UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ

Departamento de Matemática e Estatística

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

LUIZ GUILHERME SILVA RIBEIRO

São João del-Rei

2017

Luiz Guilherme Silva Ribeiro

LOGARITMOS E EXPONENCIAIS: DA TEORIA Á PRÁTICA PEDAGÓGICA.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

São João del-Rei

2017

RIBEIRO, Luiz Guilherme Silva
Logaritmos e Exponenciais: da teoria à prática pedagógica.
Luiz Guilherme Silva Ribeiro – 2017.
102 páginas.

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

Dissertação de Mestrado Universidade Federal de São João del-Rei. Departamento de Matemática e Estatística. Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, 2017

1. Logaritmos e Exponenciais do ponto de vista teórico.
2. Análise de dados ensino – aprendizagem.
3. Proposta pedagógica.

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação ao maior bem que Deus pôde me dar: minha família. Minha querida mãe Rosa, meus irmãos Ana Luiza e Carlos Eduardo e ao meu querido pai Celso, que não está mais perto de mim fisicamente, mas que sei que lá de cima está torcendo por mim.

Dedico a vocês, por que sempre me deram apoio e me incentivaram para que eu chegasse na finalização de mais uma conquista. Não foi fácil sair de casa e vir morar numa cidade muito distante de vocês para que pudesse fazer esse mestrado. Me ausentei, não participava mais com frequência das nossas noites no quarto da mãe, das brigas com vocês, meus irmãos, e de todo amor que sempre recebi estando em casa.

Não é apenas essa dissertação que dedico, mas sim todas as minhas conquistas até aqui e as que ainda virão, se Deus quiser, pois podem ter certeza, vocês são as pessoas que eu mais amo na vida.

Obrigado pela força e pelo incentivo. Amo muito vocês.

AGRADECIMENTOS

Sei o quanto não foi fácil dar o ponto final nesse trabalho que hoje concluo. Mas sei, também, que seria impossível se não tivesse a presença de vocês, física ou espiritual, na concretização deste.

Agradeço, primeiramente, a Deus. Por muitas das vezes tentei em desistir por motivos de cansaço e estresse, mas tenho certeza que em cada uma desses momentos ele me pegava no colo e me incentivava a continuar. A Sua presença em minha vida foi e é a maior fonte de força para mim.

A minha família, minha base, meu tudo. Muito obrigado mesmo. Mãe, Pai, Irmãos, tias, tios, primos. Peço desculpas por todas as vezes que me ausentei, que não pude estar presente em momentos especiais. Cada momento que via uma foto de todos juntos e eu não podia estar presente foram de muita tristeza para mim, mas agradeço a compreensão e a força que sempre me deram. Eu amo muito, todos vocês.

Meus amados avós, Geninha e Alípio, que, tenho certeza, não poupam orações para mim e torcem muito pelo meu crescimento. Vó e vô, não pude ser um neto tão presente nesse tempo, mas era ótimo quando voltava e ia visitar vocês e contar de como andava a minha vida e vocês sempre me ouviam, me aconselhavam e sempre diziam que Deus está comigo. Vocês são os melhores avós do mundo. Amo muito vocês.

Aos meus queridos amigos: Isabella, Jonathan, Luiz Fernando, Lethícia, Fernanda, Rafa, Érica, Maria, Lu e Aline. Muito obrigado por me incentivarem e desculpa as minhas ausências.

Aos amigos que São João me deu: Fabíola, Lorena, Carol, Luz, Josi, Nayane, Paty, Alexandra, Ana Lúcia, Willian, Joubert, Flávio, Larissa, Isabelle, Luiza, Nazaré, Iasmin, demais alunos e professores do cefs, do impacto e da UFSJ. Muito obrigado por me permitir conhecer vocês. A permanência em São João foi muito mais fácil com vocês por perto. Minha eterna gratidão.

Ao meu companheiro de república, Erasmo, que sempre me aconselhou, me incentivou e foi mais que um companheiro. Foi um irmão. Muito obrigado mesmo, por tudo.

Ao meu orientador, Juan, que sempre esteve presente no desenvolvimento dessa dissertação. Sem você seria impossível concluir esse trabalho com excelência. Muito obrigado pela sua presteza e disponibilidade.

A cidade de São João, por me permitir usufruir e conhecer todas as maravilhas que ela fornece. Amei muito estar aqui.

Ao Edu, pelo companheirismo e incentivo para que concluísse essa etapa. Você é muito especial para mim.

Aos meus amigos do mestrado que farei questão de citar todos: Andrea, Danila, Adriano, Jéssica, Lívia, Wagner, Thiago, Lilian, Eliane, Samir, Robson, Expedito, PH, só nós sabemos o quanto foi difícil, mas conseguimos. Muito obrigado pela ajuda de todos vocês. Sucesso a todos.

Aos alunos da Escola Estadual Doutor Garcia de Lima e do Colégio revisão pela participação na pesquisa.

A professora Marianna pela sua imensa dedicação e atenção. O seu interesse e carinho com a gente te tornou, sem dúvida, a melhor professora do mestrado. O meu muito obrigado.

Aos meus locais de trabalho, UFSJ, CEFS e IMPACTO. Que me acolheram muito bem e entenderam quando precisei estar ausente. Obrigado pelas instituições que são e pelo respeito que tem e tiveram comigo.

Ao Marcos e a Meira, pela disponibilidade e atenção para atender aos nossos assuntos de necessidade.

A Capes e ao IMPA por me permitirem fazer parte do PROFMAT e me ajudarem financeiramente e profissionalmente.

E a todos que não citei, mas que de uma forma ou de outra me ajudaram chegar até aqui.

O meu eterno reconhecimento e o meu muitíssimo OBRIGADO!!

RESUMO

Nesta dissertação pretende – se apresentar aspectos importantes sobre o estudo de logaritmos e exponenciais e suas funções, na educação básica. Inicialmente dar – se ênfase a parte teórica desses assuntos, abordando conceitos, definições, propriedades, elementos estruturantes, teoremas e corolários, para que o estudo fique bem embasado matematicamente. Em seguida mostra – se a utilidade que esses dois assuntos têm nas mais diversas situações do dia-a-dia e em situações mais complexas, querendo mostrar aqui, que o estudo de logaritmos de exponenciais se faz útil e conveniente. Visando – se analisar praticas pedagógicas de ensino e aprendizagem dos alunos, este trabalho também traz uma pesquisa realizada com alguns professores de matemática da rede pública e particular de ensino e com alunos de duas escolas na cidade de São João Del Rei afim de analisar resultados e propor intervenções no que diz respeito ao ensino-aprendizagem dos temas abordados. Por fim, é feita uma proposta pedagógica de Ensino de logaritmos e exponenciais, com o intuito de contribuir no ensino-aprendizagem desses conteúdos, afim de que o aluno tenha uma desmistificação do que foi lhe imposto sobre esses assuntos por outros alunos, anteriores a eles, e passe a ver esses temas como interesse e ciente da importância de seu estudo.

Palavras-chave: Funções; Logaritmos: Exponenciais; Educação básica; Prática pedagógica; Ensino – aprendizagem; Proposta pedagógica.

ABSTRACT

In this research we seek to show important aspects about the study of logarithms and exponentials and their functions, in basic education.Initially we will briefly talk about the theory of these subjects, approaching concepts, definitions, properties, structuring elements, theorems and corollaries, so that the study is well grounded theoretically.
Then, we show the usefulness that these two subjects have in the most different situations of the day and in more complex situations, showing here, that the study of logarithms and exponentials becomes useful and convenient.In order to analyze pedagogical practices of teaching and learning of students, this document also brings a research done with some mathematics' teachers of the public and private teaching network and with students of two schools in the city of São João Del Rei so that we could analyze results and propose interventions in the teaching-learning of the topics addressed. Finally, a pedagogical proposal of teaching of logarithms and exponentials is made, in order that the student has a demystification of what was imposed on them, by other students before them,
And pass on these topics as interest and aware of the importance of your study.

Key-words: Functions; Logarithms; Exponentials; Basic education; Pedagogical practice; Teaching – learning; Pedagogical proposal.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFSJ – Universidade Federal de São João Del Rei

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

J – Unidade de medida Joule

$\mathbb{R}^{+}$ – Conjunto dos Números Reais não negativos

$\mathbb{R}^{-}$ – Conjunto dos Números Reais não positivos

$\mathbb{R}^{*}$ – Conjunto dos Números Reais com a exclusão do zero.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da Astronomia e da Navegação no final do século XVI exigia longos cálculos aritméticos. Fazer multiplicações e divisões envolvendo números muito grandes nessa época era algo que necessitava ser aprimorado.

Fazia – se necessário, por exemplo, uma ferramenta que transformasse operações mais complicadas em operações mais simples, por exemplo, a transformação de uma multiplicação em uma soma.

No início do século XVII dois matemáticos, *Jost Biirgi* (1552 – 1632) e *John Nepier* (1550 – 1617), criaram, separadamente, tábuas com duas colunas, em que a cada número da coluna esquerda, correspondia a um número da coluna da direita. Essa tábua foi chamada de tábua de logaritmos. O vocábulo logaritmo, criado por *Napier* tem origem dos termos gregos *´´logos*`` que significa razão, cálculo e *´´arithmos*`` que significa número. [1]

Nessa tábua o número da direita era chamado logaritmo do número da esquerda. Nela, para se multiplicar dois números, por exemplo, bastava fazer a soma dos seus logaritmos, o número obtido era o logaritmo do produto, e então bastava olhar na tábua qual número tinha aquele logaritmo.

Durante os quatro séculos que sucederam a descoberta dos logaritmos, sua utilidade foi de extrema importância na Ciência e na Tecnologia. *Kepler* em 1620, dizia que a descoberta dos logaritmos ´´ aumentava vastamente o poder computacional e astronômico``. [1]

Recentemente, com o uso das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam um pouco sua utilidade, mas o estudo dos logaritmos ainda é e será tema de central importância.

Durante os meus poucos anos de experiência docente, pude reparar que a maioria dos alunos apresentavam grande dificuldade na aprendizagem de logaritmos e exponenciais A abordagem que os livros didáticos e apostilas trazem sobre esses conteúdos, por vezes, geram confusões nos alunos e fazem com que esses tópicos não sejam aprendidos de forma adequada.

Acredito que o ensino de matemática deva fazer sentido para o aluno, e que só assim a absorção desse conhecimento será efetiva. O que acontece com o ensino dos logaritmos é que ele é sempre feito de modo a não dar sentido para tal estudo e o que gera uma pergunta muito recorrente dos alunos: ´´onde vou usar isso? `` .

Neste trabalho pretende-se fazer uma viagem sobre a parte teórico matemática dos logaritmos e exponenciais, sua evolução e sua necessidade. Em seguida mostrarei as aplicações desses conteúdos em situações corriqueiras.

Mostra-se, também, resultados de duas pesquisas realizadas em duas escolas de São João Del Rei – Escola Estadual Doutor Garcia de Lima e Colégio Revisão – visando-se analisar a aprendizagem dos alunos em relação aos temas propostos nessa dissertação e a opinião de alguns professores de matemática sobre o ensino e suas dificuldades em trabalhar logaritmos e exponenciais.

Para finalizar, dar – se – á uma abordagem final sobre o ensino de logaritmos e exponenciais, criando um plano de aula que será avaliado por alguns professores e que pode ser usado, diferentemente da abordagem que os livros e apostilas dão, para o ensino desses conteúdos.

2. O LOGARITMO E A EXPONENCIAL DO PONTO DE VISTA TEÓRICO MATEMÁTICO

2.1 – Propriedades da função logarítmica

2.1.1– Propriedades fundamentais

Considere uma função real $L(x)$, definida para todo x real positivo, cuja derivada é dada por $L'(x) = 1/x$, para todo x maior que zero. Considere ainda, sem perda de generalidade, que $L(1) = 0$. [2]

Tome $y > 0$ real, arbitrário e defina $f(x) = L(xy)$ uma outra função. Derivando em x a função f, temos:

$$f'(x) = yL'(xy) = 1/x.$$

Definição: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais, se, $f'(x) = g'(x)$ então $f(x) = g(x) + c$, onde c é um número real.

Pela definição $f(x)$ *e* $L(x)$, diferem apenas por uma constante C [10]

$$f(x) = L(xy) = L(x) + C \tag{1}$$

Tomando $x = 1$ em (1), vem:

$$L(y) = L(1) + C \ ,$$

Como $L(1) = 0$, temos que:

$L(y) = C$ e, portanto

$$\boldsymbol{L(xy) = L(x) + L(y).} \tag{2}$$

Dessa forma, a função L, chamada de **função logarítmica,** é uma função que transforma o produto em soma e isso é extremamente importante, pois do ponto de vista matemático, realizar uma operação de multiplicação é bem mais difícil que realizar uma adição.

Entende – se, portanto, como função logarítmica, toda função que satisfaz a igualdade escrita em (2).

Algumas propriedades da função logarítmica são:

1 - Note que tomar $L(1) = 0$ agora não é casual. Transformar operação de multiplicação em soma tem como condição necessária essa igualdade, pois $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1)$, daí:

$$L(1) = 0$$

2 – Considerando – se a tábua de logaritmos (ver ANEXO I) em que os números positivos da coluna da esquerda estão em ordem crescente, se isso ocorre, então os números da coluna da direita também estão em ordem crescente. Isso nos leva a dizer que L é crescente, isto é

$$x < y \leftrightarrow L(x) < L(y)$$

3 - A função L é definida apenas para números positivos, pois:

A – Suponha que L esteja definida para x=0, então:

$$L(0) = L(0.x) = L(0) + L(x)$$

Logo, $L(x) = 0$

Ou seja, teríamos uma função identicamente nula, o que não serviria para quase nenhum objeto de estudo.

B – Já sabemos que $L(1) = 0$

C – Note que se quiséssemos definir L para números negativos, teríamos:

$$0 = L(1) = L(-1.-1) = L(-1) + L(-1)$$

Logo, $L(-1) = 0$

Concluí – se assim que, para $x > 0$, temos:

$$L(-x) = L(-1.x) = L(-1) + L(x)$$

Assim, $L(-x) = L(x)$.

E portando L seria uma função par e, em vista disso, só precisamos definí – la para os números positivos.

2.1.2 – Outras propriedades

- Uma função logarítmica é injetiva, isto é, dados $x, y \in$ domínio de f, se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.

Com efeito,

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ números diferentes. Então ou $x < y$ ou $y < x$. Nos dois casos, segue, pela propriedade (b), que $L(x) < L(y)$ e $L(y) < L(x),$ respectivamente. Em qualquer hipótese, se $x \neq y,$ tem – se $L(x) \neq L(y)$.

- Para todo $x > 0$ tem – se $L(1/x) \ = \ -L(x)$

Com efeito,

$$0 = L(1) = \ L\left(x.\frac{1}{x}\right) = \ L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right)$$

Assim, $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

- Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $L(x/y) = \ L(x) \ - \ L(y)$

Com efeito,

$$L(x/y) = \ L(x.1/y) = \ L(x) \ + \ L(1/y) \ \ = L(x) - L(y)$$

Logo, $L(x/y) = \ L(x) - L(y)$.

- Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ tem – se $L(x^r) = rL(x)$

Com efeito,

Primeiramente nota – se que a propriedade fundamental,

$$L(x.y) = L(x) + L(y),$$

estende – se para o produto de um número qualquer de fatores, por exemplo,

$$L(x.y.z) = L((x.y).z) = L(x.y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z).$$

E assim por diante,

$$L(x_{1.}x_2.x_3 \dots .x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \cdots + L(x_n)$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então:

$$L(x^n) = L(x.x.x.x \dots .x) = L(x) + L(x) + \cdots + L(x) = nL(x)$$

Para $r = 0$ a propriedade também é válida, pois para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tem – se que $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0.L(x)$

Considere agora $r = -n$ com $n \in \mathbb{N}$. Então para todo x>0, temos

$$x^n.x^{-n} = 1.$$

Logo

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0 \to L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x)$$

Por fim, o caso geral em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Logo,

$$q.L(x^r) = L(x^r)^q = L(x^p) = pL(x)$$

Então, da igualdade $q.L(x^r) = pL(x) \to L(x^r) = p/qL(x)$ tem – se que $L(x^r) = rL(x)$.

2.2 – Definições de logaritmo

Nessa parte do trabalho, definir-se-á formalmente a função logarítmica de dois modos diferentes: A definição mais difundida nos livros didáticos e na escola, que, no entanto, será visto que gera alguns inconvenientes, e a definição geométrica, que comparada a anterior, possibilita maior conhecimento da função.

Uma maneira de se definir logaritmo é considerando – se logaritmos cuja base é o número real a , tal que $L(a) = 1$. Um modo particular de definir a função logarítmica $L: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, é a seguinte:

$$L(x) = y \text{ se, e só se, } a^{y} = x,$$

Essa maneira, embora muito ensinada nas escolas, apresenta certos problemas, pois, por exemplo, ela requer o estudo anterior de propriedades de funções exponenciais e o significado de potencias quando o expoente é racional. E, um segundo problema, é a respeito do número de *Euler*, e, que não fica evidente de maneira espontânea que ele é uma base especial e que surge naturalmente em grandes problemas de aplicações.

A segunda e mais vantajosa maneira de definir logaritmo, é a definição geométrica, que, mais cuidadosamente, será trabalhada aqui.

2.2.1– Definição geométrica de logaritmos

Muito pouco difundida na escola e nos livros didáticos, essa forma de definir logaritmo permite um estudo mais abrangente e formal dos logaritmos e das funções logarítmicas.

Antes da própria definição, é necessário conhecer alguns conceitos:

- **Faixa de hipérbole**

Considere uma função $y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^{*}$, e H a parte positiva dessa função.

Geometricamente H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que está no primeiro quadrante, como pode ser observado no Gráfico 1.

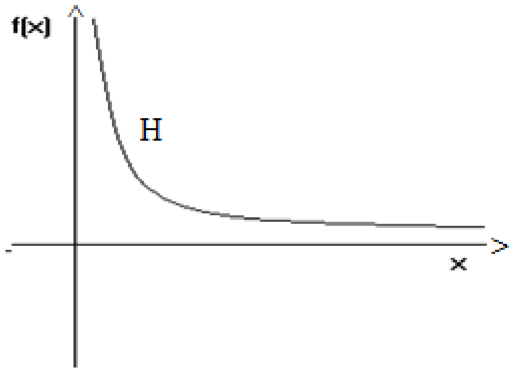


Gráfico 1: Ramo positivo da função $y = \frac{1}{x}$.

Quando tomado dois números reais e positivos a e b com $a < b$, a região do plano limitada pelas retas $x = a, x = b$ e pela hipérbole H é chamada de faixa e hipérbole, como mostra o Gráfico 2.

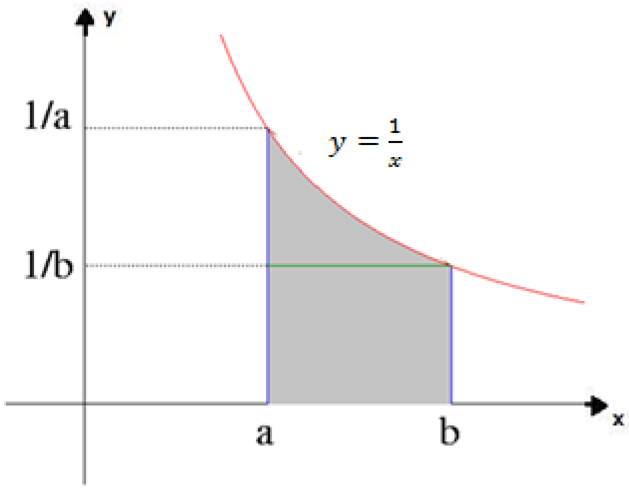


Gráfico 2: Faixa de hipérbole.

A região hachurada é a faixa de hipérbole denotada por H_a^b, ou seja:

$$H_a^b = \left\{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

➢ Área da faixa de hipérbole

Para definir a função logarítmica de um modo mais conveniente, o próximo passo seria responder à questão: como proceder para calcular a área dessa faixa de hipérbole?

Nesse trabalho, não foi feito o detalhamento formal da questão, por envolver tópicos de cálculo. Uma maneira de calcular com precisão essa área é o estudo da soma de *Riemann* e o estudo das integrais definidas, [3]. Mas, uma maneira de se pensar é subdividindo o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos e aproximar por retângulos, cuja base é um subintervalo desse e a altura é o valor da função nas extremidades desse intervalo, em seguida calcula-se as áreas desses retângulos e efetua-se a soma dessas áreas, como mostra o Gráfico 3.

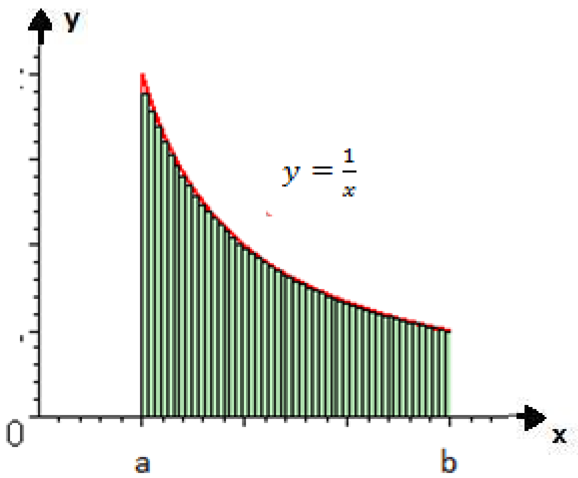


Gráfico 3: Divisão da faixa de hipérbole em retângulos.

É obvio que quanto mais se divide esse intervalo, e consequentemente quanto mais retângulos seja obtido, a área da região hachurada sob a hipérbole fica mais perto da soma de todos os retângulos.

Um dos fatos mais importantes e relevantes aqui sobre áreas das faixas de hipérbole é:

Seja qual for o número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Demonstração: Note inicialmente, que dado um retângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c, d]$, do eixo das abcissas, e o retângulo inscrito em H cuja base é o segmento $[ck, dk]$ também no eixo das abscissas, ambos tem a mesma área.

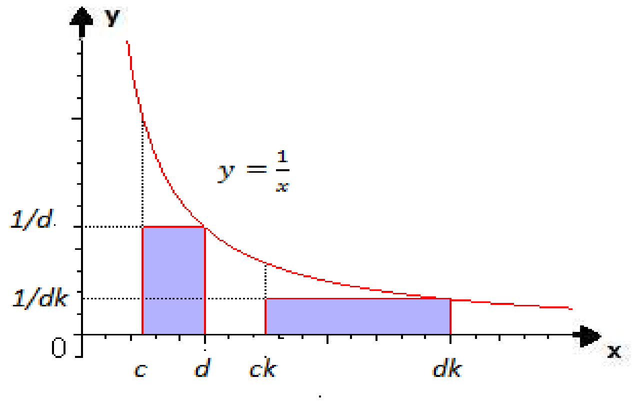


Gráfico 4: Comparando áreas de retângulos.

De fato, observando o Gráfico 4:

A área do primeiro retângulo é igual a:

$$(d - c) \times \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$$

E a área do segundo retângulo é:

$$(dk - ck) \times \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}$$

Agora, pode – se considerar um polígono S, inscrito em H_a^b. Quando se multiplica por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão do intervalo $[a, b]$, determinados por S, obtém – se uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$, e portanto outro polígono regular S' inscrito na faixa H_{ak}^{bk}.

Cada um dos retângulos que compõe S'possui a mesma área dos retângulos que compõem S, logo as áreas de S e S' são iguais.

Dessa forma, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área. (3)

2.3 – Logaritmos Naturais

Define-se aqui o logaritmo natural como sendo a área da faixa H_1^x para $x > 0$.

Escreve – se então que:

$$\ln(x) = Área\ (H_1^x)$$

E convenciona – se que se $0 < x < 1$ entao a $Área\ (H_1^x) < 0$.

Se tomado $x = 1$, então

$$\ln(1) = Área\ (H_1^1)$$

Note que H_1^1 é um segmento de reta e, portanto, tem área zero. Logo

$$\ln(1) = 0$$

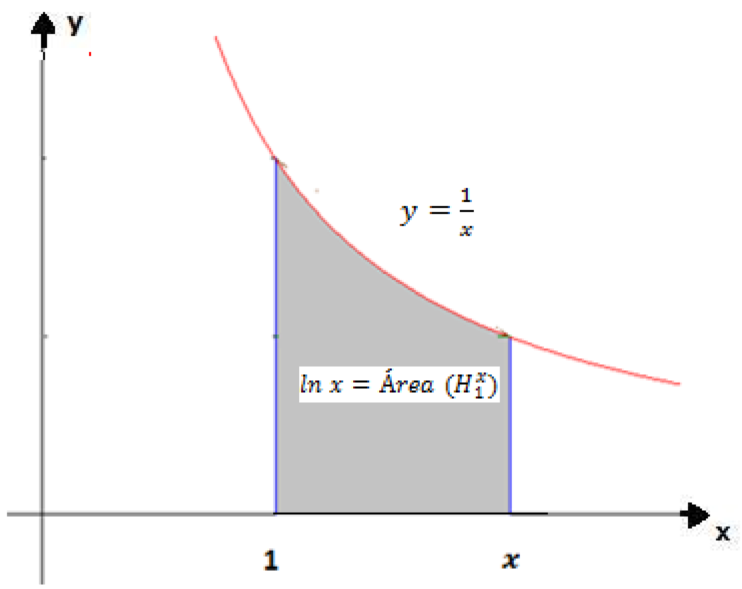


Gráfico 5: Faixa de hipérbole H_1^x.

A área hachurada do Gráfico 5 é igual a $\ln(x)$.

Uma maneira de calcular, aproximadamente, os valores de $\ln(2)$ e $\ln(3)$ usando a definição de ln é a aproximação por retângulos.

Em seguida, apresenta-se dois Teoremas importantes sobre logaritmos naturais.

Teorema 1: $ln: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

Demonstração: Deve –se mostrar que ln respeita a propriedade fundamental da função logarítmica, dada em (2), ou seja:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

De fato, reescrevendo a expressão acima de acordo com a definição do ln, tem – se que mostrar que:

$$Área\left(H_1^{xy}\right) = Área(H_1^{x}) + Área\ (H_x^{xy})$$

Mas, por (3),

$$Área\left(H_x^{xy}\right) = \ Área\ (H_1^{y})$$

e portanto, segue que

$$Área\left(H_1^{xy}\right) = Área(H_1^{x}) + Área\ (H_1^{y}).$$

Logo,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

■

Teorema 2: A função ln é crescente.

Demonstração: Dados $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, falar que $x < y$ é o mesmo que dizer que existe um número real $c > \ 1$ tal que $y = cx$, logo

$$\ln(y) = \ln(cx) \to \ \ln(y) = \ln(c) + \ln(x)$$

Como $c > 1\ então\ \ln(c) > 0$ e portanto $\ln(y) > \ln(x)$.

2.3.1 – O gráfico da função logarítmica

Ao plotar o gráfico em qualquer software de geometria, por exemplo *graphmatica*, *winplot*, *geogebra*, etc, pode – se ver, mais facilmente, como se comporta o gráfico dessa função.

Esses programas – que servem como forte ferramenta no ensino aprendizagem – são gratuitos e o *download* pode ser feito facilmente pela internet. Nessa dissertação o *Geogebra* foi recorrentemente utilizado e o download do programa pode ser feito no site https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR, por exemplo.

Mas alguns aspectos que nos permitem esboçar o gráfico dessa função já foi falado aqui: Notemos que o gráfico de ln, por ser uma função logarítmica é crescente e corta o eixo das abscissas no valor $x = 1$. Além disso, a função logarítmica só está definida para valores de $x > 0$ e, portanto, o gráfico pertence apenas ao primeiro e quarto quadrante.

Um aspecto que não foi abordado aqui, mas que pode ser encontrados em livros de cálculo é que a função logarítmica é ilimitada superiormente e inferiormente. [3].

Portanto o gráfico de $\ln(x)$ possui a seguinte forma:

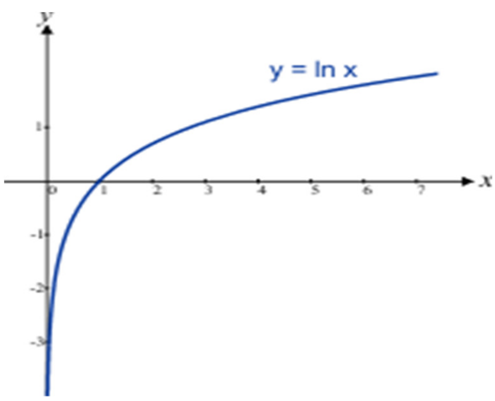


Gráfico 6: Gráfico da função $y = ln(x)$.

2.4 – O número de Euler (e)

Um fato que não está demonstrado nesse trabalho, mas que também pode ser encontrado em livros de cálculo, por exemplo [3], é que a função logarítmica (L) é sobrejetiva, ou seja, dado qualquer número real c, existe sempre um (único) um número real x tal que $L(x) = c$. Isso leva a pensar que existe um número real tal que o logaritmo natural desse número seja 1. Ou seja, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $ln\, x = 1$.

Esse número será representado pelo número de *Euler*, denotado por e.

(Recomenda – se a leitura do livro ´´***e:* a história de um número**`` escrito em 2003 para quem deseja aprofundar e conhecer esse número de extrema importância na matemática)

Assim:

$$lnx = 1 \leftrightarrow x = e$$

É imediato perceber que $e > 1$ pois o seu logaritmo natural é maior do que zero.

No subcapítulo anterior, foi sugerido uma maneira de se calcular, aproximadamente, ln (2) e ln (3). Se calculado corretamente, os resultados encontrados com aproximação de quatro casas decimais, são:

$$\ln(2) = 0{,}6931 \;\; e\; ln\,(3) = 1{,}0986$$

Isso leva as seguintes desigualdades:

$$\ln(2) < 1 < \ln(3) \rightarrow \ln(2) < \ln(e) < \ln(3) \rightarrow 2 < e < 3$$

Um valor aproximado de e com 10 casas decimais é:

$$e = 2{,}7182818284$$

Teorema 3: Seja r um número racional. Tem – se:

$$y = e^r \; se\; e, somente\; se, r = \ln(y)$$

Demonstração:

- Se $y = e^r$ então $\ln(y) = \ln(e^r) = r.lne = r$
- Como $\ln(e^r) = r = \ln(y)$ e ln é uma função bijetiva (sobrejetiva e injetiva ao mesmo tempo) então $y = e^r$. ■

2.5 – A função exponencial.

Defini – se o número positivo e^x, com x real, o único número tal que o logaritmo natural seja x.

Do ponto de vista geométrico $y = e^x$ é a abscissa escolhida para que

$$\boldsymbol{Área(H_1^y) = x},$$

ver Gráfico 7.

É claro que:

- $e^x > 0$, para todo x
- $e^x > 1\,,\ se\ x > 0$
- $e^x < 1\,,\ se\ x < 0.$

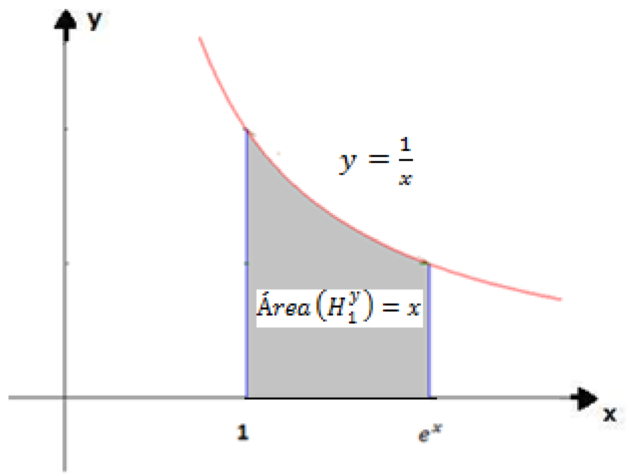


Gráfico 7: Faixa de hipérbole $H_1^{e^x}$.

Agora, nesse contexto, faz sentido atribuir o valor de e^x quando x é irracional. Por exemplo, $e^{\sqrt{2}}$ será o número k, positivo, tal que $H_1^k = \sqrt{2}$.

Como, aproximadamente, $\sqrt{2}$ =1,414, uma valor aproximado para $e^{\sqrt{2}}$ é o número cujo logaritmo mais se aproxima de 1,414.

Olhando em uma tábua de logaritmos temos que:

$$\ln(4{,}14) = 1{,}413 \; e \; \ln(4{,}12) = 1{,}416$$

Logo:

$$4{,}11 < e^{\sqrt{2}} < 4{,}12$$

A área hachurada do Gráfico 8 vale $\sqrt{2}$.

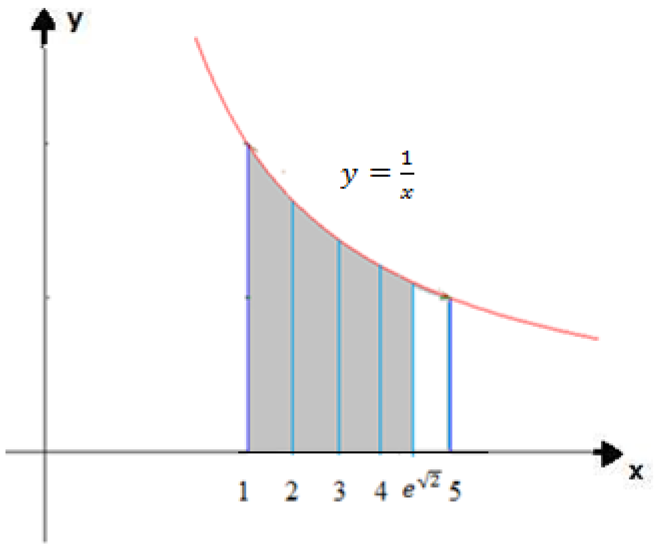


Gráfico 8: área com valor $\sqrt{2}$.

Diferentemente do logaritmo natural, $\ln(x)$, que é definido apenas para $x > 0$, a expressão e^x é definida para todo x real.

A correspondência $x \to e^x$ define uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais. Essa função é denominada função exponencial.

As funções logarítmicas e exponenciais são funções inversas (para provar esse resultado, seria necessário definição de função composta e propriedades das funções inversas. Para não fugirmos muito do assunto, aconselho uma leitura do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, dos autores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado), isso significa que para todo x real e $y > 0$ vale que:

$$\ln(e^x) = x; \; e^{lny} = y$$

2.5.1 – Propriedade Fundamental da função exponencial

Teorema 4: Para x, y, números reais quaisquer, vale que

$$e^x . e^y = e^{x+y}$$

Demonstração:

$$ln(e^x . e^y) = lne^x + lne^y = x + y$$

Logo

$$e^x . e^y = e^{x+y}$$

■

Corolário 1: Para todo número real x, vale que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Demonstração: É claro que $e^0 = 1$, logo, pelo teorema anterior,

$$e^x . e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$$

Logo,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

■

Teorema 5: A função exponencial $y = e^x$ é crescente.

Demonstração: Sejam $x \; e \; y$ números reais tal que $x < y$. Como $x = ln(e^x)$ e $y = ln(e^y)$, não é possível ter e^x=e^y, pois isso implicaria $x = y$. Também não é possível que $e^y < e^x$, pois assim, $ln e^y < ln\, e^x$, ou seja $y < x$. Assim, se $x < y$ então $e^x < e^y$.

Portanto, a função exponencial é crescente.

2.5.2 – O gráfico da função exponencial.

O gráfico da função $y = e^x$ é o conjunto A, do plano cartesiano, formado pelas coordenadas cartesianas (x, e^x), ou seja:

$$A = \{(x, y); y = e^x\}$$

Seja B o gráfico da função logarítmica (Gráfico 5), ou seja

$$B = \{(u, v); v = \ln(u)\}$$

Logo,

$$(x, y) \in A \leftrightarrow y = e^x$$

Aplicando ln em ambos os lados vem

$$x = \ln(y)$$

Isso quer dizer que, $(y, x) \in B$.

Assim, (x, y) está no gráfico de $y = e^x$ se, e só se, o ponto (y, x) está no gráfico da função logarítmica.

Geometricamente, isso significa que o gráfico da função exponencial é obtido através do gráfico da função logarítmica, apenas espelhando – o sobre a reta $y = x$, como pode ser observado no Gráfico 9.

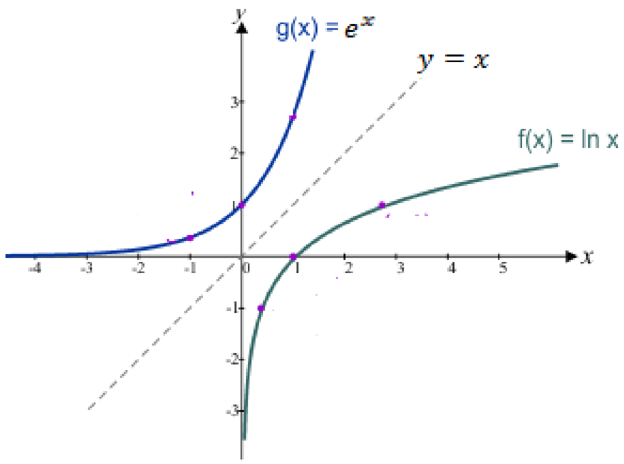


Gráfico 9: Gráficos das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = ln\ (x)$.

2.6 – Outras bases

Considere agora, sistemas de logaritmo com bases diferentes da base *e.* Isso poderia ser feito, do mesmo modo que foi feito anteriormente para definir o logaritmo natural, no entanto, criaria uma definição maçante e mais confusa do que se usando o Teorema 6, abaixo.

Antes de enunciar o Teorema, é necessário estabelecer que $\log_a(x)$ será a notação usada para o logaritmo de base a de um número real $x > 0$.

Teorema 6 (Teorema da mudança de base): Para os números reais x e a com $x, a > 0$, vale que:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Demonstração: Seja $y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, então

$$\ln(x) = y\ln(a) \rightarrow \ln(x) = \ln(a^y) \rightarrow x = a^y$$

Aplicando logaritmo na base a em ambos os lados temos.

$$\log_a(x) = \log_a(a^y)$$

Dessa forma, sabendo que $\log_a(a) = 1$, temos que

$$y = \log_a(x)$$

E portanto:

$$y = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

■

Observação: Note que, a princípio, qualquer número real a, positivo, poderia ser tomado como base para um sistema de logaritmos. Mas, para que a relação da mudança de base seja válida o número a deve ser diferente de um.

Teorema 7: Para cada $a > 1$, a função real $log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida para todo

$x > 0$, é uma função logarítmica.

Demonstração: Sejam $x\ e\ y$ reais positivos, então

$$\log_a(x.y) = \frac{\ln(x.y)}{\ln a}$$

$$= \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)}$$

$$= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

$$= \log_a(x) + \log_a(y)$$

■

2.7 – O número *e* como limite

Dar – se aqui, um resultado que pode ser encontrado em qualquer livro de Cálculo Diferencial e Integral, [3]. Esse resultado é importante nas diversas aplicações que as funções exponenciais têm.

Demonstra – se que, para n natural:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e mais, para $k \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

3. APLICAÇÕES

Visando mostrar para o aluno a importância de se estudar os temas dessa dissertação, segue algumas situações corriqueiras em que as funções logarítmicas e exponenciais são usadas como ferramentas para a soluções dessas situações.

Um estudo mais completo de como as funções citadas modelam inúmeros problemas do cotidiano, pode ser encontrado livros como a matemática do ensino médio [4] e também para estudos mais avançados podem ser consultados livros de equações diferencias, ou seja, equações que envolvem derivadas. Quando se fala em derivadas, uma interpretação muito usada é que as derivadas são taxas de variação, e como quase tudo na vida varia constantemente o uso dessas equações para modelar diversas situações são bem recorrentes. Uma leitura complementar pode ser encontrada, por exemplo, no livro de equações diferencias dos autores *Boyce e Di Prima* [5].

3.1 – Juros contínuos

Um capital *c,* empregado a uma taxa *i* por cento ao ano, rende no fim de um ano, juro no valor de $\frac{ic}{100}$. Seja $\beta = \frac{i}{100}$, então *c,* renderá no fim de um ano um juro de βc. Passados um ano o novo capital será igual a $c + \beta c$, ou seja $c(1+\beta)$. Decorridos dois anos o novo capital será $c_1 = c(1+\beta)$, que empregado a mesma taxa, tornar – se – á igual a $c_1(1+\beta) = c(1+\beta)^2$.

Em t anos, tem – se um montante, tal que $M = c(1+\beta)^t$.

Se tomada uma fração $1/n$ de ano, o capital *c,* empregado a mesma taxa de juro, deverá render $\beta c/n$ de juro, de tal forma que o novo capital será $c + \frac{\beta c}{n} = c(1 + \frac{\beta}{n})$.

Aplicando a mesma ideia dada anteriormente, depois de decorridos cada um desses períodos de $1/n$ de ano, no fim de um ano, obtém – se um capital maior dado por :

$$M = c\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n$$

Desejando que os juros sejam juntados ao capital em cada instante (capitalizados), no fim de ano ele receberá

$$\lim_{n\to\infty} c\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n = c.e^{\beta}$$

Esse tipo de transação é chamado de juros contínuos.

Passados t anos, o novo capital será:

$$\lim_{n\to\infty} c\left(1 + \frac{\beta t}{n}\right)^n = c.e^{\beta t}.$$

Exemplo: Em quanto tempo um capital c*,* dobrará se aplicados a juros contínuos de 20% ao ano?

***Solução*:** Basta encontrar o número *t ,* de anos, tal que:

$$c.e^{0,2t} = 2c$$

Dividindo por c e aplicando ln em ambos os lados vem:

$0,2t = ln2$, onde

$$t = \frac{ln2}{0,2} = \frac{0,693}{0,2} = 3,46$$

Logo, a essa taxa, um capital duplica em aproximadamente 3 anos e meio.

3.2 – Resfriamento de um corpo.

Quando um objeto aquecido é colocado num meio mais frio, em que a temperatura desse meio permaneça constante, se ser afetada pela presença do objeto. A *lei do resfriamento de Newton,* afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura *T,* entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença.

Matematicamente essa lei se modela da seguinte forma: chamando de T_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $T(t)$ a diferença num instante t qualquer, temos que:

$$D(t) = T_0 \, . \, e^{\beta t},$$

Em que β é a constante que depende do material do objeto.

Exemplo: Considere um ambiente cuja temperatura seja de 30° e uma água que fervia cuja temperatura seja de 65° cinco minutos após o fogo ter sido apagado. Em quanto tempo, após apagar o fogo, a água atingirá uma temperatura de 38° ?

Solução: Ao se apagar o fogo, ou seja, em *t=0,* a temperatura da água era de 100° e a do ambiente 30°. Logo $T_0 = 70°$. Passados t minutos, a diferença da temperatura da agua para o meio ambiente é dada por $T(t) = 70. e^{-\beta t}$.

Determinando a constante β.

Sabemos que $T(5) = \ 70. e^{-5\beta} = 65 - 30 \ = \ 35$

Portanto, $e^{-5\beta} = 35/70 = 1/2$.

Tomando ln de ambos os lados, vem:

$$-5\beta = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

Logo $\beta = \frac{\ln(2)}{5} = \frac{0{,}698}{5} = 0{,}1386.$

Agora, queremos saber o valor de *t,* para que $T(t) = 38 - 30 = 8$. Assim:

$$8 = 70. e^{-0{,}1386t}$$

Tomando ln, novamente, de ambos os lados e manipulando algebricamente, temos:

$$\ln\left(\frac{8}{70}\right) = -0{,}1386t$$

onde:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{70}{8}\right)}{0{,}1386} = \frac{2{,}1691}{0{,}1368} = 15{,}65\ minutos.$$

3.3– Meia – vida de substâncias

A meia-vida é um conceito cronológico e indica o tempo em que uma grandeza considerada reduz à metade de seu valor.

A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a concentração decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

Exemplo: Um medicamento dado a um paciente entra em sua corrente sanguínea. Ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizado e eliminado dependendo da droga. Para o antibiótico ampicilina, aproximadamente 40% da droga é eliminada a cada hora.
Qual a quantidade de ampicilina Q em mg, na corrente sanguínea, após horas desde que a droga foi dada? Qual é a meia-vida da ampicilina no corpo?

Solução: Se é eliminado 40% da ampicilina, quer dizer que restam 60% da droga no organismo. Assim, podemos dizer que a quantidade de ampicilina é multiplicada por 0,6 a cada hora que se passa.
Portanto,

$$Q_f = Q_{o.}(0{,}6)^t$$

Onde Q_f é a quantidade de ampicilina que terá *t* horas após ter Q_o.

A meia vida é calculada fazendo $Q_f = \frac{Q_0}{2}$, daí:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_{o.}(0{,}6)^t$$

Eliminando Q_o em ambos os lados, temos:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = (0{,}6)^t$$

Aplicando logaritmo de base 0,6 e fazendo a mudança para base 10, vem:

$$t = \log_{0,6}(0,5) = \frac{\log(0,5)}{\log(0,6)} = 1,36\ horas.$$

Esta é a meia vida da ampicilina.

3.4 – Crescimento Populacional

Ao dizer que uma população cresce a uma taxa $i\%$ ao ano, significa que ela aumenta a cada ano $\beta = \frac{i}{100}$ do seu valor. Tomando P_0 a população num instante t_0, ao final de t anos, a quantidade de pessoas na população será:

$$P(t) = P_0(1+\beta)^t$$

Esse modelo serve, em geral, para o crescimento de qualquer população, seja ela de seres humanos, de bactérias e etc.

É usual pensar que a variação da população seja proporcional a própria população e que esta varia continuamente ao longo do tempo. E, como no exemplo da subseção 3.1, podemos reescrever a população $P(t)$ como:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \qquad (*)$$

onde k é a constante de crescimento.

Exemplo: Suponha que uma cultura de cem bactérias se reproduz em condições favoráveis. Doze horas mais tarde constamos 500 bactérias na cultura. Quantas bactérias haverá dois dias depois do início do experimento?

Solução: Substituindo os dados em $(*)$ temos que:

$P_0 = 100\ e\ P(12) = 500$, então:

$$500 = 100e^{12k}$$

Logo,

$$e^{12k} = 5$$

Aplicando ln em ambos os lados vem:

$$12k = \ln(5) \rightarrow k = \frac{\ln(5)}{12}$$

Deseja – se saber o valor de P, quanto $t = 24$ horas, ou seja, $P(24)$, daí:

$$P(24) = 100e^{24\frac{\ln(5)}{12}}$$

Logo:

$$P(24) = 100e^{2\ln(5)} = 100.25 = 2500\ bactérias.$$

3.5 – Sismologia

A energia liberada por um sismo pode ser calculada utilizando a escala desenvolvida por *Charles Richter* e *Beno Gutemberg* em 1935, escala conhecida como escala de *Richter*.

Como a energia liberada é muito grande, utilizou – se uma escala logarítmica de base 10 e o terremoto é quantificado por um número chamado magnitude.

A magnitude (M) da escala Richter é dada por:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Em que E é a energia liberada e E_0 é a energia liberada por um pequeno terremoto, adotada, convencionalmente com o valor de $10^{4,4}J$.

Existem inúmeras aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, muitas delas podem ser encontradas em livros didáticos, e em livros e artigos constados nas referências desse trabalho. Uma coletânea interessante sobre aplicações dessas funções à Medicina, pode ser encontrada no livro *Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas*, dos autores Alberto Flávio Aguiar, Airton Fontenele e José Euny Moreira.

4. O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS NO ENSINO BÁSICO.

Visando implementar uma proposta pedagógica para o ensino dos temas propostos nessa dissertação, foi elaborado um questionário com 8 atividades sobre logaritmos e exponenciais e aplicado em duas escolas, uma da rede púbica e outra da rede privada da cidade de São João Del Rei, envolvendo alunos e professores.

Os alunos pesquisados compõem parte das turmas de 2ª série e 3ª série do Ensino Médio das escolas visitadas. Escolhidos assim, visto que o estudo de logaritmos e exponenciais estão previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) é dado na 1ª série do Ensino Médio.

Os professores escolhidos fazem parte de diversas escolas púbicas e privadas do Estado de Minas Gerais. Todos eles com, pelo menos, graduação em matemática – licenciatura. Todos eles atuam como docentes do Ensino Médio e lecionam ou já lecionaram na 1ª série desse segmento.

Vale salientar aqui que as duas escolas pesquisadas, autorizaram que o local servisse para contribuir para essa pesquisa (Anexo II), assim como todos alunos, que não foram identificados por serem menores de idade, responderam o questionário (Anexo III) por livre vontade.

As atividades bem como os resultados obtidos, encontram – se a seguir.

4.1 – Questionário aplicado aos alunos das 2ª e 3ª série do Ensino Médio

Atividade 1:
Numa escala de 0 a 3, onde 0 indica que você teve um aprendizado muito insatisfatório e 3 indica que você teve um aprendizado muito satisfatório, quanto você daria para sua aprendizagem sobre logaritmos?

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

N° de Alunos da 2ª série do Ensino Médio: 20

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	3	15%
1	10	50%
2	6	30%
3	1	5%

Tabela 1: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 1.

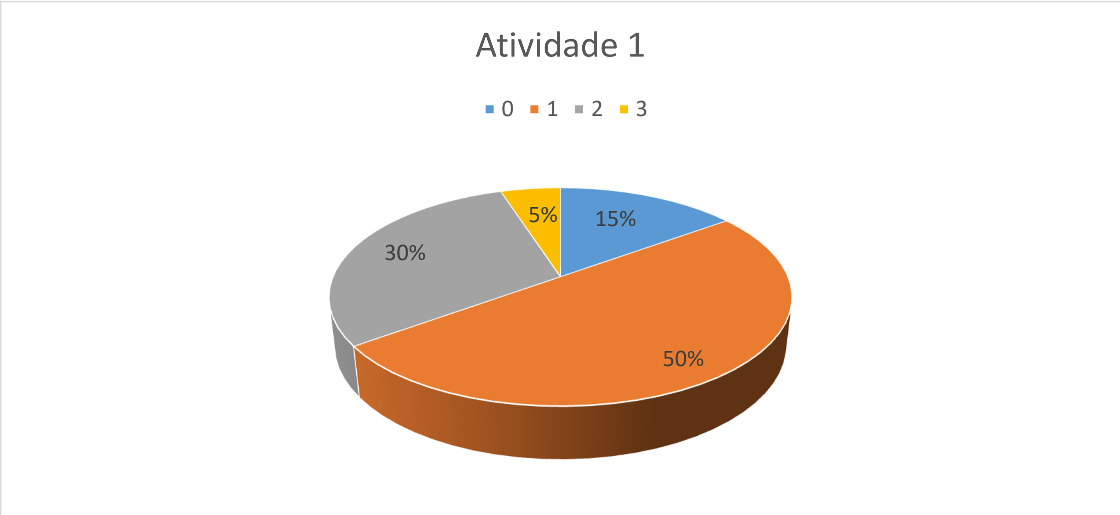


Gráfico 10: Atividade 1 - Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

N° de Alunos da 3ª série do Ensino Médio: 12

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	0	0%
1	1	8,3%
2	10	83,3%
3	1	8,4%

Tabela 2: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 1.

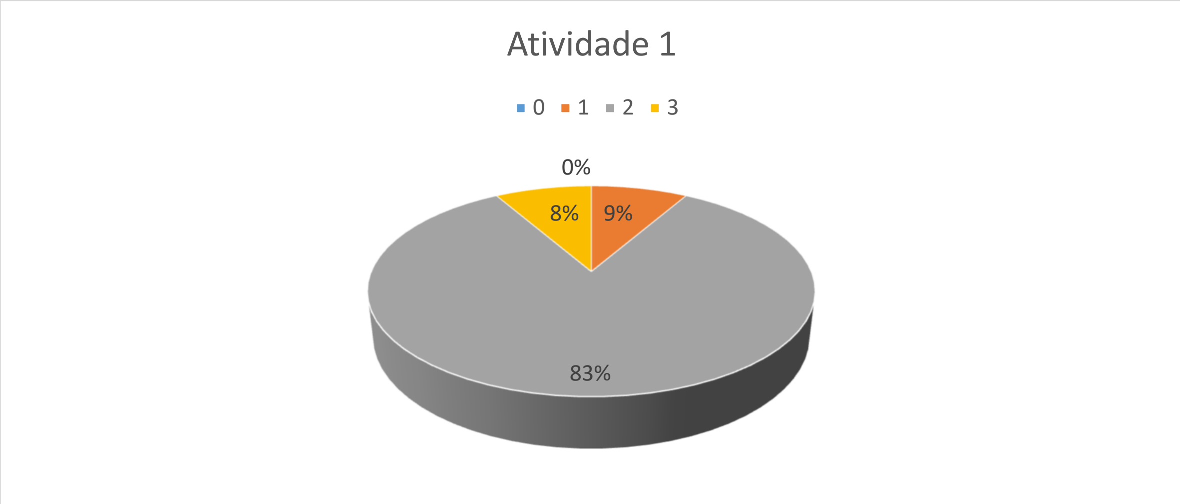


Gráfico 11: Atividade 1 - Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima– Rede pública de Ensino

N° de Alunos da 2ª série do Ensino Médio: 28

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	2	7,2%
1	6	21,4%
2	14	50%
3	6	21,4%

Tabela 3: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 1.

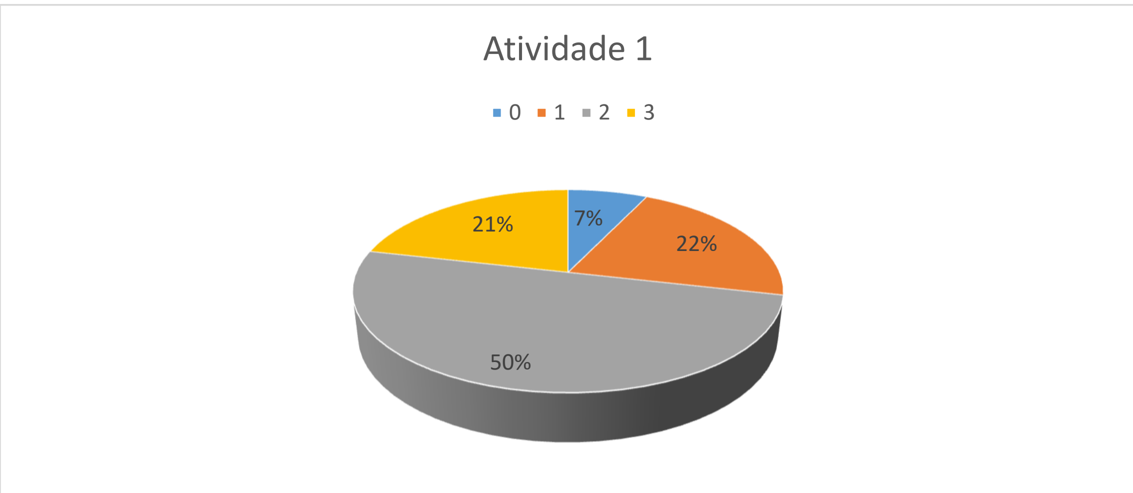


Gráfico 12: Atividade 1 - Respostas 2ª Série Escola Garcia.

Nº de Alunos da 3ª série do Ensino Médio: 20

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	1	5%
1	8	40%
2	11	55%
3	0	0%

Tabela 4: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 1.

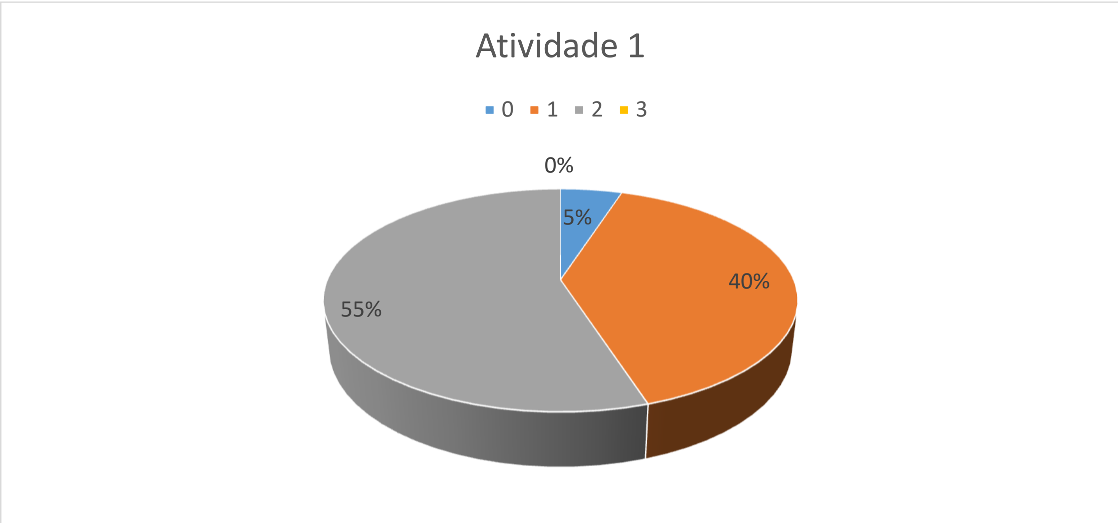


Gráfico 13: Atividade 1 - Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 2:

Numa escala de 0 a 3, onde 0 indica que você teve um aprendizado muito insatisfatório e 3 indica que você teve um aprendizado muito satisfatório, quanto você daria para sua aprendizagem sobre exponenciais?

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos da 2ª série do Ensino Médio: 20

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	2	10%
1	7	35%
2	9	45%
3	2	10%

Tabela 5: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 2.

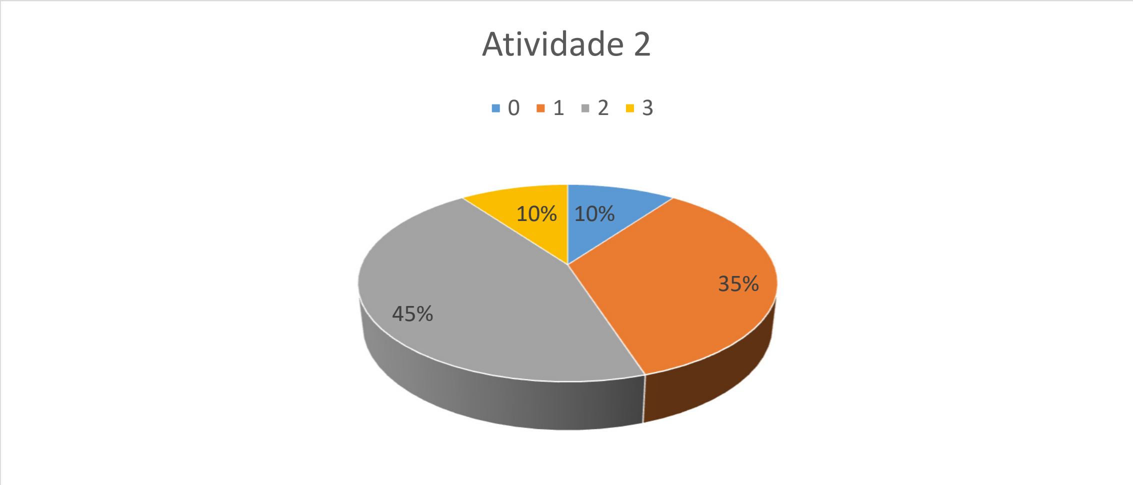


Gráfico 14: Atividade 2 - Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

N° de Alunos da 3ª série do Ensino Médio: **12**

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	0	0%
1	3	25%
2	9	75%
3	0	0%

Tabela 6: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 2.

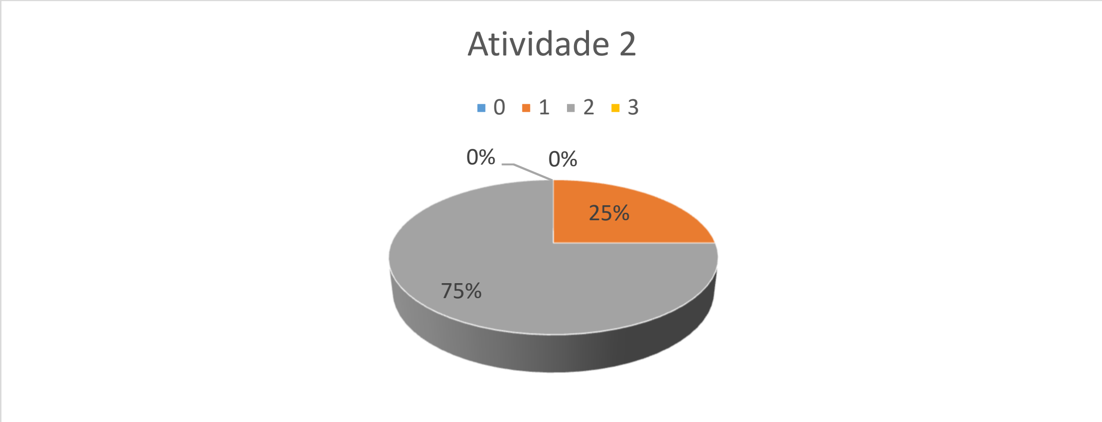


Gráfico 15: Atividade 2 - Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima– Rede pública de Ensino

N° de Alunos da 2ª série do Ensino Médio: 28

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	2	7,2%
1	7	25%
2	9	32,1%
3	10	35,7%

Tabela 7: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 2.

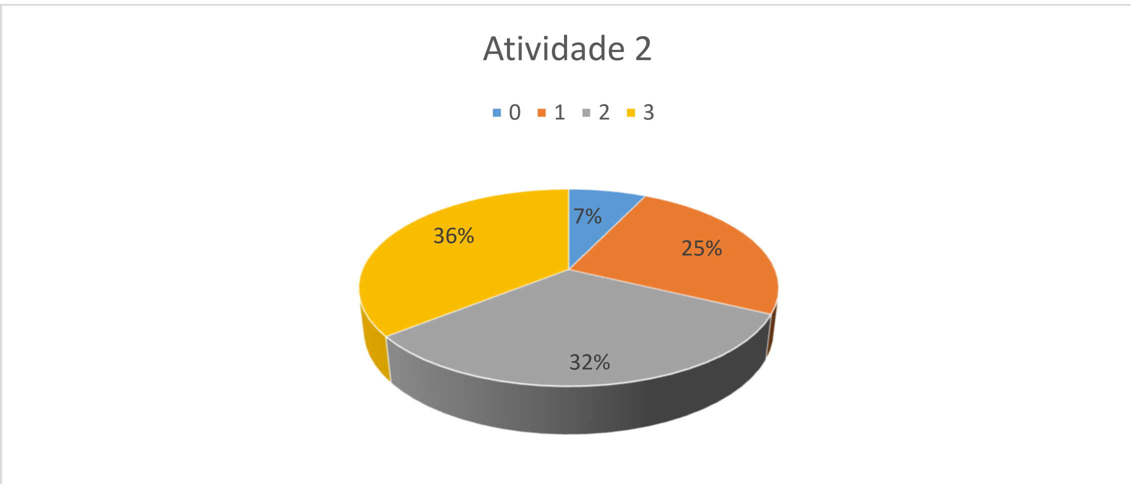


Gráfico 16: Atividade 2 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

N° de Alunos da 3ª série do Ensino Médio: 20

Responderam:

Nota	Quantidade de alunos	Porcentagem
0	2	10%
1	5	25%
2	11	55%
3	2	10%

Tabela 8: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 2.

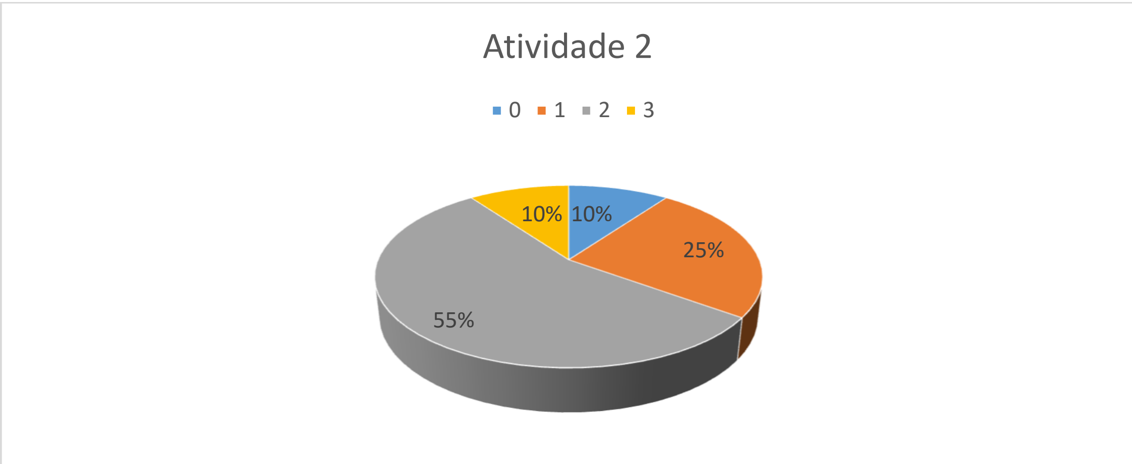


Gráfico 17: Atividade 2 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 3:

Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ determine o valor de $\log 6 + \log 36 - \log 25$ em função de $a\ e\ b$.

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
20	0/0%	20/100%	0/0%

Tabela 9: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 3.

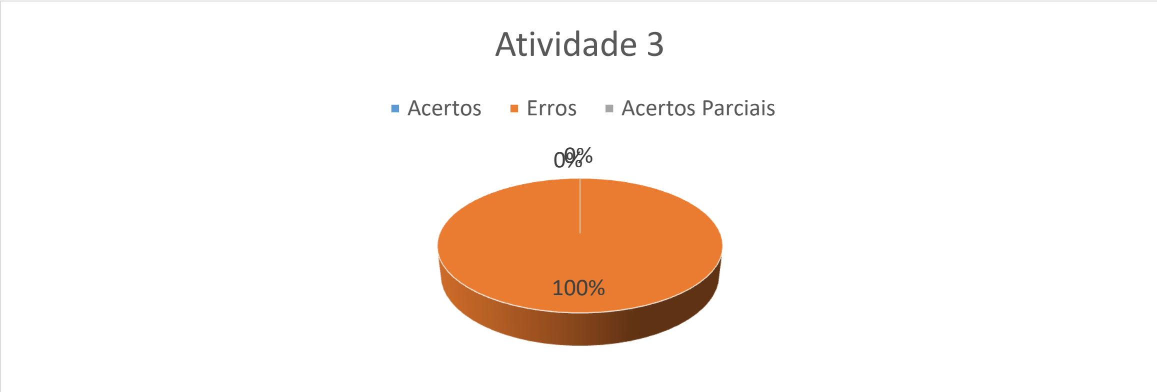


Gráfico 18: Atividade 3 - Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
12	0/0%	6/50%	6/50%

Tabela 10: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 3.

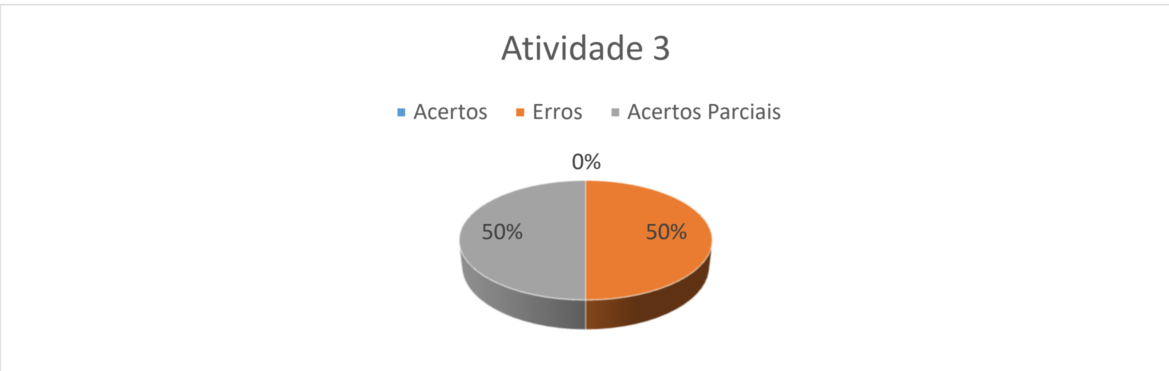


Gráfico 19: Atividade 3 - Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima – Rede pública de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
28	0/0%	23/82,1%	5/17,9%

Tabela 11: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 3.

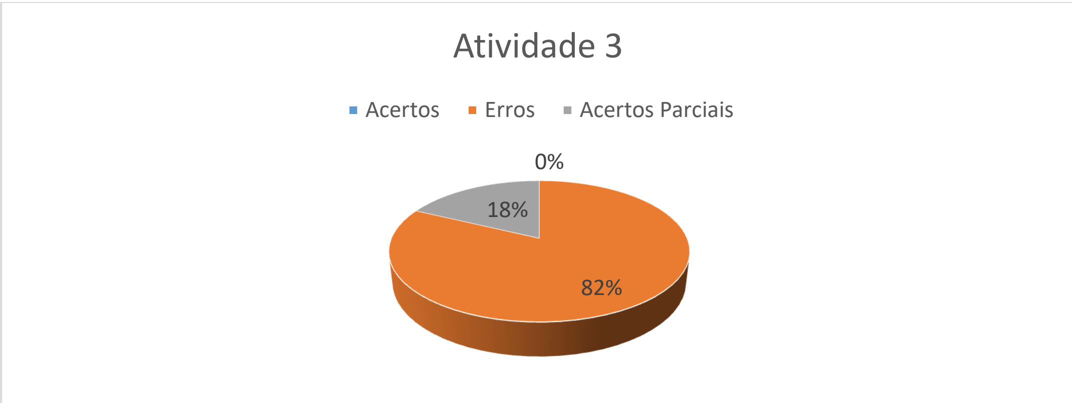


Gráfico 20: Atividade 3 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
20	0/0%	17/85%	3/15%

Tabela 12: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 3.

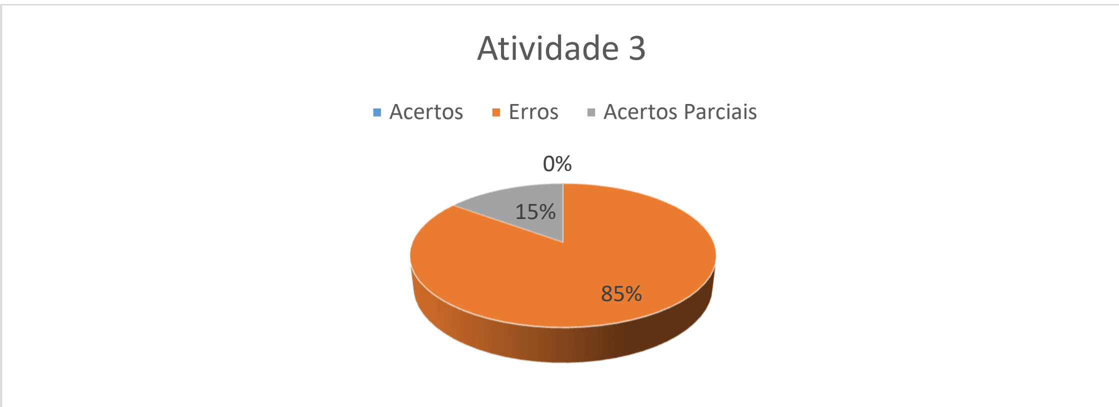


Gráfico 21: Atividade 3 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 4:

Qual o valor de x em: $4^x - 56 = 456$?

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
20	4/20%	16/80%	0/0%

Tabela 13: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 4.

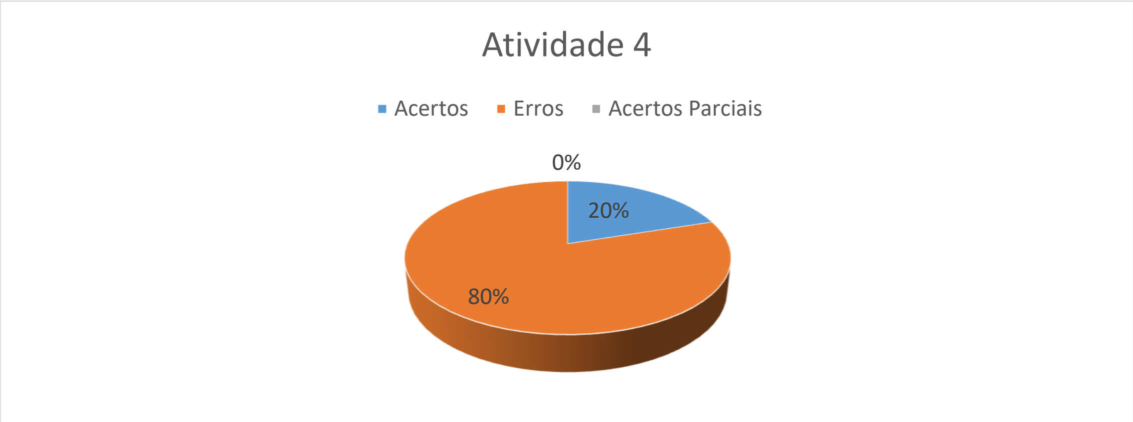


Gráfico 22: Atividade 4 - Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
12	0/0%	11/91,6%	1/8,4%

Tabela 14: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 4.

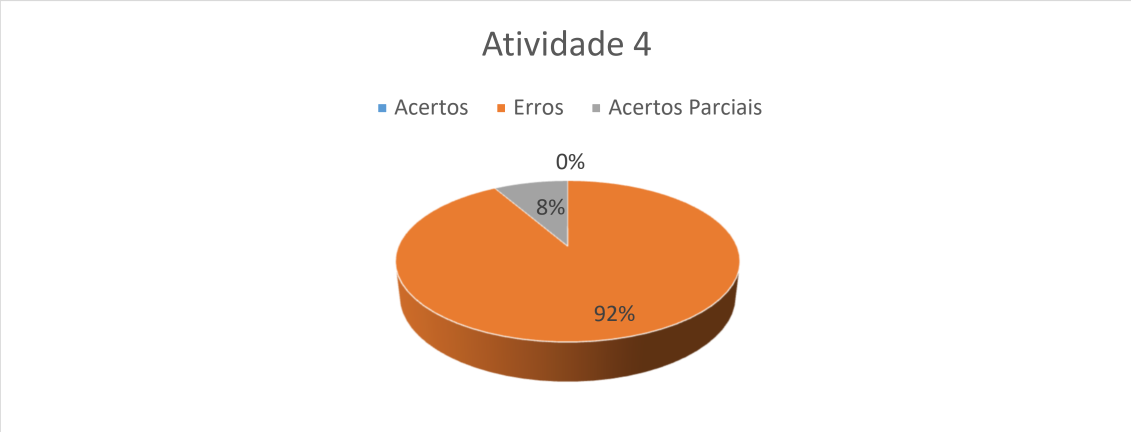


Gráfico 23: Atividade 4 - Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima – Rede pública de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
28	3/10,7%	24/85,7%	1/3,6%

Tabela 15: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 4.

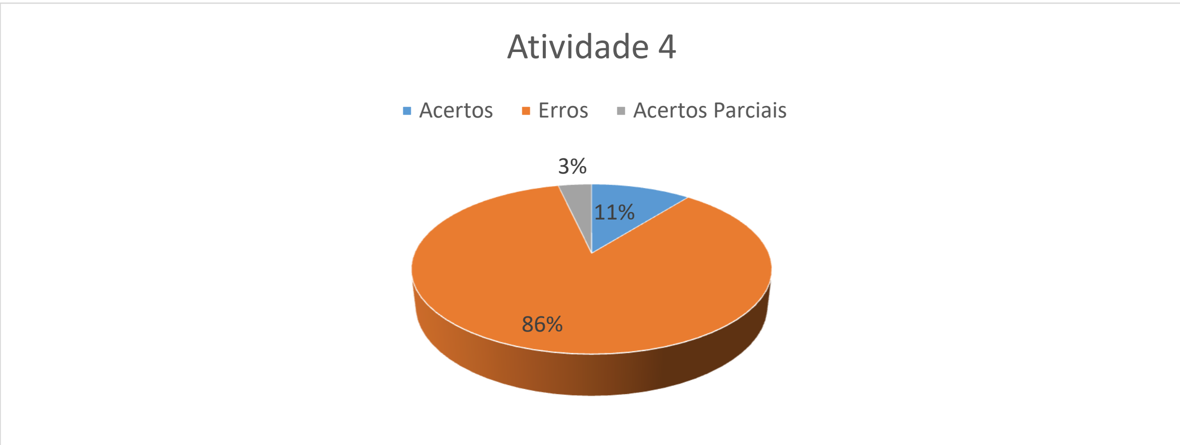


Gráfico 24: Atividade 4 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Acertaram / Porcentagem	Erraram / Porcentagem	Acertaram Parcialmente / Porcentagem
20	1/5%	16/80%	3/15%

Tabela 16: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 4.

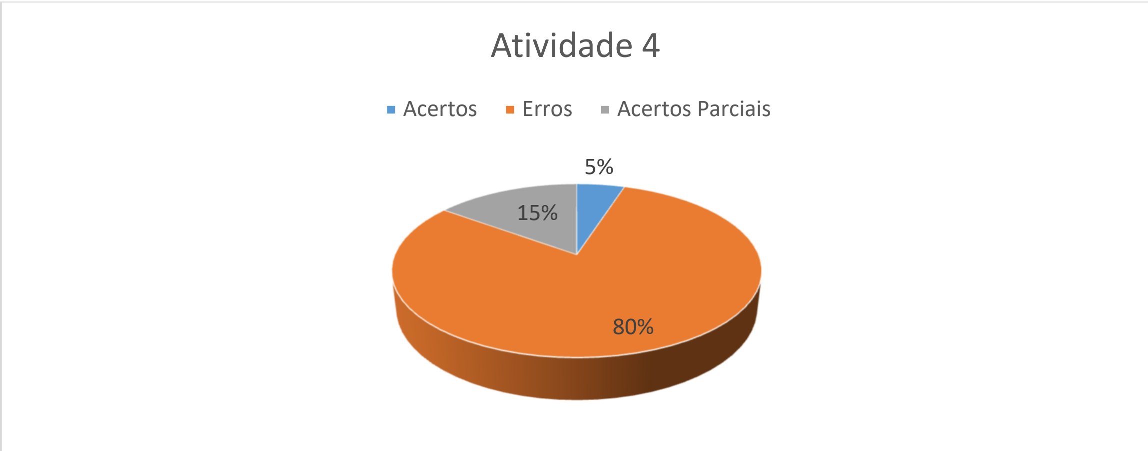


Gráfico 25: Atividade 4 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 5:

Você aprendeu sobre os logaritmos naturais (ln) ? (   ) Sim   (   ) Não

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Sim/ Porcentagem	Não/ Porcentagem	Brancos / Porcentagem
20	5/25%	15/75%	0/0%

Tabela 17: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 5.

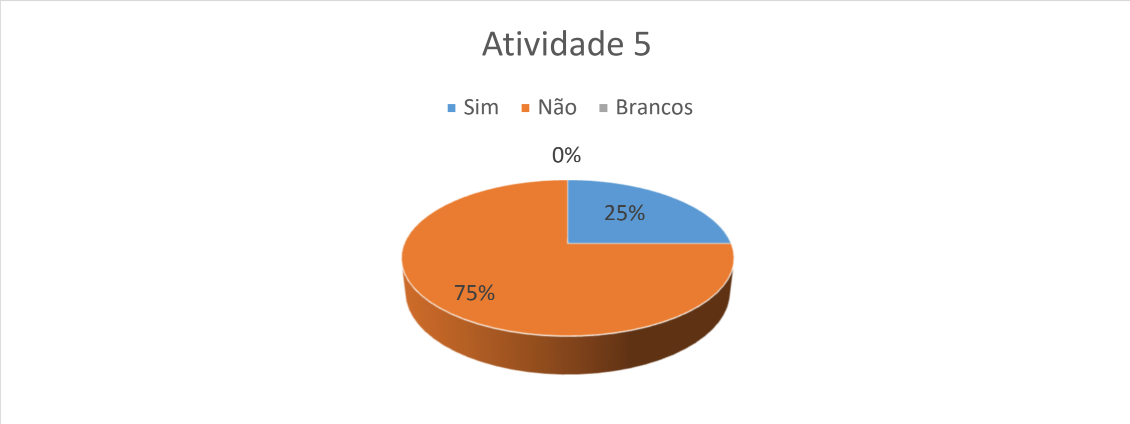


Gráfico 26: Atividade 5 – Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Sim / Porcentagem	Não / Porcentagem	Brancos / Porcentagem
12	4/33,3%	7/58,4%	1/8,3%

Tabela 18: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 5.

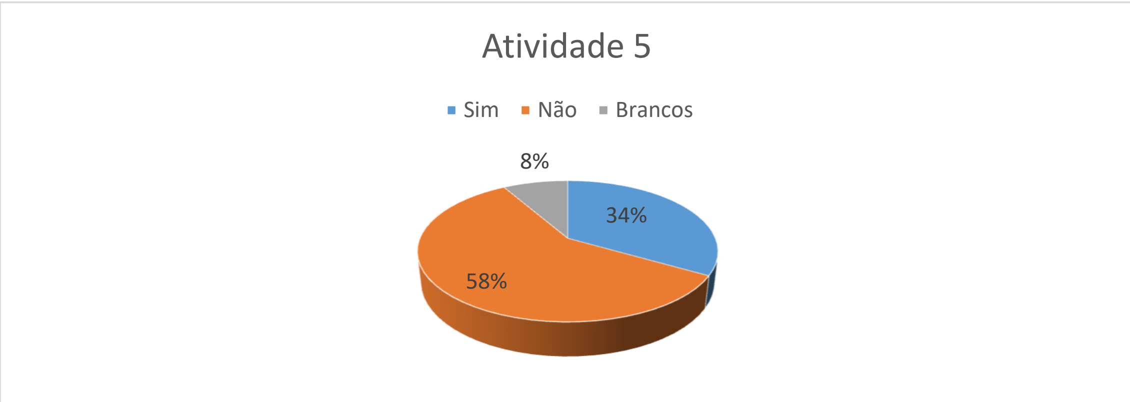


Gráfico 27: Atividade 5 – Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima – Rede pública de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Sim / Porcentagem	Não / Porcentagem	Brancos/ Porcentagem
28	17/60,7%	11/39,3%	0/0%

Tabela 19: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 5.

Gráfico 28: Atividade 5 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Sim/ Porcentagem	Não/ Porcentagem	Brancos/ Porcentagem
20	12/60%	8/40%	0/0%

Tabela 20: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 5.

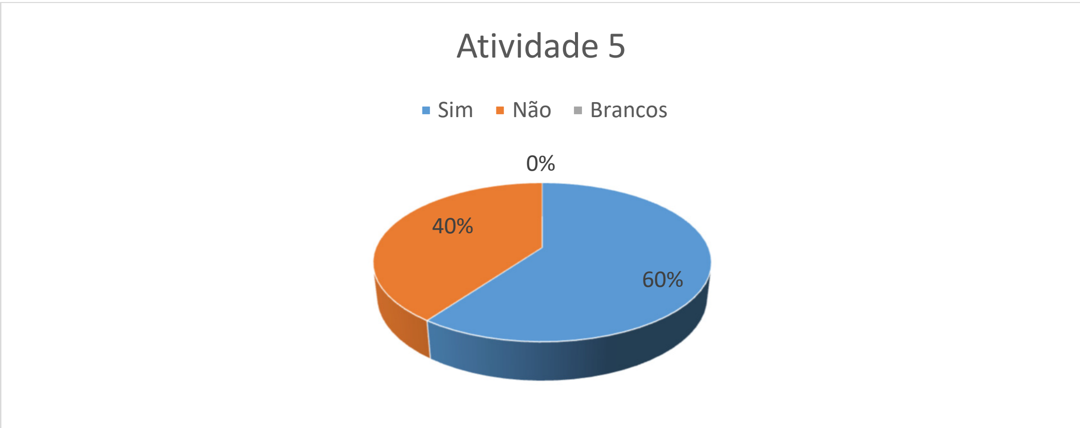


Gráfico 29: Atividade 5 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 6:

Você aprendeu sobre as exponenciais de base e? (   ) Sim   (   ) Não

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Sim/ Porcentagem	Não/ Porcentagem	Brancos / Porcentagem
20	3/15%	17/85%	0/0%

Tabela 21: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 6.

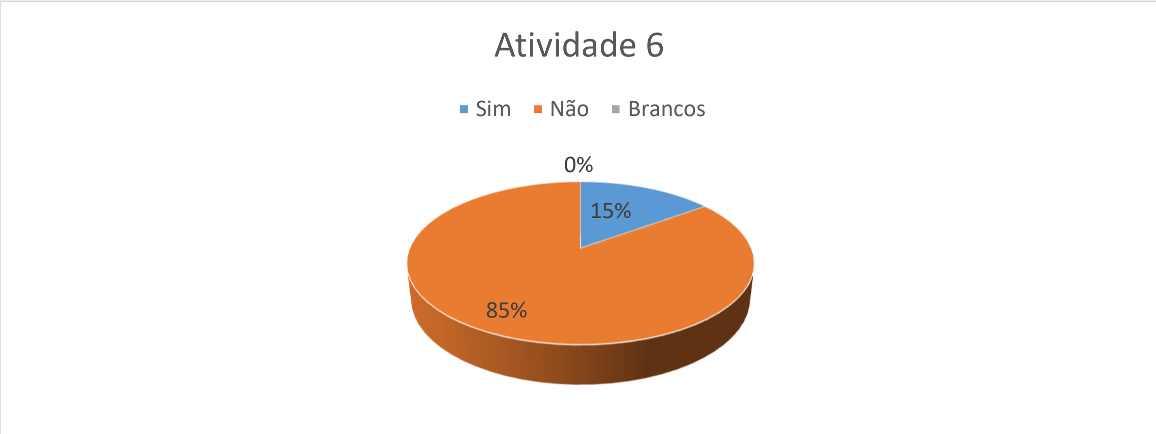


Gráfico 30: Atividade 6 – Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Sim / Porcentagem	Não / Porcentagem	Brancos / Porcentagem
12	2/17%	10/83%	0/0%

Tabela 22: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 6.

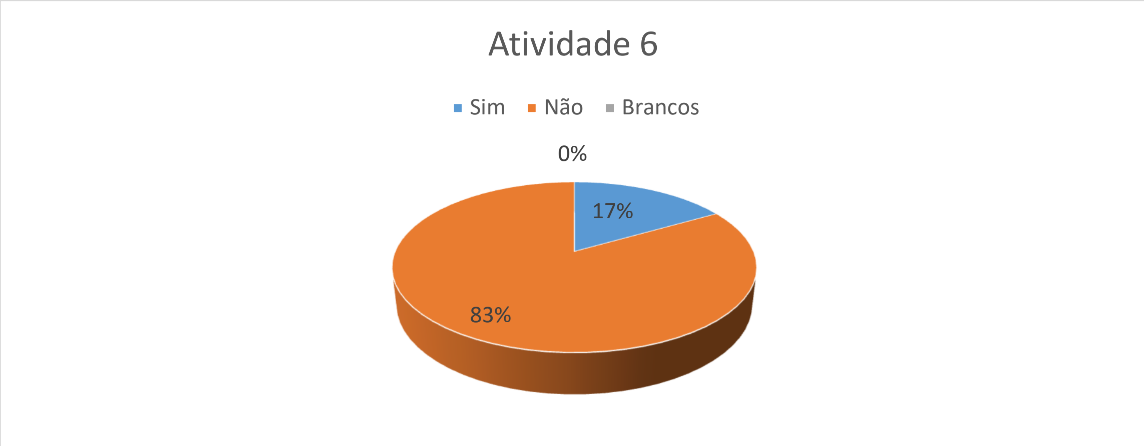


Gráfico 31: Atividade 6 – Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima – Rede pública de Ensino

N° de Alunos 2ª série do EM	Sim / Porcentagem	Não / Porcentagem	Brancos/ Porcentagem
28	10/35,7%	18/64,3%	0/0%

Tabela 23: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 6.

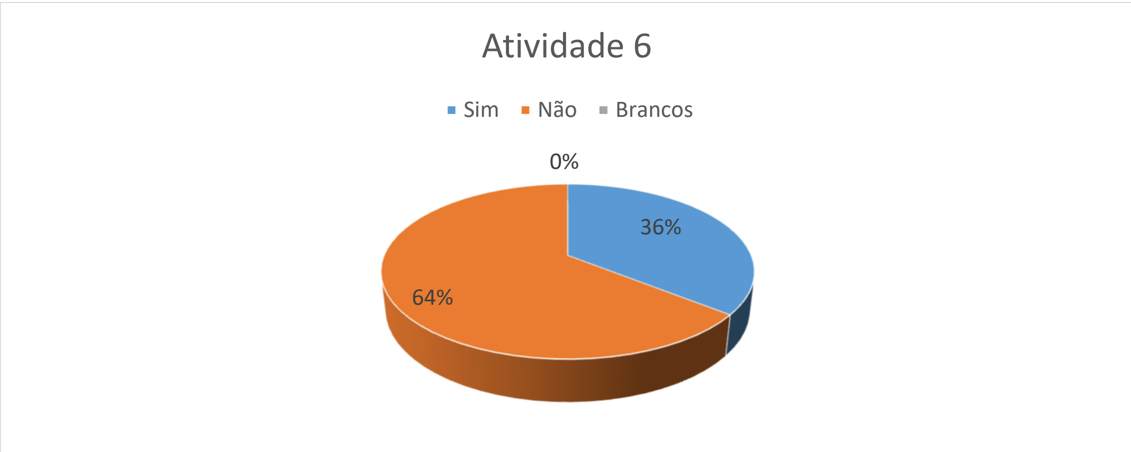


Gráfico 32: Atividade 6 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

N° de Alunos 3ª série do EM	Sim/ Porcentagem	Não/ Porcentagem	Brancos/ Porcentagem
20	14/70%	6/30%	0/0%

Tabela 24: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 6.

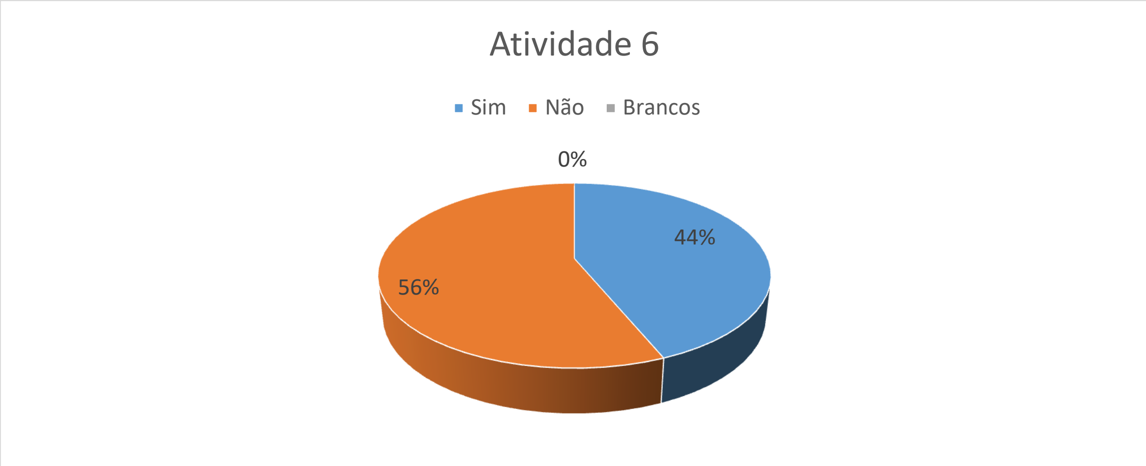


Gráfico 33: Atividade 6 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 7:

Você saberia falar alguma utilidade dos logaritmos e/ou exponenciais? (   )Sim (   ) Não

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Sim/ Porcentagem	Não / Porcentagem	**Nº** de brancos / Porcentagem
20	3/15%	17/85%	0/0%

Tabela 25: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 7.

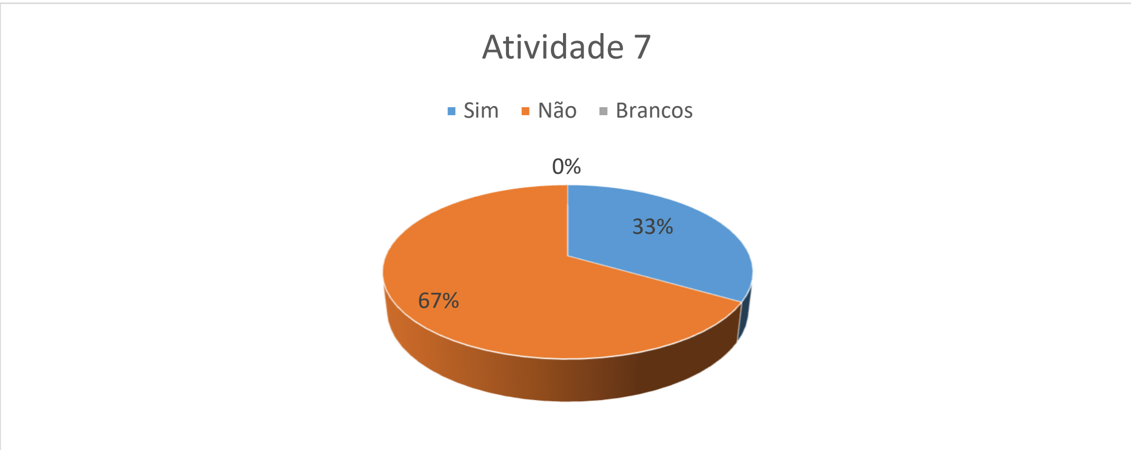


Gráfico 34: Atividade 7 – Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Sim / Porcentagem	Sim / Porcentagem	**Nº** de brancos / Porcentagem
12	6/50%	6/50%	0/0%

Tabela 26: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 7.

Gráfico 35: Atividade 7 – Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima – Rede pública de Ensino

Nº de Alunos 2ª série do EM	Sim/ Porcentagem	Não / Porcentagem	Brancos / Porcentagem
28	2/7,2%	1/3,6%	25/89,2%

Tabela 27: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 7.

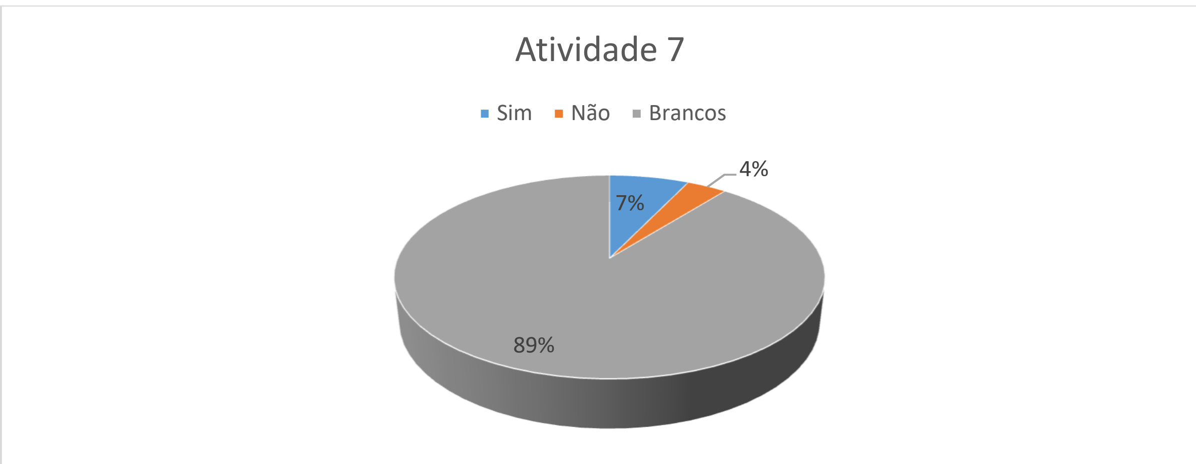


Gráfico 36: Atividade 7 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Nº de Acertos / Porcentagem	Nº de Erros / Porcentagem	**Nº** de brancos / Porcentagem
20	1/5%	18/90%	1/5%

Tabela 28: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 7.

Gráfico 37: Atividade 7 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Atividade 8:

Se você respondeu sim à pergunta anterior, cite, pelo menos, uma utilidade.

Resultados:

Escola: Colégio Revisão – Rede privada de Ensino

Nº de Alunos 3ª série do EM	Citou corretamente/ Porcentagem	Citou incorretamente/ Porcentagem	Não citou/ Porcentagem
20	0/0/%	0/0%	20/100%

Tabela 29: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 8.

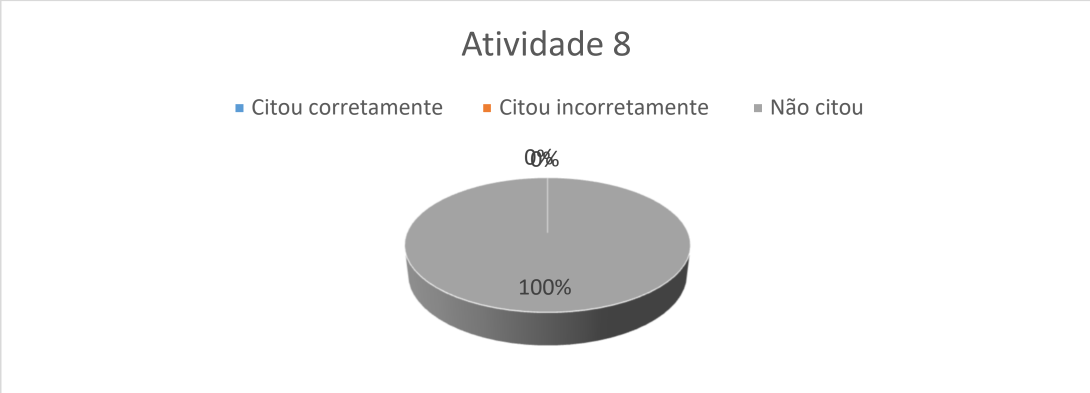


Gráfico 38: Atividade 8 – Respostas 2ª Série Colégio Revisão.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Citou corretamente/ Porcentagem	Citou incorretamente/ Porcentagem	Não citou/ Porcentagem
12	3/25/%	0/0%	9/75%

Tabela 30: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Revisão – Atividade 8.

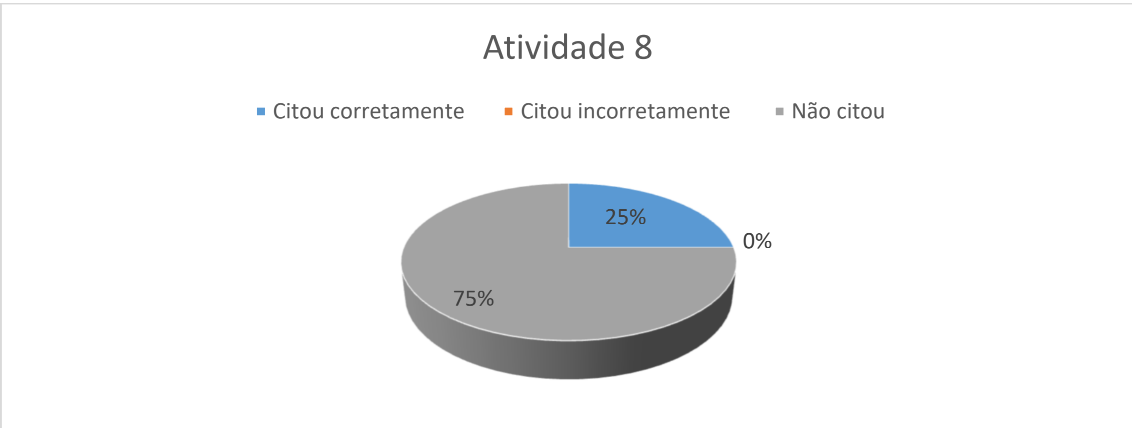


Gráfico 39: Atividade 8 – Respostas 3ª Série Colégio Revisão.

Escola: Garcia de Lima – Rede pública de Ensino

Nº de Alunos 3ª série do EM	Citou corretamente/ Porcentagem	Citou incorretamente/ Porcentagem	Não citou/ Porcentagem
28	0/0/%	0/0%	28/100%

Tabela 31: Tabulação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 8.

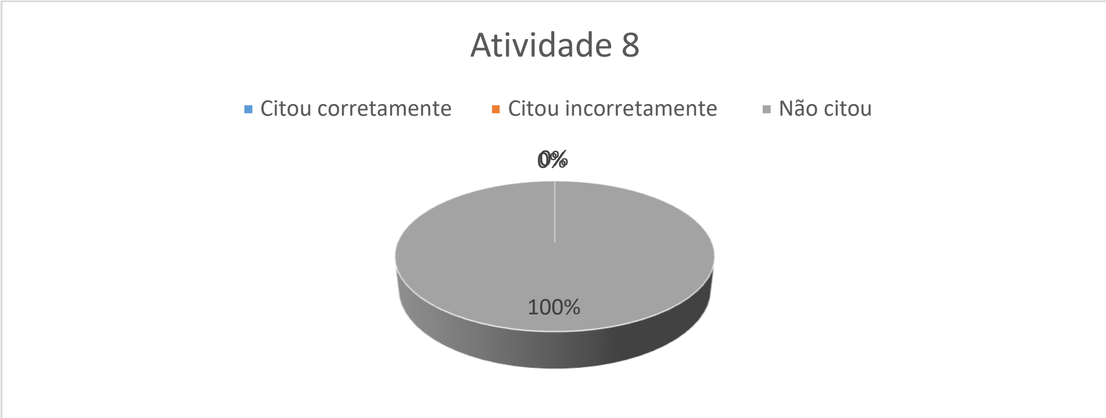


Gráfico 40: Atividade 8 – Respostas 2ª Série Escola Garcia.

Nº de Alunos 3ª série do EM	Citou corretamente/ Porcentagem	Citou incorretamente/ Porcentagem	Não citou/ Porcentagem
20	1/5/%	0/0%	19/95%

Tabela 32: Tabulação dos alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Garcia– Atividade 8.

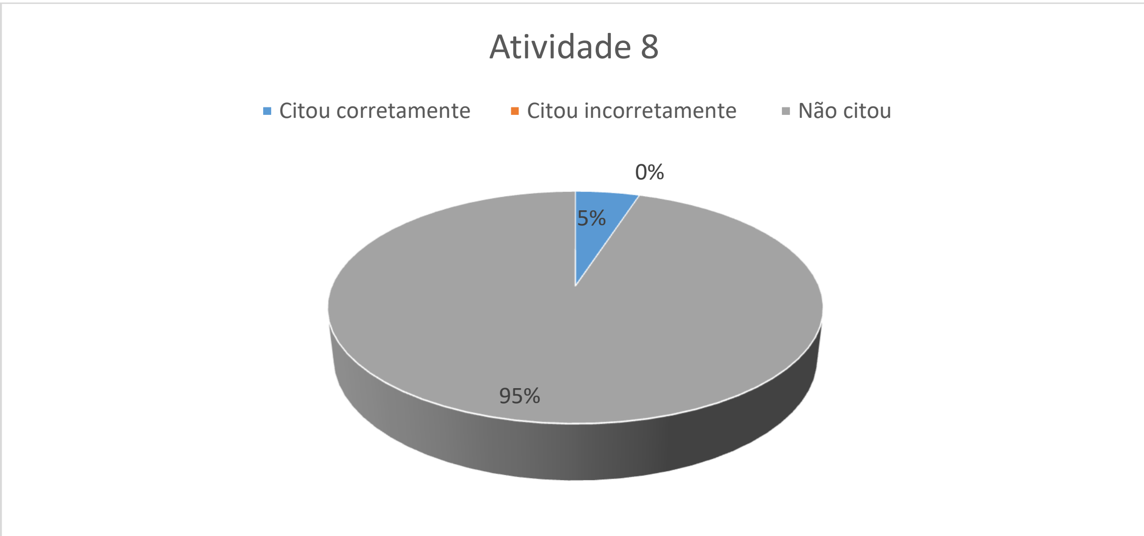


Gráfico 41: Atividade 8 – Respostas 3ª Série Escola Garcia.

Pelos gráficos, pode – se observar que os alunos apresentam grandes dificuldades na aprendizagem de logaritmos e exponenciais.

A abordagem feita nessa dissertação sobre esses temas, deixa muito claro o quão é importante mostrar para os alunos as aplicações desses conteúdos. Entretanto, analisando a estatística das atividades 7 e 8, é um tanto quanto assustador perceber que quase nenhum aluno sabe indicar, corretamente, aplicações desses conteúdos e considero que aí esteja um grande problema para aprendizagem deles.

4.2 – Questionário aplicado aos professores de matemática do Ensino Médio

O questionário aplicado se encontra abaixo. Este mesmo questionário também é disponibilizado no ANEXO IV.

1. Há quanto tempo você atua como professor de Matemática? ________________

2. Você leciona para rede pública ou privada?

3. Se seus alunos tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam matemática?

☐ 10% ☐ 20% ☐ 30% ☐ 40% ☐ 50% ☐ 60% ☐ 70% ☐ 80% ☐ 90% ☐ 100%

Por quê? ____

4. Você considere **abordagem** que você faz para ensinar logaritmos e exponenciais satisfatória para aprendizagem dos alunos? ( ) Sim ( ) Não

5. Você acha que os alunos possuem dificuldade na aprendizagem desses temas? ( ) Sim ( ) Não

Por que?

____

6. Qual conteúdo você ensina primeiro: Logaritmos ou Exponenciais?

____

Caso você responde exponenciais a pergunta anterior, você acha que seria impossível inverter a ordem de ensino, isto é, ensinar logaritmos antes de exponenciais

( ) Sim ( ) Não

Por que?:____

7. Você comenta sobre o número de Euler *(e)* com seus alunos?

. ( ) Sim ( ) Não

8. Você ensina logaritmos naturais (ln) ?

( ) Sim ( ) Não

9. Você gasta, em média, quantas aulas para dar os dois conteúdos?_____________

10. Você dedica aulas a aplicações de logaritmos e exponenciais? Se sim, quantas?

Afim de não identificar os professores, estes serão reconhecido por letras maiúsculas (A, B, C..).

Professor A: Leciona há 9 anos na rede pública e privada, considera que 70% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois eles reconhecem a importância da disciplina, acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para aprendizagem dos alunos e diz que os alunos não apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos visto que considera o conteúdo mecânico demais, o que facilita a aprendizagem. O professor ensina exponenciais primeiro e não vê necessidade e nem explicação para se ensinar logaritmos primeiro e acha que isso seria impossível. Ele comenta sobre o número de *Euler*, no entanto não ensina logaritmos naturais. Gasta um bimestre com os dois temas e enxerga as aplicações como dificultadores na aprendizagem dos alunos.

´´...Pois as aplicações são muito distantes do cotidiano dos alunos e compromete, significativamente o entendimento deles.``

Professor B: Leciona há 20 anos na rede pública, considera que 50% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois possuem dificuldade em interpretar e operar, acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para aprendizagem dos alunos e diz que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos visto que considera que falta pré – requisitos. O professor ensina exponenciais primeiro e acha que isso seria impossível ensinar logaritmos primeiro. Ele comenta sobre o número de *Euler*, no entanto não ensina logaritmos naturais. Gasta vinte aulas com os dois temas e dedica 5 aulas as aplicações.

Professor C: Leciona há 27 anos na rede pública, considera que 70% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois ele considera que a disciplina tem um grau e dificuldade muito elevado. Acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para aprendizagem dos alunos e diz que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos por não estudarem significativamente. O professor ensina exponenciais primeiro e considera impossível inverter a ordem de ensino, justificando que são operações inversas. Ele comenta sobre o número de *Euler*, no entanto não ensina logaritmos naturais. Gasta doze aulas com os dois temas e não dedica aulas às aplicações.

´´Ensino exponenciais inicialmente para, posteriormente, facilitar o ensino de logaritmos .``

Professor D: Leciona há 3 anos na rede privada, considera que 40% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois ele considera que a maioria dos seus alunos acabam indo para área de humanas. Acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para aprendizagem dos alunos e diz que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos por apresentarem dificuldades operatórias. O professor ensina exponenciais primeiro e considera impossível inverter a ordem de ensino, por ser uma questão de definição. Ele comenta sobre o número de *Euler*, ensina logaritmos naturais. Gasta dezesseis aulas com os dois temas e dedica aulas às aplicações.

´´Os alunos apresentam dificuldades para aprender esse conteúdo. Na minha opinião,acredito que o conteúdo depende da habilidade do aluno com potenciação, radiciação,equações do 1º grau e 2º grau, ou seja, para que o aluno entenda muito bem Logaritmo e Exponencial, ele precisa estar dominando os temas citados.``

´´... As aplicações que mais menciono é: PH, Escala Ricther, Bactérias e Crescimento Populacional.``

Professor E: Leciona há 24 anos na rede pública e privada, considera que 90% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois reconhecem a importância da disciplina para o futuro. Acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para a aprendizagem dos alunos e diz que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos por terem dificuldade de trabalhar com expressões matemáticas. O professor ensina exponenciais primeiro e considera possível inverter a ordem de ensino, no entanto pensa ser mais fácil trabalhar o logaritmo como inversa da exponencial. Ele comenta sobre o número de *Euler*, ensina logaritmos naturais. Gasta um bimestre com os dois temas e dedica 10 aulas às aplicações.

´´...A dificuldade de trabalhar com a contextualização. Eles vão bem enquanto trabalho com definições ``

´´...o foco principal são as aplicações. Normalmente dou as definições e propriedades e já mostro as aplicações.``

Professor F: Leciona há 7 anos na rede privada, considera que 50% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois considera que os alunos pensam ser a matéria mais difícil. Acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para aprendizagem dos alunos e diz que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos por ser uma matéria complexa. O professor ensina exponenciais primeiro e pensa que seja impossível inverter a ordem de ensino, pois considera exponenciais um pré-requisito para logaritmos. Ele comenta sobre o número de *Euler*, ensina logaritmos naturais. Gasta vinte aulas com os dois temas e dedica metade das aulas às aplicações.

´´... mesmo os que entendem, esquecem esse conteúdo com facilidade. Acredito que logaritmos é uma matéria complexa e exige maturidade de conhecimento matemático, que eles não possuem no primeiro ano do ensino médio.``

´´Acho que é um pré-requisito. Para ensinar equações logarítmicas é necessário saber bem as equações exponenciais.``

Professor G: Leciona há 5 anos na rede privada, considera que 30% dos seus alunos escolheriam a matemática como matéria para cursar pois, apesar de reconhecerem a importância da disciplina, considera que os alunos possuem dificuldade. Acredita que sua abordagem de logaritmos e exponenciais é satisfatória para aprendizagem dos alunos e diz que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos por causa das notações carregadas demais. O professor ensina exponenciais primeiro e considera impossível inverter a ordem de ensino, pois considera esse caminho, o caminho logico e outro seria infundado. Ele comenta sobre o número de *Euler*, ensina logaritmos naturais. Gasta cinco aulas com os dois temas e dedica uma das aulas às aplicações.

> *´´...eles têm uma dificuldade com a linguagem simbólica da matemática. Notações muito carregadas assustam os alunos, como é o caso de logaritmos e funções em geral.``*

> *´´Exponencial é o caminho lógico depois de potência, que é algo familiar para eles. Então inverter seria algo muito infundado, sem falar que não vejo nenhum ganho óbvio nisso, dado que o problema notacional não foi resolvido.``*

Diante do exposto nesse capítulo, vejo a grande necessidade de um aprimoramento no ensino desses conteúdos. De todos os alunos que responderam o questionário, por exemplo, nenhum aluno acertou a questão de logaritmos por inteiro e pouquíssimos alunos souberam dizer alguma aplicação de logaritmos e exponenciais.

A partir desse ponto de vista, considero, também, que a maioria dos professores questionados consideram que a abordagem que eles fazem sobre logaritmos e exponenciais é satisfatória para a aprendizagem de seus alunos, mas isso foge um pouco do que foi analisado nas respostas dos estudantes.

Vejo, portanto, que tanto alunos como professores devem fazer uma análise mais crítica sobre os temas e como eles estão sendo ensinados, para que tenham uma melhor percepção de que estes apresentam grande defasagem de ensino.

5 . O PLANO DE AULA E A PROPOSTA PEDAGÓGICA

Observando os resultados da pesquisa de campo que realizei, pode-se perceber, sem muita surpresa, que o ensino desses conteúdos não está se dando de forma efetiva para a contribuição da aprendizagem dos alunos.

Logaritmos e exponenciais trazem grande medo aos alunos, seja pela falta de utilidade que eles veem no conteúdo ou pelo que ouvem de más experiências vividas por alunos que já passaram por esses temas.

Não contente com os resultados, que creio que descrevem muito bem a realidade da maioria das escolas do ensino básico no que diz respeito a aprendizagem desses assuntos, quero, nessa parte do trabalho, propor uma variação no ensino dessas matérias.

Criei um plano de aula sobre os conteúdos abordados, para que alguns professores pudessem fazer a avaliação e opinassem sobre ele, identificando qualidades, defeitos e se o modo como proponho é adequado ou não para o ensino médio. O plano de aula encontra – se no Anexo V dessa dissertação.

Aqui, não foi possível realizar uma experiência com os alunos para ver, de fato, se minha proposta é, ou não, efetiva, visto que os temas são abordados no final do ano letivo e não teria tempo hábil para que pudesse aplicar o plano de aula, mas deixo como uma ideia de mudança, e sem dúvida, contribuir na aprendizagem de logaritmos e exponenciais.

Na primeira parte desse trabalho foi feita uma abordagem extremamente teórica sobre logaritmos e exponenciais. Uma abordagem que, pela minha experiência em escolas, não é mencionada em nenhum livro didático que já trabalhei.

Estudada com cautela, creio que essa abordagem possa ser empregada em sala de aula para o ensino desses conteúdos.

Nos livros didáticos e apostilas hoje, o ensino de funções começa no início da 1ª série do Ensino Médio, onde, nessa série, o estudo dessas estruturas é a mais priorizada.

Ensina – se, portanto, e nessa ordem, definição de função, elementos, gráficos, para depois estudar, em particular, cada família de função. Começa – se, então, com a função afim (de 1º grau), após a função quadrática (de 2º grau), alguns livros, depois disso, estendem para o estudo de funções polinomiais de grau maior que dois e funções racionais, logo após estuda – se funções modulares, para aí então estudar, primeiramente as funções exponenciais e por fim as funções logarítmicas.

Sugiro aqui então, uma inversão de ensino dessa última parte.

Pode – se observar, que não é necessário falar de exponenciais para que se fale de logaritmos. O que a maioria dos livros faz, é definir a função exponencial, estudar seus comportamentos e em sequência definir a função logarítmica como a função inversa da exponencial.

O que proponho é que comece a ser ensinado logaritmos, como a primeira parte deste trabalho faz. Ensinando, inicialmente, que existe uma função que transforma soma em produto e estudando todas as propriedades dessa função, para, posteriormente, chamar essa função de função logarítmica, isso poderá causar menos medo e mais interesse nos alunos.

Em seguida poderia ser estudado os logaritmos naturais, definido – os como a área abaixo da hipérbole e estudando suas propriedades.

Nesse contexto, que pode causar surpresa e estranhamento aos professores, o conceito de logaritmo natural já é ensinado, e este é usado como ferramenta para resolver diversos problemas de aplicações.

Estudando esse logaritmo e suas propriedades, demonstra – se, em seguida, a fórmula de mudança de base, e só aí começar a estudar logaritmos decimais e de outras bases.

Findado o estudo de logaritmos, mostrando suas aplicações, define – se exponenciais e funções exponenciais, agora, ela como sendo a inversa da função logarítmica e não ao contrário, como, normalmente, é feito.

Nesse momento apresenta- se o número de *Euler (e),* que também é de extrema importância nas aplicações.

Como comentado anteriormente, a ideia deste capítulo não é trazer uma solução definitiva para o problema de ensino de logaritmos e exponenciais. Entretanto, é proposta uma maneira de se ensinar os temas de escopo, que pode chegar a constituir uma forma diferente, porém mais eficaz, na compreensão destes assuntos no ensino médio.

Infelizmente nós, professores de matemática, vivemos em uma situação complicada de ensino, visto que a maioria dos alunos não tem empatia pelo conteúdo que lecionamos.

Mas acredito que sempre devemos buscar formas de inovar nossos conhecimentos e nossos métodos de ensinar, para que estes surtam mais efeitos naqueles que queremos atingir, nossos alunos.

Por isso, chamo essa parte de: proposta, que pode ter, ou não, sucesso, mas imagino que possa ser um caminho para que possamos alcançar êxito naquilo que queremos.

5.1 – Opiniões, sugestões e críticas de alguns professores sobre a proposta pedagógica e o plano de aula.

Para que minha proposta fizesse mais sentido, a mesma foi enviada para alguns professores de matemática que já trabalham com esse conteúdo, com o intuito que eles pudessem fazer a avaliação sobre o plano de aula.

Elaborei um questionário com cinco perguntas acerca do plano para que eles pudessem responder. Este questionário pode ser visto também no ANEXO VI.

1. Você está preparado para abordar logaritmos e exponenciais dessa forma? Justifique.
2. Você considera o plano de aulas proposto como sendo motivacional e interessante para os alunos? Justifique.
3. Você acha que essa abordagem poderia trazer aspectos positivos no ensino desses conteúdos, afim de que o aluno aprendesse e fixasse mais esses temas? Por que?
4. Você considera que o aluno apresentaria mais ou menos dificuldade se logaritmos e exponenciais fossem abordados dessa forma e não da forma tradicional? Por que?
5. Você daria alguma sugestão ou alguma crítica ao plano de aula?

Identificarei, novamente, os professores questionados por A, B, C e D.

Professor A: Leciona há 7 anos na rede privada e responde as questões da seguinte forma:

1. Sim, acho o conteúdo muito bom e bem aprofundado. Teria que ser dado de forma lenta e construtiva, pois exige um nível alto de maturidade de conhecimento matemático do aluno.
2. Sim. O problema inicial proposto é bem interessante e motivador. A construção do conceito do logaritmo natural é um diferencial, pois em nenhum livro didático que trabalhei até hoje, explica de forma clara essa parte da matéria.
3. Acredito que de forma geral, os alunos teriam mais facilidade de fixar o conteúdo porque o plano de aula apresenta os conceitos construídos de forma bem gradativa e clara.

4. Como foi dito, isso depende do nível de conhecimento matemático do aluno, mas de forma geral acredito que dessa forma o aluno não esqueceria tão facilmente dos conceitos, como acontece na forma tradicional.
5. Não sei se o número de aulas proposto (12 aulas) seria suficiente. Não ocultaria as demonstrações, acho que isso desperta mais o interesse do aluno e a fixação do conteúdo. Trabalharia mais exemplos como o que foi dado inicialmente.

Professor B: Leciona há 27 anos na rede pública e responde as questões da seguinte forma:

1. Acredito que sim pois a linguagem usada é bem clara, no entanto, penso que dependerá muito mais da base que os alunos tenham para acompanhar o conteúdo dessa maneira.
2. Atualmente, ministro aulas em uma escola em que os alunos prestam um concurso público bastante concorrido para cursarem o Ensino Médio, e, portanto, passam por uma seleção que inclusive aborda a disciplina de Matemática.

   Tendo como base os alunos com os quais trabalho, acredito que essa poderá ser uma maneira interessante de passar o conteúdo, no entanto, num primeiro momento, eu usaria esse plano de aula após ter ministrado o conteúdo da maneira que tradicionalmente os livros didáticos apresentam. Após esse momento eu apresentaria essa outra opção de apresentação e faria uma pesquisa com os alunos para verificar com eles qual abordagem foi, na visão deles, mais produtiva.
3. Considero que seja positiva por ser uma maneira que aborda os dois conteúdos: exponencial e logaritmo, praticamente ao mesmo tempo.
4. Depende, pois, acredito que dependerá muito do nível dos alunos e da base que possuem em Matemática.
5. Acrescentaria outros exemplos de aplicabilidade do assunto além do que o usado na introdução, também trabalharia mais com gráficos de funções logarítmicas e exponenciais trabalhando as translações nos eixos coordenados.

Professor C: Leciona há 4 anos na rede privada e responde as questões da seguinte forma:

1. Em relação a conhecimento sim, pois minha formação contemplou de forma aprofundada tais conteúdos. Mas em relação à didática, não me sinto preparada, pois a linguagem utilizada é muito científica e distante da linguagem matemática apresentada, em geral, para os alunos de ensino médio. Não vejo maneira de torná-la mais “palpável”, de modo a atingir a maior parte dos alunos.
2. Achei o problema inicial motivador e interessante. Porém passa-se para a parte teórica de forma muito abrupta, o que pode gerar uma quebra no interesse inicial, pois a linguagem é complexa e o nível de raciocínio exigido para compreensão de tais definições e demonstrações é um tanto quanto elevado.

3. Para os alunos “fora da curva” de fato acredito em uma melhoria na fixação e compreensão real dos temas apresentados. Para os demais alunos, acredito que tal apresentação poderia acabar desmotivando ainda mais, uma vez que é necessário ter domínio sob a linguagem teórica, que é um ponto em que são apresentadas muitas dificuldades.
4. Depende do aluno. Mas pensando na minha vivência e nos meus alunos, acredito que eles teriam muito mais dificuldade, porque não apresentam muito interesse e nem curiosidade pela compreensão teórica da matemática. Estão interessados apenas no objetivo final, que seriam os cálculos e a maneira correta de aplicá-los.
5. Pensando no plano como está proposto, faria algumas adaptações com relação ao número de aulas, achei um pouco longo. Agora, novamente dizendo a respeito da minha vivência, eu não daria ênfase à parte teórica da forma que foi apresentada. Seria mais interessante trabalhar com diversos problemas semelhantes ao inicial, no qual o principal objetivo é mostrar que funções logarítmicas e exponenciais tem uma extensa e importante aplicação prática.

Professor D: Leciona há 24 anos na rede privada e responde as questões da seguinte forma:

1. Sim. Conheço o conteúdo.
2. Não. O plano está muito bem feito e explicado, só acho que o aluno não está preparado para uma análise tão abstrata o que pode tornar desinteressante o assunto.
3. Sim, desde que ele já tivesse o hábito do trabalho algébrico no estudo de funções. Não é isso que acontece normalmente. Na minha opinião o que dificulta a aprendizagem no estudo de exponenciais e logaritmos é a dificuldade do aluno com o manejo de expressões algébricas e suas aplicações. Uma forma de melhorar isso poderia ser um trabalho diferente com funções de 1º e 2º graus. Normalmente o aluno não apresenta dificuldades quando estamos na parte de aplicações das propriedades de logaritmos, por exemplo, a dificuldade aparece é com a leitura de uma expressão e como trabalhar com ela, isso acontece também para as expressões trigonométricas.
4. Considerando como as funções são apresentadas, acho que poderia dificultar.
5. Não, como já disse o plano está muito claro e bem feito.

Obs.: Senti, aqui, dificuldades em conseguir mais avaliações para o plano. Enviei para muitos professores, mas poucos deles mostraram interesse e disponibilidade para responder o meu questionário.

Apesar que tem um número pequeno (4) de professores que responderam o questionário, acredito que as respostas refletem a opinião da maior parte dos professores que lecionam estas matérias.

Vejo, nas respostas dos professores que responderam o questionário, que todos se familiarizam com o conteúdo abordado no plano de aula e consideram que o conteúdo exige uma maturidade matemática dos alunos, devido à alta abstração que requer. No entanto, eu considero que ensinar logaritmos e exponenciais dessa forma que proponho, pode ser capaz de diminuir os problemas relacionados a abstração, pois o aluno, devido ao problema inicial, pode se sentir motivado a aprender esses conteúdos pouco ministrados no ensino médio.

Apesar dos professores que foram questionados conhecerem o conteúdo proposto, penso que a opinião de considerá–lo difícil para o aluno seja uma questão um pouco equivocada. Ao escrever esse trabalho, por exemplo, conhecia sobre logaritmos e exponenciais, no entanto não estava preparado para dar a aula como hoje proponho, por pensar que poderia ser difícil para o aluno, mas, estudando rigorosamente e cuidadosamente, pude perceber que não é tão complicado como parece, e sim, acredito, ser possível o ensino da maneira proposta e que o conteúdo seja palpável para os alunos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os desafios para se tornar mestre em matemática serviram de impulso para que eu pudesse buscar esse tão esperado sonho. Iniciei meu gosto pela matemática bem cedo, inspirado em professores que me fizeram apaixonar por essa ciência maravilhosa. Decidi, portanto, seguir esse caminho e mesmo com tantos empecilhos e adversidades que nossa profissão enfrenta, estava eu lá, pronto para seguir essa carreira e tentar inspirar outras pessoas pelo gosto da matemática assim como fui.

Graduei em matemática em 2014 pela Universidade Federal de Minas Gerais e em 2015 ingressei no PROFMAT, em São João Del Rei, em busca de mais conhecimento. Leciono há 8 anos nas redes pública e privada de ensino e me sinto obrigado a melhorar o ensino da disciplina que considero de extrema importância.

O mestrado me trouxe muito conhecimento, deixou – me mais crítico e com o rigor matemático muito além do que tinha até então. Graças a Deus ocorreu tudo dentro do esperado. Hoje, tenho total sensação de dever cumprido e alimento a certeza de que fiz de tudo para chegar até aqui.

Chego nessa parte do meu trabalho extremamente satisfeito, agradecido e orgulhoso, por toda trajetória que tracei e por todos aqueles que me ajudaram.

Foram muitos pensamentos, sugestões e muitas dúvidas para escolher o tema dessa dissertação, mas visando a melhoria da qualidade de ensino da matemática escolhi logaritmos e exponenciais que na minha visão de docente, precisa de um olhar diferente para que os nossos alunos aprendam significativamente esses conteúdos.

Não estou aqui para dizer que meu trabalho irá modificar o ensino desses conteúdos. O que fiz nessas páginas foi tentar buscar novas formas de ensinar logaritmos e exponenciais. Formas estas que podem ou não surtir os efeitos esperados, mas que podem nortear os professores da educação básica quanto ao ensino desses temas.

Neste trabalho procurei compartilhar com vários professores a minha insatisfação pelo ensino de logaritmos e exponenciais e pela abordagem como esses temas são tratados na maioria dos livros didáticos. Tive, claro, opiniões divergentes as minhas, e estas foram de grande valia para que pudesse concluir o que pretendia.

Espero, fortemente, que essa dissertação sirva de base para muitos professores, que assim como eu, enxergam a necessidade da melhoria do ensino de matemática.

6.1 – Conclusão

Motivado a melhorar o ensino de logaritmos e exponenciais, conteúdos que eu, particularmente, gosto muito, resolvi escrever essa dissertação. Ouvir depoimentos, reclamações e críticas dos meus alunos sobre os temas, serviram de impulso para que eu pudesse encontrar novas formas de ensinar os temas tratados nessa dissertação e enxergasse nelas um caminho para a aprendizagem dos alunos.

Dos 80 alunos que responderam meu questionário, as respostas não me deixaram surpreso, e me serviram de grande motivação para construir novas formas de ensino. E, pelo observado, os resultados da escola da rede privada e da rede pública estão bem próximos.

O aluno necessita ver sentido naquilo que se estuda, não estou aqui para dizer que exigir de um estudante abstração matemática é algo absurdo, muito pelo contrário, mas considero necessário, tentar buscar no cotidiano e nas áreas em que a matemática é utilizada como ferramenta, aquilo que se ensina na matemática. Claro, nem sempre conseguimos, mas no caso de logaritmos e exponenciais, é possível.

Aos professores que, porventura, vierem ler esse trabalho, recomendo um estudo mais cuidadoso da parte inicial (Capítulo 2). À primeira vista o conteúdo abordado dessa forma, pode causar estranhamento, mas se for visto de perto poderá perceber que mesmo com bastante rigor matemático os conceitos podem ser passados tranquilamente aos alunos.

Outras vantagens importantes de lecionar os assuntos aqui tratados através da proposta apresentada é a sua abordagem geométrica e de despertar a curiosidade dos alunos de como calcular áreas sob curvas, o qual será estudado com mais afinco e formalmente, posteriormente, em um curso de Cálculo.

Volto a dizer, que não estou aqui afirmando que minha proposta de ensino para esses temas é melhor que a convencional. Não afirmo também, que com ela todos os alunos irão aprender logaritmos e exponenciais efetivamente, mas acredito que ela é mais interessante, motivadora e traz o intuito de atingir nossos objetivos quanto educadores.

Saliento que nessa proposta cabe ao professor e o olhar dele sobre a turma, realizar as modificações pertinentes, como foi sugerido por alguns professores no Capítulo 5 desse trabalho.

Implementar a proposta que aqui defendo em sala de aula, pode sim trazer dificuldades ao professor e aos alunos, o manuseio de expressões matemáticas, por exemplo pode ser algo que num primeiro momento possa assustá – los, mas o desejo de mudança com o objetivo de melhorar o ensino – não só de logaritmos e exponenciais – da matemática nunca deve morrer dentro de nós, professores.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LIMA, Elon Lages; Logaritmos– Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 1996, Rio de Janeiro.

[2] ZUMPANO, Antônio. Logaritmos e Exponenciais. Maio, 2010. http://www.mat.ufmg.br/verao2013/Logaritmo%20e%20Exponencial.pdf

[3] STEWART, James. Cálculo, volume I, 7a.edição. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

[4] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo César Pinto; WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio – Volume 1 – Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 1999, Rio de Janeiro.

[5] BOYCE, W. E. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[6] PCNs Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 10/11/2014.

[7] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002. BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

[8] LIMA, Elon Lages. Números e Funções reais.Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[9] FERREIRA, E. S.. História do Conceito de Função, 2005. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/, acesso em junho de 2016

[10] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1 – Conjuntos, Funções – 9ª edição – São Paulo, Atual Editora, 2013.

[11] IEZZI, Gelson; Dolce, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto e ALMEIDA, Nilze. Matemática: ciência e aplicações - Vol. 1: ensino médio – 8ª edição – São Paulo, Atual Editora, 2014.

[12] http://blogengenhariarodrigo.blogspot.com.br/2014/08/tabela-logaritmos.html

8. ANEXOS

8.1 – Anexo I – Tábua de Logaritmos Naturais

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7130	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1970	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4952	1,4974	1,4996	1,5019

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7682	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8406	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0282	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0665
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

[12]

8.2 – Anexo II –Tábua de Logaritmos Decimais

n.º	log.	n.º	log.
1	0	50	1,69897
2	0,30103	51	1,70757
3	0,477121	52	1,716003
4	0,60206	53	1,724276
5	0,69897	54	1,732394
6	0,778151	55	1,740363
7	0,845098	56	1,748188
8	0,90309	57	1,755875
9	0,954243	58	1,763428
10	1	59	1,770852
11	1,041393	60	1,778151
12	1,079181	61	1,78533
13	1,113943	62	1,792392
14	1,146128	63	1,799341
15	1,176091	64	1,80618
16	1,20412	65	1,812913
17	1,230449	66	1,819544
18	1,255273	67	1,826075
19	1,278754	68	1,832509
20	1,30103	69	1,838849
21	1,322219	70	1,845098
22	1,342423	71	1,851258
23	1,361728	72	1,857332
24	1,380211	73	1,863323
25	1,39794	74	1,869232
26	1,414973	75	1,875061
27	1,431364	76	1,880814
28	1,447158	77	1,886491
29	1,462398	78	1,892095
30	1,477121	79	1,897627
31	1,491362	80	1,90309
32	1,50515	81	1,908485
33	1,518514	82	1,913814
34	1,531479	83	1,919078
35	1,544068	84	1,924279
36	1,556303	85	1,929419
37	1,568202	86	1,934498
38	1,579784	87	1,939519
39	1,591065	88	1,944483
40	1,60206	89	1,94939
41	1,612784	90	1,954243
42	1,623249	91	1,959041
43	1,633468	92	1,963788
44	1,643453	93	1,968483
45	1,653213	94	1,973128
46	1,662758	95	1,977724
47	1,672098	96	1,982271
48	1,681241	97	1,986772
49	1,690196	98	1,991226
		99	1,995635

[12]

8.3 – Anexo III –Autorização para aplicação de questionário em escola.

Autorização para Aplicação de Questionário

PROFMAT – UFSJ

Orientador:	Mestrando:
Prof. Dr. JuanCarlos Juan Carlos Zavaleta	Profª. Luiz Guilherme Silva Ribeiro
jaguilar@ufsj.edu.br	luizguilherme16@hotmail.com

Caro diretor(a), coordenador(a), da escola___________________________________.

Venho, por meio desta, pedir-lhe a autorização para que sua escola seja usada como local de pesquisa para a composição de uma dissertação para mestrado.

Afirmo que sua autorização é de extrema importância para realização desse trabalho, que visa analisar a aprendizagem dos alunos em conteúdos matemáticos aplicados no Ensino Médio.

Eu, Luiz Guilherme Ribeiro, já agradeço imensamente a sua disponibilidade em atender e digo-lhe que sua escola será tratada com total respeito nesse trabalho.

Eu, ____ exerço a função de ________________________, na escola ______________________________ e autorizo que esta seja usada para a dissertação acima descrita.

São Joao Del Rei, 14 de fevereiro de 2017.

8.4 – Anexo IV – Questionário e Atividades aos alunos

Questionário para avaliação de aprendizagem

PROFMAT – UFSJ

Orientador:
Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
jaguilar@ufsj.edu.br

Mestrando:
Profª. Luiz Guilherme Silva Ribeiro
luizguilherme16@hotmail.com

Esse questionário, tem como objetivo avaliar a sua aprendizagem em dois conteúdos dados no 1º ano do ensino médio: Logaritmos e exponenciais.

Tal avaliação fará parte da composição de uma dissertação de mestrado que avaliará o ensino desses conteúdos.

Eu, Luiz Guilherme Ribeiro, autor da dissertação, peço-lhe que, se possível, responda – o com a maior fidelidade possível, para que eu possa fazer um diagnóstico efetivo do que pretendo. Afirmo também que respeitarei a sua identidade e que ela não será divulgada.

Aproveito e agradeço imensamente pela sua participação que é de extrema importância nesse trabalho.

Atividade 1:

Numa escala de 0 a 3, onde 0 indica que você teve um aprendizado muito insatisfatório e 3 indica que você teve um aprendizado muito satisfatório, quanto você daria para sua aprendizagem sobre logaritmos?

(   ) 0   (   )1   (   )2   (   ) 3

Atividade 2:

Numa escala de 0 a 3, onde 0 indica que você teve um aprendizado muito insatisfatório e 3 indica que você teve um aprendizado muito satisfatório , quanto você daria para sua aprendizagem sobre exponenciais?

(   ) 0   (   )1   (   )2   (   ) 3

Atividade 3:

Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$ determine o valor de $\log 6 + \log 24 - \log 25$ em função de $a\ e\ b$.

Atividade 4:

Qual o valor de *x* em: $4^x - 56 = 456$?

Atividade 5:

Você aprendeu sobre os logaritmos naturais (ln) ? ( ) Sim ( ) Não

Atividade 6:

Você aprendeu sobre as exponenciais de base e? ( ) Sim ( ) Não

Atividade 7:

Você saberia falar alguma utilidade dos logaritmos e/ou exponenciais? ( )Sim ( ) Não

Atividade 8:

Se você respondeu sim à pergunta anterior, cite, pelo menos, uma utilidade.

Muito obrigado pela participação.

Atenciosamente, Luiz Guilherme Silva Ribeiro.

8.5 – Anexo V – Questionário Professores – I

Questionário ao professor de Matemática.

PROFMAT – UFSJ

Orientador:
Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
jaguilar@ufsj.edu.br

Mestrando:
Profª. Luiz Guilherme Silva Ribeiro
luizguilherme16@hotmail.com

Caro Professor, o questionário abaixo se destina à minha Pesquisa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São João del-Rei UFSJ. A Dissertação tem o seguinte título: “Logaritmos e Exponenciais: da teoria à prática pedagógica. Suas respostas às questões abaixo irão ajudar-me a verificar se, na sua percepção de professor o ensino desses conteúdos é feita de forma efetiva para a aprendizagem dos alunos. Solicito a vocês que respondam às questões do questionário com o máximo de cuidado e franqueza, para que eu possa construir um retrato o mais fiel possível do objetivo proposto.

Sua colaboração é de fundamental importância. Pela sua contribuição, desde já agradeço.

Professor Luiz Guilherme Ribeiro

Nome:____

1. Há quanto tempo você atua como professor de Matemática? ________________

2. Você leciona para rede pública ou privada?

3. Se seus alunos tivessem a chance de poder escolher as disciplinas para cursar, em que proporção você considera que eles escolheriam matemática?

☐ 10% ☐ 20% ☐ 30% ☐ 40% ☐ 50% ☐ 60% ☐ 70% ☐ 80% ☐ 90% ☐ 100%

Por quê? ____

4. Você considere **abordagem** que você faz para ensinar logaritmos e exponenciais satisfatória para aprendizagem dos alunos? (   ) Sim (   ) Não

5. Você acha que os alunos possuem dificuldade na aprendizagem desses temas? (   ) Sim   (   ) Não

Por que?
____

6. Qual conteúdo você ensina primeiro: Logaritmos ou Exponenciais?

____

Caso você responde exponenciais a pergunta anterior, você acha que seria impossível inverte a ordem de ensino, isto é, ensinar logaritmos antes de exponenciais

( ) Sim ( ) Não

Por que?:____

7. Você comenta sobre o número de Euler *(e)* com seus alunos?

. ( ) Sim ( ) Não

8. Você ensina logaritmos naturais (ln) ?

( ) Sim ( ) Não

9. Você gasta, em média, quantas aulas para dar os dois conteúdos?_____________

10. Você dedica aulas a aplicações de logaritmos e exponenciais? Se sim, quantas?

8.6 – Anexo VI – Plano de Aula.

PLANO DE ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS

PROFMAT – UFSJ

Orientador:
Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

jaguilar@ufsj.edu.br

Mestrando:
Profª. Luiz Guilherme Silva Ribeiro
luizguilherme16@hotmail.com

Objetivo: Motivar o aluno e mostrar a importância do estudo de logaritmos e exponenciais

Número de aulas: 12aulas

Série: 1ª série do Ensino Médio.

PARTE 1: Inicialmente apresentaremos um problema de aplicação dos conteúdos que abordaremos nessa aula, afim de que motive e desperte o interesse dos alunos no estudo desses conteúdos.

Problema: Foi encontrado, pelas 4h da madrugada, na esquina da rua I com a rua J o corpo de um homem apresentando 30 anos. Moradores do local disseram ter ouvido tiros por volta de meia – noite e também em torno de 3 da madrugada. A polícia já encontrou ambos os autores dos disparos. Suponha que a temperatura do corpo na hora da descoberta seja de 30℃ e que duas horas depois seja de 23℃. Suponha também que a temperatura normal de um corpo seja de 37℃ e a temperatura ambiente de 20℃. Somente após a legista identificar a hora da morte é que a polícia poderá prender um dos suspeitos. Quem é o autor do crime? O que realizou disparo a meia – noite ou as três da madrugada?

É esperado, nesse momento que os alunos fiquem surpresos e interessados em descobrir o autor do crime. O que é interessante agora é mostrar a eles que existem ferramentas matemáticas para que possamos desvendar o que queremos.

Nesse momento, pode – se apresentar equação que ajuda a resolver:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m).\, e^{-kt}$$

T= temperatura do corpo após t horas

T_0= Temperatura do corpo inicialmente

t= tempo

T_m = temperatura do meio ambiente

k = constante que depende do matéria do corpo

O aluno deve – se perguntar o que é a ´´ letra e`` e nesse momento o ensino de logaritmos e exponenciais começam.

Parte 2: Incialmente defina uma função L, para o aluno, com a seguinte propriedade.

Considere uma função $L(x)$, definida para todo x real positivo e tome um número real $y > 0$.

Se, $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Então L será chamada de função logarítmica.

Em seguida mostra outras propriedades dessa função:

1.0– $\boldsymbol{L(1) = 0}$**,** pois $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1)$

2.0– A função L é definida apenas para números positivos, pois:

a.- Suponha que L esteja definida para x=0, então:

$L(0) = L(0.x) = L(0) + L(x)$

Logo, $L(x) = 0$

Ou seja, teríamos uma função identicamente nula, o que não serviria para quase nenhum objeto de estudo.

b.- Já sabemos que $L(1) = 0$

c.- Note se quiséssemos definir L para números negativos, teríamos:

$0 = L(1) = L(-1.-1) = L(-1) + L(-1)$

Logo, $L(-1) = 0$

Concluímos assim que, para $x > 0$, temos:

$L(-x) = L(-1.x) = L(-1) + L(x)$

Assim, $L(-x) = L(x)$.

E portando L seria uma função par e, em vista disso, só precisamos defini –la nos números positivos.

3.0 – Para todo $x < 0$ tem – se $L(1/x) = -L(x)$

Com efeito,

$0 = L(1) = L\left(x.\frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right)$

Assim, $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$

4.0– Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, vale $L(x/y) = L(x) - L(y)$

Com efeito,

$$L(x/y) = L(x.1/y) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y)$$

5.0 - Para todo $x \in \mathbb{R}^{+}$ e todo número racional $r = \frac{p}{q},\ com\ p, q \in \mathbb{Z},$ tem – se $L(x^{r}) = rL(x)$

Com efeito,

Primeiramente notemos que a propriedade fundamental $L(x.y) = L(x) + L(y)$, estende – se para o produto de um número qualquer de fatores, por exemplo,

$L(x.y.z) = L((x.y).z) = L(x.y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z).$

E assim por diante

$$L(x_1.x_2.x_3 \dots .x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n)$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então:

$$L(x^n) = l(x.x.x.x \dots .x) = L(x) + L(x) + \dots + L(x) = nL(x)$$

Para $r = 0$ a propriedade também é válida, pois para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tem – se que $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0.L(x)$

Considere agora $r = -n$ com $n \in \mathbb{N}$

Então para todo x>0 temos $x^n.x^{-n} = 1$. Logo

$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0 \to L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x)$

Por fim, o caso geral em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, temos:

$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$.

Logo $q.L(x^r) = L(x^r)^q = L(x^p) = pL(x)$

Então, da igualdade $q.L(x^r) = pL(x) \to L(x^r) = p/qL(x)$

temos que $L(x^r) = rL(x)$.

Observação: As demonstrações podem, ou não, serem dadas. Isto depende da turma e a visão do professor sobre ela.

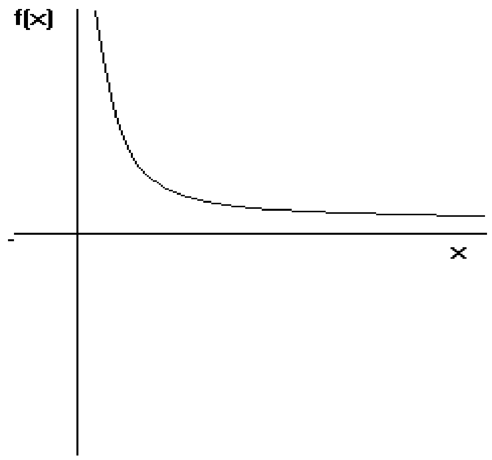
Parte 3: Definição de logaritmo

Antes de definirmos, precisamos conhecer alguns conceitos:

- **Faixa de hipérbole**

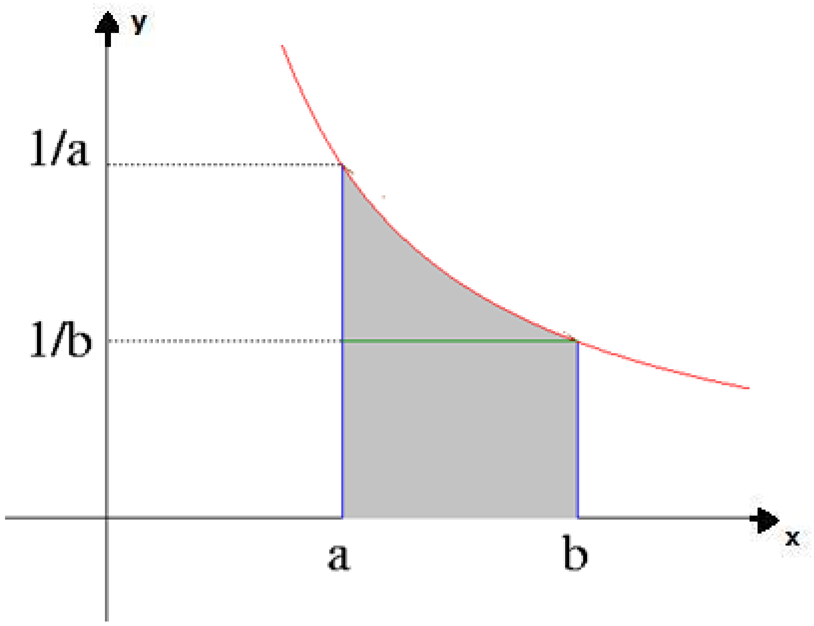
Consideremos a função $y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$, e H a parte positiva dessa função.

Geometricamente H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que está no primeiro quadrante



(é esperado que o aluno já tenha visto funções racionais)

Quando tomamos dois números reais e positivos a e b com $a < b$, a região do plano limitada pelas retas $x = a, x = b$ e pela hipérbole H é chamada de faixa e hipérbole, como mostra a figura.



A região hachurada é a faixa de hipérbole e a denotaremos por H_a^b, ou seja:

$$H_a^b = \left\{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

- **Área da faixa de hipérbole**

Toda faixa de hipérbole possui uma área. Existem maneira precisas de calcular essa área , mas isso não será dado aqui.

Definiremos aqui o logaritmo natural como sendo a área da faixa H_1^x para $x > 0$.

Escrevemos então que:

$$\boldsymbol{ln\, x} = \acute{A}\boldsymbol{rea}\ (\boldsymbol{H_1^x})$$

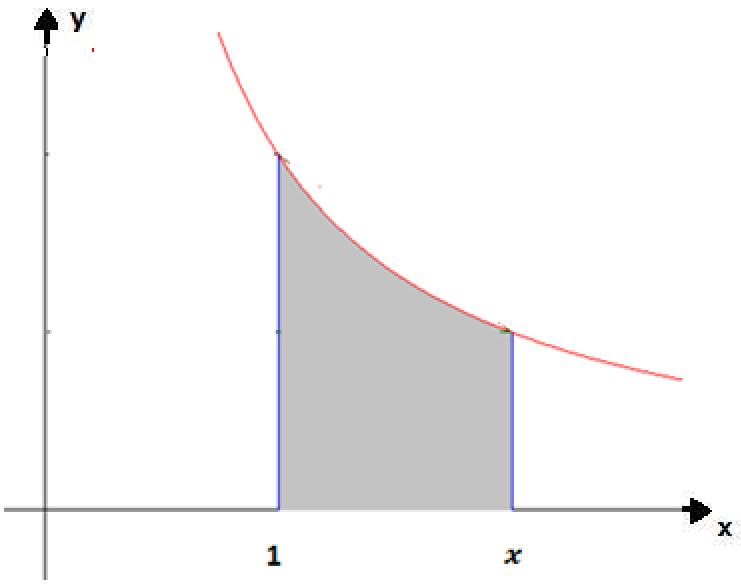
E convencionaremos que se $0 < x < 1$ entao a $\acute{A}rea\ (H_1^x) < 0$.

Se tomarmos $x = 1$ então

$$\boldsymbol{ln\, 1} = \acute{A}\boldsymbol{rea}\ (\boldsymbol{H_1^1})$$

Note que H_1^1 é um segmento de reta e portanto tem área zero. Logo

$$\boldsymbol{ln\, 1 = 0}$$

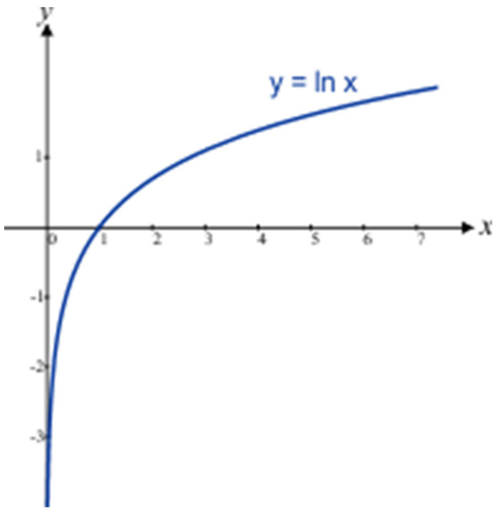


A área hachurada da figura acima é igual a $ln\, x$.

Nesse momento vale comentar que a função ln é uma função logarítmica.

O gráfico da função logarítmica

Se plotarmos o gráfico em qualquer software de geometria, por exemplo graphmatica, winplot, geogebra, etc, podemos ver, mais facilmente, como se comporta o gráfico dessa função.



PARTE 4 – APRESENTAR O NÚMERO DE EULER

Fazer uma breve descrição sobre Euler e e já mostrar o seguinte resultado:

$$lnx = 1 \leftrightarrow x = e$$

Comentar que

$$e \sim 2{,}71$$

PARTE 5 – APRESENTAR A FUNÇÃO EXPONENCIAL DE BASE e.

Definiremos o número positivo , com x real, o único número tal que o logaritmo natural seja x.

Diferentemente do logaritmo natural, lnx, que é definido apenas para $x > 0$, a expressão e^x é definida para todo x real.

A correspondência $x \to e^x$ define uma função cuja o domínio é o conjunto dos números reais. Essa função é denominada função exponencial.

As funções logarítmicas e exponenciais são funções inversas.

Isso significa que para todo x real e $y > 0$ vale que:

$$\ln(e^x) = x;\ e^{lny} = y$$

Propriedade Fundamental da função exponencial

Teorema : Para x, y, números reais quaisquer, vale que

$$e^x . e^y = e^{x+y}$$

Demonstração:

$$ln(e^x . e^y) = lne^x + lne^y = x + y$$

Logo

$$e^x . e^y = e^{x+y}$$

■

Corolário 1: Para todo número real x, vale que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Demonstração:

É claro que $e^0 = 1$, logo, pelo teorema anterior,

$$e^x . e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$$

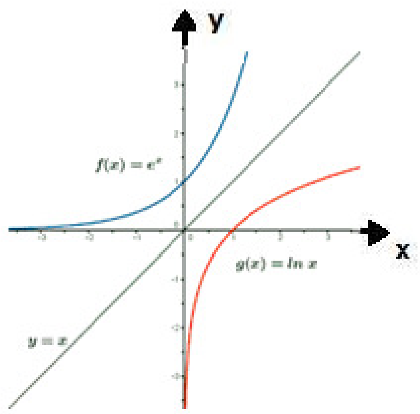
Logo,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Novamente, aqui, as demonstrações ficam a critério do professor.

O gráfico da função exponencial.

Como foi visto que são funções inversas, então gráfico da função exponencial é obtido através do gráfico da função logarítmica, apenas espelhando – o sobre a reta $y = x$.



PARTE 6 – APRESENTAR A FÓRMULA DE MUDANÇA DE BASE E ESTENDER O ESTUDO PARA OUTRAS BASES.

Tomaremos agora, sistemas de logaritmo com bases diferentes da base *e.* Isso poderia ser feito, do mesmo modo que definimos, anteriormente, o logaritmo natural, no entanto, criaria uma definição maçante e mais confusa do que se definirmos usando o teorema 6, abaixo.

Antes de enunciar o teorema, faremos a seguinte notação:

$\log_a x$ será a notação usada para o logaritmo de base *a* de um número real $x > 0$.

(Teorema da mudança de base): Para os números reais $x\ e\ a$ com $x, a > 0$, vale que:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Demonstração:

Seja $y = \frac{\ln x}{\ln a}$, então

$$lnx = y.lna \rightarrow \ln x = \ln a^y \rightarrow x = a^y$$

Aplicando logaritmo na base *a* em ambos os lados temos.

$$\log_a x = \log_a a^y$$

Dessa forma, sabendo que $\log_a a = 1$, temos que

$$y = \log_a x$$

E portanto:

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

■

Observação: Note que, a princípio, qualquer número real *a,* positivo, poderia ser tomado como base para um sistema de logaritmos. Mas, para que nossa relação da mudança de base seja válida o número a deve ser diferente de um.

PARTE 7 – RESOLVER O PROBLEMA INICIAL E MAIS PROBLEMAS DE APLICAÇÕES.

Obs.: fica a critério do professor dar alguns exercícios de cálculos de logaritmos a partir de logaritmos conhecidos e utilizar a calculadora.

8.7 – Anexo VII – Questionário Professor – II

Questionário ao Professor sobre o Plano de Aula.

PROFMAT – UFSJ

Orientador:
Prof. Doutor Carlos Juan Carlos Zavaleta
jaguilar@ufsj.edu.br

Mestrando:
Profª. Luiz Guilherme Silva Ribeiro
luizguilherme16@hotmail.com

Caro (a) professor (a), esse questionário tem como objetivo analisar a forma como você interpretou o plano de aula e suas considerações e críticas em relação a ele. Peço que o responda de forma mais clara possível para que eu possa fazer uma análise bem real do que pretendo.

As respostas estarão presentes na minha dissertação, mas sem revelar a sua identidade.

Desde já agradeço muito a sua participação e saliento que ela foi de muita importância e valia para realização deste trabalho.

Atenciosamente, Luiz Guilherme

Nome:

Tempo de serviço:

1. Você está preparado para abordar logaritmos e exponenciais dessa forma? Justifique.

2. Você considera o plano de aulas proposto como sendo motivacional e interessante para os alunos? Justifique.

3. Você acha que essa abordagem poderia trazer aspectos positivos no ensino desses conteúdos, afim de que o aluno aprendesse e fixasse mais esses temas? Por que?

4. Você considera que o aluno apresentaria mais ou menos dificuldade se logaritmos e exponenciais fossem abordados dessa forma e não da forma tradicional? Por que?

5. Você daria alguma sugestão ou alguma crítica ao plano de aula?