Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

Samantha Faasen

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA DE CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO DE DOMINÓ DE FRAÇÕES EQUIVALENTES

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Orientador: PROF. DR. EDUARDO SARQUIS SOARES

Ouro Branco
2017

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de junho de 2017

Banca Examinadora composta pelos Professores.

Eduardo Sarquis Soares

Prof(a) Dr. Eduardo Sarquis Soares
Universidade Federal de São João del-Rei

Douglas Henrique de Mendonça

Prof(a) Dr. Douglas Henrique de Mendonça
Universidade Federal de Viçosa

Mariana Garabini Cornelissen Hoyos

Prof(a) Dr. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos
Universidade Federal de São João del-Rei

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA DE CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO DE DOMINÓ DE FRAÇÕES EQUIVALENTES

Samantha Faasen[1]
Eduardo Sarquis Soares[2]

Resumo

Este trabalho investiga a aprendizagem de equivalência de frações a partir da construção e aplicação de um jogo de dominó de frações para uma turma do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Belo Horizonte. A tentativa de gerar um ambiente favorável à construção desse conhecimento é examinada sob o conceito de zona de desenvolvimento proximal, ZDP, uma das abordagens da aprendizagem utilizadas pelas linhas de investigação associadas à aprendizagem. O estudo das reações dos envolvidos oferece indicativos de que a metodologia de ensino adotada gera oportunidades de aprendizagem efetivas.

Palavras-chave: Ensino de frações equivalentes, uso do dominó no ensino de frações equivalentes e zona de desenvolvimento proximal.

[1]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, Turma: 2015
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
e-mail: samantha.faasen@gmail.com
[2]Orientador do trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Ciência Tecnologia e Sociedade - DCTS, UFSJ/CAP
e-mail: esarquis@ufsj.br

Abstract

The present work examines the learning of the fraction equivalence through development and application of a fraction domino game. The study class was a 6th grade middle school, public school class, in Belo Horizonte. The attempt of generating a propitious environment to this knowledge development is examined by the concept of Zone of Proximal Development, ZPD, one of the learning approaches used by the line of investigation associated to learning. The study on reactions of the involved indicate that this methodology adopted generates effective learning opportunities.

keywords: Teaching of equivalent fractions, use of domino in the teaching of equivalents fractions and proximal development zone.

1 Introdução

A matemática sempre foi tida como “a louca da casa”. É lugar comum cair na pregação de que aprender e ensinar matemática beira à loucura ou dificuldade extrema; apenas os superdotados são capazes de compreender e utilizar sua linguagem. A falta de conexão entre a realidade e o que se aprende na escola é relatada em diversas obras bibliográficas a exemplo de Carraher em sua obra “Na Vida Dez na Escola Zero” (1988). Após anos de experiência lecionando matemática, pude constatar que os alunos, de uma maneira geral, não se apropriam adequadamente do conhecimento matemático. Após anos de estudo regular, a alfabetização matemática nem sempre é alcançada pelo educando. Afora o universo escolar, no cotidiano faz-se o uso de ideias relacionadas a frações equivalentes. Considere-se, por exemplo, a frase: “ $\frac{1}{3}$ da vida você passa dormindo”. Naturalmente faz-se a equivalência por dia: das 24 horas do dia teremos 8 horas dormindo, ou até em meses: dos doze meses do ano, 4 seriam dedicados a dormir, . O aluno é capaz de somar ou subtrair frações em atividades escolares sem necessariamente saber que, no algoritmo por ele aprendido, está presente a equivalência de frações. A compreensão dessa propriedade das frações constitui um dos focos deste trabalho. Sendo assim, o objetivo central deste trabalho é explorar o aprendizado de equivalência de frações a partir de uma proposta didática aplicada de construção de um jogo de dominós e aplicação desse jogo. O ensino de frações é bastante amplo, devido à complexidade das propriedades de frações. Dentre essas, destaca-se a equivalência de frações, uma ferramenta importante para efetuar somas, subtrações e comparações de frações.

Observe o exemplo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Comparando $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$, teremos $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$

Nestes casos $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{3}{6}$, e $\frac{1}{3}$ é equivalente a $\frac{2}{6}$ A representação do número racional como decimal é outro tópico das frações que também tem aflorado discussões. Ciente das duas abordagens conceituais sobre fração: a que trata fração como a partir de um alargamento dos números inteiros e suas propriedades (Ziegler, Thompson e Schneider, 2011) ou como números diferentes dos inteiros e, portanto, seguindo outra lógica (Gelman e Williams, 1998), este trabalho se alinha à segunda tendência, ou seja, encara frações como números cujas propriedades são diferentes dos inteiros.

O aprendizado de frações envolve significados diversos como representação geométrica, representação decimal, número posicionado na reta numérica, razão, relação parte todo. A aprendizagem das operações necessariamente não segue uma ordem fixa. Tanto o desenvolvimento do conceito, como a aprendizagem das propriedades e das operações podem acontecer em qualquer ponto no tempo e no espaço da vida de cada indivíduo. Além disso, os processos de aprendizagem acontecem em espaços coletivos, como explicita Kohl [1], referenciando-se em Vygotsky:

> Vygotsky trabalha explícita e constantemente com a ideia de reconstrução, de reelaboração, por parte do indivíduo, dos conceitos que são transmitidos

> pelo grupo cultural. A consciência individual e os aspectos subjetivos que constituem cada pessoa são para Vygotsky, elementos essenciais no desenvolvimento da psicologia humana, dos processos superiores. A constante recriação da cultura por parte de cada um dos seus membros é a base do processo histórico, sempre em transformação, das sociedades humanas.[1]

Desenvolver estratégias de ensino adequadas ao processo de aprendizagem de frações é um desafio significativo para cada educador. Diversas variáveis se fazem presentes nesse processo, tais como: níveis ou estágios de compreensão diversificados dos educandos, linguagens diferentes, dificuldades de interpretação da linguagem escolar, etc. Acredito que o ensino pode ser facilitado pelo uso de jogos, a exemplo do dominó.

> "... a questão é desenvolver na criança este prazer de aprender, o prazer do tipo olímpico (no sentido de olimpíadas mesmo) de poder ganhar do problema. O problema é o desafio, o assunto é a alegria ou a força com a qual a criança toma o desafio e luta para solucionar o problema[5]."

2 Práticas Pedagógicas

A importância de desenvolver práticas educativas eficientes na escola é alvo constante de pesquisa, estudo e foco de todos que trabalham com educação. Não existe uma fórmula adequada para se lecionar esse ou outro assunto para esse ou outro público. Superior às questões de currículo mínimo, competências básicas necessárias, metas e proficiências para alcançar, há que se considerar condições psicoemocionais dos envolvidos, materialidades, religião, etc... Questões essas que formam uma totalidade que não pode ser descartada. Às vezes, até a distribuição da merenda tem influência direta na vontade do aluno permanecer ou não na sala de aula. Daí a importância do professor e sua experiência com práticas pedagógicas e os alunos com os quais lida diariamente. Influências do meio social sobre a aprendizagem são reconhecidas até por pesquisadores que seguem a linha de pensamento piagetiana:

> "...os adultos e outras crianças constituem o ambiente social de uma criança, eles também influenciam fortemente sua construção do conhecimento lógico matemático de várias maneiras. Eles alimentam a atividade mental da criança por meios indiretos (como acontece quando se põe uma dúvida, diante da criança, a respeito da veracidade de uma ideia), ou eles fazem algo que desencadeia na criança um ímpeto de tentar fazer uma nova relação entre ideias".[4].

Para tentar produzir uma nova relação entre ideias, a proposta a seguir caminha em direção ao lúdico. Procura explorar um jogo simples como o dominó, o qual envolve manipular material, compreender a construção do jogo, interagir com colegas, vivenciar e respeitar as regras e suas necessidades. Tudo isso compõe uma proposta que procura sair do lugar comum da aula expositiva participada. Essa saída já pontua a favor desta práxis porque cria um espaço diferente na sala de aula. Porém, como acontece com qualquer proposta de ensino, não há garantias de aprendizado matemático igualitário entre os alunos. Para além do jogo, pois a estrutura do dominó baseia-se em encontrar uma peça igual ou equivalente à que está na mesa, é preciso considerar:

> “que o interesse da criança não seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão entre as operações entre o objeto e seus entes. Operações que, naturalmente, serão primeiro de caráter manipulativo para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer à ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que tenha presente que a ação bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também” [3].

O jogo de dominó que é tema deste trabalho foi desenvolvido para se explorar a equivalência de frações. Esse tema está prescrito para o nono ano do ensino fundamental. Essa prescrição está localizada, dentre outros tópicos de fração, na Matriz de Referência da Prova Brasil. No entanto, no quinto ou no sexto ano são ensinadas operações com frações. Sendo assim, a utilização operacional da equivalência já aparece nessas séries. Eis o que se pode ler na Matriz de Referência da Prova Brasil num dos seus quatro descritores fundamentais:

Matemática 5º ano - Ensino Fundamental.

Descritores do tema III.

Números e Operações / Álgebra e Funções

D21 - Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.

D22 - Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.

D23 - Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.

D24 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados

Matemática 9º ano – Ensino fundamental

D22 - Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D23 - Identificar frações equivalentes.

D25 - Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

```
Disponível em:
[http://provabrasil.inep.gov.br/escalas-de-proficiencia
Matrizes de Referência da Anresc (Prova Brasil) / Aneb
matemática
acesso dia 19 de maio de 2017.]
```

Apesar de aparecer frações equivalentes na Matriz de Referência no 9º ano, este conceito é introduzido e ensinado a partir do 4º ano, quando se inicia frações. Portanto verifica-se que operacionalmente o conteúdo de frações equivalentes surge muito antes, o que justifica a aplicação deste trabalho ao 6º ano. Neste trabalho, fizemos um estudo com alunos do sexto ano. Para jogar o dominó de frações equivalentes, o aluno deve ou pode usar conhecimentos sobre o assunto. Durante o jogo, espera-se que ele consiga identificar, entre as peças da sua mão, alguma que possua a fração equivalente à uma representada nas peças que ocupam as pontas do jogo. Não se sabe, efetivamente, se, o aluno utiliza o conceito de equivalência porque ele pode simplesmente memorizar as peças que se encaixam depois de uma jogada. O aluno pode jogar sob a lógica da tentativa e erro. Pode apenas esperar a sugestão do colega para executar a jogada. Todas essas variáveis de comportamento dentre outras estão sendo consideradas. A esperança é que o jogo crie um ambiente propício para o estabelecimento de uma da zona de desenvolvimento proximal, sobre a qual serão tecidas algumas considerações no capítulo seguinte.

3 Considerações sobre a Infância e sobre Aprendizagem

Dentre as possibilidades de abordagem sobre a aprendizagem, escolhemos adotar o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) – conceito desenvolvido e criado por Lev S. Vygotsky.

> Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. [8]

Inicialmente, entretanto, abordaremos a importância do lúdico no processo de aprendizagem da criança.
Há tempos, pesquisadores da área da educação vêm chamando a atenção para o fato de que a criança aprende muito brincando. O brincar não se resume em um simples passatempo ou ocupar o tempo das crianças. Por meio das brincadeiras, elas vão assimilando, reproduzindo e criando regras.

De acordo com o pensamento de Vygotsky, o lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança em suas descobertas cognoscíveis. Além disso, podemos fazer da brincadeira uma ação educativa. Ao assumir a função lúdica e educativa, o brinquedo educativo merece algumas considerações: função lúdica - quando propicia diversão, prazer e até desprazer, quando escolhido voluntariamente e função educativa - o brinquedo ensina qualquer coisa que complete o indivíduo em seu saber, seus conhecimentos e sua apreensão do mundo (Santos apud Kishimoto)[7].

Sendo assim, através da brincadeira ou mediada pelo próprio jogo a criança aprende a agir e tem sua curiosidade estimulada. Além do mais, ela adquire iniciativa e autoconfiança, proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração (Vygotsky, 1989). Dependendo da brincadeira proposta os pequenos em formação vão internalizando valores sociais, formas linguísticas, valores religiosos e éticos. A sociabilidade é um dos fatores que distingue o animal humano das demais espécies de animais. Além da linguagem e do pensamento podemos dizer que a sociabilidade nos torna humano e nos põe a exercitar a nossa racionalidade. O processo de socialização se dá em várias fases e faces, uma das fases da socialização é criar e solidificar acordos ou pontos de entendimento comuns à comunidade humana. O termo infância é um exemplo destes acordos feitos pelos homens que procuraram entender e preservar uma fase da vida humana em descobertas e tempos delimitados. Sabe-se que a descoberta da infância é relativamente recente na história da humanidade e que nem toda criança necessariamente possui uma infância. Podemos dizer que a infância é uma invenção tipicamente da Modernidade que busca apreender num determinado tempo coisas que devem ser assimiladas e praticadas por crianças de 0 a 12 anos de idade que vão se descobrindo de forma gradativa até alcançar a juventude.

Os sujeitos de nossa pesquisa têm um elemento temporal que os definem – terem em média 11 anos de idade e estarem cursando o 6°ano do ensino fundamental, porém, existem outros condicionantes que os distinguem. O histórico familiar, as condições financeiras, a localidade onde vivem, o acesso a bens materiais e culturais tudo isso influencia no ato de aprender e fazer conjecturas pelas crianças. Crianças expostas a diferentes formas e possibilidades em ler o mundo possivelmente, poderão responder de maneiras variadas aos desafios propostos. Ao propormos o jogo de dominó com equivalência de frações para as crianças do sexto ano, estamos buscando estabelecer regras e formas de conhecimento que sejam acessíveis a todos os presentes e, portanto, afirmando a capacidade de todos entenderem e assimilarem tais conhecimentos. Nossa pesquisa almeja promover nas crianças o desenvolvimento e prática do lúdico na escola, local cuja acepção não comporta de imediato tal abordagem. Além disso, a proposta surge justamente de uma área do conhecimento que há muito vem servindo de base para demonstrar apenas o fracasso estudantil escolar. A maioria das pesquisas que buscam aferir o grau de conhecimentos educacionais é pautada, nas avaliações internas e externas da área de matemática e língua portuguesa. Esperamos que nossa pesquisa sirva de referencial teórico e recurso prático para os professores de matemática e gestores educacionais como elemento capaz de promover a aprendizagem da matemática como algo prazeroso e divertido. Propor problemas para os educandos solucionar é desafiá-los a desenvolverem suas habilidades e "quês" investigativos. O ensino por meio de solução de problemas favorece a aprendizagem quando possibilita a formação de uma zona de desenvolvimento proximal. Uma vez que conhecer é identificar, tipificar e solucionar – ao propor soluções para problemas, o professor aguça no educando o caráter investigativo e desafiador.

A ZDP se forma pela interação, quando os participantes da atividade ficam diante de algo novo e devem negociar suas soluções ao desafio proposto. A ZDP é criada coletivamente durante o jogo, e é extremamente dinâmica, no sentido de que depende da evolução das relações sociais no lugar que elas acontecem. Ao adotar uma abordagem por soluções de problemas, o professor assume-se como parte do processo do ensino aprendizagem – como mediador do conhecimento.

Ao fazer o trabalho reconhecendo seu limite, o educando é capaz de compartilhar sua experiência e conhecimento com os demais e, às vezes, pode extrapolar o proposto que ao final somará seu conhecimento com os demais colegas e do professor. "O que o educando consegue fazer hoje com ajuda do adulto - amanhã o fará sozinho".

Essa idéia associa-se ao conceito de ZDP. De fato, esse conceito contempla uma visão da aprendizagem que aponta para seu caráter sempre coletivo. Um elemento importante do debate entre os seguidores de Vygotsky e os de Piaget encontra-se na crítica que o pensador russo desenvolveu em relação ao trabalho do suíço. Piaget, o suíço, ocupou-se com investigações que pretendiam desvelar a maneira como o pensamento sobre conceitos científicos vai se desenvolvendo nos indivíduos. Vygotsky, por seu lado, recusou a idéia de sujeito cognoscente genérico, com um caminho de aprendizagem previamente traçado e indicou a necessidade de concentrar investigações sobre a aprendizagem nas atividades coletivas. Nossa pesquisa, além de avaliar interações entre alunos e entre professora e alunos apresentará fatos que indicam que os educandos podem chegar a soluções de problemas por outras vias divergentes da expectativa da professora.

4 Metodologia e Estudo de Caso

"A explicação da atração e dos prazeres do jogo fundamenta-se nas excitações das nossas paixões, isto é, do fato de o jogo provocar nossa emoção pela incerteza que suscita. A emoção entendida como paixão que comove a alma e, desta forma a ocupa[2]."

Em *Práticas Pedagógicas*, mencionamos a equivalência de frações; em *Considerações sobre a Infância e sobre Aprendizagem*, discorremos o conceito de ZDP. Neste capítulo, apresentaremos a metodologia de produção e aplicação do jogo. O desenvolvimento do jogo em uma sala de aula será descrito e analisado.

4.1 Metodologia

A proposta abaixo foi desenvolvida e adaptada às atuais condições de trabalho da autora, diferente das encontradas no início da carreira de docente(1996), onde o dominó original poderia ser facilmente utilizado com grupos de quatro alunos, jogando em dupla, uma contra a outra, devido ao comportamento dos educandos naquela época.

Cada peça do dominó possui duas faces.

O dominó original possui 28 peças com sete faces diferentes apresentadas de duas em duas, explicada na combinação abaixo:

$$C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

que representa as sete faces combinadas 2 a 2

$$+7 \text{ peças,}$$

onde as faces aparecem duplicadas, também conhecidas como buchas, totalizando 28 peças.

A primeira adaptação do dominó tradicional foi feita restringindo o número de faces para 5, com o intuito de facilitar o trabalho em dupla, e também diminuir o tempo de duração do jogo. Portanto, o número de combinações fica reduzido a:

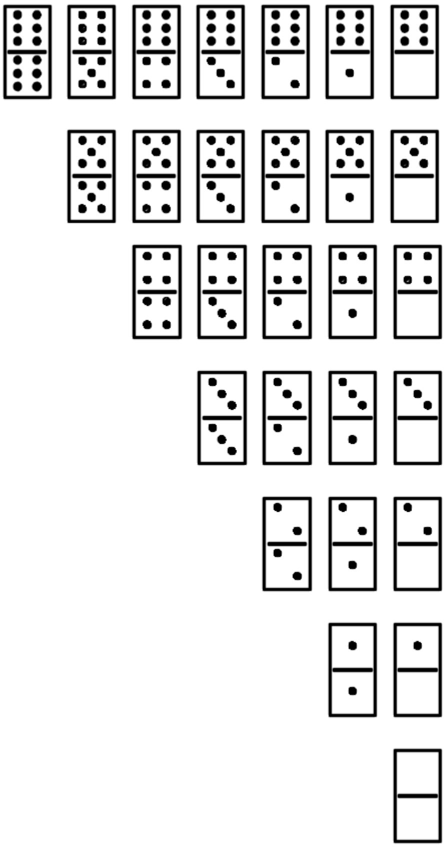
$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

que representa as cinco faces combinadas 2 a 2 num total de 10 peças,

$$+5 \text{ peças.}$$

onde as faces aparecem duplicadas, também conhecidas como buchas, totalizando 15 peças.

A figura a seguir mostra as representações dos dominós acima citados.



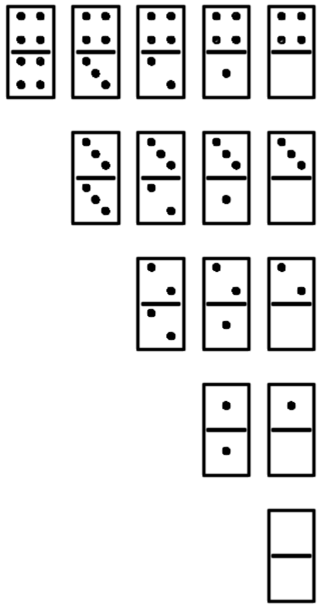


Figura 1: Dominó Tradicional Dominó Adaptado

A construção do dominó por cada dupla demanda conhecimento de uma estrutura combinatória está explicada adiante.

4.2 Informações sobre a lógica combinatória na construção do dominó de frações.

Consideremos a construção do dominó de 15 peças, com cinco faces: 1, 2, 3, 4 e 5. Explicando para uma turma a construção do dominó, a professora desenha/escreve o dominó de 15 peças. E explica que a face 5 (cinco pontos), por exemplo, aparece ao todo 6 vezes em cinco peças diferentes :

1. 5 com 5 (bucha);
2. 5 com 4;
3. 5 com 3;
4. 5 com 2; e
5. 5 com 1.

Esgotada a aparição da face 5, observa-se agora a face 4 (quatro pontos). Espera-se que a face 4 apareça ao todo 6 vezes num total de 5 peças. 4 com 4 (bucha), 4 com 3, 4 com 2, 4 com 1, quatro peças, mais a peça que apareceu com o cinco acima, perfazendo cinco peças diferentes com a face 4.

1. 4 com 4 (bucha);
2. 4 com 3;
3. 4 com 2; e
4. 4 com 1.

Considerando agora a face 3 (três pontos): 3 com 3(bucha), 3 com 2, 3 com 1, três peças, mais as duas que apareceram anteriormente : 5 com 3 e 4 com 3 completam as cinco peças que possuem a face 3. É importante ressaltar que ao todo a face 3, assim como todas as outras, aparece ao todo seis vezes nas cinco peças.

1. 3 com 3 (bucha);
2. 3 com 2; e
3. 3 com 1.

Continuando o processo, agora com a face 2 (dois pontos): 2 com 2(bucha), 2 com 1, duas peças, que somadas a três que apareceram acima com 5 com 4 e com 3, formam cinco peças onde a face dois aparece conforme o esperado.

1. 2 com 2 (bucha); e
2. 2 com 1.

E por último a face 1 (um ponto). Que já apareceu acima com 5, com 4, com 3, com 2, portanto falta apenas 1 com 1 (bucha), perfazendo um total de cinco peças onde a face 1 aparece 6 vezes ao todo.

1. 1 com 1 (bucha).

Assim, para a construção do dominó de 15 peças é necessária a escolha por dupla de cinco faces diferentes no caso do dominó de frações cinco frações diferentes. Como foi constatado que cada face aparece 6 vezes, é preciso representar de maneira equivalente cada fração escolhida pela dupla por 6 vezes.

As formas de representação das frações equivalentes pelas duplas de alunos e nos casos estudados foram feitas tanto usando a representação decimal, geométrica, porcentagem, e na maioria na forma tradicional (a/b).

De posse das 6 maneiras equivalentes de cada face previamente escolhida, faz-se a correspondência. 1/4, por exemplo, será a face 5 (cinco pontos), ou seja, ocupará o espaço e a posição da face cinco no dominó de frações. Para cada uma das seis vezes que a face cinco aparece no dominó, usa-se uma das seis representações diferentes da fração 1/4. E assim sucessivamente, até que o dominó de pontos seja completamente substituído pelo de frações equivalentes construído pela dupla. O dominó simples (15 peças) apresenta a estrutura combinatória acima relatada. O aluno, ou a dupla, ao entender a estrutura do dominó, consegue montar o seu próprio dominó de frações equivalentes. Quando compreendida, a estrutura combinatória do dominó pode ser estendida para outras atividades ou outros conteúdos. Basta explorar cinco tópicos diferentes que possuam seis formas equivalentes de correspondência.

4.3 Construção do dominó de frações.

Disposição dos alunos: dupla.
Material: folhas, tesouras e cadernos para anotação.
Tempo dispendido: 5 aulas. 2 aulas para a construção e 2 para a atividade (jogo).
Cada dupla constroi o seu próprio dominó, com escolha própria para as cinco faces de frações equivalentes.
Torna-se necessário conhecer a estrutura do dominó para uma construção correta. A estrutura do dominó original é por si só bastante interessante: são sete faces diferentes distribuídas de duas em duas para cada uma das 28 peças. O dominó de frações proposto possui 15 peças, e 05 faces combinadas duas a duas em cada peça. Na figura 2, encontra-se uma orientação desenhada pela professora, a qual procura descobrir, junto aos alunos, o que deve ser escrito em cada peça.

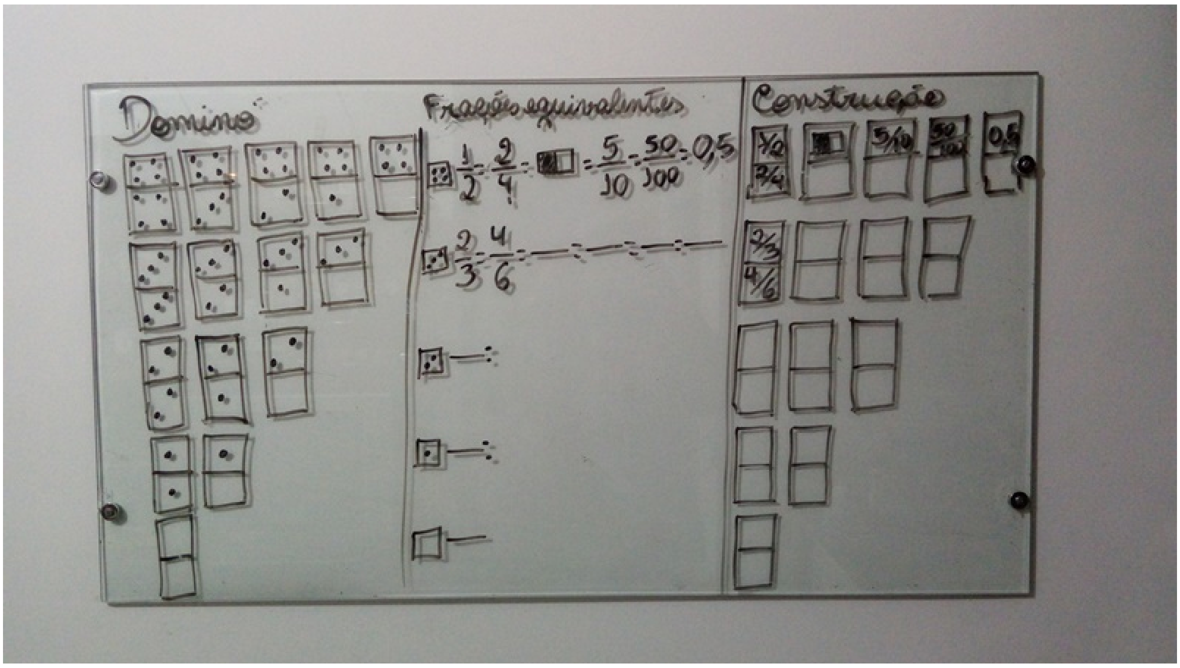


Figura 2: Modelo de dominó a ser construído

A proposta consiste em desenhar o modelo do dominó com números e explorar a disposição de cada face nas peças. Assim, o dominó tradicional pode ser usado usá-lo como modelo para se compreender a produção do dominó de frações. No modelo da figura 1, são usadas peças com números de 0 a 4, o que implica em 5 faces diferentes e cada face isoladamente aparece 6 vezes ao todo. Para construir o dominó de frações faz-se necessário a escolha de 05 frações diferentes. Cada face será representada 06 vezes de maneira equivalente. Nessa construção sugere-se dar as duplas, autonomia tanto na escolha das faces quanto na representação equivalente; com posterior correção do professor. Um exemplo está representado na figura 3.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{12}{24} = \frac{50}{100}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{-}{-} = \frac{-}{-} = \frac{-}{-} = \frac{-}{-} = \frac{-}{-}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_}$$

$$\frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_}$$

$$\frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_} = \frac{\_}{\_}$$

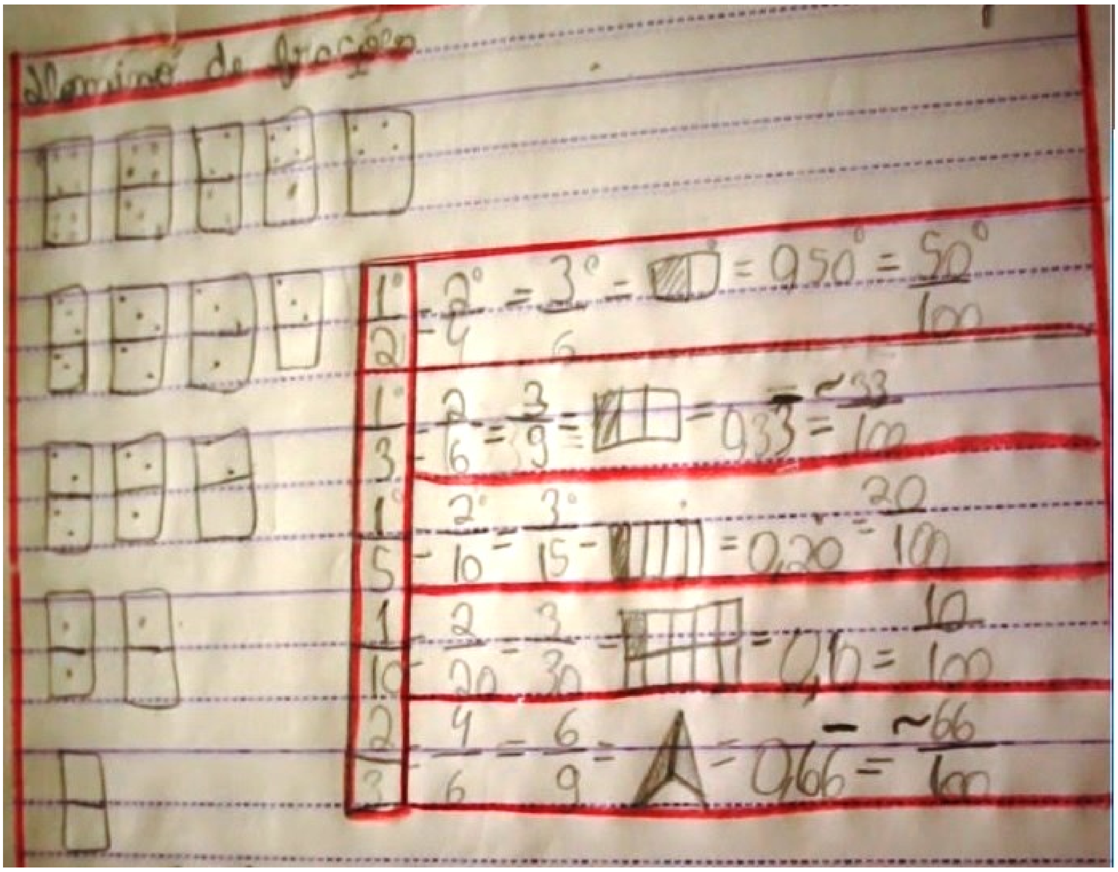


Figura 3: Exemplo de composição de frações

Depois de pronto, os alunos jogam um contra o outro. Sugere-se que eles possam experimentar várias rodadas. Depois de apresentar a metodologia de construção de jogo, seguiremos com um exemplo real, obtido em sala aula, o qual será descrito e comentado.

4.4 Estudo de caso: Nick e Evie

Nick e Evie são nomes fictícios de alunos do sexto ano. Eles já haviam construído o jogo e, enquanto jogavam, foram observados pela professora. O jogo foi registrado em vídeo. Segue uma descrição de partes do jogo, com análise dos diversos episódios.

No início, a peça que está na mesa é

$$\boxed{\frac{1}{10} \| \frac{10}{100}}$$

Assim, para jogar corretamente, Evie precisa jogar a fração equivalente a uma das extremidades. O primeiro impulso de Evie foi jogar a peça com $\frac{2}{10}$. Ela colocou a peça na mesa e a retomou. Uma das hipóteses para explicar o comportamento de Evie seria que ela observou a igualdade entre os denominadores. Ela teria desistido da jogada ao observar a diferença entre os numeradores.

O impulso seguinte de Evie foi tentar colar $\frac{1}{5}$ em $\frac{1}{10}$ igualando apenas o numerador.

Na terceira tentativa, Evie considera colar $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{10}$. Existe aqui a igualdade entre os numeradores, mas essa tática ela já havia tentado no impulso anterior e não tinha funcionado. É claro que ela tinha a limitação das peças da mão dela, e que se nos três últimos impulsos, ela tentou, respectivamente, $\frac{2}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$, podemos inferir que $\frac{1}{2}$ surgiu como uma fração formada pelos algarismos 1 e 2 presentes nas tentativas anteriores. O quarto e derradeiro impulso foi jogar $\frac{2}{20}$ que, enfim, satisfaz a regra principal de ser uma fração equivalente a $\frac{1}{10}$.

Enquanto jogava, Evie conversou com a professora.

P1 – Oxente Evie? $\frac{2}{10}$ é igual a $\frac{1}{10}$?

E1 – Não.

P2 – Como que é que a gente joga? Conta pra nós?

E2 – A gente vê qual o que encaixa.

P3 – Como que a gente vê qual o que encaixa? Que é que você tem na mão aí, conta pra nós?

E3 – $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$...

P4 – Você tá procurando o que, aí?

E4 – Uma que encaixa no $\frac{01}{10}$ ou no $\frac{10}{100}$.

P5 – Hum! Então vai. Eu já vi aí na sua mão. Não quero te dizer não mas, eu já vi. Achou? Cê acha que é essa? Você tem que fazer a conta. Olha lá. Qual fração dessa vai dar um décimo? Como é que a gente faz a conta?

E5 – Tá difícil.

P6 – Vamos uma por uma. Tá. Vamos uma por uma. Essa aí você achou que era e não é. Por que, que, não é? Vamos ver aqui. Por que é que não é?

E6 – Por causa que não dá pra...

P7 – Ah! Então volta ela, bota ela lá no canto pra ela não voltar pra mão. Você já sabe que não é. Vamos ver outra. Vai. Pega outra. Um de cada vez, né, Evie? Que a gente não é máquina. $\frac{1}{2}$ dá Evie?

E7 – Não. Por causa que não dá pra simplificar.

P8 – Então, bota ela lá. Se lembre que ela tem duas pontas, né? Vamos ver? Vai. Que é que você tá procurando, Evie?

E8 – Uma que encaixa, né?

P9 – Aí. Olha essa que tá na sua mão. Essa, aí. Essa. E essa aí encaixa?

E9 – Encaixa.

P10 – Por quê?

E10 – Por causa que ela... Dá pra... Ela faz parte de um décimo

P11 – Por quê? Qual a conta que você faz?

E11 – A conta...? Multiplica por 2.

P12 – Ahn! E o que, que multiplica por 2?

E12 – Um décimo.

P13 – Mas como é que multiplica? Conta pra mim, aí.

E13 – Mesmo numero que você multiplica aqui em cima, você multiplica em baixo. Então, você pode multiplicar por 2 que vai dar dois vinte avos.

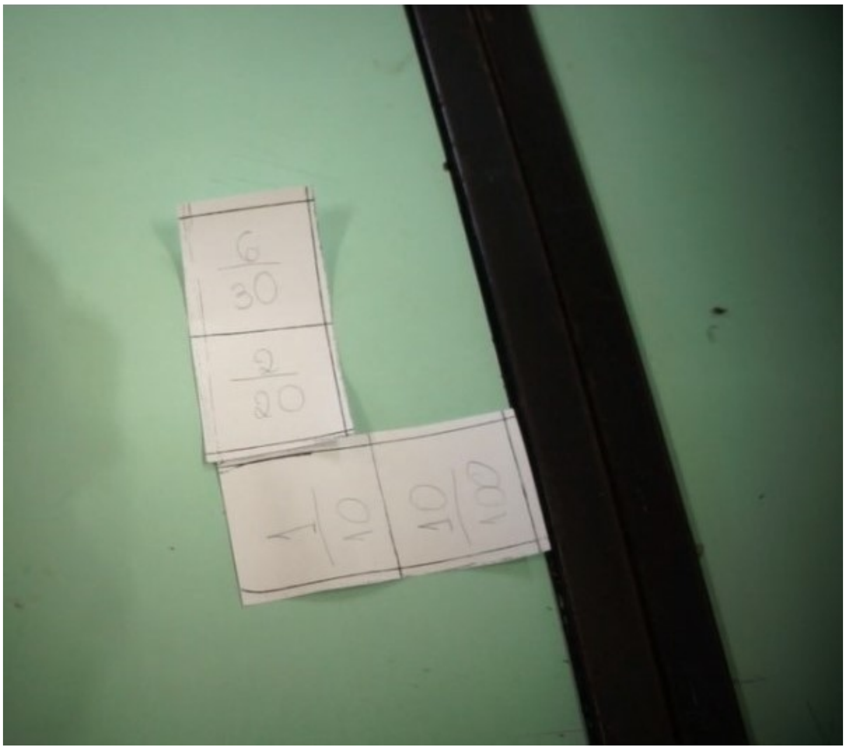


Figura 4: Jogo entre alunos

Nesse diálogo, verifica-se que Evie explica para professora como que sai da fração 1/10 e chega à fração 2/20(E11, E12). Portanto ela sabe fazer o caminho descrito, mas não o soube fazer para detectar de início qual seria a fração equivalente a 1/10 dentre as que ela

tinha na mão. Outro comentário bastante interessante é que Evie fala que 1/10 e 2/20 são da mesma família, termo este que talvez venha da organização do dominó no quadro onde há a construção por grupos.
Se Evie fala sobre o que deveria fazer com a professora, podemos interpretar que essa fala surgiu das condições ambientais nas quais o jogo acontecia. Isso é uma evidência da constituição da ZDP. Ela ainda não domina plenamente a utilização da regra no jogo, mas, aparentemente, ela está, com ajuda da professora, internalizando esse processo.
Depois da jogada da Evie o dominó na mesa ficou assim:

$$\boxed{\frac{6}{30}\Big\|\frac{2}{20}}\boxed{\frac{1}{10}\Big\|\frac{10}{100}}$$

Como o jogo é alternado agora então é a jogada de Nick, que opta por deixar o dominó assim:

$$\boxed{\frac{6}{30}\Big\|\frac{2}{20}}\boxed{\frac{1}{10}\Big\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{3}{30}\Big\|\frac{6}{24}}$$

Perguntado pela professora, ele explica aparentando certa firmeza, a difícil igualdade

$$\frac{3}{30} \equiv \frac{10}{100}$$

. Eis o diálogo:

P14 – Falou. Você pode jogar o quê, Nick?

N14 – três trinta.

P15 – Três trinta?

N15 – Porque é equivalente a dez cem. Dez centésimos.

P16 – Por quê? Mas dez cem e três trinta. Como é que a gente...? Um não dá pra multiplicar...

N16 – É porque se você dividir... se você pegar um décimo e fazer vezes dez vai dar, dez cem, então se você fizer vezes três vai dar três trinta.

Não houve demora em jogar da parte do Nick.
Agora é a vez da Evie. A professora orienta-a a olhar e ler as frações que estão nas pontas do dominó, e Evie lê "seis trinta" e "seis vinte e quatro". Não foi falado o nome correto da fração "seis trinta avos" mas isso não atrapalhou o entendimento do jogo.
Na sequência, a professora pergunta qual seria a fração reduzida de $\frac{6}{30}$. Evie responde $\frac{3}{15}$. A professora interfere sugerindo que se pode reduzir mais ainda; Evie responde $\frac{1}{5}$. A professora agora tenta fazer a mesma redução na outra ponta e partindo de 6/24, Evie encontra a reduzida da fração 6/24 explicando:

P20 – Você, Evie. Nas pontas. Vamos olhar o das pontas primeiro, Evie. O que que a gente tem nas pontas?

E20 – Seis trinta $\left(\frac{06}{30}\right)$.

P21 – E esse aqui?

E21 – Seis vinte e quatro $\left(\dfrac{06}{24}\right)$.

P22 – Que fração é equivalente a seis trinta? Qual que é reduzida dela? Olha lá.

E22 – Três quinze avos. $\left(\dfrac{3}{15}\right)$.

P23 – Ainda pode reduzir de novo.

E23 – Tres... Um quinto. $\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

P24 – Um quinto. Então você vai procurar uma coisa equivalente a um quinto. Olha a outra ponta, Evie. Qual o que tá na outra ...?

E24 – seis vinte e quatro avos $\left(\dfrac{06}{24}\right)$.

P25 – Qual a fração reduzida dela?

E25 – Você divide por dois. Que vai dar três...

E26 – ai vai dar... seis vinte e quatro avos dá pra dividir por dois. Por que eles são pares. Seis dividido por 2 vai dar 3 e 24 dividido por 2 vai dar 12.

P26 – Quem é a fração três doze $\left(\dfrac{06}{24}\right)$?. Pense aí se ela pode ser simplificada. Três doze não dá pra ser simplificada? Dá Nick?

N26 - três doze $\left(\dfrac{06}{24}\right)$?

P27 – É.

N27 – Um quarto $\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

P28 – Dá um quarto. O que você está procurando aí na sua mão?

O que faz Evie pegar uma peça com $\dfrac{1}{4}$ na mão e jogar deixando a configuração do dominó na mesa assim:

$$\boxed{\frac{6}{30}\Big\|\frac{2}{20}}\boxed{\frac{1}{10}\Big\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{3}{30}\Big\|\frac{6}{24}}\boxed{\frac{1}{4}\Big\|\frac{2}{8}}$$

A interferência da professora produz novamente uma Z.D.P uma vez que procura apoiar o raciocínio da aluna, (P22, P23, P24). A professora molda o caminho da compreensão reforçando a observação do que está acontecendo no jogo, instigando Evie a pensar. Nick afirma que esta jogada $\dfrac{2}{8} \equiv \dfrac{3}{12}$ pode fazer; a professora concorda e pergunta o porquê? Ele mostra as duas frações, $\dfrac{2}{8}$ e $\dfrac{3}{12}$, e diz por que é equivalente a $\dfrac{1}{4}$ deixando a configuração;

$$\boxed{\frac{6}{30}\|\frac{2}{20}}\boxed{\frac{1}{10}\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{3}{30}\|\frac{6}{24}}\boxed{\frac{1}{4}\|\frac{2}{8}}\boxed{\frac{3}{12}\|\frac{2}{6}}$$

Evie responde qual é a fração reduzida de $\frac{2}{6}$ à professora e joga rapidamente, fazendo o jogo avançar e, o principal, utilizando o conceito de fração equivalente ao seu favor. Isso permite inferir que ela teria se apropriado do conceito.

$$\boxed{\frac{6}{30}\|\frac{2}{20}}\boxed{\frac{1}{10}\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{3}{30}\|\frac{6}{24}}\boxed{\frac{1}{4}\|\frac{2}{8}}\boxed{\frac{3}{12}\|\frac{2}{6}}\boxed{\frac{1}{03}\|\frac{06}{18}}$$

Agora é a vez de Nick que jogou a peça: $\boxed{\frac{04}{12}\|\frac{04}{40}}$

Soube jogar e esclarecer que $\frac{06}{18}$ equivalia a $\frac{04}{12}$. Foi uma jogada alentadora, pois $\frac{06}{18}$ para ser reduzido e simplificado até sua fração irredutível teria que ser dividido diretamente por 6, tanto o numerador quanto o denominador, ou como eles vem fazendo dividindo por 2 o numerador e o denominador e depois dividindo por três, o que mostra que Nick não estava simplesmente dividindo por dois sempre e seguidamente. A configuração ficou assim representada.

$$\boxed{\frac{06}{30}\|\frac{02}{20}}\boxed{\frac{01}{10}\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{03}{30}\|\frac{06}{24}}\boxed{\frac{01}{04}\|\frac{02}{08}}\boxed{\frac{03}{12}\|\frac{02}{06}}\boxed{\frac{01}{03}\|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{4}{12}\|\frac{4}{40}}$$

Segue-se o jogo com a vez de Evie, e o diálogo:

P30 - É. E agora? Quem que ficou na ponta, Evie?

E31 - Seis trinta $\left(\frac{6}{30}\right)$

P31 - Seis trinta e ficou na ponta quem?

E32 - Quatro quarenta $\left(\frac{4}{40}\right)$

P32 - Peraí que eu vou olhar agora, agora.

E33 - Quatro quarenta avos. $\left(\frac{4}{40}\right)$

P33 - Quatro quarenta avos equivale a o que?

E34 - Dois vinte avos.$\left(\frac{2}{20}\right)$

P35 - Dois vinte avos equivale a o que?

E35 - Um quarto. $\left(\frac{1}{4}\right)$

P36 - Um quarto?

E36 - Não. (cálculos) Vai dar... um décimo.$\left(\frac{1}{10}\right)$

P37 - Que é que você tem parecido com um décimo? Acho que você não tem. Olha a outra ponta.

E37 - Seis trinta.$\left(\dfrac{6}{30}\right)$

P38 - Seis trinta. Você já tinha falado. Quê que ela é?

E38 - Dá pra simplificar.

E38 - três, quinze avos.$\left(\dfrac{3}{15}\right)$

P39 - Que simplificando de novo dá o que? Ah! você já achou três quinze. Então joga. Beleza.

Ao simplificar $\frac{4}{40}$ avos não houve rapidez por parte de Evie (E33,E34,E35). Ela dividiu tanto o denominador quanto o numerador por 2 encontrando $\frac{2}{20}$ e depois, ao refazer o processo, encontrou $\frac{1}{4}$. Interpelada pela professora(P36), ela demorou e corrigiu $\frac{1}{10}$; ela verificou com mais rapidez que já não tinha uma fração equivalente à $\frac{01}{10}$ na mão. Foi, então, conduzida pela professora (P37) a inferir sobre a outra ponta do dominó, $\frac{6}{30}$. Ela recomeçou o processo e encontrou $\frac{3}{15}$ que já estava na mão, daí ela jogou deixando a configuração:

$$\boxed{\frac{05}{20}\Big\|\frac{03}{15}}\boxed{\frac{06}{30}\Big\|\frac{02}{20}}\boxed{\frac{01}{10}\Big\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{03}{30}\Big\|\frac{06}{24}}\boxed{\frac{01}{04}\Big\|\frac{02}{08}}\boxed{\frac{03}{12}\Big\|\frac{02}{06}}\boxed{\frac{01}{03}\Big\|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{04}{12}\Big\|\frac{04}{40}}$$

Foi a vez de jogar de Nick que jogou uma peça errada, mas nem a professora percebeu, nem Evie. A configuração ficou assim.

$$\boxed{\frac{03}{09}\Big|\frac{04}{20}}\boxed{\frac{05}{20}\Big|\frac{03}{15}}\boxed{\frac{06}{30}\Big|\frac{02}{20}}\boxed{\frac{01}{10}\Big|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{03}{30}\Big|\frac{06}{24}}\boxed{\frac{01}{04}\Big|\frac{02}{08}}\boxed{\frac{03}{12}\Big|\frac{02}{06}}\boxed{\frac{01}{03}\Big|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{04}{12}\Big|\frac{04}{40}}$$

Apesar de saber a fração irredutível de $\frac{5}{20}$, que é $\frac{1}{4}$, Nick jogou $\frac{4}{20}$, que não é equivalente à $\frac{5}{20}$ mas tem o mesmo denominador. Não detectado o erro, o jogo prosseguiu e Evie soube calcular a fração irredutível de $\frac{3}{9}$, mas não soube encontrar entre suas peças/frações, uma fração equivalente tanto a $\frac{3}{9}$ ou a $\frac{4}{40}$. Acabou comprando a peça do cava , que foi $\frac{5}{25}$ e $\frac{50}{100}$. Soube calcular a irredutível de $\frac{5}{25}$, mas precisou da intervenção da professora para localizar na própria mão $\frac{5}{15}$ e detectar que era equivalente a $\frac{1}{3}$, deixando esta configuração:

$$\boxed{\frac{02}{04}\Big\|\frac{05}{15}}\boxed{\frac{03}{09}\Big\|\frac{04}{20}}\boxed{\frac{06}{30}\Big\|\frac{02}{20}}\boxed{\frac{01}{10}\Big\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{03}{30}\Big\|\frac{06}{24}}\boxed{\frac{01}{04}\Big\|\frac{02}{08}}\boxed{\frac{03}{12}\Big\|\frac{02}{06}}\boxed{\frac{01}{03}\Big\|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{04}{12}\Big\|\frac{04}{40}}$$

Nick soube dizer que $\frac{2}{24}$ era equivalente a $\frac{1}{12}$ e que $\frac{4}{40}$ era equivalente a $\frac{1}{10}$ e jogou de maneira tal que o jogo ficou assim:

$$\boxed{\frac{02}{04}\|\frac{05}{15}}\boxed{\frac{03}{09}\|\frac{04}{20}}\boxed{\frac{06}{30}\|\frac{02}{20}}\boxed{\frac{01}{10}\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{03}{30}\|\frac{06}{24}}\boxed{\frac{01}{04}\|\frac{02}{08}}\boxed{\frac{03}{12}\|\frac{02}{06}}\boxed{\frac{01}{03}\|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{04}{12}\|\frac{04}{40}}\boxed{\frac{05}{50}\|0.5}$$

Evie jogou rapidamente $\dfrac{1}{2}$ sob a fração $\dfrac{2}{4}$ e o dominó ficou:

$$\boxed{\frac{05}{10}\|\frac{01}{02}}\boxed{\frac{02}{04}\|\frac{05}{15}}\boxed{\frac{03}{09}\|\frac{04}{20}}\boxed{\frac{06}{30}\|\frac{02}{20}}\boxed{\frac{01}{10}\|\frac{10}{100}}\boxed{\frac{03}{30}\|\frac{06}{24}}\boxed{\frac{01}{04}\|\frac{02}{08}}\boxed{\frac{03}{12}\|\frac{02}{06}}\boxed{\frac{01}{03}\|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{04}{12}\|\frac{04}{40}}\boxed{\frac{05}{50}\|0.5}$$

E Nick ganha o jogo:

$$\boxed{\frac{04}{16}\|\frac{03}{06}}\boxed{\frac{05}{10}\|\frac{01}{02}}\boxed{\frac{02}{04}\|\frac{05}{15}}\ldots\boxed{\frac{01}{03}\|\frac{06}{18}}\boxed{\frac{04}{12}\|\frac{04}{40}}\boxed{\frac{05}{50}\|0.5}$$

A professora pergunta a Evie se haverá revanche, e ela afirma que sim, indicando uma disposição para a competição, e até um novo domínio no jogo.

4.5 Estudo de caso 2: Fael e Mont

.

Interessante verificar que mesmo a autora incentivando a construção do dominó com as diversas representações de fração equivalente: a geométrica, porcentagem, decimal; o enfoque dado (e como foi dado) na construção foi de que parte-se de uma fração para obter uma equivalente. Multiplica-se o numerador e o denominador pelo mesmo número (diferente de zero); analogamente divide-se pelo mesmo número. No jogo entre os alunos Fael e Mont, o aluno Fael compreende a equivalência de frações de maneira diferente que é frisado pela professora: a fração é equivalente se mantém a mesma proporção gerando assim uma Zona de Desenvolvimento Proximal para Mont. Segue o diálogo:

F1 - Uma fração equivalente a um quinto ou equivalente a um décimo.

Fael jogou uma peça com 0,20 e 1/2(um dominó com um lado hachurado e o outro branco)

P1 - Nossa. Você achou uma coisa interessante: 0,20 ..... Como é que você achou que era?

F2 - Vinte pra dar cem precisa de cinco vintes, ou seja, é um quinto.

P2 - Muito bem. (Vira-se para Mont e pergunta) Que é que ficou na ponta aqui?

M1 - Um décimo e um meio.

P3 - E aí? Que é que você vai jogar?

M2 - 0,10

P4 - 0,10 é o que?

Mont aponta para a ponta com $\frac{1}{10}$. Uma peça com um terço gráfico e 0,10

P5 - Pode colocar lá. Eu gostei dessa ideia. Agora eu quero que você explique por que.

M3 - Dez pra dar... A professora intervêm por ter Mont demorado e aparentemente não saber explicar a jogada que acabou de fazer

P6 - Não sabe não?

M4 - Não

P7 - Se você juntar dez centavos, dez vezes, dá quanto?

M5 - Cem.

P8 - Dá?...

M6 - Um real.

P9 - Então é um décimo. Um dividido por dez.

P10 - Muito bem. Vai, Fael.

F3 - Já separei aqui...

Em (F1), Fael explica o processo que usou para transformar frações, o qual é diferente do que a professora vem explicando e desenvolvendo ao longo desta proposta. Ele utiliza a ideia de razão enquanto a professora vinha utilizando o algoritmo de multiplicar numerador e denominador por um mesmo número, diferente de zero. Em F2, ele afirma que "vinte para dar 100 precisa de cinco vintes". Ao dizer isso, Fael estava explicitando uma proposta, até então, inédita na turma. Esse ineditismo cria, para a professora a oportunidade de perceber uma nova abordagem e ela testa o domínio do algoritmo lançando uma pergunta (P1). que já aplica a abordagem na fala(P7) com Mont:" - Se você juntar dez centavos, dez vezes, dá quanto?". Mont repetiu a estratégia de Fael nas falas M3 e M4 mesmo não entendendo exatamente qual o caminho o que fez com a professora tivesse que construir (P7).

Esse "dez para dar..." sugere que Mont estaria tentando reproduzir a explicação fornecida pelo colega logo na jogada anterior. No entanto, Mont apenas inicia a explicação e se silencia durante . . . segundos. A professora, de sua parte, pergunta se Mont não sabe explicar e ele concorda com ela (M4). Nesse momento, a professora procura uma estratégia para facilitar a compreensão do processo que o próprio aluno teria adotado. Na verdade, ela abre mão do método que havia ensinado para assimilar o método proposto por Fael. Verifica-se assim o que resultou da proposta inesperada aparente na jogada de Fael. Podemos interpretar esse diálogo como uma construção de uma ZDP. Resumidamente, Fael fez uma jogada inesperada para a professora; ela pede que ele justifique sua jogada e constata que o aluno domina claramente o processo subjacente à sua proposta. Mont, o parceiro de Fael apresenta uma peça e tenta um caminho explicativo similar ao do colega. Como não consegue ainda explicitar esse caminho, recebe ajuda da professora. Ela, então, fornece elementos para que Mont melhore sua compreensão do processo proposto pelo colega.

5 Críticas e Observações (Estudo de caso)

O que se pode explorar desta prática do jogo de dominó de frações?
Afinal, qual é o trunfo desta proposta?
Ao comparar esta proposta com o que se apresenta na internet, quando se digita "dominó de frações" no buscador, tem-se acesso a várias experiências que envolvem o jogo. A diferença entre as diversas aparições de dominós e esta proposta é sútil: a maioria propõe um dominó com as peças já montadas.

Na versão aqui apresentada, a construção do dominó pelos alunos favorece a apropriação tanto de como funciona a distribuição combinatória das peças do jogo, como oportuniza escolher uma fração e escrever as diversas representações equivalentes a ela, bem além da representação geométrica que prevalece em quase todas as demais propostas.

Algumas dúvidas quanto à eficácia desta proposta podem surgir. Por exemplo: os alunos, sendo os criadores dos próprios dominós de frações, poderiam apenas decorar as combinações corretas e reproduzi-las em cada jogada. Se isso ocorresse, provavelmente não se caracterizaria como um aprendizado eficaz. Para colocar em xeque esta dúvida, basta ouvir umas das gravações para perceber que, mesmo dividindo a sala em duplas, esta formação não é sempre seguida. Durante o jogo, uma dupla mais empolgada eventualmente leva uma série de colegas a abandonar seus jogos e tornarem-se expectadores. Assim, uma aparente fuzarca se forma. Os expectadores não são os criadores daquelas peças de dominó em jogo e, mesmo assim, conseguem palpitar sobre as jogadas dos colegas empolgados. Essa participação é um forte indicativo de que os alunos não se atêm a decorar as combinações de peças do jogo que criam, mas obtêm uma compreensão mais orgânica do jogo, o que os habilita a participar no jogo de outra dupla, com combinações diferentes de peças.

Uma filmagem em especial deve ser considerada. Uma situação que envolve um aluno com defasagem em relação à turma, defasagem essa que provocou sua seleção para o projeto interno de acompanhamento escolar. Esse aluno, Phil, foi colocado para jogar com mais dois colegas. Nesse jogo, Phil foi, o tempo todo, assessorado por colegas expetadores e pelos próprios adversários. Phil conseguiu, sem intervenção de outrem, tomar a decisão de jogar $1/3$ com sua representação geométrica, o que, neste caso específico, representa um avanço na sua aprendizagem.

É importante relatar as dificuldades do processo. A autora foi a professora aplicadora e também a pessoa que filmou as jogadas. Isto realmente leva um nível de dificuldade às diversas captações dos jogos, as filmagem são interrompidas diversas vezes... Afinal, além da dupla filmada, mais 28 alunos estão na sala, teoricamente focados na proposta. Alguns, depois de jogar uma ou duas vezes, já querem outra alternativa e ficam, aparentemente, mais dispersos.

No início deste trabalho, fizemos uma abordagem reflexiva sobre o ensino de Matemática, com enfoque no processo de ensino aprendizagem em frações equivalentes. Destacamos a importância desse tema nos algoritmos de somas e subtrações de frações, como também a existência desse conceito num exemplo da vida real. Comentamos sobre quando deve ser ensinado e cobrado o conceito de frações equivalentes.
Assumimos a constatação que nem sempre esse aprendizado é eficiente, pleno. Muitas vezes, o que se ensina em um ano é esquecido no ano seguinte. Daí a apresentação de um jogo de dominó de frações equivalentes, como alternativa às abordagens tradicionais. O jogo foi adaptado do original, com apenas 15 peças, de acordo com a experiência obtida pela autora ao longo dos anos de docência. Para realizar o jogo, propõe-se a construção

das peças e a aprendizagem de como funciona o dominó. Na sala de aula, o jogo é experimentado em duplas que se enfrentam em várias jogadas.
Em seguida, apresentamos o conceito de ZDP, visto que explicações para os motivos da não aprendizagem, e/ou da aprendizagem, perpassam pelo conhecimento e utilização desse conceito. Detalhes que possibilitam detectar e ou criar um ambiente capaz de gerar uma ZDP tornam-se relevantes em dois estudos de caso da aplicação desta proposta pedagógica em turmas do 6o ano de uma escola pública de periferia de Belo Horizonte.
Nos dois estudos de caso, as considerações dos alunos são destacadas. As buscas de dicas sobre qual caminho seguido em cada jogada pelos envolvidos vão delineando pequenos flashes de que o processo parece surgir efeito. Verificando o comportamento dos alunos na tentativa de ganhar, e abusando da proximidade da linguagem com os pares, e do efeito dos jogos, sugere-se a constatação de um ambiente capaz de desenvolver aprendizagem.
Apesar das dificuldades encontradas pela autora, e também pelo possível adeptos desta proposta, há indícios de que, pelo jogo, a aprendizagem sobre equivalência de frações acontece.
Assim, a proposta pedagógica de construção e aplicação de dominó de frações equivalentes, alcançou seu objetivo.

6 Comentários e agradecimentos

A Deus;

À minha família e em especial meu amado esposo, Carlosildo;

Ao meu orientador, Eduardo Sarquis, que se tornou mais ídolo após a convivência. Um exemplo de educador;

Aos idealizadores do Mestrado Profissional em Matemática, SBM, que tornaram possível este sonho;

A todos os incansáveis professores do curso;

A todos os persistentes colegas do curso, que se tornaram uma nova família;

À CAPES pelo apoio financeiro.

Apêndice I

Evie e Nick jogando sob a orientação da professora

P1 - são quantos pra cada um?

E1 - sete.

E2 - nó professora! Vai sobrar um.

P2 - e aí? Vai sobrar um. Deixa um pro cava.

P3 - pode ir. Vá lá. Que é que você jogou aí? Leia aí as frações. Que é que a Evie pode jogar? Joga na ponta. Joga o quê? Um décimo ou ... por que que tá escondendo, rapaz? Pode jogar. É prá todo mundo ver mesmo. Ave Maria, que mistério. Um décimo e dez centésimos. Joga Evie. oxente Evie? 2/10 é igual a 1/10?

E3 - não.

P4 - como que é que a gente joga? Conta pra nós?

E4 - a gente vê qual o que encaixa.

P5 - como que a gente vê qual o que encaixa? Que é que você tem na mão aí, conta pra nós?

E5 - um quarto, 2/8...

P6 - Você tá procurando o que, aí?

E6 - uma que encaixa no 1/10 ou no 10/100.

P7 - Hum! então vai. Eu já vi aí na sua mão. Não quero te dizer não mas, eu já vi. Achou? Cê acha que é essa? Você tem que fazer a conta. Olha lá. Qual fração dessa vai dar um décimo? Como é que a gente faz a conta?

E7 - Tá difícil.

P8 - vamos uma por uma. Tá. Vamos uma por uma. Essa aí você achou que era e não é. Por que que não é? Vamos ver aqui. Por que é que não é?

E8 - Por causa que não dá pra...

P9 - Ah! Então volta ela, bota ela lá no canto pra ela não voltar pra mão. Você já sabe que não é. Vamos ver outra. Vai. Pega outra. Um de cada vez, né, Evie? Que a gente não é máquina. Um meio dá Evie?

E9 - Não. Por causa que não dá pra simplificar.

P10 - Então, bota ela lá. Se lembre que ela tem duas pontas, né? Vamos ver? Vai. Que é que você tá procurando, Evie?

E10 - Uma que encaixa, né?

P11 - Aí. Olha essa que tá na sua mão. Essa, aí. Essa. E essa aí encaixa?

E11 - Encaixa.

P12 - Por que?

E12 - Por causa que ela... Dá pra... Ela faz parte de um décimo

P13 - Por que? Qual a conta que você faz?

E13 - A conta...? Multiplica por 2.

P14 - Ah! E o que, que multiplica por 2?

E14 - Um décimo.

P15 - Mas como é que multiplica? Conta pra mim, aí.

E15 - Mesmo numero que você multiplica aqui em cima, você multiplica em baixo. Então, você pode multiplicar por 2 que vai dar dois vinte avos.

P16 - Falou. Você pode jogar o quê, Nick?

N1 - três trinta.

P17 - Três trinta?

N2 - Porque é equivalente a dez cem. Dez centésimos.

P18 - Por quê? Mas 10/100 e três trinta. Como é que a gente...? Um não dá pra multiplicar...

N3 - É porque se você dividir... se você pegar um décimo e fazer vezes dez vai dar, um cem, então se você fizer vezes 3 vai dar 3 trinta.

P19 - Você, Evie. Nas pontas. Vamos olhar o das pontas primeiro, Evie. O que que a gente tem nas pontas?

E16 - 6/30.

P20 - E esse aqui?

E17 - 6/24.

P21 - Que fração é equivalente a 6/30? Qual que é reduzida dela? Olha lá.

E18 - Três quinze avos.

P22 - Ainda pode reduzir de novo.

E19 - Tres... Um quinto.

P23 - Um quinto. Então você vai procurar uma coisa equivalente a 1/5. Olha a outra ponta, Evie. Qual o que tá na outra ...?

E20 - 6/24(seis vinte e quatro avos)

P24 - Qual a fração reduzida dela?

E21 - Você divide por dois. Que vai dar treis...

Prof - Por que que vocês não montaram o dominó? Gente do céu. Você já viu o caderno. Então já era pra estar pronto

Alguem – Já ....

P25 - Não. Eu tenho aqui o caderno. Pode deixar. Só um minutinho.

E22 - ai vai dar... seis vinte e quatro avos dá pra dividir por dois. Por que eles são pares. Seis dividido por 2 vai dar 3 e 24 dividido por 2 vai dar 12.

P26 - Quem é a fração 3/12? Pense aí se ela pode ser simplificada. 3/12 não dá pra ser simplificada? Dá Nick?

N4 - 3/12?

P27 - É.

N5 -um quarto.

P28 - Dá um quarto. O que você está procurando aí na sua mão, Evie?

E23 - .....

P29 - Hummmm. Que você pode jogar Sr Nick? Hummm. Olha aí na sua mão.

N6 - ... pode. Não pode?

P30 - Pode. Por que que pode?

N7 -Porque é equivalente a 2/8 que é equivalente a 1/4.

P31 - Ok. Qual que é a fração que ficou aqui na ponta, Evie?

E24 - 2/6.

P32 - 2/6 é equivalente à quem?

E25 - 1/3.

P33 - Então joga. Joga Nick. Ih! Essa é boa, Nick. Seis dezoito avos. Que fração é essa?

N8 -1/3.

P34 - Então joga. 1/3 e igual a 4/12?

N9 -É, não é?

P35 - É. E agora? Quem que ficou na ponta, Evie?

E26 - 6/30

P36 - 6/30 e ficou na ponta quem?

E27 - 4/40

P37 - Peraí que eu vou olhar agora, agora.

E28 - Quatro quarenta avos.

P38 - Quatro quarenta avos equivale a o que?

E29 - Dois vinte avos.

P39 - Dois vinte avos equivale a o que?

E30 - um quarto.

P40 - Um quarto?

E31 - Não. (cálculos) Vai dar... um décimo.

P41 - Que é que você tem parecido com um décimo? Acho que você não tem. Olha a outra ponta.

E32 - Seis trinta.

P42 - Seis trinta. Você já tinha falado. Quê que ela é?

E33 - Dá pra simplificar.

E34 - três, quinze avos.

P43 - Que simplificando de novo dá o que? Ah! você já achou 3/15. Então joga. Beleza.

P44 - Nick, quê que nós temos na ponta lá, Nick

N10 - Cinco, vinte avos

P45 - É o quê?

N11 - É m quarto

P46 - Um quarto.

N12 - Deixe eu ver tenho quatro vinte avos aqui.

P47 - Ficou na ponta o que aí, Evie?

E35 - 3/9

P48 - três nonos.

E36 - 4/40. Dá pra simplificar. Dá 1/3.

P49 - Ó gente! A Evie fala baixinho aqui. Vocês estão falando mais alto do que ela.

E37 - Aí vai dar pra outra. Quatro quarenta avos.

P50 - Se você não tiver nem um decimo nem um terço, você vai ter que cavar. Cadê o cava? Caiu?

Alguem – Tá certo, Professora?

P51 - já pegou? E aí achou? Quê que você achou?

E38 - 50/100, 5/25

P52 - Passou, Evie?

E39 - Passei.

P53 - Olha só. Cinco quinze avos é o que? Qual que é a fração de 5/15? Dá pra simplificar?

E40 - Dá.

P54 - Joga qual?

E41 - Vai dar...

P55 - Vai dar?

E42 - (cálculos) cinco...

P56 - Não. Cinco quinze avos é o que?

E43 - Tem que multiplicar por cinco que vai dar um meio.

P57 - Um...?

E44 - Um quinto.

P58 - Um... ?

E45 - Um quinto.

P59 - É mesmo? Quinze dividido por cinco dá quanto?

E46 - Dividido por 5 dá um terço. (Conversas paralelas)

E47 - vai dar um terço.

P60 - Então quem que é a ponta lá? Olha lá. Três nonos é o que?

E48 - Dividido vai dar um terço.

P61 - Você tem ou não têm?

E49 - Tenho.

P62 - Vamos lá. Quem que você ficou lá Nick?

N13 - quatro quarenta.

P63 - Quatro quarenta e lá na ponta?

N14 - dois quartos. Ele é um meio e aqui é um décimo, né?

S - Isso.

N15 - zero cinco

P64 - ok. Você já acabou? Ah Tá. Já jogou lá, ela. Jogou rapidamente, um meio. Vamos ver aqui. Cinco décimos e zero vírgula cinco.

N16 - Calma.

P65 - Calma.

N17 - Ganhei.

P66 - Ganhou?

N18 - Ganhei.

P67 - Cabou? Tudo, tudo?

N19 - É. Três quinze.

P67 - E aí, Evie? Vai ter revanche ou não?

E50 - Vai.

P68 - Então... vai lá de novo.

Apêndice II

Jogo de dominó de frações entre Mont(M) e Fael(F), mediado pela professora(P).

Divisão das peças: 7 peças para cada um.

Alguém - Sobrou uma.

F1 - Deixa ela virada na mesa pra começar

P69 - Pode começar, Fael. E aí? Quê que nós temos aí?

Na mesa $\boxed{\frac{1}{10}\|\frac{2}{20}}$.

F2 - Um décimo(1/10), um décimo(2/20).

P70 - Que você tem aí? o que você tá procurando?

F3 - Um décimo. Uma fração correspondente a um décimo.

Fael jogou um peça com $\boxed{\frac{3}{15}\|\frac{10}{100}}$ na ponta com $\frac{1}{10}$.

P71 - Explica aí como é que você chegou a dez centésimos.

F5 - Multiplicando por 10.

P72 - Multiplicando por 10 o quê?

F6 - O 10 multiplicando por dez dá cem e o um multiplicando por dez dá dez.

P73 - E agora quais são as continhas, meu bem?

M1 - um décimo e tres quinze avos.

P74 - tres quinze avos é o quê? Vamos pensar um pouco.

M2 - pode ser este?

P75 - Qual que é este aqui?

M3 - tres quinze avos.

P76 - Qual que é a fração correspondente?

M4 - Um quinto.

P77 - que é que voce tem na mão?

M5 - Um quinto.

[**Mont** , jogou uma peça com $\boxed{\frac{1}{5}\|\frac{2}{20}} napontacom \frac{3}{15}$.

P78 - quê que tem na mesa agora, Fael?

F7 - Um décimo e um décimo.

P79 - Um décimo?

F8 - Oh! Um décimo e dois décimos.

P80 - Dois décimos é o quê?

F9 - Um quinto.

P81 - Então o que você vai procurar na sua mão?

F10 - Uma fração equivalente a um quinto ou equivalente a um décimo.

F11 jogou uma peça com 0,20 e 1/2(um dominó com um lado hachurado e o outro branco.

P82 - Nossa. Você achou uma coisa interessante: 0,20 ..... Como é que você achou que era...

F12 - Vinte pra dar cem precisa de cinco vintes, ou seja, é um quinto.

P83 - Muito bem. Que é que ficou na ponta aqui?

M6 - Um décimo e um meio

P84 - E aí? Que é que você vai jogar?

M7 - 0,10

P85 - 0,10 é o que?

Mont aponta para a ponta com 1/10. Uma peça com um terço gráfico e 0,10

P86 - Pode colocar lá. Eu gostei dessa ideia. Agora eu quero que você explique por que.

M8 - Dez pra dar...

P87 - Não sabe não?

M9 - não

P88 - Se você juntar dez centavos, dez vezes, dá quanto?

M10 - Cem.

P89 - Dá?...

M11 - Um real.

P90 - Então é um décimo. Um dividido por dez. Muito bem. Vai, Fael.

F13 - Já separei aqui...

P91 - Quê que é aquilo ali? Essa fração tá meio troncha. Era pra ser um terço. Qual que é o problema do desenho dela? Mas agente vai considerar que é um terço.

F14 - Eu já tinha separado aqui, desse lado e desse lado, um meio.

F15 joga uma peça de 1/2 com 2/4 na ponta com 1/2 gráfico.

P92 - Muito bem, que é que nós temos nas pontas? Um terço aconchambrado e dois quartos.

M12 - E dois quartos.

P93 - Vai colocar um terço lá? Vai. Pode colocar.

Mont joga uma peça de um terço gráfico com 0,33

P94 - Você tem dois um terço de representação gráfica? Ixe! Quanto ficou lá?

F16 - Um terço e um meio

Fael joga uma peça de 1/3 com 2/6.

P95 - Ok. Como é que ficou lá?

M13 - Dois sextos e dois quartos.

P96 - Dois quartos é o que, Mont?

M14 - Dividido por 2. Um sobre dois. Um meio.

P97 - Procure aí na sua mão, um meio. Achou? Tem certeza? Vamos devagar. Esse aí. Esse aí já tem alguma coisa. Que que é 0,50?

M15 - Pode por assim?

Mont joga 0,50 na ponta com 2/4.

P98 - Pode. Que é que ficou aí Fael?

F17 - Um décimo e um terço. Um terço multiplicado por 3 dá três nonos.

Fael jogou 3/9 com 20/100.

P99 - Ótimo. Que é que ficou aí Mont?

M16 - Um décimo e um décimo.

P100 - Vinte sobre cem é quanto? E aí? Quê que é esse ai? Esse aqui é qual? Três sobre trinta.

M17 - Ai eu multiplico três por três. Aí...

P101 - Três por três dá n... O quê que houve vai dividir três por três dá um, trinta por três...?

M18 - Dez.

P102 - Então é um décimo. Não é aí não.

Mont joga 3/30 com 100/150, coloca na ponta errada e conserta pondo na ponta certa.

P103 - E aí, quê que ficou?

F18 - Aqui vinte cem, aqui cem sobre cento e cinquenta.

Fael joga 1 quinto / 0,66 na ponta com vinte sobre cem.

P104 - E aí? Esqueceu o tracinho em cima do 6 aqui, ó. Tinha que ter. 0,66 é o quê? E esse aqui, cem sobre cento e cinquenta é o quê?

M19 - dois terços.

P105 - 0,66 Fael, é o quê? conta pra ele aí, Fael.

F19 - Também é dois terços

P106 - Dois terços, também. Procurando dois terços. Você tem?

M20 - Tenho.

Mont joga 2/3 com 4/6 na ponta 0,66

P107 - Beleza. E aí? Ficou o quê?

F20 - Dois terços e dois terços.

Fael tem a última peça na mão: 6/9 com 50/100.

P108 - É a última?

F21 - É.

P109 - Então ganhou. Joga.

F22 - Eu ganhei.

Apêndice III

Regras do jogo de dominó

Apesar de o dominó ser de fácil acesso aos alunos, muitos não conhecem o jogo. Portanto não sabem jogar. Torna-se necessária a elucidação das regras:

- Ganha o jogo o jogador que “bater”, descartar a última peça.
- No início, as peças ficam viradas para baixo e embaralhadas.
- As peças são divididas em partes iguais.
- Exemplo: As 15 peças são distribuídas entre os jogadores, resultando em 07 peças para cada um.
- A peça restante pode servir tanto de reserva (cava), quanto de peça inicial, ficando a critério dos jogadores.
- Para determinar qual jogador deverá fazer a primeira jogada sugere-se a disputa de par ou ímpar.
- Cada jogador coloca uma peça que possui a face equivalente a uma das faces nas extremidades do dominó encostando-a.
- O jogo terá duas pontas para jogar. O jogador seguinte leva em conta as pontas dessa nova configuração.
- Cada jogador alterna a jogada com o colega até que um fique completamente sem peças.
- No decorrer do jogo pode acontecer do jogador não ter peça para jogar, se houver cava, o jogador pega a peça do cava, e se não houver apenas diz: “passo”.
- Se nenhum jogador terminar as peças, o vencedor será o que tiver o menor número de peças; se ocorrer igualdade entre os números de peças, declara-se empate.
- O jogador que obteve êxito (bateu) na última partida será o que iniciará a próxima.

Referências

[1] KOHL, Martha, de Oliveira; **Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento. Um processo histórico**: São Paulo, Editora Scipione, 1993, pag. 63.

[2] DUFLO, Colas; **O jogo: De Pascal a Schiller.**, Porto Alegre, Editora Artes Médicas Sul Ltda, 1999.

[3] CASTELNUOVO, Emma; **Didáctica de la Matemática Moderna.**, Editora Trillas, Mexico-MEX, 1970.

[4] KAMII, Constance; **Aritmética: Novas perspectivas.**, Editora Papirus, Campinas-SP, 1977.

[5] PAÍN, Sara; **Diagnóstico e tratamento dos problemas de aprendizagem.**, Editora Artes Médicas do Sul Ltda., Porto Alegre-RS, 1973.

[6] CARRAHER, Terezinha N., e Outros; **Na Vida Dez na Escola Zero**, Cortez Editora, São Paulo-SP, 1988.

[7] SANTOS, J. O., **O lúdico na Educação Infantil**, jornal Campina Grande: Realize, 2011.

[8] VYGOTSKY, L. S., **Mind in Society - The Development of Higher Psychological Process** Cambridge MA: Harvard University Press, 1978.