tem seu ponto de máximo, ou de mínimo global e pelo fato de $V = (x_0, y_0)$ ser um ponto essencial para a simetria da parábola, é razoável supor que tal ponto possa ser o vértice da parábola.

Proposição 3.5 *O ponto $V = \left(v_x = \frac{-b}{a}, v_y = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$ da função quadrática é ponto de mínimo, ou de máximo global.*

Demonstração: Pela definição 3.4, é necessário e suficiente exibir o ponto (x_0, y_0) tal que para qualquer $x \neq x_0$, tenha-se $y_0 > f(x)$ no caso de ponto de máximo global. Para o caso de mínimo global é necessário que $y_0 < f(x)$.

Utilizaremos o ponto $V = (x_v, y_v)$ pela questão da simetria já relatada, ficando $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a} = y_v$. Afim de encontrarmos o intervalo em que $y_v > f(x)$, façamos as contas para $y_v - f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} y_v - f(x) &= 0 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a} - ax^2 - bx - c &= 0 \\ -\frac{-4a^2x^2 - 4abx - b^2}{4a} &= 0 \end{aligned}$$

A equação adimite apenas a solução $x = \frac{-b}{2a}$. Utilizando a fórmula para a obtenção da lei da função através de suas raízes e de seu coeficiente a, temos:

$$-\frac{-4a^2x^2 - 4abx - b^2}{4a} = \frac{-4a^2(x - \frac{-b}{2a})(x - \frac{-b}{2a})}{4a} = -a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Dessa forma $y_v - f(x) = -a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, então o sinal de $y_v - f(x)$ é dado pelo valor de $-a$. Se $a > 0$, então $y_v - f(x) < 0$, o que implica que o vértice da parábola é ponto de mínimo global de $f(x)$ e caso $a < 0$, $y_v - f(x) > 0$, o que implica que o vértice da parábola é ponto de máximo global de $f(x)$. $\square$

Observação 3.2 *O vértice $V = (x_v, y_v)$ de uma parábola é então ponto de mínimo, ou de máximo global do parábola. Isso quer dizer que $f(x)$ não assume valores menores do que $f(x_v) = \frac{-b^2-4ac}{2a}$, dentro do seu domínio, caso $a > 0$ e que caso $a < 0$, $f(x)$ não assume valores mmaiores do que $f(x_v) = \frac{-b^2-4ac}{2a}$, dentro do seu domínio.*

3.1.2 Problemas que envolvem a otimização de funções quadráticas

O exemplo resolvido a seguir, retirado de [1], ilustra bem o título desta seção.

Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Na situação 1 (início do problema), o restaurante vende 100kgs de comida a R\$12 o quilo, com cada cliente consumindo em média 500 gramas, o que resulta em R\$1.200 de receita e 200 clientes.

Na situação 2 (meio do problema), a cada R\$1 a mais no preço do quilo da comida, o restaurante perde 10 clientes. Suponhamos então que o preço da comida aumente R\$1. Para saber a receita do restaurante nessa situação, temos:

Número de clientes: $200 - 10 \cdot 1$;

Preço de meio quilo da comida: $0,5 \cdot (12 + 1)$;

Receita total: $(200 - 10 \cdot 1) \cdot 0,5 \cdot (12 + 1) = R\$1.235$

Sendo x cada real a mais no preço do quilo da comida, ficamos com:

Receita total: $(200 - 10 \cdot x) \cdot 0,5 \cdot (12 + x) = -5x^2 + 40x + 1.200$

Dessa forma, a receita total do restaurante, que chamaremos de $R(x)$, é uma função quadrática. Como $a < 0$, a função admite um ponto de máximo, que é o vértice da parábola. Usando as coordenadas do vértice da parábola, temos $v_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{-10} = 4$ e $v_y = f(v_x) = -5(4)^2 + 40(4) + 1.200 = 1.280$. Assim, a receita máxima do restaurante é de R\$1.280, quando o preço do quilo da comida é de R\$ 17, sendo este o valor ótimo pedido no enunciado do problema.

O problema envolvendo a altura máxima que uma bola atinge no tiro de meta em um campo de futebol também envolve o vértice da função quadrática. No caso, tínhamos que $f(x) = a(x - 2)(x - 34) = ax^2 - 36ax + 68a$. Dessa forma, $x_v = 18$ e $y_v = -256a$. Como $a < 0$, é só ajustar o valor de a para que a altura fique dentro de valores condizentes com o que ocorre numa partida de futebol. Por exemplo, se $a = -8$, a altura máxima que a bola atinge é de 32 metros em relação ao chão, o que é um valor aceitável.

No caso do exemplo envolvendo os retângulos de lados $(x+1)$ e $(6-x)$, com $x \in \mathbb{R}$, as áreas de tais retângulo são dadas pela fórmula $S(x) = (x+1)(6-x) = -x^2 + 5x + 6$. Como queremos dentre todos esses retângulos aquele que possui a maior área possível, então $x_v = \frac{5}{2}$ e $f(x_v) = \frac{49}{4}$. Interessante notar que trata-se de um quadrado de lados $\frac{7}{2}$.

A análise do crescimento e do decrescimento da função quadrática ajuda na construção do seu gráfico no plano cartesiano em $\mathbb{R}^2$, por isso é interessante definir melhor esses conceitos.

Definição 3.5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente em um intervalo I do seu domínio se para quaisquer x_2 e x_1 pertencentes a I, com $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$.*

Definição 3.6 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente decrescente em um intervalo I do seu domínio se para quaisquer x_2 e x_1 pertencentes a I, com $x_2 > x_1$, $f(x_2) < f(x_1)$.*

Proposição 3.6 *Se $x > x_v$, então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é estritamente crescente para $a > 0$ e estritamente decrescente para $a < 0$.*

Demonstração: Como queremos apenas o intervalo $x > \frac{-b}{2a}$, sejam h_1, h_2, x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, com $h_2 > h_1 > 0$, $x_1 = \frac{-b}{2a} + h_1$ e $x_2 = \frac{-b}{2a} + h_2$, o que faz com que $x_2 > x_1 > \frac{-b}{2a}$.

A ideia é calcular os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ e tentar tirar conclusões sobre a diferença $f(x_2) - f(x_1)$, de acordo com as definições 3.5 e 3.6.

$$f\left(\frac{-b}{2a} + h_1\right) = \frac{-b^2 + 4ah_1^2 + 4ac}{4a^2} \quad \textbf{(1)}$$

$$f\left(\frac{-b}{2a} + h_2\right) = \frac{-b^2 + 4ah_2^2 + 4ac}{4a^2} \quad \textbf{(2)}$$

Dessa forma, $f(x_2) - f(x_1) = \textbf{(2)} - \textbf{(1)} = \frac{(h_2+h_1)(h_2-h_1)}{a}$. Como $(h_2 + h_1)(h_2 - h_1) > 0$, se $a > 0$, então $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e a função quadrática é estritamente crescente no intervalo citado. Caso $a < 0$, então $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e a função quadrática é estritamente decrescente no intervalo citado, tendo em consideração que h_1 e $h_2 \in \mathbb{I} = [\frac{-b}{2a}, +\infty[$. □

Observação 3.3 *Com procedimento análogo é simples verificar que caso $x < x_v$, então $f(x)$ é estritamente crescente se $a < 0$ e caso $a > 0$, $f(x)$ é estritamente decrescente.*

Utilizando cálculo diferencial e integral, a derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f'(x) = 2ax + b$ [2] e o crescimento e o decrescimento da função quadrática podem ser então estudados através do estudo de sinal da função afim $f'(x) = 2ax + b$. Assim, se $f'(x) > 0$ em um intervalo $\mathbb{I}$, então $f(x)$ é crescente em $\mathbb{I}$ e caso $f'(x) < 0$ em um intervalo $\mathbb{I}$, então $f(x)$ é decrescente em $\mathbb{I}$ [2].

Analisando o gráfico de $g(x) = 2ax + b$ temos as seguintes possibilidades:

Para $a > 0$, $g(x) > 0$ se $x > \frac{-b}{2a}$, ficando então $f(x)$ crescente nestas condições. Caso $a < 0$, $g(x) < 0$ se $x > \frac{-b}{2a}$, ficando então $f(x)$ decrescente nestas condições.

Não é o intuito deste trabalho realizar demonstrações que utilizam cálculo integral e diferencial, mas fica o registro.

3.1.3 Uma definição de concavidade do gráficos de funções

Boa parte das pessoas sabe reconhecer uma superfície côncava, quando é apresentada a esta, embora não saiba, em boa parte também, definir corretamente o conceito de concavidade. Uma colher tem uma parte côncava e outra convexa, assim como os óculos, as antenas parabólicas e outros objetos do nosso cotidiano. Para o nosso estudo é necessário definir o conceito de concavidade do gráfico de uma função.

Definição 3.7 *O gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a concavidade voltada para cima em um intervalo aberto $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, se todos os segmentos de reta que ligam quaisquer dois pontos da função estiverem acima do gráfico da função no intervalo em questão. Caso todos os segmentos de reta citados estejam abaixo do gráfico da função em $\mathbb{I}$, a concavidade é voltada para baixo no intervalo em questão.*

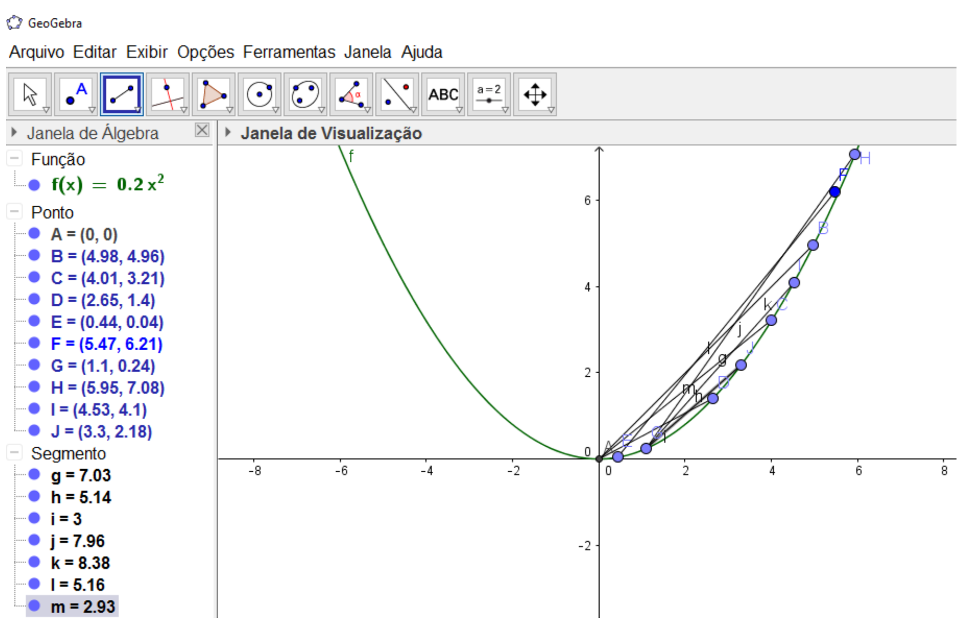

Figura 2: Uma outra definição sobre a concavidade do gráfico de funções

Observação 3.4 *Em geral, o aluno do Ensino Médio aprende que se o coeficiente a da função quadrática é maior do que zero, então a concavidade da parábola é para cima e em caso contrário, a concavidade da parábola é para baixo, considerando-se $a \neq 0$, entretanto, tal fato tem uma demontração aceitável apenas em [1], entre os livros didáticos deste nível de ensino que foram examinados. A demonstração a seguir usa ferramentas simples para comprovar que tal resultado sobre a concavidade das funções quadráticas é verdadeiro.*

Proposição 3.7 *Se o coeficiente a de $f(x) = ax^2+bx+c$ for maior do que zero, a concavidade da parábola é voltada para cima e caso $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.*

Demonstração: Sejam x_0, x_1, x, m e $n \in \mathbb{R}$, tais que $m < x_0 < x < x_1 < n$ e $\mathbb{I} = (m, n)$ um intervalo aberto. Usando a definição 3.7, seja $g(x)$ a reta que passa por $P_1 = (x_0, ax_0^2 + bx_0 + c = f(x_0))$ e $P_2 = (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c = f(x_1))$, pontos oriundos de $f(x)$. Efetuando-se as contas, $g(x) = (ax_1 + ax_0 + b)x - ax_1x_0 + c$. Ainda, $g(x) - f(x) = -ax^2 + (ax_1 + ax_0)x - ax_1x_0$. Trata-se de uma função quadrática cujas raízes são x_0 e x_1. Dessa forma, podemos reescrever $g(x) - f(x) = -ax^2 + (ax_1 + ax_0)x - ax_1x_0$ como $g(x)-f(x) = -a(x-x_0)(x-x_1)$. Analisando-se os três fatores de $-a(x-x_0)(x-x_1)$, temos:

1) Caso $a > 0$:

Assim, $-a < 0$, $(x - x_0) > 0$ e $(x - x_1) < 0$, pois $x_0 < x < x_1$. Dessa forma, $-a(x - x_0)(x - x_1) > 0$. Como os dois pontos escolhidos são genéricos, podemos inferir que caso $a > 0$, todos os segmentos de retas com extremos da forma $(x, f(x) = ax^2 + bx + c)$ estão acima do gráfico de $f(x)$ entre qualquer extremo que se deseja e, pela definição 3.7, o gráfico da função quadrática tem a concavidade voltada para cima, caso $a > 0$.

2) Caso $a < 0$:

Assim, $-a > 0$, $(x - x_0) > 0$ e $(x - x_1) < 0$, pois $x_0 < x < x_1$. Dessa forma, $-a(x - x_0)(x - x_1) < 0$. Como os dois pontos escolhidos são genéricos, podemos inferir que caso $a < 0$, todos os segmentos de retas com extremos da forma $(x, f(x) = ax^2 + bx + c)$ estão abaixo do gráfico de $f(x)$ entre qualquer extremo que se deseja e, pela definição 3.7, o gráfico da função quadrática tem a concavidade voltada para baixo, caso $a < 0$. $\square$

Observação 3.5 *É possível também recorrermos ao Ensino Superior, já que a derivada segunda de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f''(x) = 2a$ [2] e seu sinal não muda, sendo a concavidade voltada para cima caso $a > 0$, ou a concavidade voltada para baixo, caso $a < 0$, mas esse não é o intuito deste trabalho.*

Pouco discutido no primeiro ano do Ensino Médio, por quais motivos podemos afirmar que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola? Inicialmente, parábola é o conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que a distância deles até um ponto fixo chamado de foco é igual à distância desses pontos até uma reta fixa chamada diretriz (vide Figura 3). Parábolas rotacionadas não são funções e não são tratadas no Ensino Médio. Dessa forma usaremos apenas as parábolas oriundas de funções quadráticas que possuem como eixo de simetria a reta $x = \frac{-b}{2a}$.

A equação geral das parábolas é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$, com A, B, C, D, E e $F \in \mathbb{R}$. Será usada neste trecho do trabalho apenas a constatação de que a distância do foco até o vértice da parábola é igual à distância do vértice até a reta diretriz. Dessa forma, na equação geral das parábolas, serão aqui estudadas as da forma $Ax^2 + Dx + Ey = F$, com $B = C = 0$.

Proposição 3.8 *O gráfico da função quadrática é uma parábola*

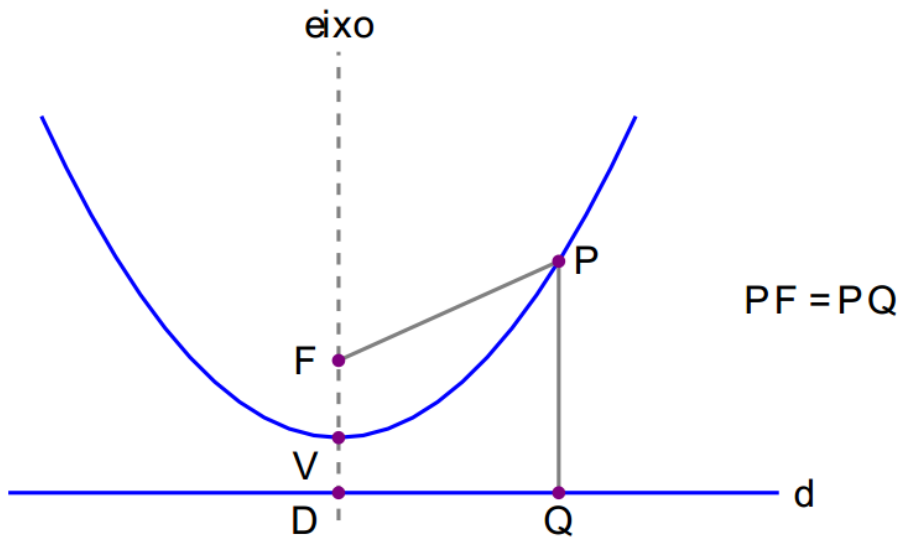

Figura 3: Elementos da parábola proveniente da função quadrática (Figura retirada de [1])

Demonstração: A ideia é descobrir o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano que estão à mesma distância de um ponto fixo $F = (x_0, y_0)$ e de uma reta diretriz $y = y_0 - 2p$, com $p \in \mathbb{R}$. Utilizando a fórmula para distância entre dois pontos:

$Dist(F, P) = Dist(P, Q)$, onde $Q = (x, y_o - 2p)$ é a projeção ortogonal de P em relação à reta diretriz e $dist(P, F)$ é a medida do segmento de reta que une os pontos P e F:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_0)^2} &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - (y_0 - 2p))^2} \\ \sqrt{x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2} &= \sqrt{y^2 - 2yy_0 + 4py - 4py_0 + y_0^2 + 4p^2} \end{aligned}$$

Elevando-se ambos os membros da equação ao quadrado:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 &= y^2 - 2yy_0 + 4py - 4py_0 + y_0^2 + 4p^2 \\ 4py &= x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + 4py_0 - 4p^2 \\ y &= \frac{x^2}{4p} + \frac{-2xx_0}{4p} + \frac{4py_0 - x_0^2 + 4p^2}{4p} \end{aligned}$$

Efetuando a troca de constantes de $\frac{1}{4p}$ por a, $\frac{-2x_0}{4p}$ por b e $\frac{4py_0+x_0^2-4p^2}{4p}$ por c, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ temos:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Assim, mostramos que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ trata-se realmente de uma parábola.
$\square$

Observação 3.6 *A constante p pode ser compreendida como a distância entre o foco da parábola e o seu vértice e, dessa forma, $2p$ pode ser compreendida como a distância entre o foco da parábola e sua reta diretriz.*

3.1.4 As coordenadas do foco das parábolas provenientes de funções quadráticas e a propriedade refletora da parábola

O formato das antenas parabólicas é o de uma parábola rotacionada em seu eixo de simetria, sendo chamado de parabolóide. As antenas parabólicas são utilizadas para recepção de sinais de satélites na órbita terrestre porque os raios (sinais) que chegam à superfície côncava da parábola, por serem paralelos ao eixo central do parabolóide, covergem para um único ponto, que é o foco do parabolóide, ou em uma seção transversal que passa pelo eixo de simetria do parabolóide, é o foco de uma parábola (vide Figura 4). Com todos os raios convergindo para um único ponto, os sinais que eram fracos acabam transformando-se em um sinal forte, o que permite sua decodificação por aparelhos eletrônicas. Para a demonstração da propriedade refletora da parábola, recomendamos [1].

Utilizando novamente a Figura 3 e o fato demonstrado anteriormente de que o gráfico da função quadrática é uma parábola, podemos então encontrar um candidato a foco de $f(x) = ax^2 + bx + c$. É normal supor que um candidato a foco esteja na reta $x = \frac{-b}{2a}$, eixo de simetria da parábola. Pela demonstração anterior, $p = \frac{1}{4a}$ e, dessa forma, o candidato a foco da função quadrática fica no ponto $(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a} + \frac{1}{4a}) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a})$.

Foi realizada uma translação vertical do ponto $(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a})$ (vértice da parábola), para o ponto $(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a} + \frac{1}{4a}) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a})$, ou seja, somou-se a distância p entre o vértice e o foco dessa família de parábolas ao vértice destas.

Proposição 3.9 *O ponto* $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a})$ *é o foco das parábolas provenientes das funções quadráticas.*

Demonstração: Segundo a definição de parábola, se F for foco das parábolas descritas pelas funções quadráticas, então deverá ser sempre verdadeira no conjunto dos números reais a igualdade $D(F,P) = D(P,P')$, onde $P = (x_1, ax_1^2 + bx_1 + c)$ é um ponto qualquer da parábola e $P' = (x_1, \frac{-b^2+4ac+1}{4a} - 2p) = (x_1, \frac{-b^2+4ac-1}{4a})$ é a projeção ortogonal de P na reta diretriz.

$$
\begin{aligned}
D(F,P) &= \sqrt{\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(ax_1^2 + bx_1 + c - \left(\frac{-b^2+4ac+1}{4a}\right)\right)^2} \\
D(F,P) &= \sqrt{\frac{16a^4x_1^4 + 8a^2b^2x_1^2 + 32a^3bx_1^3 + 8a^2x_1^2 + b^4 + 8ab^3x_1 + 2b^2 + 16abx_1^2 + 8abx_1 + 1}{16a^2}}
\end{aligned}
$$

Ainda:

$$
\begin{aligned}
D(P,P') &= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \left(ax_1^2 + bx_1 + c - \left(\frac{-b^2+4ac-1}{4a}\right)\right)^2} \\
D(P,P') &= \sqrt{\frac{16a^4x_1^4 + 8a^2b^2x_1^2 + 32a^3bx_1^3 + 8a^2x_1^2 + b^4 + 8ab^3x_1 + 2b^2 + 16abx_1^2 + 8abx_1 + 1}{16a^2}}
\end{aligned}
$$

Como $D(F,P) = D(P,P')$, então F é realmente o foco das parábolas provenientes das funções quadráticas.

□

A função inversa de um função é um conceito importante e, por exemplo, as funções logarítmicas podem ser construídas utilizando-se as funções exponenciais, pois uma é inversa da outra, mesmo que em parte do domínio, pois ambas não são funções bijetoras nos reais.

Definição 3.8 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é injetora se caso dados* x_1 *e* x_2 *do seu domínio, então* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *no seu contra-domínio.*

Analisando geometricamente, todas as retas paralelas ao eixo x que interceptam o gráfico de $f(x)$ devem fazê-lo em apenas um ponto. Como precisa ser função, todas as retas paralelas ao eixo y que interceptam o gráfico de $f(x)$ devem fazê-lo também em apenas um ponto.

Definição 3.9 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é sobrejetora se caso dado* y_1 *do seu contra-domínio, então existe* (x_1) *tal que* $f(x_1) = y_1$.

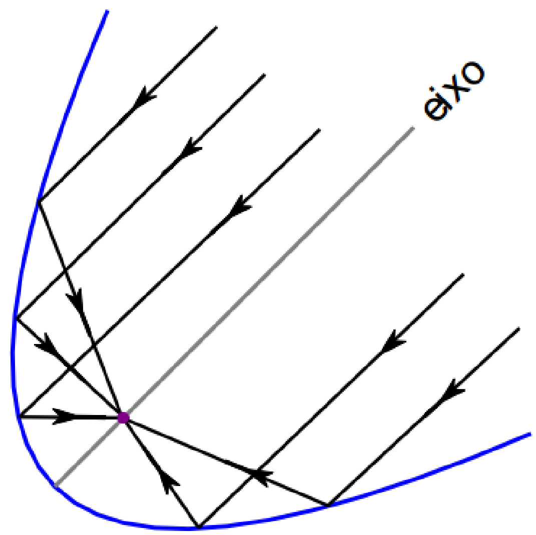

Figura 4: A propriedade refletora da parábola (figura retirada de [1])

Analisando geometricamente, todas as retas paralelas ao eixo x devem interceptar o gráfico de $f(x)$. Como precisa ser função, todas as retas paralelas ao eixo y que interceptam o gráfico de $f(x)$ devem fazê-lo em apenas um ponto.

Definição 3.10 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijetora se for injetora e sobrejetora.*

Analisando geometricamente, todas as retas paralelas ao eixo x devem interceptar o gráfico de $f(x)$ em apenas um ponto. Como precisa ser função, todas as retas paralelas ao eixo y que interceptam o gráfico de $f(x)$ devem fazê-lo também em apenas um ponto.

3.2 A função inversa da função quadrática

Caso uma função $f(x)$ tenha uma função inversa denominada $f^{-1}(x)$ dentro de algum domínio, seu gráfico é simétrico ao da inversa, em relação à reta $y = x$ (eixo de simetria). O domínio de $f(x)$ é a imagem de $f^{-1}(x)$ e a imagem de $f(x)$ é o domínio de $f^{-1}(x)$. Também vale ressaltar que a composição de $f(x)$ com $f^{-1}(x)$ resulta na função identidade, ou seja, $f(f^{-1}(x)) = x$.

A função quadrática, como já demonstrado, não é bijetiva em todo conjunto dos números reais, entretanto, ela torna-se bijetiva se for considerado apenas um dos ramos da parábola e a bijeção é uma propriedade necessária para que uma função tenha inversa. Caso $a > 0$ e $x \geq \frac{-b}{2a}$ a parábola tem como domínio $D = [\frac{-b}{2a}, +\infty[$ e como imagem $Im = [\frac{-(b^2-4ac)}{4a}, +\infty[$ e nesses dois conjuntos a função quadrática é bijetiva. Ela é bijetiva também considerando-se apenas $D =]-\infty, \frac{-b}{2a}]$ e $Im =]-\infty, \frac{(b^2-4ac)}{4a}]$,com $a > 0$. Para $a < 0$ também é possível dividir a parábola em dois ramos de forma que a função fique bijetiva tomando-se apenas um desses dois ramos. Para obtermos a função inversa da função

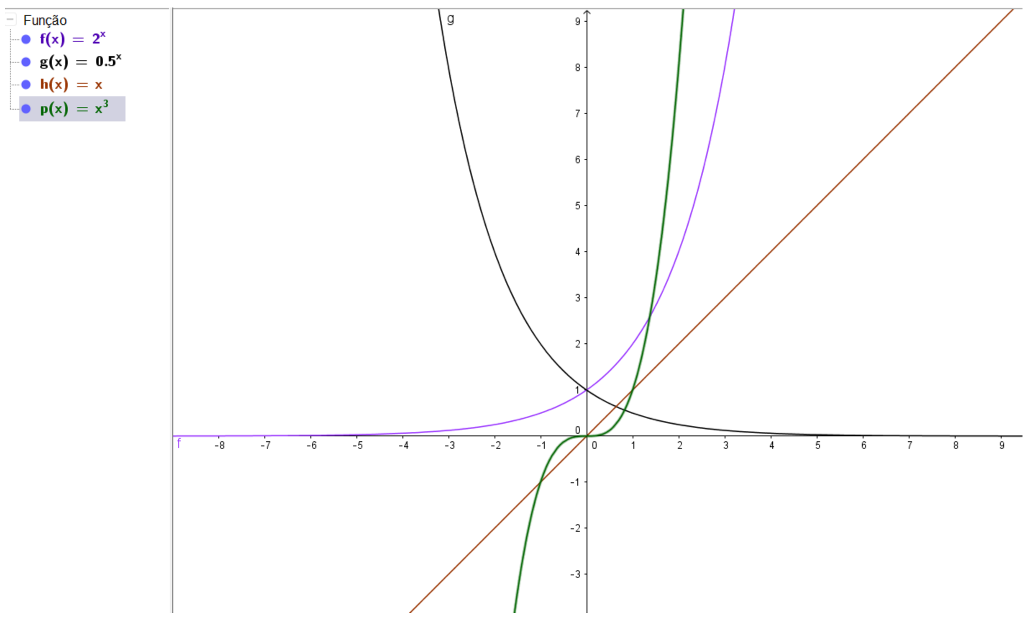

Figura 5: Exemplos de funções injetoras

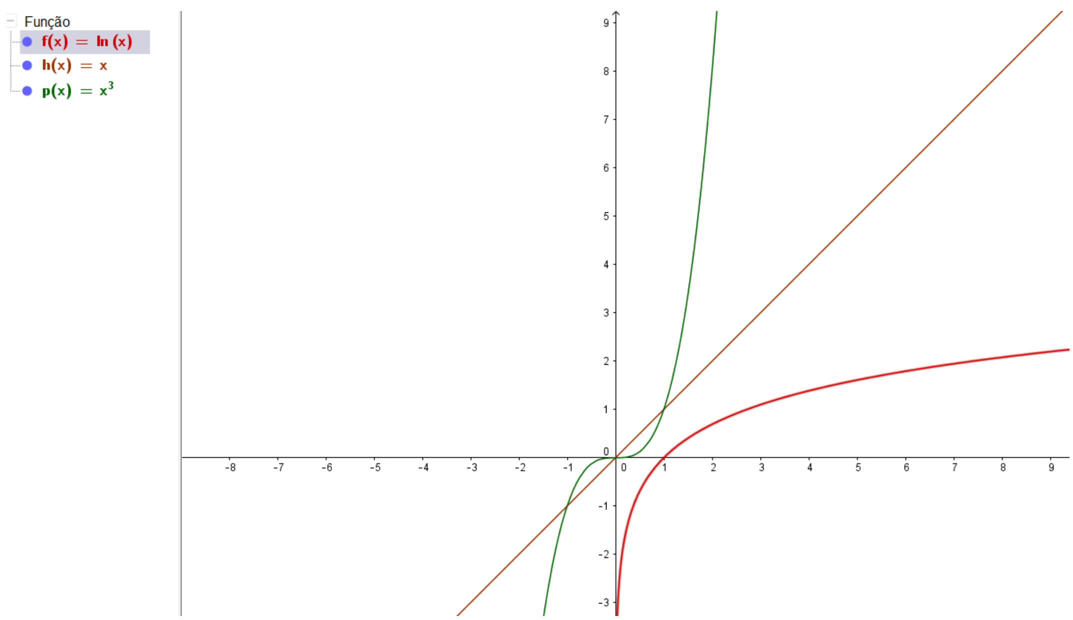

Figura 6: Exemplos de funções sobrejetoras

quadrática, em parte do seu domínio, explicitamos x em função de y e realizamos as trocas

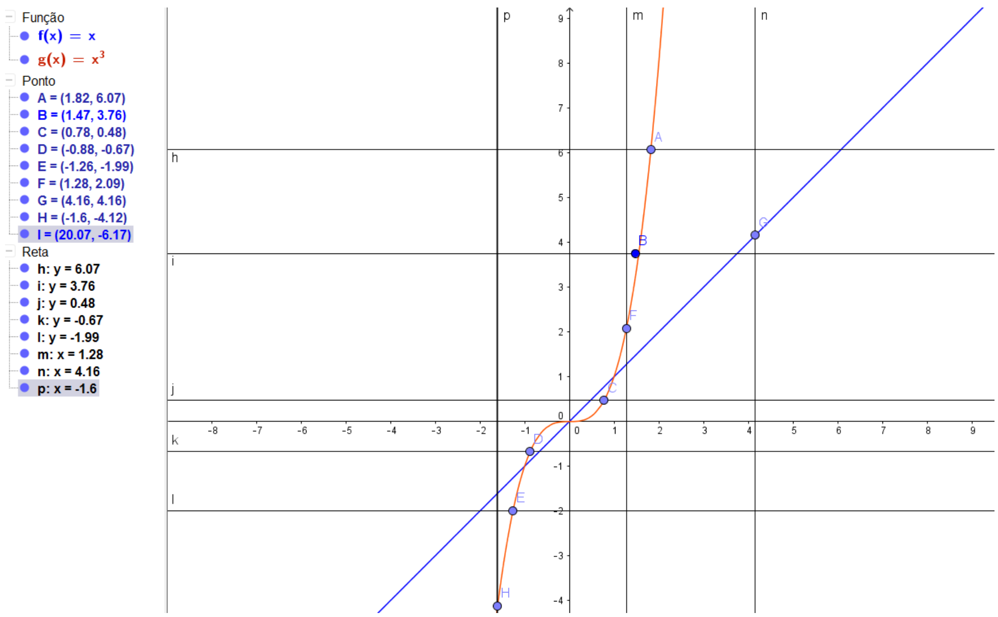

Figura 7: Exemplos de funções bijetoras

de variávies entre x e y.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx + c - y &= 0 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} \end{aligned}$$

Trocando x com y (o domínio da inversa é a imagem da função original e vice-versa):

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$$

Dependendo do ramo da parábola que for escolhido, a inversa é

$$y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a} \quad ou \quad y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$$

Verificação:

$$f(f(x)) = a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac+4ax}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac+4ax}}{2a}\right) + c$$

$$f(f(x)) = \frac{a}{4a^2}\left(b^2 - 2b\sqrt{b^2-4ac+4ax} + b^2 - 4ac + 4ax\right) + \left(\frac{-2b^2+2b\sqrt{b^2-4ac+4ax}}{4a}\right) + c = x.$$

3.3 Interseções entre os gráficos de uma parábola e uma reta e entre duas parábolas

A análise simultânea entre dois ou mais gráficos de funções permite comparações entre as leis das funções, levando a inferências interessantes, como a descoberta de intervalos em que uma determinada função é maior do que outra, entre outros exemplos.

Proposição 3.10 *A interseção entre o gráfico da função afim (reta) e o gráfico da função quadrática (parábola) pode ser um ponto, ou dois pontos, ou ser vazia*

Demonstração: Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = \alpha x + \beta$. Na intercessão, $f(x) = g(x)$:

$$ax^2 + bx + c = \alpha x + \beta \Rightarrow ax^2 + x(b - \alpha) + (c - \beta) = 0 \quad \mathbf{(1)}$$

As raízes são:

$$x_1 = \frac{-(b-\alpha) + \sqrt{(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta)}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-(b-\alpha) - \sqrt{(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta)}}{2a}.$$

Se $(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta) < 0$, então não existem raízes reais e $f(x) \cap g(x) = \emptyset$. Caso $(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta) = 0$, ou $-(b-\alpha) = \sqrt{(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta)}$, então $f(x) \cap g(x) = P_1$ (um ponto) e $x_1 = x_2$. Caso $(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta) > 0$ e $-(b-\alpha) \neq \sqrt{(b-\alpha)^2 - 4a(c-\beta)}$, então $f(x) \cap g(x) = \{P_1, P_2\}$, com $P_1 \neq P_2$. □

Proposição 3.11 *A interseção entre os gráficos de duas funções quadráticas (parábolas) pode conter um ponto, ou dois pontos, ou ser vazia.*

Demonstração: Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + c$. Nos pontos de interseção das duas curvas, $f(x) = g(x)$:

$$ax^2 + bx + c = \alpha x^2 + \beta x + c \; x^2(a-\alpha) + x(b-\beta) + c - \gamma = 0$$

É uma equação do segundo grau que pode ter uma raiz, ou duas, ou não possuir raízes. Resolvendo:

$$x = \frac{-(b-\beta) \pm \sqrt{(b-\beta)^2 - 4(a-\alpha)(c-\gamma)}}{2a}$$

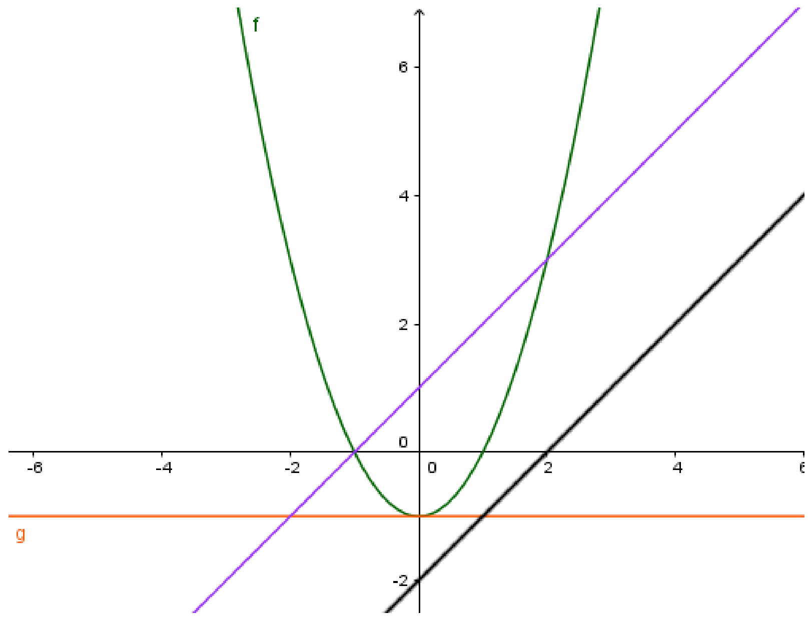

Figura 8: Interseção entre o gráfico da função afim (reta) e o gráfico da função quadrática (parábola)

Analisando o radicando acima,

$$(b-\beta)^2 - a(a-\alpha)(c-\gamma) = b^2 - 2b\beta - \beta^2 - 4ac + 4a\gamma + 4\alpha c - 4\alpha\gamma \quad \mathbf{(1)}.$$

Se $\mathbf{(1)} < 0$, então $(f(x) \cap g(x) = \emptyset)$. Caso $\mathbf{(1)} = 0$, ou $-(b-\alpha) = \sqrt{\mathbf{(1)}}$, então as parábolas tem apenas um ponto em comum e para $\mathbf{(1)} > 0$, com $-(b-\alpha) \neq \sqrt{\mathbf{(1)}}$, as parábolas possuem 2 pontos em comum. $\square$

Podemos retirar informações importantes sobre a lei da função quadrática só com o gráfico da função. Por exemplo, mesmo com as leis de $f(x)$, $g(x)$,... $r(x)$ da Figura 10 sendo desconhecidas, através da análise do gráfico e mais algum raciocínio, a tabela 1 pode ser preenchida.

Em $f(x)$, $a > 0$, pois a parábola tem a concavidade voltada para cima e $c > 0$, pois o gráfico toca o eixo y em sua parte positiva. As coordenadas x_v e y_v do vértice são ambas positivas, pois o vértice está no primeiro quadrante do plano cartesiano. Para encontrar o sinal de b, é só usar os fatos de que $x_v > 0$ e $a > 0$. Como $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $a > 0$ então $b < 0$, a fim de que $\frac{-b}{2a}$ seja maior do que zero. Para encontrar o sinal das raízes x_1 e x_2 é só observar se os gráficos tocam o eixo das abscissas à esquerda da origem, na origem, ou à direita da origem. Na Figura 7 aparecem os mesmos gráficos da Figura 6, mas com as leis das funções explícitas.

Uma prática comum é dividir a construção do gráfico da função quadrática em etapas.

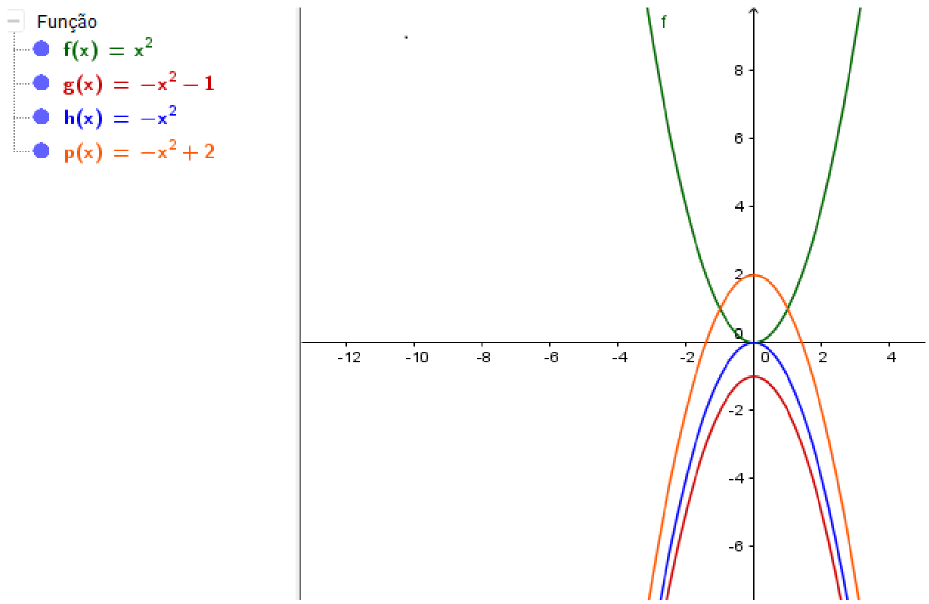

Figura 9: Interseção entre gráficos de parábolas.

Tabela 1: Tabela com valores das constantes das funções quadráticas referentes à figura 10

	a	b	x_v	y_v	b	x_1	x_2
$f(x)$	> 0	> 0	> 0	$= 0$	< 0	> 0	$= x_1$
$g(x)$	> 0	> 0	> 0	> 0	< 0	$\notin \mathbb{R}$	$\notin \mathbb{R}$
$h(x)$	> 0	$= 0$	> 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
$i(x)$	< 0	< 0	> 0	$= 0$	> 0	> 0	$= x_1$
$j(x)$	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
$k(x)$	< 0	< 0	> 0	< 0	> 0	$\notin \mathbb{R}$	$\notin \mathbb{R}$

Passo 1) Marque os pontos $P_1 = (x_1, 0)$, $P_2 = (x_2, 0)$, $P_3 = (0, c)$ e $V = (v_x, v_y)$, onde x_1 e x_2 (podem ser iguais, ou não existirem nos reais) são as raízes da função quadrática e V o seu vértice.

Passo 2) Esboce a parábola que passa por esses pontos de forma que a concavidade fique para cima, se $a > 0$, ou para baixo, se $a < 0$.

Uma crítica que deve ser feita é que usar esses passos sem passar por tudo o que foi visto aqui, pode tornar a aprendizagem pouco efetiva, por parte do aluno. Dessa forma, tal procedimento deve ser realizado após tudo que já foi exposto, se for realizado.

Geralmente, os alunos do Ensino Médio tem dificuldades em trabalhar com funções modulares e, em alguns livros, o assunto é tratado de modo confuso. Pensando nisso, foi introduzido neste trabalho uma seção sobre o gráfico da função modular do tipo quadrática, porém, é necessário aprofundarmos a noção de módulo e introduzir o conceito de funções modulares do tipo quadráticas.

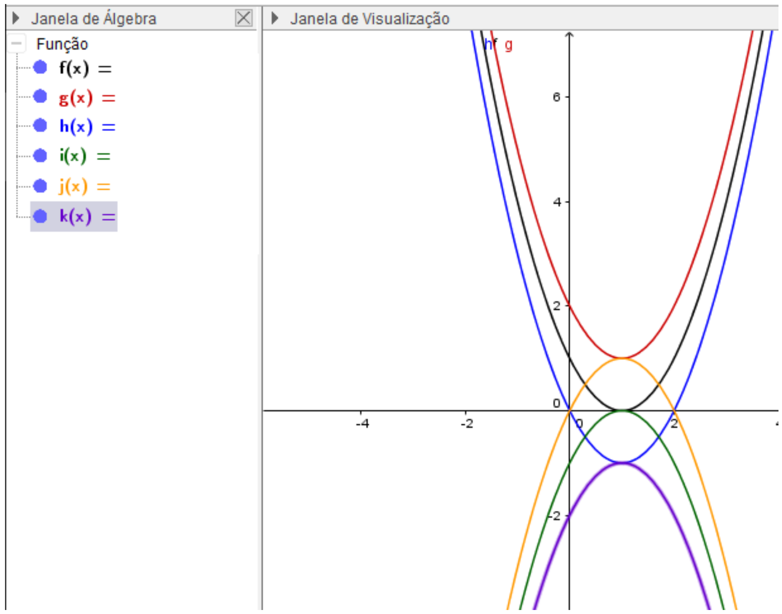

Figura 10: Gráficos de funções quadráticas sem os valores dos coeficientes **a**, **b** e **c**.

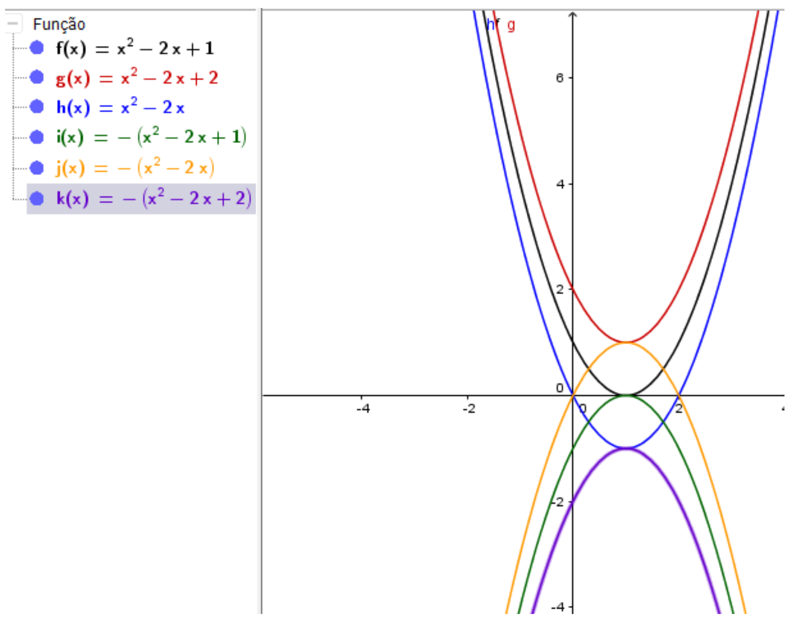

Figura 11: Gráficos de funções quadráticas com os valores dos coeficientes **a**, **b** e **c**.

3.4 A noção de módulo

Seguindo uma noção geométrica na reta real, módulo de um número $x \in \mathbb{R}$ é a distância desse número na reta real até o zero. Pode ser entendido como a medida de um segmento de reta e, como tal, não apresenta valores negativos. Por exemplo, $|x| = 5$ nos diz que a distância entre algum número na reta real até a origem é 5. Dessa forma, $x = 5$, ou $x = -5$. Analogamente, $|x - 2| = 5$ nos diz que a distância de um número até o número 2 possui 5

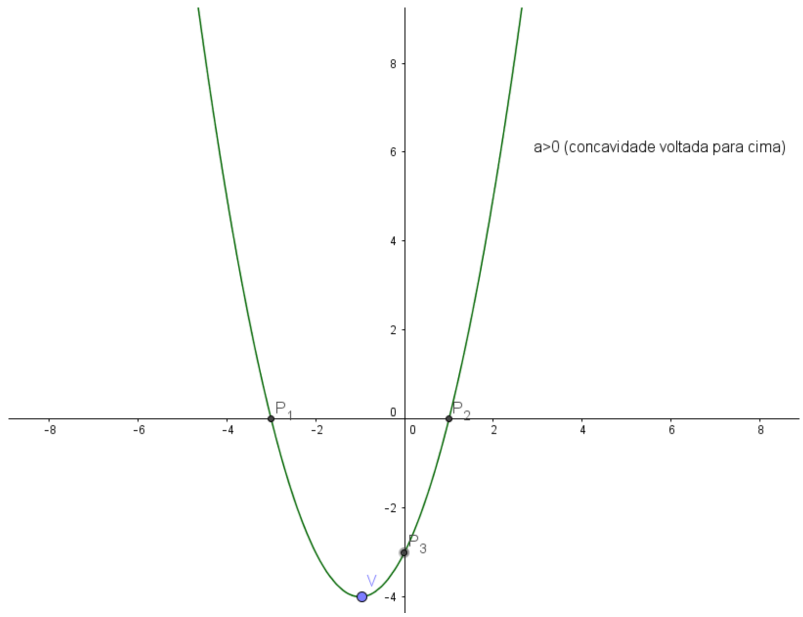

Figura 12: Esboço do gráfico da função quadrática

unidades de medida.

Definição 3.11 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma:*

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0, ou \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Para o esboços do gráfico da função modular do tipo quadrática é necessário um estudo de sinais aliado à definição de módulo. Como $f(x) = |p(x)| \geq 0$, onde $p(x)$ é um polinômio, então nos intervalos em que $p(x) \geq 0$, $f(x) = p(x)$ e nos intervalos onde $p(x) < 0$, $f(x) = -p(x)$.

3.4.1 O gráfico da função modular do tipo quadrática

Definição 3.12 *A função modular do tipo quadrática é regida pela lei $f(x) = |ax^2 + bx + c|$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$.*

Para desenhar seu gráfico, recorreremos à definição 3.11
Sejam $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ e $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que são as raízes de $f(x)$. Assim, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Sejam min = menor valor entre x_1 e x_2 e max = maior valor entre x_1 e x_2. Para o esboço de $f(x)$, devemos considerar 4 casos e escolher entre estes o que representa $f(x)$:

(1) Se $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, então podemos reescrever $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ como:

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, \text{ se } \ x \leq min; \\ -ax^2 - bx - c, \text{ se } \ min < x \leq max; \\ ax^2 + bx + c, \text{ se } \ x > max. \end{cases}$$

(2) Se $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, então podemos reescrever $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ como:

$$h(x) = \begin{cases} -ax^2 - bx - c, \text{ se } x \leq min; \\ ax^2 + bx + c, \text{ se } min < x \leq max; \\ -ax^2 - bx - c, \text{ se } x > max. \end{cases}$$

(3) Se $a > 0$ e $b^2 - 4ac \leq 0$, então podemos reescrever $f(x)$ como $i(x) = ax^2 + bx + c$

(4) Se $a < 0$ e $b^2 - 4ac \leq 0$ então podemos reescrever $f(x)$ como $j(x) = -(ax^2 + bx + c)$

Como exemplo, esboçaremos o gráfico de $f(x) = |3x^2 + 3x - 6|$. Seja também $g(x) = 3x^2 + 3x - 6$, que é $f(x)$ sem o módulo. As raízes de $g(x) = 0$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$ e como $a > 0$, então a concavidade é voltada para cima e $g(x) < 0$ apenas para $-2 < x < 1$.

Com base nessas informações, podemos trasformar $f(x)$ em três funções sem módulo, onde:

$$f(x) = |3x^2 + 3x - 6| = \begin{cases} 3x^2 + 3x - 6, \text{ se } x \leq -2; \\ -(3x^2 + 3x - 6), \text{ se } -2 < x \leq 1; \\ 3x^2 + 3x - 6, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

O gráfico de $f(x)$ é a união desses três gráficos.

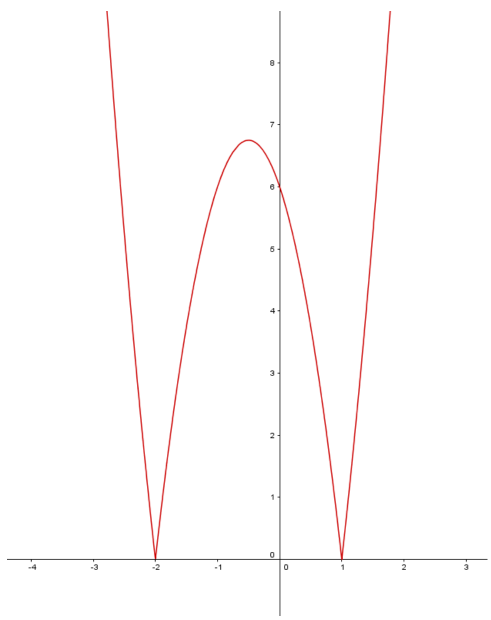

Figura 13: Gráfico de $f(x) = |3x^2 + 3x - 6|$

3.5 Exemplos de exercícios sobre funções quadráticas utilizando-se o Geogebra

1) A parábola como um lugar geométrico

Passos:

1) No Geogebra, marque dois pontos A e B (use o menu "Ponto" para ativar a função) de forma que a distância visual entre eles não seja grande em relação à tela do computador (após o término de cada um dos passos aqui citados, clique no menu com um ícone de ponteiro de mouse, chamado "mover");

2) trace a reta a (para trocar a letra que representa uma reta, ou um ponto, é só clicar duas vezes em cima da letra, ir em "propriedades", substituir pela letra nova e clicar "enter") que passa pelos pontos A e B (no menu "reta", clique em "reta que passa por dois pontos conhecidos" e selecione depois os pontos A e B);

3) marque C, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ (no menu "Ponto", clique em "Ponto médio, ou centro" e selecione os pontos A e B) ;

4) trace b, a reta perpendicular à reta a e que passa por C (no menu "Reta Perpendicular", clique em "Reta Perpendicular" e selecione a reta a e o ponto B);

5) marque D, um ponto sobre a reta c e que seja diferente do ponto C;

6) trace a reta c, que passa por D e que seja paralela a a (no menu "Reta Perpendicular", clique em "Reta Paralela" e selecione a reta a e o ponto D) ;

7) trace a reta d, mediatriz do segmento $\overline{AD}$ (no menu "Reta Perpendicular", clique em "mediatriz" e seleciona os pontos A e D);

8) marque o ponto E, interseção entre as retas c e d (no menu "Ponto", clique em "Interseção entre dois objetos" e selecione as retas c e d);

9) clique com o botão direito do mouse em cima do ponto E e selecione "habilitar rastro";

10) clique no menu "seta (mover)" e mova algumas vezes o ponto D para a esquerda e para a direita que pontos pertencentes a uma parábola surgirão!

Obs: Caso o mouse tenha scroll (rodinha), use-a para ajustar a escala do plano cartesiano e melhorar a visualização do desenho.

Explicação

A parábola é o lugar geométrico dos pontos que estão equidistantes de um ponto fixo A (foco), e de uma reta b diretriz. Para a construção de alguns pontos da parábola no Geogebra foi suposto que o problema estivesse resolvido, uma técnica interessante para a resolução de problemas. Um ponto E que pertence à parábola está equidistante de A e de um ponto D da reta b. Dessa forma, E pertence ao lugar geométrico dos pontos equidistantes do segmento $\overline{AD}$ (a mediatriz d de $\overline{AD}$) e à reta c, que é perpendicular à reta b e que passa por D. É necessário que a reta c seja perpendicular à reta b porque a distância de uma ponto E à uma reta é o segmento que passa pelo ponto E e que é perpendicular à reta.

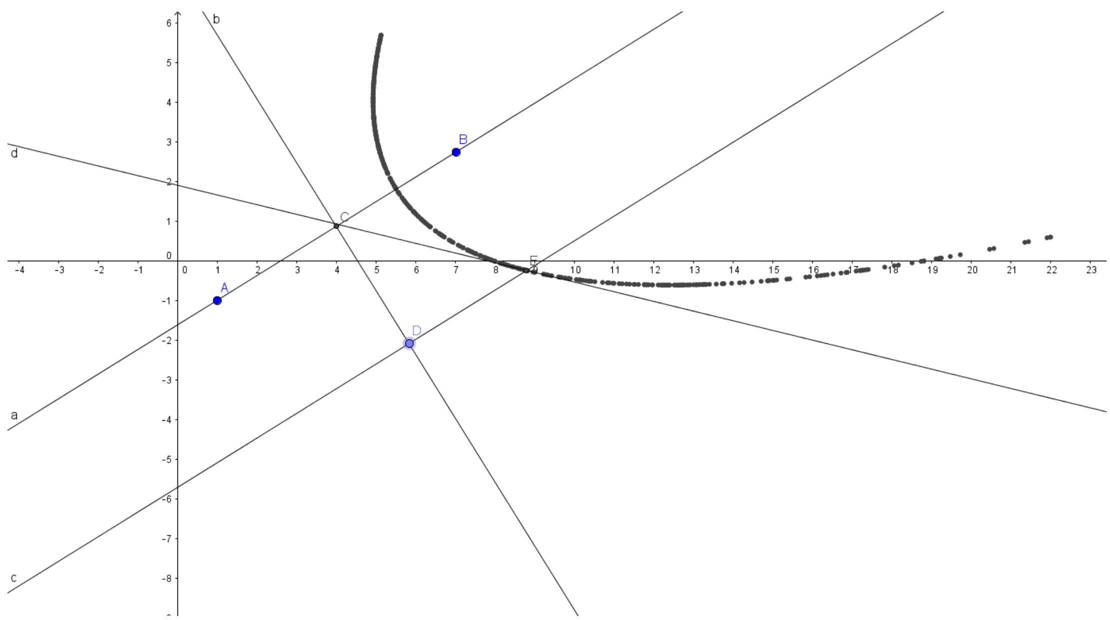

Figura 14: Construção de parábolas no Geogebra

2) No Geogebra, plote na mesma tela os gráficos das funções a seguir, relacionando todas as funções em relação de $f(x)$ e, depois, relate as diferenças que ocorreram entre os gráficos das funções em relação a $f(x)$, lembrando que "elevado" é substituído pelo acento circunflexo. Por exemplo, $g(x) = f(x) + 2$, ou seja, o gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ transladado 2 unidades para cima.

a)$f(x) = x^2 - 2x + 1$
b)$g(x) = x^2 - 2x + 3$
c)$h(x) = x^2 - 2x - 1$
d)$f(x) = -x^2 + 2x - 1$
e)$h(x) = -x^2 + 2x - 3$
f)$i(x) = -x^2 + 2x + 1$

3) Alterações que as variações nos coeficientes a,b e c provocam no gráfico da função quadrática.

No Geogebra, digite $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ no campo "Entrada" e clique "Enter" no teclado. Aparecerá a guia "criar controles deslizantes". Clique em "criar controles deslizantes". Varie os valores de **a**,**b** e **c** deslizando seu controles respectivos e explique o que a variação de cada um dos coeficiente faz no gráfico.

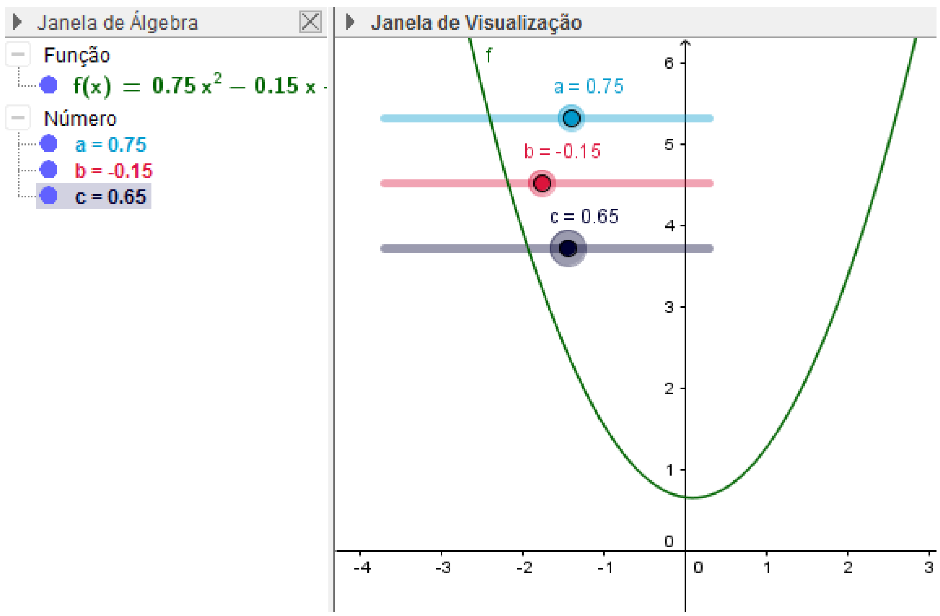

Figura 15: Alterações que as variações nos coeficientes **a**, **b** e **c** de $f(x) = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ produzem na parábola

4) No Geogebra, plote na mesma tela os gráficos das funções abaixo, lembrando que $f(x) = |x^2|$ escreve-se como $f(x) = abs(x^2)$ no programa em questão. O podemos dizer do gráfico de $h(x)$ em relação a $i(x)$? Por quê? Daria para generalizar esse caso?

a)$f(x) = |x^2|$
b)$g(x) = |-x^2|$
c)$h(x) = |x^2 - 2x + 1|$
d)$i(x) = |-x^2 + 2x - 1|$

Considerações

É comum ouvir professores do Ensino Médio dizerem que a lei da função quadrática define uma parábola, sem que tal fato seja demonstrado aos alunos. Outras práticas comuns são asserções sobre a concavidade do gráfico sem demonstrações convincentes. Usam simetria para encontrar o vértice do gráfico da função quadrática, sem que as propriedades de simetria sejam demonstradas e não exibem provas suficientes para afirmarem que o ponto

$V = (-b/2a, -((b^2 - 4ac))/4a)$ é realmente ponto de máximo, ou de mínimo global da função. Na verdade, é isso que ocorre em boa parte dos livros de Matemática deste nível de ensino.

Outro ponto importante a se destacar é que a fórmula da distância entre dois pontos no $\mathbb{R}^2$ pode ser usada no primeiro ano do Ensino Médio, bem como a divisão entre polinômios, que é retratada nas séries finais do Ensino Fundamental. Algumas definições relativamente simples, como por exemplo as definições sobre pontos de máximo e de mínimo global, poderiam fazer parte dos textos dos livros de Matemática do Ensino Médio.

Comentário e agradecimento final

Procurou-se com este trabalho oferecer um material aprofundado e complementar no estudo da função quadrática no Ensino Médio. Conceitos como os de crescimento, decrescimento, simetria e raízes da referida função foram demonstrados com ferramentas desse nível de ensino, além da concavidade do seu respectivo gráfico, na medida do possível. Alguns tópicos de geometria euclidiana e geometria analítica foram utilizados, indicando que a ordem com que os conteúdos matemáticos são apresentados no Ensino Médio poderia sofrer alterações.

A proposta para uso dos software Geogebra, numa tentativa de buscar um rompimento com as chamadas aulas tradicionais, pode facilitar a visualização e internalização de conceitos com translação, rotação e simetria, entre outros.

O texto não é mais simples do que os que constam nos livros de Ensino Médio, mas é mais completo e mais rigoroso do ponto de vista matemático. Exibe demonstrações que não aparecem nos livros tradicionais e usa quase sempre conteúdos de Ensino Médio. Como diria Einstein, "tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado". Os livros didáticos brasileiros de Matemático do Ensino Médio são em sua maioria simplificados.

Os livros [1], [3] e [4] constantes nas referências bibliográficas também foram utilizados como parâmetro para os comentários a cerca dos livros didáticos brasileiros.

Finalizando, agradeço à Deus por ter me dado uma família maravilhosa. À Sofia, minha filha, à Cátia, minha esposa, à minha mãe Mirtes, ao meu pai Vladimir (in memoriam), aos manos João Marcos, Júlio e Fernando, às famílias Cançado e Braga, das quais faço parte e aos alunos e professores do Profmat no Campus Alto Paraopeba da UFSJ, em especial aos professores Maurício Reis, Mariana Cornelissen e Telles Timóteo. Obrigado a todos que me ajudaram nesta empreitada.

Referências

[1] Lima, Elon Lages & Cézar Pinto de Carvalho, Paulo & Wagner, Eduardo & Morgado, Augusto César; *A Matemática do Ensino Médio - Vol. 1*, SBM, 9ª edição, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Leithold, Louis; *O Cálculo com Geometria Analítica - Vol. 1*, Editora Harbra - 2ª Ed. São Paulo, 1994,

[3] Dante, Luiz Roberto; *Matemática : contexto e aplicações - Vol. 1*, Editora Ática - 2ª Ed. São Paulo, 2013,

[4] Iezzi, Gelson & Murakami, Carlos; *Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 1 - Conjuntos - Funções* , Editora Atual - 9ª Ed. São Paulo, 2013,

[5] Souza, Júlio César de Mello e; *Matemática divertida e curiosa*, Editora Record - 15ª ed. Rio de Janeiro, 2001.

[6] Boyer, Carl B.; *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher, 3ª ed. São Paulo, 2010.

[7] Lima, Elon Lages & Cézar Pinto de Carvalho, Paulo & Wagner, Eduardo & Morgado, Augusto César; *A Matemática do Ensino Médio - Vol. 3*, SBM, 6ª ed. Rio de Janeiro, 2006.