Departamento de Matemática e Estatística Mestrado

Profissional em Matemática – PROFMAT

WAGNER CARDOSO SANTOS

São João del-Rei

2017

Wagner Cardoso Santos

NÚMEROS RACIONAIS FRACIONÁRIOS: Mesopotâmia à OBMEP

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei, na área de concentração em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves

São João del-Rei

2017

Santos, Wagner Cardoso
NÚMEROS RACIONAIS FRACIONÁRIOS: Mesopotâmia à OBMEP
Wagner Cardoso Santos - 2017.
88 páginas.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves

Dissertação de Mestrado Universidade Federal de São João del-Rei. Departamento de Matemática e Estatística. Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, 2017

1. Números racionais fracionários.
2 Análise de dados de ensino – aprendizagem.
3. Olimpíada Brasileira de Matemáticas das Escolas Públicas – OBMEP

WAGNER CARDOSO SANTOS

NÚMEROS RACIONAIS FRACIONÁRIOS: Mesopotâmia à OBMEP

Aprovada em 20 de Outubro de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Santos Alberto Enriquez Remigio
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Ms. Marianna Resende de Oliveira
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves
Universidade Federal de São João del-Rei

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação às pessoas que mais me incentivaram na desafiadora jornada até aqui: minha família (minha estimada mãe Lucimar, meu pai Vagner e meus queridos irmãos Flávio e Luana). Em especial, à minha amada mãe, pois quando eu estava a um passo de desistir, lá estava ela, pronta a incentivar-me e encorajar-me a continuar.

Aos meus colegas da turma de 2015, em especial aos queridos amigos Lívia e Thiago pelas alegrias, pelos estudos, pelo carinho e, principalmente, pelo apoio nos momentos mais desafiadores nesses dois anos de luta. Esse apoio foi essencial para que eu chegasse até aqui.

A todos os professores do PROFMAT, em especial, a Professora Mestre Marianna Resende, pelo companheirismo, amizade e por não ter desistido de nós, alunos, ao longo dessa jornada. Posso dizer que minha formação acadêmica, inclusive a formação pessoal, não teria sido a mesma sem a sua presença e seu acompanhamento.

E agora, ao concluir esse trabalho vamos dar glória à Deus.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, que se faz presente em minha jornada.

A minha família que a todo momento me incentivou e me acompanhou nessa jornada até aqui e que continuará me apoiando em todas as escolhas.

A minha amada Vó Teresa (em memória), que se não fosse por ela eu não teria condições de estar aqui como professor de Matemática.

Aos colegas da turma do PROFMAT de 2015 que apesar de todas as dificuldades, juntos conseguimos superá-las. Obrigado pela amizade de todos vocês!

A minha namorada Silvânia Cristina, pela vezes que abriu mão de estarmos juntos para que eu pudesse me dedicar aos estudos do curso. Te amo, minha linda!

A minha tia Mara Cristina que com palavras ditas, mesmo de longe, fortaleceu-me e reafirmou ainda mais minha capacidade de chegar até aqui. Obrigado pelo carinho!

Ao meu orientador, professor Dr. Ronaldo Ribeiro, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

A todos os professores do corpo PROFMAT da UFSJ pela paciência e ensinamentos, principalmente à Professora mestre Marianna Resende, pelo carinho e amizade com a turma. Você foi essencial para a conquista desse título.

Aos colegas de trabalho da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves e Colégio Revisão, pelo companheirismo e troca de experiências que se fizeram essenciais para a elaboração desse trabalho.

Aos meus alunos que, de certa forma, ensinaram-me a ser uma pessoa melhor, que respeita as diferenças e as dificuldades de cada um. Esse trabalho é para vocês, meus queridos alunos!

Enfim, a todos que diretamente ou indiretamente fizeram parte dessa caminhada até aqui, muito obrigado!

Suba o primeiro degrau com fé.

Não é necessário que você veja toda a escada.

Apenas dê o primeiro passo.

“Martin Luther King”

RESUMO

O presente trabalho tem como foco uma breve abordagem acerca da origem e da importância dos números racionais, especificamente na forma fracionária, bem como, orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e as concepções do ponto de vista teórico matemático. Partindo de um embasamento teórico, o principal objetivo do trabalho é analisar a forma de abordagem atual do referido conteúdo, uma vez que são detectados constantemente problemas enfrentados no processo ensino-aprendizagem dos números racionais, ocorridos não só, mas também nos finais do Ensino Fundamental. Por meio de ações concretas, foram apontadas dificuldades apresentadas pelos alunos de uma escola estadual e também as habilidades necessárias para que os alunos tenham sucesso nas resoluções de situações-problemas cujo aspecto é o tema central dessa dissertação. Com esse intuito, este trabalho apresenta a análise das soluções de algumas questões trazidas pela Olimpíada Brasileira de Matemática nos anos de 2009 a 2017. Tais questões compõem uma avaliação-teste, aplicada aos alunos do 6º e 7º anos do ensino fundamental, que funcionará como base de dados para elaboração de um relatório que trará registros das maiores dificuldades apresentadas no desenvolvimento de estratégias de resolução, bem como as porcentagens de erros e a opinião dos alunos em relação às questões investigadas. A investigação e os resultados apresentados pelos relatórios poderão servir de apoio para a elaboração de um plano de aula que auxilie o leitor desse trabalho no planejamento de aulas que tenham como tema central os números racionais em sua forma fracionária.

Palavras-chaves: Números Racionais, frações, ensino-aprendizagem, Parâmetros Curriculares Nacionais.

ABSTRACT

This paper has the aim to focus on a brief approach about the origins and importance of rational numbers, specifically in the fractional forms as well as from a mathematical theoretical point of view. From a theoretical base, the main objective of this páper is to analize the present approaching manner of the referred to content, once that problems related to teaching-learning process of rational numbers have been steadily detected not only, but also at the end of the high school basic teaching years. By means of concrete actions, difficulties faced by the students at a state school were presented at a public school and also the necessary skills so that these students may have success on the solutions of problem-situations whose aspect is the central theme of this dissertation. With this aim, this paper presents an analysis of the solutions to some questions brought by the Brazilian Olympiad of Mathematics happened from the years 2009 to 2017. Such questions make up a test evaluation, given to 6th and 7th graders of the Basic Teaching High school years, and thus, it will serve as base of data for the elaboration of a report that will bring records on the biggest difficulties presented on the developing of resolution strategies, as well as the percentage of mistakes and the students' opinion as to the researched question. The investigation and the results presented by the reports will be able to serve as support for the elaboration of a lesson plan that may help the reader of this paper on the planning of classes that have, as a central theme, the rational numbers in their fractional forms.

KEY-WORDS: Rational numbers, fractions, teaching-learning, National Curricular Parameters.

Lista de Figuras

Figura 1: Representação usada pelos Egípcios. 21

Figura 2: Representação usada pelos Egípcios. 22

Figura 3: Representação usada pelos Egípcios. 22

Figura 4: Representação do olho de Hórus. 23

Figura 5: Representação geométrica da divisão da pizza. 30

Figura 6: Representação geométrica da parte reservada as aves. 31

Figura 7: Representação geométrica dos alunos com notas acima de 8,0.......34

Figura 8: Segmento AB. 34

Figura 9: Segmento AB multiplicado por 3 e dividido por 2. 35

Figura 10: Segmento AB ampliado 35

Figura 11: Representação geométrica dos quadrados ABCD, EFGH, IJLK. 38

Figura 12: Representação geométrica de um quarto e três quartos do retângulo. 39

Figura 13: Representação geométrica de dois oitavos e seis oitavos do retângulo. 39

Figura 14: Representação geométrica de um oitavo, três oitavos e cinco oitavos de uma circunferência. 41

Figura 15: Representação geométrica da divisão do retângulo. 42

Figura 16: Representação geométrica da soma de $\frac{3}{8}$ com $\frac{3}{8}$. 43

Figura 17: Representação geométrica de $\frac{3}{4}$ de um todo. 44

Figura 18: Representação geométrica de $\frac{3}{8}$ de um todo. 44

Figura 19: Representação geométrica da divisão $2:\frac{1}{4}$ 45

Figura 20: Representação geométrica da divisão $\frac{1}{2}:4$ 46

Figura 21: Representação equivalente da fração um meio. 47

Figura 22: Representação equivalente da fração dois terços. 47

Figura 23: Representação da divisão de um meio por dois terços. 48

Figura 24: Questão 04 – 1º fase – nível II – 2009. 50

Figura 25: Questão 14 – 1º fase – nível II – 2009. 51

Figura 26: Questão 10 – 1º fase – nível I – 2010. 52
Figura 27: Questão 1 – 1º fase – nível II – 2010. 53
Figura 28: Questão 09 – 1º fase – nível II – 2011. 54
Figura 29: Questão 03 – 2º fase – nível I – 2012. 55
Figura 30: Questão 15 – 1º fase – nível I – 2013. 57
Figura 31: Representação geométrica da resolução da questão de número 15 da 1º fase de nível I aplicada no ano de 2013. 58
Figura 32: Questão 09 – 1º fase – nível II – 2014. 58
Figura 33: Hexágono regular dividido em 24 triângulos equiláteros..................59
Figura 34: Questão 07 – 1º fase – nível I e II – 2015...60
Figura 35: Solução geométrica para questão 07 da 1º fase de nível I e II aplicada no ano de 2015. 60
Figura 36: Questão 15 – 1º fase – nível I e II – 2016...61
Figura 37: Questão 11 – 1º fase – nível I – 2017. 62
Figura 38: Resolução da soma de frações do Aluno 1 e Aluno 2. 65
Figura 39: Erros mais frequentes cometidos pelos alunos na resolução da questão número 2. 66
Figura 40: Erros cometidos na resolução da operação divisão de frações.......67
Figura 41: erros mais frequentes cometidos pelos alunos na questão de número 4. 68
Figura 42: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.................70
Figura 43: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 7º ano.................70
Figura 44: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.................71
Figura 45: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.................72
Figura 46: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.................73
Figura 47: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 7º ano.................75

Lista de Tabelas

Tabela 1: Premiação de 2009 a 2016 da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves. 19
Tabela 2: Registro do tempo e da distância percorrido pelo ciclista. 38
Tabela 3: Percentual do número de alunos do 6º ano em relação ao sexo, idade e número de reprovações...63
Tabela 4: Percentual do número de alunos do 7º ano em relação ao sexo, idade e número de reprovações...64
Tabela 5: Distribuição de frequências do número de acertos das questões do primeiro teste de avaliação do conhecimento dos alunos do 6º e 7º anos........65

Sumário

RESUMO..*7*

ABSTRACT..*8*

Introdução..*14*

1 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a Comunidade e os Integrantes da pesquisa. *16*

1.1 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **16**

1.2 Comunidade e os Integrantes da pesquisa. **17**

1.3 Premiações de 2009 a 2016: Escola Estadual Coronel Xavier Chaves. 18

2. Conjuntos dos Números Racionais: da Mesopotâmia para os Parâmetros Curriculares Nacionais. *20*

2.1. Um pouco de História: A necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos. **20**

2.2. Parâmetros curriculares nacionais: Aprender e ensinar matemática no ensino fundamental. **24**

2.3. Números Racionais nos Parâmetros Curriculares Nacionais. **28**

3. Os significados dos Números Racionais do ponto de vista Teórico Matemático atual. *30*

3.1. Inteiro, parte do inteiro e representação dos números fracionários. 30

3.2. Os Números Racionais Fracionários: Operador.................................**33**

3.3. A Razão como Fração. **37**

3.4. Operações com números fracionários. **40**

3.4.1. Adição **40**

3.4.2. Multiplicação. **43**

3.4.3. Divisão. **45**

4. Os números Racionais Fracionários na OBMEP. *49*

4.1 Questões da OBMEP 1º e 2º fases dos níveis I e II que abordam os números racionais na forma fracionária. **49**

4.1.1 OBMEP 2009 50
4.1.2 OBMEP 2010 52
4.1.3 OBMEP 2011 53
4.1.4 OBMEP 2012 54
4.1.5 OBMEP 2013 56
4.1.6 OBMEP 2014 58
4.1.7 OBMEP 2015 59
4.1.8 OBMEP 2016 61
4.1.9 OBMEP 2017 62

5 Resultados da investigação..63

5.1 Perfil dos sujeitos investigados. 63

5.2 Análise e interpretação dos resultados do Teste Inicial. 64

5.3 Análise e interpretação dos resultados do Teste Principal. 69

6 Considerações finais 76

7 Referências Bibliográficas...79

8 Anexos 81

8.1 Anexo I: AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO. 81

8.2 Anexo II: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS DE ALUNOS DO 6 ANO E 7 ANO DA ESCOLA ESTADUAL CORONEL XAVIER CHAVES. 83

8.3 Anexo III: Questionário Aplicado. 85

8.4 Anexo IV: Primeiro Teste de Conhecimento. 86

8.5 Anexo V: Teste de Conhecimento Principal...87

Introdução

Antes mesmo de concluir o curso de Licenciatura em Matemática, em 2010, pela Universidade Federal de São João del-Rei/UFSJ, já havia iniciado as atividades de docência em escolas da rede estadual de ensino na Superintendência Regional de Educação de São João del-Rei, em turmas dos anos finais do ensino fundamental. Hoje sou professor efetivo na escola estadual Coronel Xavier Chaves, localizada na cidade de Coronel Xavier Chaves/MG e, há dois anos, professor e coordenador da área de matemática no Colégio Revisão, localizado na cidade São João del-Rei/MG.

Ao longo de quase 7 anos de experiência em sala de aula, percebo que as dificuldades dos alunos no aprendizado dos números racionais, sob forma fracionária, repetiam-se com frequência, em sua maioria, relacionadas à aplicação de frações na resolução de situações-problema. Situação conflitante por apresentar problemas muitos, variados e difíceis, sem contar no nível de desmotivação entre professor e aluno, produto da relação bate e volta diária quando não atingidas as metas.

Tarefa arriscada e pretensiosa procurar abordar tais problemas na sua totalidade e com todas as minúcias, principalmente no trabalho em questão. Estabelecidas as prioridades, limitar-me-ei a refletir sobre as principais dificuldades apresentadas pelos alunos nas resoluções de situações-problema envolvendo números racionais, especificamente em questões da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP) do ano de 2009 a 2017.

Dessa maneira, ao ingressar no PROFMAT e visando continuar exercendo minhas atividades de docência na educação básica, optei por desenvolver um trabalho com o objetivo de discutir algumas concepções, representações do ponto de vista teórico-matemático e investigar as maiores dificuldades apresentadas sobre o ensino dos Números Racionais. Tendo como foco principal a representação fracionária dos Números Racionais sintetizaremos as habilidades necessárias que os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental devem desenvolver para alcançarem um aprendizado satisfatório e, por fim, trazer um modelo de aula com atividades contextualizadas que poderá auxiliar o ensino dos Números Racionais em sua forma fracionária.

Para que fosse possível a realização deste trabalho e torná-lo significativo para o ensino fez-se necessário mostrar como os racionais estão inseridos nos dias atuais, especificamente nas aplicações das avaliações da OBMEP. Fez-se necessário também contrapor sujeitos de pesquisa: estudantes voluntários dos 6º e 7º anos do ensino Fundamental da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves com o aval do responsável legal se submeteram a um teste-avaliativo para que pudéssemos elaborar a pesquisa investigativa citada acima.

Através de análise cuidadosa e com o propósito de atingir o objetivo apresentado, o trabalho em questão foi dividido em seis capítulos. No primeiro apresento um breve contexto sobre como é estruturada a OBMEP. Momento significativo também para que o leitor do trabalho conheça um pouco da história da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves e dos integrantes de pesquisa, bem como a sociedade em que estão inseridos.

No segundo apresento uma breve abordagem da origem e da necessidade de números fracionários segundo BROLEZZI (1996), BOYER (2012) e IFRAH (1997), além de mostrar como os PCNs estabelecem o ensino da matemática para os dias atuais e como deve ser abordado o ensino do Números Racionais no Ensino Fundamental.

No terceiro capítulo abordo o ensino dos Números Racionais sob sua fracionária nos anos finais do ensino fundamental, com a intenção de mostrar como é aplicada a definição, os conceitos, os cálculos e as atividades.

Dedico para o quarto capítulo espaço para as questões da OBMEP que estão relacionadas ao tema principal do trabalho, bem como suas soluções e as habilidades necessárias para que os alunos elaborem estratégias de resolução.

Já o capítulo cinco fica reservado para mostrar os resultados do teste-avaliativo aplicado aos alunos da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves, visando analisar as maiores dificuldades, porcentagens de erros, acertos e as opiniões dos alunos em relações às questões aplicadas.

Para finalizar, no capítulo seis farei as considerações finais sobre o ensino dos números Racionais Fracionários no Ensino Fundamental de acordo com as dificuldades dos alunos que foram sintetizadas no capítulo 5.

1 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a Comunidade e os Integrantes da pesquisa.

Apresento este capítulo para que o leitor conheça um pouco da organização da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas, a comunidade e a escola em que os sujeitos de pesquisa estão inseridos.

1.1 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma iniciativa conjunta do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), financiada tanto pelo Ministério da Educação (MEC) quanto pelo Ministério de Ciência e Tecnologia (MCT). A OBMEP é uma parceria entre os ministérios de Educação e da Ciência e Tecnologia, e tem sido realizada pelo Impa e pela SBM.

Os objetivos da OBMEP de acordo com seu Regulamento (OBMEP, 2017) são:

- Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que o maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
- Promover a difusão da cultura matemática.
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Desde o ano de 2005 a OBMEP é desenvolvida em duas fases. A primeira fase é constituída por uma prova de múltipla escolha constituída de 20 questões. A segunda fase é composta de uma prova discursiva composta de 6 questões. Para essa fase classificam-se 5% dos alunos com melhor desempenho em cada Nível na 1ª Fase. Os alunos participantes da OBMEP são divididos em 3 níveis, de acordo com o seu grau de escolaridade, como a seguir:

- Nível 1: alunos matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental, no ano letivo correspondente ao da realização das provas.
- Nível 2: alunos matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental, no ano letivo correspondente ao da realização das provas.
- Nível 3: alunos matriculados em qualquer série do Ensino Médio, no ano letivo correspondente ao da realização das provas.

Cada escola é responsável em selecionar os alunos com o maior número de acertos na prova da Primeira Fase e que participarão da Segunda Fase, como também definir critérios de desempate a serem aplicados, quando necessário, de modo a não exceder sua cota de 5% em cada nível.

1.2 Comunidade e os Integrantes da pesquisa.

A Escola Estadual “Coronel Xavier Chaves”, integrante da rede estadual de ensino de Minas Gerais, está localizada à Rua Cônego Ottoni Carlos, 48, Centro, município de Coronel Xavier Chaves com pouco mais de 3500 habitantes. As atividades econômicas existentes no município são agropecuárias, pequenas indústrias e comércio. A maioria das famílias tem escolaridade até a 4ª série do ensino fundamental (hoje, 5º ano), alguns analfabetos e outra pequena parte com ensino médio e superior.

A comunidade escolar, de modo geral de baixo poder aquisitivo, possui uma visão de mundo influenciada por notícias de televisão e outras tecnologias, ideologias repassadas pelas mesmas, faltando uma leitura crítica e acesso a informações imparciais. Desse modo, essa diversidade requer um trabalho pedagógico em sala de aula de modo a garantir a adaptação eficiente dos alunos.

A escola é formada por alunos da zona urbana e zona rural que dependem do transporte escolar, oferecido pela prefeitura municipal para chegarem à escola. A maioria dos alunos é proveniente de famílias de baixa renda. Boa parte dos alunos enfrenta difíceis condições de vida e conflitos familiares que interferem diretamente no seu desenvolvimento emocional e cognitivo.

A escola busca constantemente sua renovação, demonstrando responsabilidade social e compromisso com a educação de qualidade.

1.3 Premiações de 2009 a 2016: Escola Estadual Coronel Xavier Chaves.

A OBMEP premia alunos, professores, escolas e secretarias de educação. A partir de 2012, houve mudanças nos critérios da premiação: foi estipulado um limite máximo de medalhas para escolas seletivas[1] de acordo com o nível e com o tipo de premiação. Na edição de 2017, as escolas privadas de todo o Brasil foram convidadas a participar da OBMEP.

De acordo com o regulamento da OBEMP 2017, além de 46.200 (quarenta e seis mil e duzentos) certificados de Menção Honrosa são concedidas aos alunos 500 (quinhentas) medalhas de ouro, 1.500 (um mil e quinhentas) medalhas de prata, 4.500 (quatro mil e quinhentas) medalhas de bronze. Aos alunos premiados com alguma medalha é oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC Jr -OBMEP). De acordo com o site da OBMEP:

> O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) é programa que propicia ao aluno premiado em cada edição da OBMEP entrar em contato com interessantes questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico. No programa, o estudante poderá participar do PIC Presencial, se houver um polo de Iniciação Científica perto da sua residência, com encontros presenciais, geralmente aos sábados, ou participar do PIC a Distância

[1] Escolas seletivas são aquelas que, em algum momento, realizaram processo seletivo para admissão de alunos.

com aulas virtuais. Os alunos do PIC têm acesso a um fórum virtual, elaborado pela OBMEP, no qual, com ajuda de moderadores, realizam tarefas complementares às aulas. O material didático é preparado especialmente para os alunos nos diferentes níveis de participação. Os medalhistas que já fizeram o PIC mais de duas vezes, com pelo menos uma participação no nível 3 deverão participar do Programa Mentores OBMEP, que oferece atividades ministradas por professores universitários sobre conteúdos que envolvem matemática.

A seguir, na tabela 1, o resultado dos alunos da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves do ano de 2009 a 2016.

Tabela 1: Premiação de 2009 a 2016 da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves.

Premiação de 2009 a 2017: Escola Estadual Coronel Xavier Chaves											
Premiação	**Ouro**			**Prata**			**Bronze**			**Menções Honrosas**	**Escola Premiada**
Nível	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**		
2009				1		1				12	
2010	1				2				1	05	Sim
2011							1			01	
2012							1	1		09	
2013							1	2	1	05	
2014	1							1	2	11	Sim
2015				1	1		1	1	2	10	Sim
2016				1		1	1	2		07	Sim
TOTAL	2			3	3	2	2	7	6	60	4 Vezes

Tabela elaborada pelo próprio autor.

Fonte: http://www.obmep.org.br/premiados.htm

Como mostra a tabela 1, de 2009 até 2016 a escola foi premiada 4 vezes, totalizando 60 menções honrosas e 25 medalhas. Premiações que mostram o compromisso de toda a equipe da escola com o ensino da Matemática.

2. Conjuntos dos Números Racionais: da Mesopotâmia para os Parâmetros Curriculares Nacionais.

2.1. Um pouco de História: A necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos.

O ensino da Matemática construído a partir de recursos históricos proporciona aos alunos a possibilidade de compreensão e esclarecimento dos processos ocorridos desde sua descoberta até os dias atuais. Desse modo, desenvolve-se um olhar mais crítico que os leva a esclarecer ideias e conceitos ao redor de sua realidade. De acordo com os PCNs (BRASIL, 1998, p. 42):

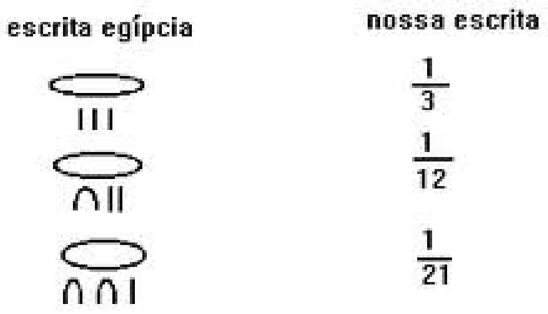
> “A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.”

Desde o início, a humanidade deparou-se com a divisão nas mais variadas formas, mesmo sem um conhecimento formal. Muitas vezes um caçador via-se na necessidade de dividir sua caça com a família sendo obrigado a reparti-la em duas, três ou mais partes. Sendo assim já se usava intuitivamente o conceito sobre partes de um todo. A história dos números vem se desenvolvendo há milhares de anos, mas é impossível afirmar como tudo começou. Sabe-se que os números foram descobertos lentamente, pela prática diária das contagens.

Nas antigas sociedades, Egito e Mesopotâmia, a representação numérica aconteceu muito antes da escrita, quando surgiram nos registros comerciais. Conforme BOYER (2012), os primeiros registros do sistema fracionário datam de 3000 a.C., no Antigo Egito, às margens do rio Nilo, sob o reinado do faraó Sesóstris. A economia egípcia dependia quase que inteiramente do cultivo de terras, as quais eram divididas entre os habitantes. Periodicamente, entre os meses de junho a setembro, as águas do rio Nilo transbordavam e inundavam uma grande região de terras, surgindo, a partir daí, a necessidade de uma nova marcação do terreno. Tal marcação, ainda segundo BOYER (2012), era feita pelos chamados estiradores de corda que mediam os terrenos de acordo com distância entre dois nós que eram feitos na corda. Essas cordas eram esticadas para determinar o número de vezes que a distância entre os nós cabia no terreno. Mas, a partir daí, muitas das vezes, a mensuração das terras inundadas não se tratava de um número inteiro de vezes em que as cordas eram estiradas. Diante da dificuldade encontrada, passaram a dividir as cordas em partes iguais e usar essas partes uma ou mais vezes, chegando assim ao conceito da parte de um todo, ou seja, começa-se o desenvolvimento dos números fracionários.

Surgem a partir daí, as frações egípcias ou frações unitárias, ou seja, frações com numerador 1, como por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. De acordo com O Papiro De Rhind[2], as frações egípcias eram representadas por um símbolo oval alongado no numerador sobre o símbolo que representava o símbolo do denominador, como mostra a figura 1 a seguir.

Figura 1: Representação usada pelos Egípcios.



Fonte: Ifrah, 1997a, p. 349. (Adaptado)

Quando o algarismo que representa a quantidade de partes iguais em que o inteiro foi dividido – denominador – possuía diversos hieróglifos e o sinal oval – numerador – não ficava sobre todos eles, o excedente era inscrito na sequência, como na figura 2.

---

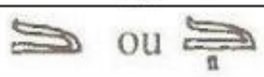
[2] Documento encontrado pelo escocês Henry Rhind, em 1858, no Egito e escrito pelo escriba Ahmes, no antigo Egito, por volta de 1650 a.C.

Figura 2: Representação usada pelos Egípcios.

Fonte: Fonte: Ifrah, 1997a, p. 349. (Adaptado)

Algumas frações também podiam ser escritas de forma especial, como mostra a figura 3. As duas últimas eram exceções às demais frações utilizadas pelos egípcios. Quaisquer outras frações eram entendidas como o resultado da soma de outras frações unitárias, ressaltando que os egípcios ainda não usavam o sinal de + ou – em seus registros.

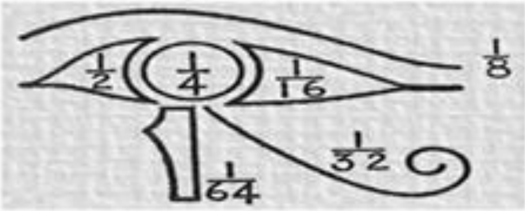
Figura 3: Representação usada pelos Egípcios.

Fração	1/2	2/3	3/4
Símbolo			
Significado	"metade"	"as duas partes"	"as três partes"

Fonte: Baseado em Ifrah, 1997a.(Adaptado)

Para os antigos egípcios as frações unitárias representavam um símbolo diferente, em particular, as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ e $\frac{1}{64}$ onde a soma dessa frações representavam o Olho de Hórus, tendo relação com a série infinita: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots=1$. A figura 4 mostra, no olho de Hórus, a fração que representa cada parte.

Figura 4: Representação do olho de Hórus.



Fonte: Bakos (2005, p. 60).

Segundo BOYER, (2012) os mesopotâmios realizavam as divisões representando a parte não inteira da divisões por valores aproximados e, ao contrário da maioria das outras civilizações, usavam o sistema de numeração sexagional, ou seja, um sistema de base sessenta. Acredita-se que esse sistema de numeração tenha sido usado por vários motivos, sendo um deles o fato de ser possível a divisão por 2, 3, 4, 5, 6,10, 12,15, 20, 30 e 60, ou seja, possui o maior número de divisores entre os números de 1 a 100, porém não trabalhavam com frações e sim com números decimais. O sistema sexagional, teve sua origem na astronomia, especialmente, na contagem do tempo, ou seja, nas subdivisões da hora, no qual 1 hora equivale a 60 minutos e 1 minuto equivale a 60 segundos. Até hoje o sucesso desse sistema de numeração reflete em nossas medidas de tempo e unidade de ângulos.

Segundo BROLEZZI (1996), apesar de todo o desenvolvimento das civilizações egípcias e babilônicas no campo das frações, foram os gregos os responsáveis pelas primeiras noções e ideias propriamente científicas sobre as representações fracionárias. Foram eles que descobriram que os racionais poderiam ser representados como razões de números inteiros, no qual a razão entre o comprimento de cordas apareceram no desenvolvimento da música.

Ainda segundo BROLEZZI (1996), as frações no Egito, os decimais na Mesopotâmia e a concepção de racionais como razões na Grécia, foram essenciais para a construção das números Racionais, embora essas civilizações usassem representações diferentes.

2.2. Parâmetros curriculares nacionais: Aprender e ensinar matemática no ensino fundamental.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), estabelecem um ponto de partida para uma educação de qualidade que abranja todo o país. Criado em 1998, pela fundação Carlos Chagas o material traz experiências vividas por profissionais da área de educação em outros sistemas de ensino de outros países. Evidencia também a organização curricular dos estados e dos municípios para que sirva de base no campo das discussões pedagógicas, visando ao aperfeiçoamento do projeto educativo nas escolas. O documento aponta duas grandes questões: não só a necessidade de reverter o quadro em que a Matemática se configura como um forte filtro social na seleção dos alunos que vão concluir, ou não, o ensino fundamental, bem como a necessidade de proporcionar um ensino de melhor qualidade, contribuindo para a formação do cidadão.

Atualmente, no Brasil, de acordo com a LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996, Seção III, art. 32, o ensino fundamental é obrigatório, com duração de 9 (nove) anos, gratuito na escola pública, iniciando-se aos 6 (seis) anos de idade. De acordo com os PCNs (BRASIL,1998, p. 61):

> “A caracterização do aluno de terceiro ciclo não é algo que possa ser feito de maneira simplificada. Nessa etapa da escolaridade convivem alunos de 11 e 12 anos, com características muitas vezes ainda bastante infantis, e alunos mais velhos, que já passaram por uma ou várias experiências de reprovação ou de interrupção dos estudos, sendo que, dentre estes, muitos já trabalham e assumem responsabilidades perante a família.”

O primeiro ano do terceiro ciclo, hoje chamado 6º ano do ensino fundamental II, de acordo com os PCNs (BRASIL,1998, p. 61), é marcado por um período no qual os professores, de modo geral, verificam nos alunos um nível de conhecimento muito abaixo do esperado, fator que evidencia a necessidade de reensino de conteúdos já trabalhados no ciclo anterior. Assim, esse estudo repetitivo e esquematizado reflete no desinteresse do aluno contribuindo para um possível fracasso escolar e, consequentemente, aumentando ainda mais os índices de reprovação nesse período.

Diante de tais fatos, o professor possui um papel relevante na vida de seus alunos, figura mais importante e provocativa entre o conhecimento da matemática e o aluno. É um papel desafiador fazer com que a aprendizagem da matemática seja uma experiência ligada à realidade do aluno, extraindo da mesma situações-problema que farão o educando construir o conhecimento ao redor de sua vivência, voltado para a matemática aplicada e menos abstrata.

Para os PCNs (BRASIL,1998, p. 35 – 36), no ensino de Matemática é de fundamental importância ao professor:

> - “Identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
> - Conhecer a história de vida dos alunos, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
> - Ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdo de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.”

Ainda segundo os PCNs, (BRASIL, 1998, p. 36) o professor precisa ser o mediador entre o conhecimento matemático e o aluno e, para que isso aconteça, faz-se necessário ter domínio dos conceitos e definições próprias do conteúdo e também ampliar a visão Matemática, não como uma ciência pronta, onde os números, os cálculos, as medidas e muitos outros elementos não parecem ter ligação com o mundo ao redor, mas sim como um ciência dinâmica, sempre incorporada de novos conhecimentos.

A modernidade trouxe avanços tecnológicos e progressos comunicativos e científicos. Atrelado a isso, a utilização do conhecimento matemático se torna fundamental para a vida pratica e diária. Sendo assim, de acordo com os PCNs (BRASIL, 1998, p.37), é primordial estabelecer as relações entre os conceitos matemáticos e o cotidiano do aluno, onde o professor deve promover a curiosidade, incentivar os alunos a fazer descobertas, e como produto final, a efetiva compreensão do conteúdo matemático. Atitude contrária a essa posição por parte do educador, gera aprendizagem menos consistente, dificuldade para um bom desenvolvimento do raciocínio lógico e uma forma de pensamento menos eficaz para a criação e amadurecimento de ideias e conhecimentos que estão intimamente ligados a sociedade.

De acordo com os PCNs (BRASIL,1998, p. 40):

> “Um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos”.

A observação, análise, sondagem investigativa e busca de resultados são princípios que norteiam a prática escolar; dessa forma, pode-se afirmar que a construção do conhecimento desvinculada de um contexto, dificulta uma maior abrangência de aprendizagem no conteúdo. Diante disso, a resolução de problemas é uma estratégia didática/metodológica importante e essencial para o desenvolvimento intelectual do aluno e para o ensino da matemática. Do ponto de vista de muitos matemáticos, o ensino e a aprendizagem da Matemática sem a resolução de problemas é um dos grandes fatores do insucesso escolar. Segundo os PCNs, (BRASIL, 1998, p. 40):

> “Educadores matemáticos apontam as resoluções de problemas como ferramenta indispensável para a introdução, aprendizado e consolidação do conhecimento matemático, já que esse conhecimento ganha significados e aplicabilidade quando os alunos usam para resolver situações do cotidiano. A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.”

A resolução de problemas, segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p. 40 e 41), pode ser resumida nos seguintes princípios:

> - “A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> - Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> - A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.”

Diante do que foi analisado até aqui, a construção do conhecimento matemático, quando exposto através da resolução de problemas, proporciona aos alunos o desenvolvimento da capacidade de associar conceitos matemáticos ao seu cotidiano. Fator essencial, pois facilita a compreensão de tais conceitos e desenvolve o raciocínio lógico. Entretendo, não basta apenas ensinar a usar os conceitos e definições matemáticas, mas incentivar o aluno a ter autonomia para propor situações problema, partindo da realidade que o cerca, que mereçam dedicação e estudo. Segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p. 42):

> “O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos.”

2.3. Números Racionais nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A quantidade de açúcar para a receita de um bolo, um pedaço de tecido para fazer uma blusa, a chance de se ganhar em jogo de dados... Vez ou outra nos deparamos com situações desse tipo em atividades normais do nosso dia a dia, situações que exigem conhecimento dos números racionais, porém utilizados intuitivamente, sem as definições matemáticas formais. Sendo assim, é fácil constatar que os números inteiros não são suficientes para se compreender e se traduzir a realidade em termos numéricos. Além disso, historicamente, o desenvolvimento das frações fornece um meio de se fazer a transição da contagem para a medida.

De acordo com os PCNs (BRASIL,1998, p. 66), basicamente, o estudo dos números racionais necessita partir da exploração de seu significado e também das situações-problemas como a relação da parte/todo, quociente, razão e operador[3]. A resolução de problemas com os números racionais permite, na fase inicial dos estudos dos racionais, a ampliação do sentido operacional que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números.

De certa forma, precisa-se dar atenção crescente ao ensino dos números racionais, principalmente as frações, introduzindo-o de modo orientado mais para o significado do que para o símbolo. É fundamental desvincular a visão do conhecimento como algo pronto e acabado. O ensino deve instigar os alunos a construírem seu próprio conhecimento para que associem sua compreensão e suas estratégias intuitivas com métodos mais gerais e formais. Enfim, a aplicabilidade dos números racionais será melhor assimilada se o seu estudo for introduzido dentro de experiências de aprendizagem bem estruturadas para que os alunos sejam conduzidos a adquirir um conhecimento essencial, tanto conceitual como de procedimento.

O Conhecimento matemático é construído de forma gradativa e sistemática. Assim, em cada etapa do processo de aprendizagem é essencial que o aluno desenvolva as habilidades básicas necessárias para que possa seguir à próxima etapa do conhecimento. Nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 71 – 72), no bloco intitulado

[3] *Parte/todo, quociente, razão e operador serão tratados no Capítulo 3*

“Conceitos e Procedimentos”, são mencionadas as habilidades necessárias a serem alcançadas pelos alunos em relação aos números racionais:

> - “Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal.
> - Reconhecimento de números inteiros em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos.
> - Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo os diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que, eventualmente, diferentes operações podem resolver um mesmo problema
> - Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações com números naturais, inteiros e racionais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados;
> - Resolução de situações-problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais;
> - Utilização de instrumentos de medida, como régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças para fazer medições, selecionando os instrumentos e unidades de medida adequadas à precisão que se requer, em função da situação-problema.”

3. Os significados dos Números Racionais do ponto de vista Teórico Matemático atual.

Neste capítulo serão explanados os aspectos ligados à teoria do conteúdo frações, bem como as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações apresentadas nos anos finais do ensino fundamental.

3.1. Inteiro, parte do inteiro e representação dos números fracionários.

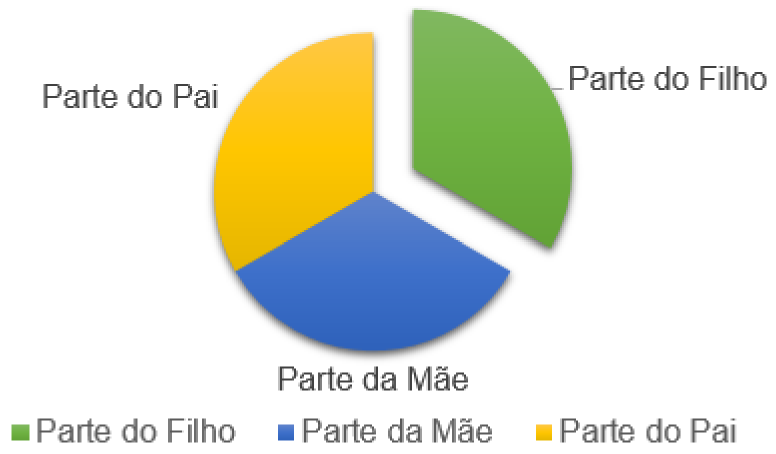
Partindo de uma situação-problema, introduz-se a ideia de fração de um modo intuitivo.

Situação 1: Certo dia, uma família composta por pai, mãe e filho, foram a uma pizzaria. Porém, o filho não poderia chegar a tempo e sua mãe guardou sua parte. Para isso, a pizza foi dividida em pedaços iguais e cada integrante da família comeu a mesma quantidade de tal modo que não sobrasse nenhuma parte.

1. A pizza foi dividida em quantas partes?
2. O filho comeu quantas partes da pizza?

Cada pedaço representa uma de três partes da pizza, como mostra a figura 5.

Figura 5: Representação geométrica da divisão da pizza.

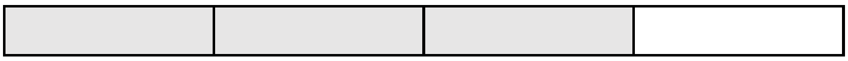


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Situação 2: Uma fazenda possui criação de galinhas, porcos, gansos e patos. Devido à falta de espaço, o dono da fazenda colocará os quatro tipos de animais em um mesmo terreno retangular e, para possibilitar o tratamento adequado aos animais, esse terreno será dividido em quatro partes exatamente iguais. Represente esquematicamente a parte reservada às aves.

Diante da situação proposta, o “todo” (terreno retangular) foi dividido em 4 partes iguais. Para as aves (galinhas, gansos e patos) reservam-se 3 partes. A figura 6 mostra geometricamente a divisão feita no terreno.

Figura 6: Representação geométrica da parte reservada as aves.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Os números fracionários são definidos como aqueles que representam uma ou mais partes do todo, isto é, ao dividir um objeto em um determinado número de partes, cada conjunto dessas partes é um número fracionário. Assim, o racional assume o significado “quociente” quando indica a quantidade que resulta da partição igualitária de um número de objetos entre um certo número de elementos. A representação de um número fracionário é feita por meio de frações. Em uma fração, a parte do objeto dividido é colocada sobre o número total de partes em que ele foi dividido com um traço[4] no meio.

Na situação inicial, para representar a parte reservada ao filho, usa-se uma fração: $\frac{1}{3}$ e, na segunda situação apresentada, a fração que representa a área reservada as aves será $\frac{3}{4}$. Assim define-se:

[4] O traço horizontal que usamos hoje para registrar frações tornou-se comum somente no século XVI, embora o grande matemático, Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci (filho de Bonacci), tenha usado essa forma com frequência em seu livro Líber Abaci completado em 1202.
Fonte de pesquisa: Carl B. Boyer - História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

- DENOMINADOR: número que indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido.
- NUMERADOR: número que indica quantas dessas partes foram tomadas

Frações do tipo $\frac{3}{3}$, onde o denominador e o numerador são iguais, indicam uma quantidade inteira, ou seja, $\frac{3}{3}=1$.

Ao representarmos medidas como $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$, utilizamos os números racionais, que podem ser expressos pela divisão de dois números inteiros $\left(\frac{a}{b}\right)$, com denominador diferente de zero. O conjunto de todos os números que podem ser escritos nessa forma é denominado **Conjunto dos Números Racionais**.

Define-se o conjunto dos números Racionais da seguinte forma:

$$Q=\left\{x/x=\frac{a}{b}, com\ a\in Z, b\in Z^*\right\}$$

Para a leitura dos números racionais fracionários segue-se a seguinte definição:

- Frações de denominador 2 $\rightarrow$ meios.
- Frações de denominador 3 $\rightarrow$ terços,
- Frações de denominador 4 $\rightarrow$ quartos
- Frações de denominador 5 $\rightarrow$ quintos
- Frações de denominador 6 $\rightarrow$ sextos
- Frações de denominador 7 $\rightarrow$ sétimos
- Frações de denominador 8 $\rightarrow$ oitavos
- Frações de denominador 9 $\rightarrow$ nonos

As frações cujo denominador é uma potência de base dez, ou seja, 10, 100, 1000 e assim sucessivamente são chamadas **frações decimais**. Nomeia-se:

- Frações de denominador 10 $\rightarrow$ décimos
- Frações de denominador 100 $\rightarrow$ centésimos
- Frações de denominador 1 000 $\rightarrow$ milésimos
- Frações de denominador 10 000 $\rightarrow$ décimos de milésimos e assim por diante.

Para ler frações com denominador maior que 10 e que não sejam decimais, usamos a palavra avos. Segue:

- Frações de denominador 11 $\rightarrow$ onze avos

Frações de denominador 12 $\rightarrow$ doze avos e assim por diante

3.2. Os Números Racionais Fracionários: Operador.

As frações podem assumir um papel de transformador, ou seja, representam um procedimento aplicado sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor neste processo. Quando se aplica o operador sobre um conjunto discreto[5], assume-se uma interpretação de multiplicador - divisor e, aplicado a um objeto contínuo[6], associa-se à ideia de ampliação-redução, ou seja, quando se aplica tal operador em figuras geométricas transforma-as em figuras semelhantes. Veja as seguintes situações:

Situação 1: Em uma turma do 6º ano foi aplicado um teste surpresa. Sabe-se que a turma tem 36 alunos e $\frac{2}{3}$ dos alunos conseguiram nota acima de 8,0. Determine o número de alunos que atingiram a nota acima de 8,0?

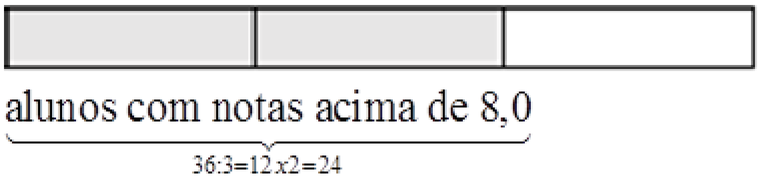
---

[5] Um número finito de valores entre quaisquer dois valores. Por exemplo, o número de alunos dentro de um sala de aula.

[6] Um número infinito de valores entre quaisquer dois valores. Uma variável contínua pode ser numérica ou data/hora. Por exemplo, o comprimento de uma peça ou a data e hora do recebimento de um pagamento.

Diante da situação, a fração $\frac{2}{3}$ assume o papel de operador multiplicador-divisor, ou seja, para determinar a quantidade de alunos que alcançaram a nota pedida divide-se 36 por 3 e, ao quociente, multiplica-se por 2, resultando em 24 alunos, como mostra a figura 7.

Figura 7: Representação geométrica dos alunos com notas acima de 8,0.

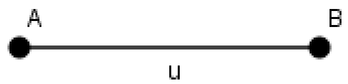


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Situação 2: Devido ao excesso de peso, um médico recomendou ao paciente que faça exercícios físicos diariamente. Para isso o paciente elaborou a seguinte estratégia: A cada dia deverá correr três meios da distância percorrida no dia anterior. Represente através de um segmento de reta a distância percorrida no segundo dia de atividade.

O comprimento do segmento $\overline{AB} = u$, mostrado na figura 8, representa a distância percorrida pela paciente no 1º dia.

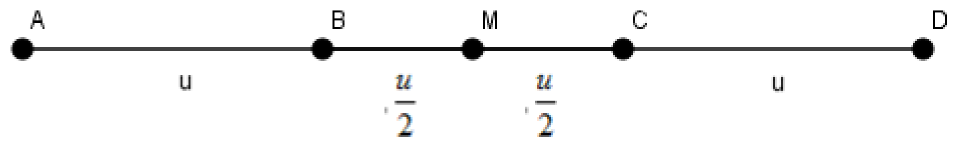
Figura 8: Segmento AB.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para o dia seguinte, o paciente deverá correr $\frac{3}{2}$ da distância percorrida no dia anterior. Assim, sendo o operador três meios, deve-se ter a medida do segmento $\overline{AB}$ multiplicada por 3 e dividida por 2. No esquema abaixo tem-se o comprimento do segmento $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \mathrm{u}$ e $\overline{AD} = 3u$. Dividindo $\overline{AD}$ em duas partes, encontra-se $\overline{AM}$, distância percorrida no 2º dia, mostrado na figura 9.

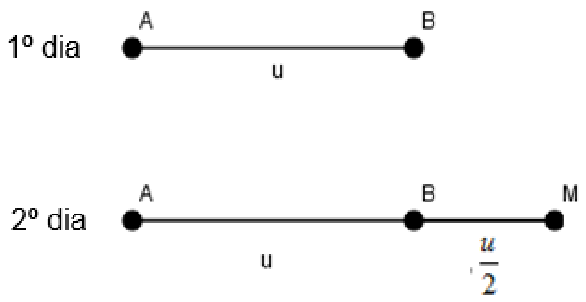
Figura 9: Segmento AB multiplicado por 3 e dividido por 2.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De acordo com a figura 10, comparando $\overline{AB}$ e $\overline{AM}$ tem-se a ideia de ampliação.

Figura 10: Segmento AB ampliado



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Partindo da situação apresentada é possível introduzir as frações mista ou impróprias, já que a distância percorrida pelo paciente no 2º dia será um inteiro (comprimento do segmento $\overline{AB} = u$) mais a metade da distância percorrida no 1º dia $\left(\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{u}{2}\right)$, ou seja, $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Frações do tipo $\frac{3}{2}$, em que o numerador é maior ou igual ao denominador são denominadas frações impróprias, uma vez que, diferentemente da ideia original de fração, elas não representam uma parte do inteiro e $1\frac{1}{2}$ são denominadas frações mistas, já que são representadas por um parte inteira e outra fracionária.

Esta interpretação de operador multiplicativo atribuído às frações é facilmente interpretada quando atribuída aos números inteiros, com por exemplo, o operador multiplicativo 3 transforma um número no seu triplo. No entanto, quando se tratam dos números racionais, algumas distinções precisam ser consideradas.

- Sabe-se que a multiplicação é uma operação comutativa[7]. Entretanto, enquanto que $2x4 = 4x2$ envolvem a mesma interpretação intuitiva como formar 2 grupos de 4 elementos ou 4 grupos de 2 elementos, $2x\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}x2$, embora expressem o mesmo número, podem envolver interpretações distintas como, por exemplo, dois quartos de um inteiro e um quarto de dois inteiros, respectivamente.
- A associação da multiplicação com a ideia de aumento é bem definida para os números inteiros, mas para os números racionais precisa-se uma atenção especial. Interpreta-se, por exemplo, a operação $50x2$ como a ação de tomar o número 50 duas vezes. Do mesmo modo, interpreta-se $\frac{2}{5}x\ 50$ como a ação de tomar o número 50, não uma vez inteira, mas apenas $\frac{2}{5}$ desse total. Neste caso, a ideia que está associada à fração é a ideia de medida, mas como se trata de uma fração própria, a redução aplicada pelo operador $\frac{2}{5}$ será maior que o aumento, já que $\frac{2}{5}x\ 50 = (50x2):5 = 20 < 50$.

Sendo assim a interpretação dos números racionais como operadores se torna particularmente útil no estudo da operação de multiplicação, inclusive quando a operação envolve dois fatores fracionários.

---

[7] *Operação comutativa confirma que, em um cálculo, a disposição dos fatores não altera o resultado.*

3.3. A Razão como Fração.

O conceito de razão é encontrado em várias obras renomadas como a de Euclides (330 – 260 a.C), denominada “Os Elementos” que contempla 10 fascículos. Em seu quinto fascículo Euclides define:

> “A razão entre duas grandezas[8], que são do mesmo gênero, é um respeito recíproco de uma para outra, enquanto uma é maior, ou menor do que a outra, ou igual a ela”. (EUCLIDES, in COMMANDINO, 1944 p. 75)
>
> “As grandezas têm entre si razão, quando a grandeza menor, tomada certo número de vezes, pode vencer a grandeza maior”. (EUCLIDES, in COMMANDINO, 1944 p. 75)

Pode-se afirmar a partir dessas definições que, desde os primórdios, a ideia de razão estava associada à comparação de grandezas, pressupondo que tais grandezas fossem geométricas, basicamente visando ao trabalho com segmentos de retas.

Na Matemática, o conceito de razão pode ser entendido de duas maneiras distintas. A primeira é a razão como a relação entre grandezas da mesma espécie. Pode-se falar da razão entre duas superfícies, entre duas linhas ou entre dois corpos, conceito muito utilizado em Geometria quando se trata de figuras semelhantes. A segunda é a razão como quociente entre dois números, como por exemplo, a relação entre a distância percorrida e o tempo gasto, o número de habitantes por km² de uma certa região. Dessa forma as razões podem ser entendidas como uma espécie de “representante geral” de algum fenômeno, ou seja, é possível representar um padrão de certo acontecimento.

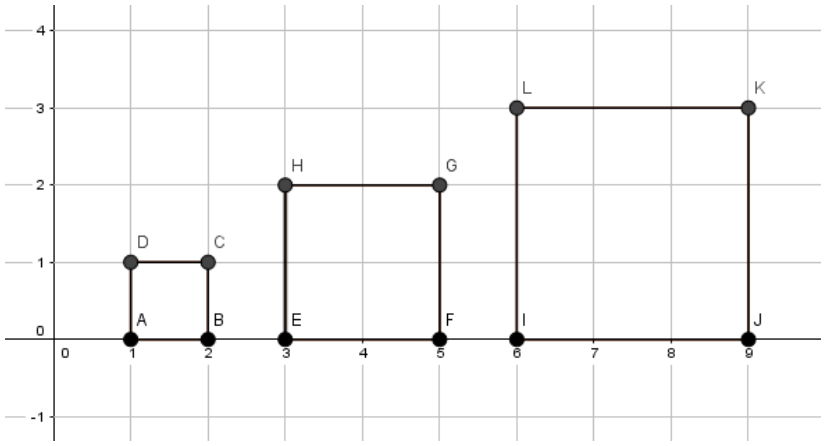
Nas seguintes situações podem-se diferenciar as maneiras de interpretar o conceito de razão.

---

[8] Grandeza é tudo que você pode contar, medir, pesar, enfim, enumerar. É uma relação numérica estabelecida com um objeto. Assim, a altura de uma árvore, o volume de um tanque, o peso de um corpo, a quantidade pães, entre outros, são grandezas.

Situação 1: Considere os quadrados ABCD, EFGH, IJLK criados no GEoGebra[9] com o comprimento do segmento $\overline{AB} = 1\ u.c$[10], $\overline{IJ} = 2\ u.c$ e $\overline{IJ} = 2\ u.c$ mostrado na figura 11.

Figura 11: Representação geométrica dos quadrados ABCD, EFGH, IJLK.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De acordo com a figura, observamos que a medida do lado quadrado ABCD é a metade da medida do lado quadrado EFGH, ou seja, razão de 1 para 2 ou $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{1}{2}$, assim como é a terça parte da medida do lado do quadrado IJKL, razão de 1 para 3 ou $\frac{\overline{AB}}{\overline{IJ}} = \frac{1}{3}$.

Situação 2: O tempo e a distância percorrida por um ciclista durante o treino foi registrado de acordo com a tabela 2.

Tabela 2: Registro do tempo e da distância percorrido pelo ciclista.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Distância (km)	15	30	45	60	75
Tempo (h)	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

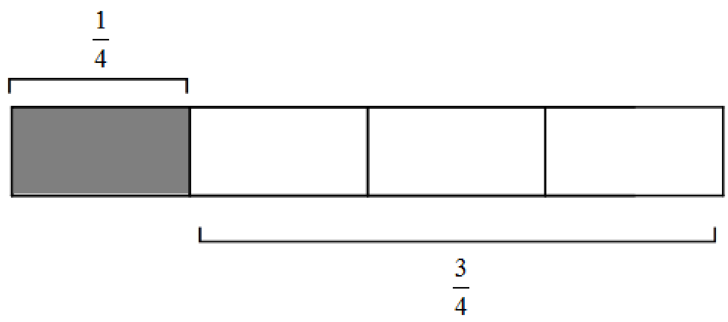
[9] *Um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Por um lado, o GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica.*

[10] Unidade de comprimento

Usando o conceito de razão como quociente podemos fazer $\frac{75}{5}=\frac{60}{4}=\frac{45}{3}=\frac{30}{2}=\frac{15}{1}=15$, ou seja, para percorrer 15 km o ciclista leva 1 hora. Em cada caso, o que fizemos foi dividir o numerador pelo denominador. O fato de que o resultado foi sempre o mesmo, quer dizer que todas aquelas razões são as mesmas e isto corresponde que todas as frações são equivalentes, ou seja, são frações que representam a mesma parte do todo.

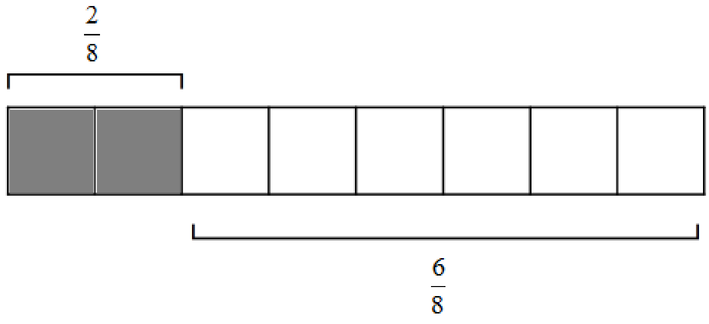
Situação 3: Consideremos um retângulo dividido em 4 partes e tomemos 1 parte e o mesmo retângulo dividido em 8 partes tomando 2 partes, mostrado na figura 12 e 13.

Figura 12: Representação geométrica de um quarto e três quartos do retângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 13: Representação geométrica de dois oitavos e seis oitavos do retângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Ao compararmos as representações, observamos que $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{4}$ correspondem a mesma parte do todo, isto é, são equivalentes. O mesmo ocorre com $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{4}$. Temos assim o seguinte resultado: duas razões (frações) serão iguais ou equivalentes se os numeradores e os denominadores forem equimúltiplos, isto é, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se $a=kc$ e $b=kd$ para algum número k.

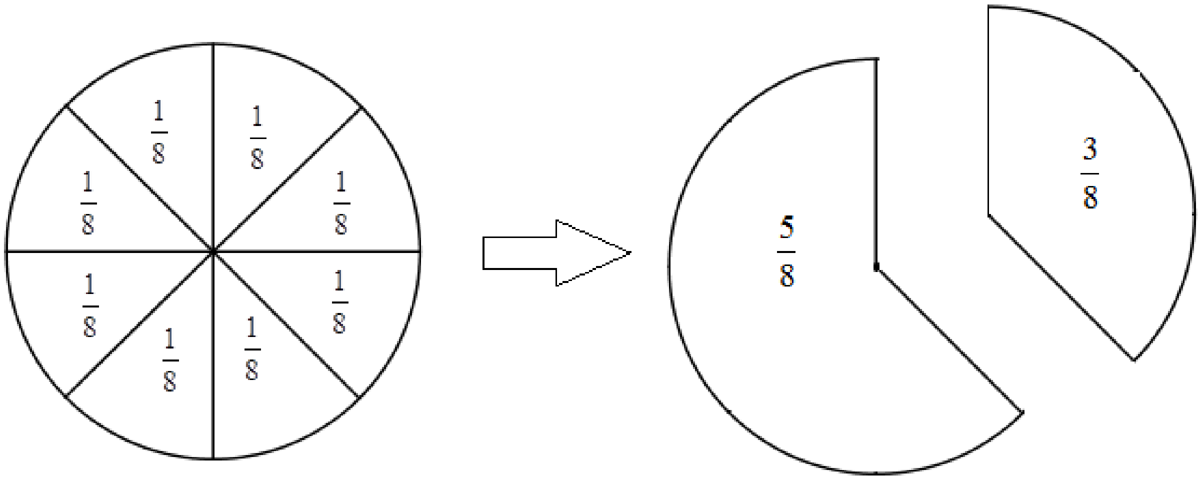
3.4. Operações com números fracionários.

Nesse tópico iremos traçar estratégias para introduzir as operações de números racionais na forma fracionárias e posteriormente apresentar as definições mais detalhadas.

3.4.1. Adição

Inicialmente consideremos uma circunferência dividida em oito partes iguais. Cada parte da circunferência é representada por $\frac{1}{8}$. Tomam-se exatamente três partes, ou seja, $\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$. Para a representação do restante da circunferência temos $\frac{5}{8}=\frac{8}{8}-\frac{3}{8}$, de acordo com a figura 14.

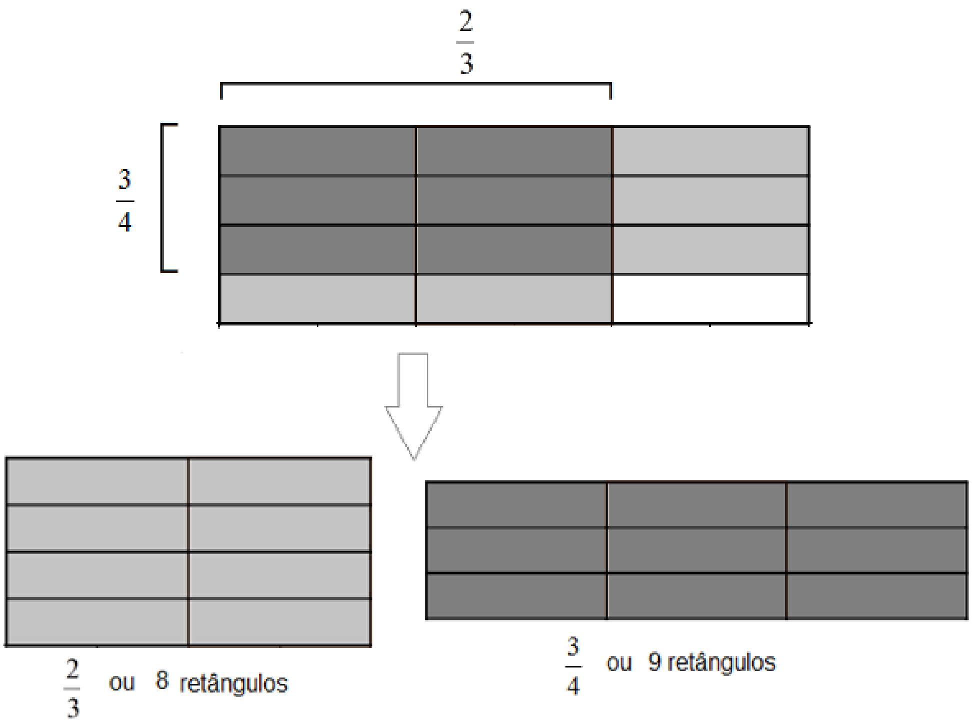
Figura 14: Representação geométrica de um oitavo, três oitavos e cinco oitavos de uma circunferência.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Agora vamos considerar uma estratégia para calcular a soma de duas frações que representam pedaços de tamanho diferentes, ou seja, com denominadores diferentes. Suponhamos um caso em que seja necessário somar $\frac{2}{3}$ com $\frac{3}{4}$ ou subtrair $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$. Vamos considerar um retângulo e dividi-lo em 3 partes e tomar 2 partes. Depois dividir novamente o retângulo em 4 partes e tomar 3, conforme a figura 15.

Figura 15: Representação geométrica da divisão do retângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Podemos concluir a partir do esquema que $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}$ e $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$.

A dificuldade maior consiste em comparar as subunidades determinadas pelas duas frações, mas para facilitar o processo, o aluno poderá visualizar que o retângulo inicial foi dividido incialmente em 3 partes e logo após em 4 partes, resultando em 12 retângulos iguais, ou seja, um múltiplo comum entre 3 e 4. Portanto, tomando as frações equivalentes de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ com denominador 12 temos que $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$ e $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$.

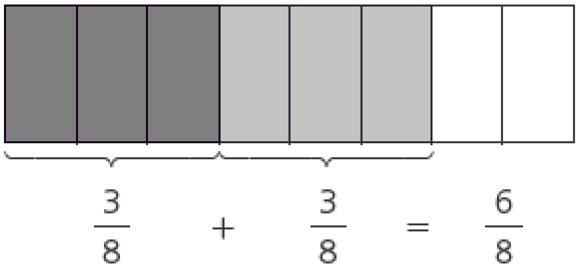
Definimos então, que a adição ou subtração de um número real $\frac{a}{b}$ com o número real $\frac{c}{d}$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, é dado por $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} + \frac{c.b}{b.d} = \frac{a.d + c.b}{bd}$.

3.4.2. Multiplicação.

Novamente analisaremos algumas situações-problema e traçaremos uma estratégia geométrica para introduzir intuitivamente a definição de multiplicação de frações.

Inicialmente vamos considerar que seja necessário dobrar $\frac{3}{8}$ de um todo. Para isso, construímos um retângulo, dividimos em 8 partes iguais, tomamos 3 partes e, em seguida, tomamos mais 3 partes, ou seja, $2\ de\ \frac{3}{8} = \frac{3}{8}+\frac{3}{8} = 2.\frac{3}{8} = \frac{2}{1}.\frac{3}{8} = \frac{6}{8}$, conforme mostra a figura 16.

Figura 16: Representação geométrica da soma de $\frac{3}{8}$ com $\frac{3}{8}$.

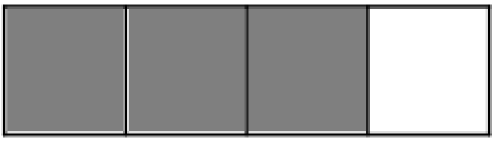


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De forma semelhante, $\frac{1}{2}\ de\ 12 = \frac{1}{2}.12 = \frac{1}{2}.\frac{12}{1} = \frac{12}{2} = 6$, pois a metade de 12 é igual a 6.

Consideremos uma situação em que seja necessário calcular a metade de três quartos de um todo. Para isso, consideremos um retângulo dividido em 4 partes e tomemos 3 partes do todo, mostrado na figura 17.

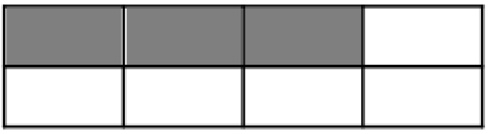
Figura 17: Representação geométrica de $\frac{3}{4}$ *de um todo.*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como mostrado na figura 18, agora tomemos a metade do retângulo já dividido em 4 partes.

Figura 18: Representação geométrica de $\frac{3}{8}$ *de um todo.*



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Geometricamente temos que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, ou seja $\frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Analogamente, ao tomar $\frac{3}{4}$ e logo após tomar $\frac{1}{2}$ do retângulo conclui-se que $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Assim, podemos nos convencer de que para multiplicar dois números escritos na forma de fração, multiplica-se o numerador de uma pelo numerador da outra e o denominador de uma pelo denominador da outra, ou seja, a multiplicação de uma fração $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ por uma fração $\frac{c}{d}$ com $d \neq 0$ é dada por $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$. Esse processo multiplicativo é comutativo e associativo já que $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.d}$ e $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right) = \frac{a.c.e}{b.d.f}$.

3.4.3. Divisão.

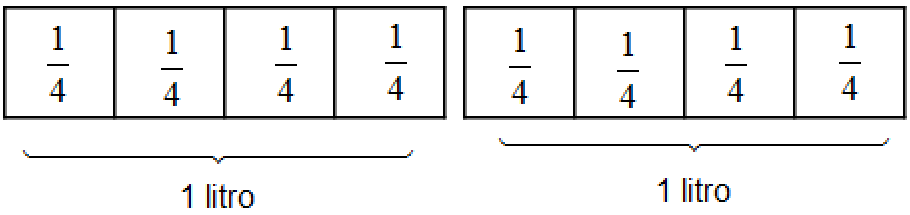
Em um momento inicial, as divisões de frações podem ser exploradas de modo mais construtivo, explorando conceitos adquiridos durante a aprendizagem dos números naturais e das frações, sem a utilização de qualquer algoritmo novo. Desta forma, para a etapa de introdução do conceito de divisão de números racionais sob a forma fracionária, consideremos algumas situações-problema.

Por se tratar de uma forma natural de pensar utilizaremos comumente a ideia de “quantos cabem?”. Por exemplo, na divisão de 80 por 20 é possível pensar que 80÷20 = 4, pois cabem quatro números 20 em 80.

Situação 1: Imaginemos algum procedimento que seja preciso encher uma jarra de dois litros usando copos com capacidade igual a $\frac{1}{4}$ de litro. Quantos copos seriam necessários?

Diante da situação ilustrada, devemos encontrar um número que multiplicado por $\frac{1}{4}$ resulta em 2, ou seja, quanto será $2:\frac{1}{4}$? Para isso, como mostrado na figura 19, vamos representar cada litro da jarra por um retângulo e dividi-lo em 4 partes iguais.

Figura 19: Representação geométrica da divisão $2:\frac{1}{4}$.



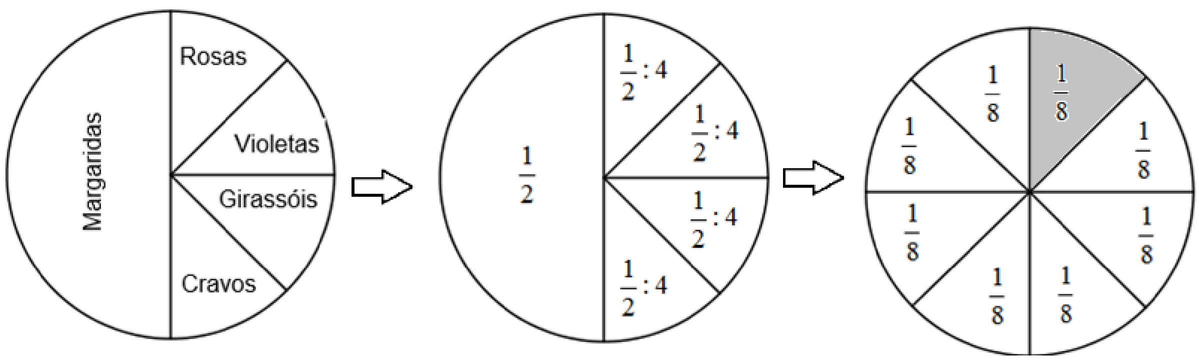
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Analisando a figura acima, verifica-se facilmente que $\frac{1}{4}$ “cabe” 8 vezes em dois inteiros, logo $2:\frac{1}{4}=8$.

Situação 2: Serão plantados alguns tipos de flores em um jardim de forma circular. A metade do jardim será ocupado por Margaridas e, a outra metade, será ocupada igualmente por Cravos, Rosas, Violetas e Girassóis. Qual a fração do jardim reservada para as Rosas?

O algoritmo que traduz a situação é $\frac{1}{2}:4$, ou seja, precisamos determinar qual o número que multiplicado por 4 resulta em $\frac{1}{2}$. Geometricamente a figura 20 mostra a divisão.

Figura 20: Representação geométrica da divisão $\frac{1}{2}:4$.



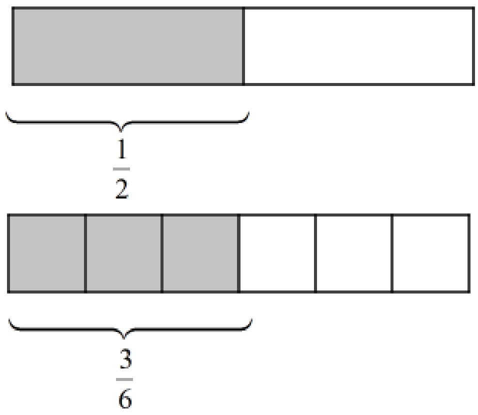
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De acordo com a representação geométrica acima podemos concluir que $\frac{1}{2}:4=\frac{1}{8}$, ou seja, as rosas ocuparão $\frac{1}{8}$ do jardim.

Outra maneira de explicar esta divisão é tomar as duas frações com o mesmo denominador e realizar a divisão do primeiro numerador pelo segundo numerador como detalhado na situação 3.

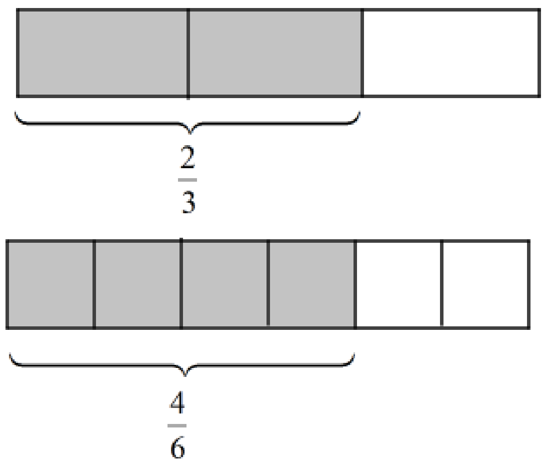
Situação 3: Vamos supor que seja necessário dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{3}$. Novamente recorrendo à geometria, as figuras 21 e 22 a seguir mostram as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, através de suas respectivas frações equivalentes; $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$.

Figura 21: Representação equivalente da fração um meio.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

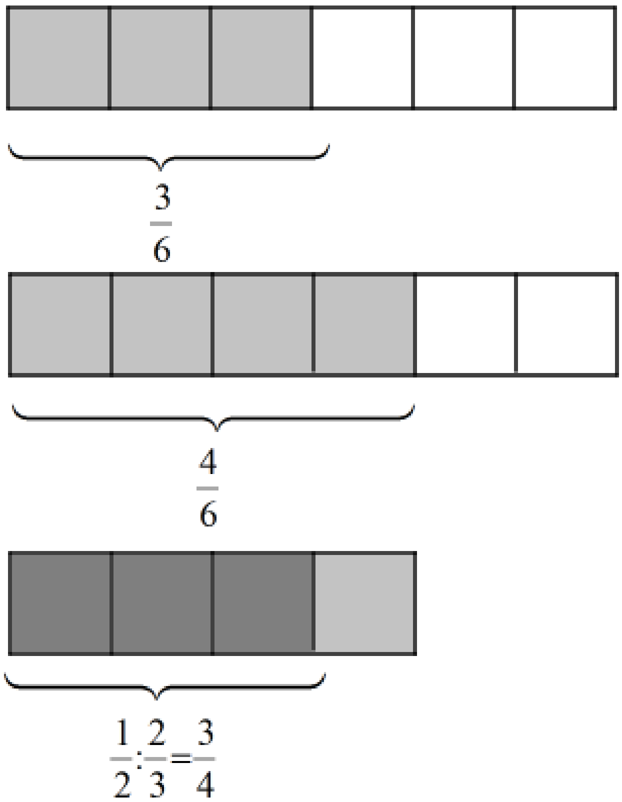
Figura 22: Representação equivalente da fração dois terços.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Nas figuras acima, os numeradores das frações estão destacados em cinza. Como tem-se 3 partes em cinza na Figura 21, e 4 partes e cinza na Figura 22, a divisão corresponde a fração $\frac{3}{4}$, ou seja, em cada 4 partes cinzas, 3 estão ocupadas, como mostra a figura 23.

Figura 23: Representação da divisão de um meio por dois terços.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Pela figura 23 podemos concluir que $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{3}{6}:\frac{4}{6}=\frac{3}{4}$. Este fato justifica a divisão de duas frações pela multiplicação da primeira pelo inverso da segunda, ou seja, a divisão de um número real $\frac{a}{b}$, pelo número real $\frac{c}{d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ é, por definição, a multiplicação do número fracionário $\frac{a}{b}$ pelo inverso de $\frac{c}{d}$. Assim $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.b}{b.c}$

4. Os números Racionais Fracionários na OBMEP.

No presente capítulo serão mostradas algumas possíveis soluções das questões aplicadas nas avaliações da 1º e 2º fases, nível I e II da OBMEP desde o ano de 2009 a 2017 que abordam o assunto principal deste trabalho - Números Racionais na forma fracionária. Serão apresentadas, também, as habilidades citadas no PCNs relacionadas aos números racionais, mencionadas no capítulo 2 e que o aluno precisa atingir para poder ter sucesso nas resoluções. O objetivo para tal propósito é trazer ao leitor desse trabalho uma visão mais ampla de como os números racionais na forma fracionária são abordados nos dias atuais a nível de Ensino Fundamental (6º e 7º ano).

Algumas das questões aqui apresentadas serão aplicadas aos alunos do 6º e do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves. Os resultados: números de alunos participantes, porcentagens de erros, acertos e as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das questões serão tabulados e analisados a fim de investigar e interpretar, no início e no fim da educação básica, as habilidades dos alunos em relação aos números fracionários.

4.1 Questões da OBMEP 1º e 2º fases dos níveis I e II que abordam os números racionais na forma fracionária.

As questões da OBMEP são elaboradas com foco na resolução de problemas. Como já mencionado no início do trabalho, de acordo com os PCNs, este é um aspecto fundamental no ensino da Matemática: favorecer a contextualização dos conteúdos com a realidade do aluno exigindo uma boa capacidade criativa de raciocínio lógico-matemático e interpretação.

4.1.1 OBMEP 2009

A figura 24 traz a questão de número 04 da 1º fase de nível II do ano de 2009. Um exercício que exige do aluno a habilidade de reconhecer frações em diversas representações como, por exemplo, partes de um inteiro, relação entre conjuntos, razão entre medidas e operar com números racionais em forma fracionária.

Figura 24: Questão 04 – 1º fase – nível II – 2009.

Uma torneira enche um tanque em oito horas e outra torneira enche o mesmo tanque em quatro horas. Ao meio dia, a primeira torneira foi aberta com o tanque vazio e, duas horas depois, a segunda torneira também foi aberta. A que horas o tanque ficou cheio?

A) 14h
B) 14h 30min
C) 15h
D) 15h 30min
E) 16h

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Inicialmente o aluno deve perceber que a questão trata de um raciocínio que envolve parte de um todo, ou seja, a primeira torneira enche $\frac{1}{8}$ do tanque por hora e a segunda $\frac{1}{4}$ do tanque por hora. Desse modo, as duas juntas enchem $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1+2}{8}=\frac{3}{8}$ do tanque por hora. De acordo com o enunciado, o aluno deve compreender que com duas horas a primeira torneira encherá $2x\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ do tanque e que $1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$ do tanque estará vazio. A partir daí, o aluno precisa se perguntar: se as duas enchem $\frac{3}{8}$ do tanque por hora, em quanto tempo elas encherão $\frac{3}{4}$? Ou melhor, quantas vezes $\frac{3}{8}$ cabem dentro de $\frac{3}{4}$? Diante do fato, para prosseguir na resolução, o aluno precisa usar a habilidade de operar com números racionais na forma fracionária, ou seja,

$\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{3}{4} x \dfrac{8}{3} = \dfrac{8}{4} = 2$ horas para acabar de encher o tanque. Logo, serão necessárias 2 horas iniciais da primeira torneira mais 2 horas das duas torneiras juntas para que o tanque fique completamente cheio, isto é, um total de 4 horas. Como a primeira torneira foi aberta ao meio dia, o aluno deve concluir que o tanque ficará completo às 16:00h.

A figura 25 traz a questão de número 14 da 1º fase do nível II do ano de 2009. O exercício exige do aluno a habilidade de resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão), frações irredutíveis juntamente com a noção de múltiplos e solução de uma equação algébrica.

Figura 25: Questão 14 – 1º fase – nível II – 2009.

Na expressão $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{29}{30}$ as letras *a*, *b*, *c* e *d* representam números inteiros de 1 a 9. Qual é o valor de $a+b+c+d$?

A) 14
B) 16
C) 19
D) 21
E) 23

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

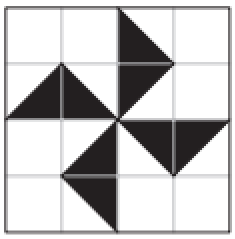
De acordo como enunciado, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{29}{30}$. Inicialmente, o aluno deve perceber que a fração $\frac{29}{30}$ é irredutível, ou seja, os números 29 e 30 não possuem um divisor comum. Segue então que bd é um múltiplo de 30. Por outro lado, o único múltiplo de 30 que é o produto de dois fatores entre 1 e 9 é o próprio 30, ou seja, 5 x 6 = 30. Prosseguindo na resolução, o aluno deve supor que b = 5 e d = 6 no numerador da fração $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{29}{30}$ e escrever $6a+5b=29$. A única solução desta equação em inteiros entre 1 e 9 é a = 4 e b = 1, logo $a+b+c+d=4+5+1+6=16$.

4.1.2 OBMEP 2010

A figura 26 mostra a questão de número 10 da 1º fase do nível I aplicada no ano de 2010, que exige a habilidade de identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados, identificar frações equivalentes e uma noção básica de geometria.

Figura 26: Questão 10 – 1º fase – nível I – 2010.

A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?



A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{16}$

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

De acordo com o enunciado, o aluno deverá perceber que a área sombreada é a soma das áreas de 8 triângulos iguais, cada um com área igual à metade da área de um quadradinho. Portanto, a área sombreada é igual à área de $8x\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$ quadradinhos, o que corresponde a $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ da área do quadrado.

A figura 27 mostra a questão de número 1 da 1º fase de nível II aplicada no ano de 2010. Exige do aluno a habilidade de resolver problema que envolva porcentagem associando-a a um número racional fracionário ou decimal além das operações básicas.

Figura 27: Questão 1 – 1º fase – nível II – 2010.

A escola de Paraqui organizou uma Olimpíada de Matemática para seus 250 alunos e premiou com medalhas os 8% que obtiveram as notas mais altas. Quantas medalhas foram distribuídas?

A) 8
B) 11
C) 14
D) 17
E) 20

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Para resolver a situação-problema, o aluno deve reconhecer a porcentagem como um número racional fracionário seja ele em sua forma decimal ou fracionária. Para o primeiro caso, o aluno deve fazer $8\% = \frac{8}{100}$ e, logo em seguida, $\frac{8}{100}x250 = \frac{2}{25}x250 = 2x10 = 20$. Para o segundo caso, basta escrever $8\% = \frac{8}{100} = 0,08$ e fazer $0,08x250 = 20$.

4.1.3 OBMEP 2011

A figura 28 traz a questão de número 09 da 1º fase de nível II aplicada no ano de 2011. Questão que exige do aluno um raciocínio lógico-matemático com habilidades em simplificações de frações e operações básicas.

Figura 28: Questão 09 – 1º fase – nível II – 2011.

Adão atribuiu um valor numérico a cada letra do alfabeto. Multiplicando os valores atribuídos às letras, ele obteve PAPAI=12, GALO=5 e PAPAGAIO=24. Qual é o valor que ele atribuiu à letra L?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{10}{3}$

D) 2

E) $\frac{5}{2}$

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Neste problema, é preciso que o aluno desenvolva uma estratégia de resolução considerando o resultado da multiplicação dos valores atribuídos às letras e efetuando a simplificação entre o numerador e denominador. De fato, de acordo com o enunciado, tem-se que $\frac{PAPAI\ x\ GALO}{PAPAGAIO} = \frac{12 \text{ x } 5}{24} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$. Por outro lado, como a cada letra está associado um número, pode-se simplificar a fração cancelando letras iguais no numerador e denominador, obtendo $\frac{PAPAI\ x\ GALO}{PAPAGAIO} = \frac{L}{1} = L = \frac{5}{2}$.

4.1.4 OBMEP 2012

A figura 29 refere-se a questão de número 03 da 2º fase de nível I aplicada no ano de 2012. O aluno para obter sucesso na resolução da questão, além da interpretação e raciocínio lógico-matemático, deve dominar o conceito de fração como representação que pode estar associada a diferentes significados, ou seja, como parte em um todo, quociente, operador multiplicativo e ter domínio nas diversas operações envolvendo números racionais.

Figura 29: Questão 03 – 2º fase – nível I – 2012.

Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticaba restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?

b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?

c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

No item (a), o aluno deve primeiro calcular a parte de jabuticabas que sobrou após Alberto ter retirado a sua e depois calcular a fração que corresponde à Beatriz. De fato, de acordo com o enunciado, Alberto, primeiro a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ do total de jabuticabas deixando $1-\frac{1}{5}=\frac{5-1}{5}=\frac{4}{5}$ para os demais irmãos. Beatriz, segunda a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas deixadas por Alberto, pegando assim $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5}x\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$ do total de jabuticabas.

No item (b), o aluno deve elaborar uma estratégia que lhe permita relacionar e comparar a fração correspondente a cada irmão. Como possível estratégia, sabe-se que Alberto ficou com $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e, pelo item (a), Beatriz ficou com $\frac{4}{25}$ das jabuticabas e deixou $\frac{4}{5}-\frac{4}{25}=\frac{20-4}{25}=\frac{16}{25}$ na vasilha. De acordo com o enunciado o restante foi dividido em três partes iguais e, portanto, cada um dos irmãos restantes ficou com $\frac{1}{3} x \frac{16}{25} = \frac{16}{75}$ das jabuticabas. Como $\frac{1}{5} = \frac{15}{75}$ e $\frac{4}{25} = \frac{12}{75}$, o aluno deve concluir que Beatriz ficou com menos jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com mais jabuticabas.

No item (C), como estratégia de resolução, o aluno deve perceber que a fração $\frac{16}{75}$ obtida no item (b), correspondente à parte de Carlos, Dulce e Eduardo é uma fração irredutível, portanto, o total de jabuticabas tem que ser múltiplo de 75; por outro lado, como cada um dos irmãos ficou com um número inteiro de jabuticabas menor ou igual a 20, o número total de jabuticabas é no máximo 100. O único múltiplo de 75 que é menor ou igual a 100 é o próprio 75. Logo, havia 75 jabuticabas na vasilha; Alberto ficou com $\frac{1}{5} x75 = 15$ Beatriz com $\frac{4}{25} x75 = 4x3 = 12$ jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com $\frac{16}{75} x75 = 16$ jabuticabas cada um.

4.1.5 OBMEP 2013

A figura 30 refere-se a questão de número 15 da 1º fase de nível I aplicada no ano de 2013, que exige do aluno a habilidade de resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais e reconhecer frações em diversas representações como, por exemplo, partes de um inteiro, relação entre conjuntos, razão entre medidas etc.

Figura 30: Questão 15 – 1º fase – nível I – 2013.

Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

A) $\frac{7}{12}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

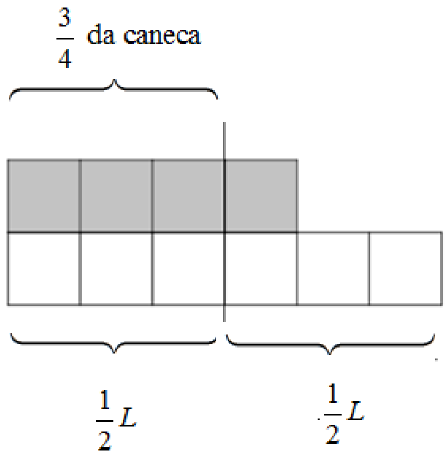
D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{4}{3}$

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Nesta questão, o aluno deve perceber que basta calcular quantas vezes $\frac{2}{3}$ L cabem dentro de $\frac{1}{2}$ L. Para isso, o aluno pode desenvolver estratégias como a divisão de frações ou usar uma representação geométrica. Como uma primeira estratégia, tem-se $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ de uma caneca. Para uma segunda estratégia, o aluno pode primeiramente considerar que $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ L e $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ L e, geometricamente, como mostra a figura 31, o aluno deve perceber que cada quadradinho cinza corresponde a $\frac{1}{4}$ da capacidade da caneca e que cada quadradinho branco corresponde $\frac{1}{6}$ L. Dividindo a figura ao meio por um linha, o aluno deve perceber que três quadrados verdes ($\frac{1}{2}$ L de água) correspondem a três quadrados azuis ($\frac{3}{4}$ da capacidade da caneca). Logo, $\frac{1}{2}$ L de água enche $\frac{3}{4}$ da caneca.

Figura 31: Representação geométrica da resolução da questão de número 15 da 1º fase de nível I aplicada no ano de 2013.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

4.1.6 OBMEP 2014

A figura 32 traz a questão de número 09 da 1º fase de nível II aplicada no ano de 2014 que exige do aluno um domínio em interpretação de figuras geométricas e a habilidade em reconhecer frações em diversas representações como partes de um inteiro.

Figura 32: Questão 09 – 1º fase – nível II – 2014.

O polígono *ABCDEF* é um hexágono regular. Os pontos *M* e *N* são pontos médios dos lados *AF* e *BC*, respectivamente. O hexágono *ABNGHM* é simétrico em relação à reta que passa por *M* e *N*. Qual é a razão entre as áreas dos hexágonos *ABNGHM* e *ABCDEF*?

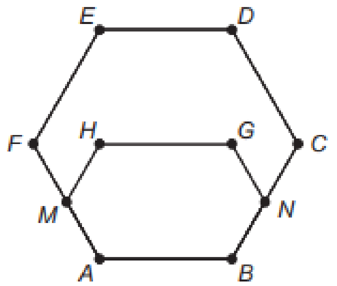
A) $\frac{3}{10}$

B) $\frac{4}{11}$

C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{7}{15}$

E) $\frac{5}{12}$

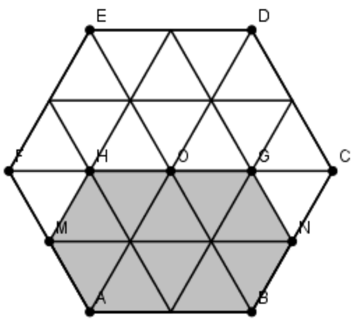


Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Esta questão exige o conhecimento das propriedades do hexágono regular e triângulos equiláteros, ou seja, o aluno deve perceber que o hexágono regular pode ser decomposto em triângulos equiláteros de mesma área e aplicar o conceito de fração como razão para ter sucesso na resolução.

De fato, geometricamente como mostra a figura 33, o hexágono regular pode ser dividido em vinte e quatro pequenos triângulos equiláteros congruentes e o aluno pode verificar que o hexágono cinza é formado por 10 de tais triângulos pequenos. Assim, a razão entre as áreas é $\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

Figura 33: Hexágono regular dividido em 24 triângulos equiláteros.



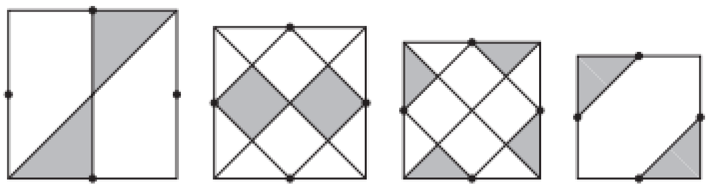
Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

4.1.7 OBMEP 2015

A figura 34 refere-se a questão de número 07 da 1º fase de nível I e II aplicada no ano de 2015 que exige habilidades geométricas e a habilidade de reconhecer frações em diversas representações, no caso, reconhecer a fração como razão.

Figura 34: Questão 07 – 1º fase – nível I e II – 2015.

Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados.



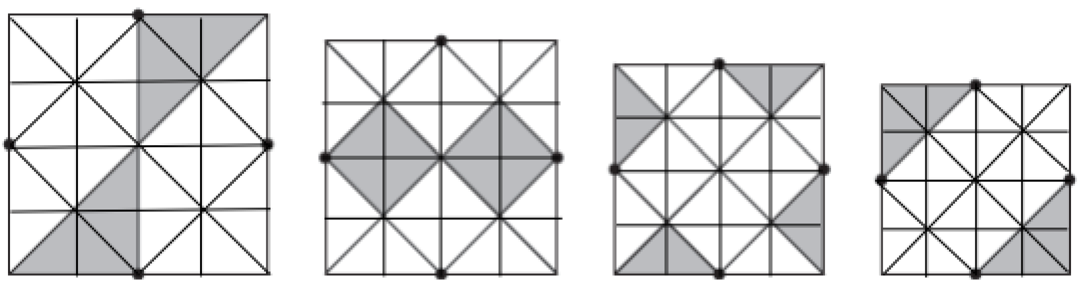
Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Uma maneira de o aluno solucionar a questão é perceber que os quadrados podem ser decompostos a partir do ponto médio já indicado nas figuras, em vários outros quadrados menores de mesma área e, logo em seguida à decomposição, efetuar a contagem, em cada caso, do número de triângulos sombreados que são formados nas decomposições. Assim o aluno poderá contar 8 triângulos sombreados para um total de trinta e dois triângulos, isto é, $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, como mostra a figura 35 a seguir.

Figura 35: Solução geométrica para questão 07 da 1º fase de nível I e II aplicada no ano de 2015.



Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017

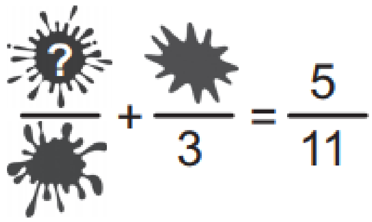
4.1.8 OBMEP 2016

A figura 36 traz a questão de número 07 da 1º fase de nível I e II aplicada no ano de 2015 que exige do aluno habilidade de resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais.

Figura 36: Questão 15 – 1º fase – nível I e II – 2016.

A figura mostra a fração $\frac{5}{11}$ como a soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Uma maneira para o aluno solucionar a questão é perceber que o numerador da fração com denominador 3 só pode ser igual a 0 ou igual a 1 já que $\frac{2}{3}=\frac{22}{33}>\frac{15}{33}=\frac{5}{11}$ Logo, para numerador igual a zero o aluno pode concluir que $\frac{5}{11}-\frac{0}{3}=\frac{5}{11}$ e, para numerador igual 1, $\frac{5}{11}-\frac{1}{3}=\frac{15-11}{33}=\frac{4}{33}$. Portanto o menor numerador possível para a outra fração é 4.

4.1.9 OBMEP 2017

A figura 37 traz a questão de número 11 da 1º fase de nível I aplicada em 2017 que exige habilidade de o aluno resolver problemas contextualizados. Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

Figura 37: Questão 11 – 1º fase – nível I – 2017.

Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde.

Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

Fonte: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 26 de Julho. 2017.

Para estratégia de resolução, o aluno pode perceber que para obter 30 litros de tinta marrom, precisaria de 15 litros de cada uma das cores laranja e verde. A primeira condição diz que, para obter essa quantidade de tinta laranja, precisaria da razão de $\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{2}{5}x15=2x3=6$ litros de tinta amarela. Da mesma forma, a segunda condição diz que, para obter 15 litros de tinta verde, precisaria da razão de $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{1}{3}x15=5$ litros de tinta amarela. Portanto, a quantidade total de tinta amarela necessária é $5+6=11$litros.

5 Resultados da investigação.

5.1 Perfil dos sujeitos investigados.

Primeiramente, com o intuito de traçar o perfil dos alunos investigados no instrumento de coleta de dados, Anexo I, buscou-se verificar informações pertinentes, tais como: o sexo, a idade, o número de reprovações, se consideram o ensino da matemática importante para seu dia a dia e se apresentam dificuldades na aprendizagem dos números fracionários. Quarenta e nove alunos responderam ao teste, sendo vinte e três do 6º ano e vinte e seis do 7º ano.

A seguir, a tabela 3 mostra o percentual dos alunos do 6º ano em relação ao sexo, idade e número de reprovações.

Tabela 3: Percentual do número de alunos do 6º ano em relação ao sexo, idade e número de reprovações.

6º ANO Total: 23 alunos		
SEXO	Masculino 12 alunos	Feminino 11 alunos
Média das idades.	11,8 anos	11 anos
Reprovações	91,3% não tiveram reprovação até o momento	100% não tiveram reprovação até o momento

Fonte: Dados da pesquisa.
Elaborado pelo próprio autor.

Dos 23 alunos do 6º ano que responderam ao teste, 96% consideram o ensino da matemática importante para o seu dia a dia, 3% não souberam responder e 1% não considera importante. Em relação à aprendizagem dos números racionais fracionários, 58% responderam não ter dificuldades e 40% responderam ter dificuldades de aprendizado e 2% não souberam responder.

A tabela 4 mostra o percentual dos alunos do 7º ano em relação ao sexo, idade e número de reprovações.

Tabela 4: Percentual do número de alunos do 7º ano em relação ao sexo, idade e número de reprovações.

7º ANO Total: 26 alunos		
SEXO	Masculino 11 alunos	Feminino 15 alunos
Média das idades.	12,2 anos	12,4 anos
Reprovações	81,8% não tiveram reprovação até o momento	88,2% não tiveram reprovação até o momento

Fonte: Dados da pesquisa.
Elaborado pelo próprio autor.

Dos 26 alunos do 7º ano que responderam ao questionário, 89,33% consideram ensino da matemática importante para o seu dia a dia, 3,57% não consideram importante e 7,1% não souberam responder. Em relação à aprendizagem dos números racionais fracionários, 53,8% responderam não ter dificuldades e 42,3% responderam ter dificuldades de aprendizado e 3,9% não souberam responder.

5.2 Análise e interpretação dos resultados do Teste Inicial.

Antes de realizarem o teste principal com algumas questões da OBMEP trazidas no capítulo 4, os alunos realizaram um primeiro teste, Anexo II, a fim de investigar a habilidade de operar com os números fracionários sem a necessidade de conhecimentos em resoluções de problemas contextualizados. Composto por quatro operações envolvendo adição, multiplicação, divisão, simplificação e cálculo de porcentagens, o teste teve o objetivo de investigar as habilidades mínimas necessárias para que os alunos pudessem desenvolver o teste principal.

Através da análise das questões resolvidas pelos alunos das turmas do 6º e 7º ano foi possível observar a maneira como estes resolveram as questões, bem como os erros mais comuns e, a partir daí, identificar algumas dificuldades apresentadas.

Na tabela 6 são apresentados os resultados de cada um dos itens do primeiro teste de avaliação nos dois anos analisados.

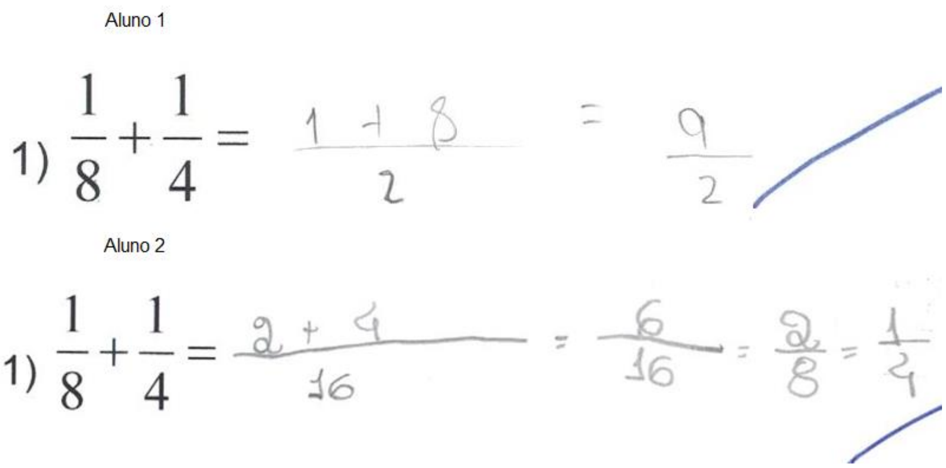
Tabela 5: Distribuição de frequências do número de acertos das questões do primeiro teste de avaliação do conhecimento dos alunos do 6º e 7º anos.

Operações	6º ano 23 alunos		7º ano 26 alunos[11]	
	Acertos	%	Acertos	%
Operação 1	21	91,3%	22	84,6%
Operação 2	14	60,8%	18	69,2%
Operação 3	13	56,5%	18	69,2%
Operação 4	6	26,1%	11	42,3%

Fonte: Dados da pesquisa.
Elaborado pelo próprio autor.

A primeira operação aplicada no teste refere-se a uma adição de frações. Como possível solução o aluno deveria criar um novo denominador através do cálculo do mínimo múltiplo comum com denominadores fornecidos. O novo denominador deverá ser dividido pelos denominadores atuais, multiplicando o quociente pelo numerador correspondente, constituindo novas frações proporcionalmente iguais às anteriores e com denominadores iguais. A seguir a figura 38 traz os erros mais comuns nessa questão.

Figura 38: Resolução da soma de frações do Aluno 1 e Aluno 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

[11] Dos 27 alunos do 7º ano 26 responderam o teste inicial, pois, no dia da aplicação, havia um aluno faltoso.

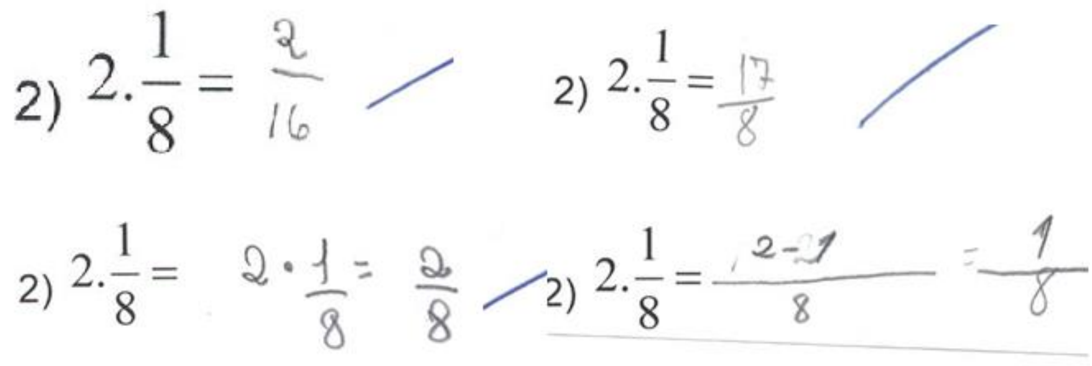
Apesar da maioria dos alunos atingirem o objetivo esperado dessa operação, de acordo com a coleta de dados, percebeu-se que 6 alunos cometeram alguns erros, erros esses que denotam a falta de habilidade em manipular os múltiplos e divisores de um número natural.

As duas resoluções apresentadas acima são de dois alunos do 6º ano. O aluno 1 ao invés de trabalhar com mínimo múltiplo comum dos denominadores, trabalhou com o divisor. Já o aluno 2 usou corretamente o procedimento, porém, no momento de usar conceitos de simplicações de frações, cometeu um erro de cálculo fazendo 16 : 3 = 8. Nota-se aqui um deficiência em operações básicas com números naturais ou apenas uma falta de atenção.

A segunda operação, $2.\frac{1}{8}$, refere-se à multiplicação de um número inteiro por um número fracionário. Como possível solução o aluno deveria criar uma estratégia através da representação geométrica das frações ou efetuar a multiplicação, numerador por numerador e denominador por denominador, efetuando as possíveis simplificações.

Observou-se que dezessete alunos cometeram algum tipo de erro, sendo nove do 6º ano e oito do 7º ano. Dentre os erros cometidos, como mostra a figura 39, seis alunos multiplicaram o numerador e o denominador por 2, seis efetuaram corretamente a multiplicação, contudo não simplificaram o resultado, três não compreenderam o exercício, efetuando a multiplicação como fração mista e dois mostraram-se sem habilidade alguma na resolução.

Figura 39: Erros mais frequentes cometidos pelos alunos na resolução da questão número 2.

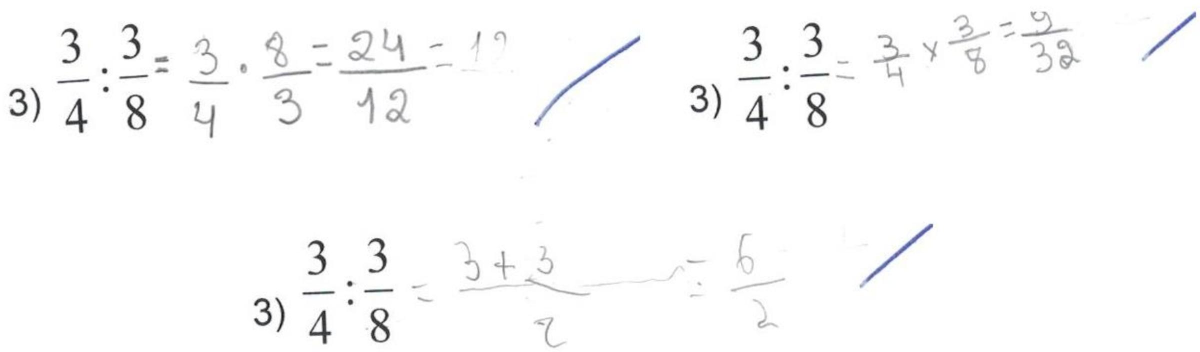


Fonte: Dados da pesquisa.

A terceira situação, $\frac{3}{4}:\frac{3}{8}$, refere-se à divisão de frações. Operação que exige, além da habilidade de multiplicar, a compreensão de números inversos. Dos dezoito alunos que erraram a questão, dez são do 6º ano e oito do 7º ano.

Através da coleta de dados e análise de resultados, observou-se que nove alunos resolveram a questão corretamente, porém deixaram de efetuar a simplificação pedida, revelando apenas uma falta de atenção por partes dos alunos. Observou-se, ainda, que sete alunos não compreenderam o processo da divisão de frações, uma vez que apresentaram uma resolução sem sentindo algum. Por fim, dois alunos efetuaram a multiplicação sem inverter o divisor. Tais erros são trazidos na figura 40 a seguir.

Figura 40: Erros cometidos na resolução da operação divisão de frações.



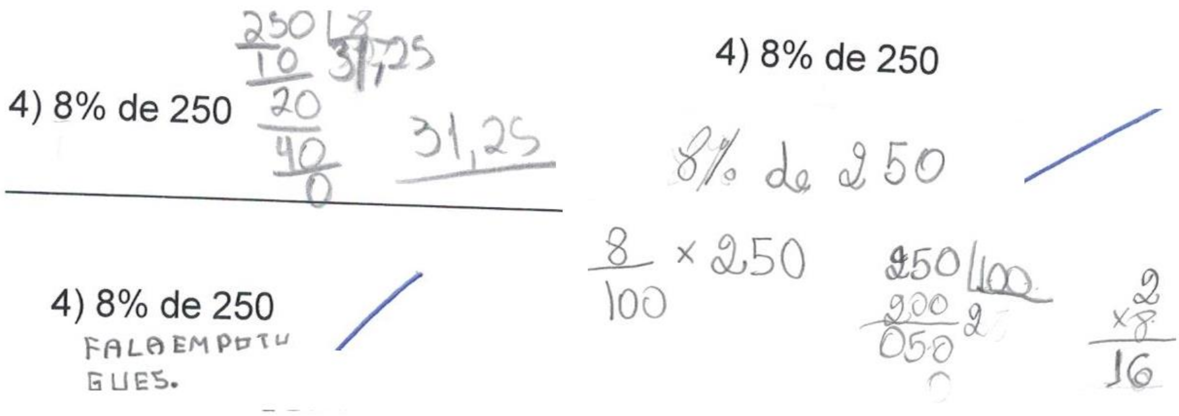
Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta situação refere-se ao cálculo de 8% de 250. Nessa situação exige-se do aluno a habilidade de relacionar um número percentual com fração, multiplicação e simplificação de frações. Observa-se neste exercício uma grande variação de erros, visto que, de trinta e duas resoluções incorretas, dezessete são de alunos do 6º ano e quinze de alunos do 7º ano.

Após a análise dos erros, observou-se que onze alunos dividiram 250 por 8, nove compreenderam o conceito de porcentagem como uma fração centesimal, contudo efetuaram algum tipo de conta incorreta e, por fim, doze não desenvolveram a habilidade mínima necessária para efetuar cálculo de porcentagens, o que sugere, com base nos resultados apresentados, que essa competência precisa ser trabalhada com mais ênfase, uma vez que das quatros operações investigadas até o momento, foi a que apresentou o maior número de erros.

A figura 41 mostra os erros mais frequentes cometidos pelos alunos na resolução da quarta operação trazida pelo teste inicial.

Figura 41: erros mais frequentes cometidos pelos alunos na questão de número 4.



Fonte: Dados da pesquisa.

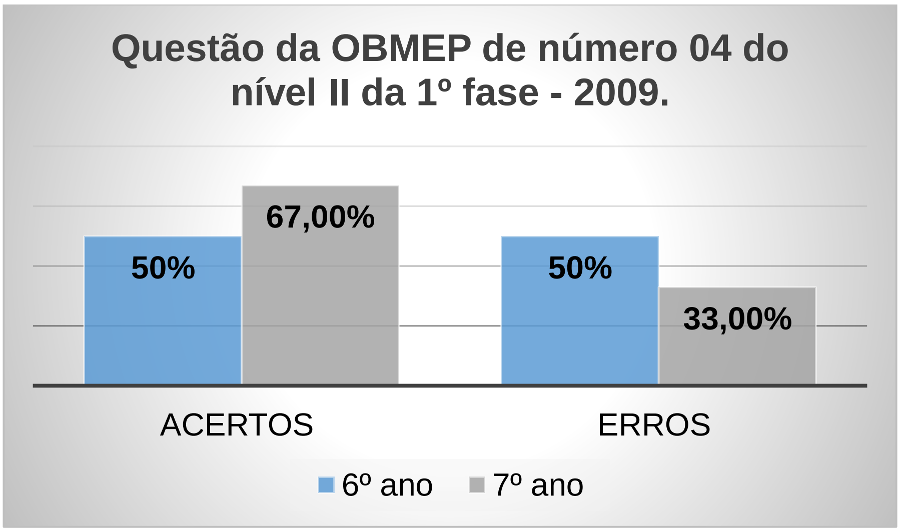
Através dos dados apresentados percebe-se que uma grande parte dos alunos não apresentam dificuldades quando o exercício envolve a simples reprodução de conceitos, entretanto alguns alunos não conseguiram atingir o aprendizado esperado para esse tipo de habilidade, o que mostra a necessidade de trabalhos diferenciados para com esses alunos, como jogos e atividades lúdicas a fim de tentar sanar tais dificuldades. Percebe-se, ainda, que muitos dos erros apresentados até o momento, ocorreram por alguma deficiência em efetuar as quatros operações básicas com números naturais. Desta forma, ao se fazer um trabalho voltado para essas operações, espera-se que sejam atingidas as habilidades em relação aos números fracionários.

5.3 Análise e interpretação dos resultados do Teste Principal.

Para dar continuidade à pesquisa, aplicou-se o teste principal, cujo objetivo foi investigar e analisar as dificuldades acerca das habilidades de resolução que envolvem interpretação e raciocínio logico-matemático, além das habilidades já analisadas no teste inicial. Respondido por 22 alunos[12] do 6º ano e 27 alunos no 7º ano, o teste trouxe quatro questões da OBMEP cuja soluções foram apresentadas no capítulo anterior. A partir da análise das resoluções e da interpretação dos resultados que serão apresentados a seguir pode-se compreender melhor a maneira de como os alunos elaboraram suas estratégias, bem como as dificuldades e os erros mais comuns.

A primeira situação analisada refere-se à questão de número quatro aplicada na avaliação da OBMEP nível II da 1º fase do ano de 2009. De acordo com os números apresentados pelo gráfico 1, observa-se um número significativo de soluções erradas e/ou incompletas, uma vez que 67% dos alunos do 7º ano e 50% dos alunos do 6º ano erraram ou não concluíram corretamente a questão.

Gráfico 1: Consolidado da primeira questão aplicada no teste principal.

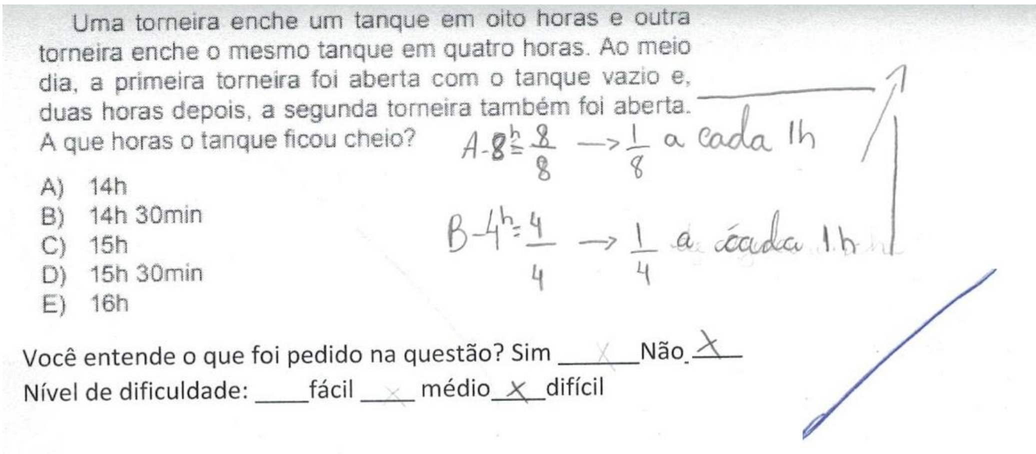


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

[12] Dos 23 alunos do 6º ano 22 responderam o Teste Principal, pois no dia da aplicação, havia um aluno faltoso.

A partir da análise das resoluções apresentadas pelos alunos, observou-se que a maior parte dos erros cometidos ocorreram diretamente pela falta de interpretação, comprovando, desta forma, que a maioria dos alunos não souberam organizar seu raciocínio e se perderam no decorrer da resolução como mostra a figura 42 e 43 a seguir.

Figura 42: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.


Uma torneira enche um tanque em oito horas e outra torneira enche o mesmo tanque em quatro horas. Ao meio dia, a primeira torneira foi aberta com o tanque vazio e, duas horas depois, a segunda torneira também foi aberta. A que horas o tanque ficou cheio?

A) 14h
B) 14h 30min
C) 15h
D) 15h 30min
E) 16h

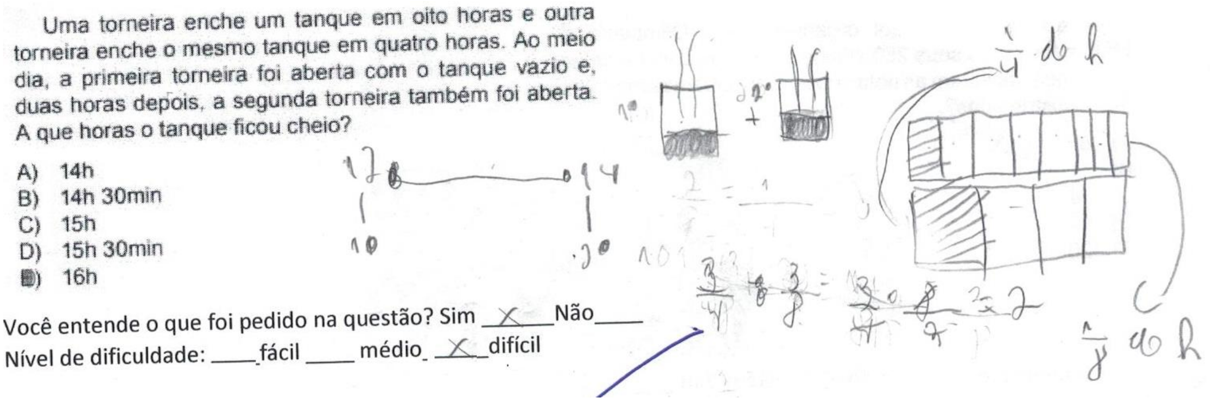
Você entende o que foi pedido na questão? Sim ______ Não ______
Nível de dificuldade: ____ fácil ____ médio ____ difícil

$A - 8^h = \frac{8}{8} \rightarrow \frac{1}{8}$ a cada 1h

$B - 4^h = \frac{4}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$ a cada 1h

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 43: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 7º ano.


Uma torneira enche um tanque em oito horas e outra torneira enche o mesmo tanque em quatro horas. Ao meio dia, a primeira torneira foi aberta com o tanque vazio e, duas horas depois, a segunda torneira também foi aberta. A que horas o tanque ficou cheio?

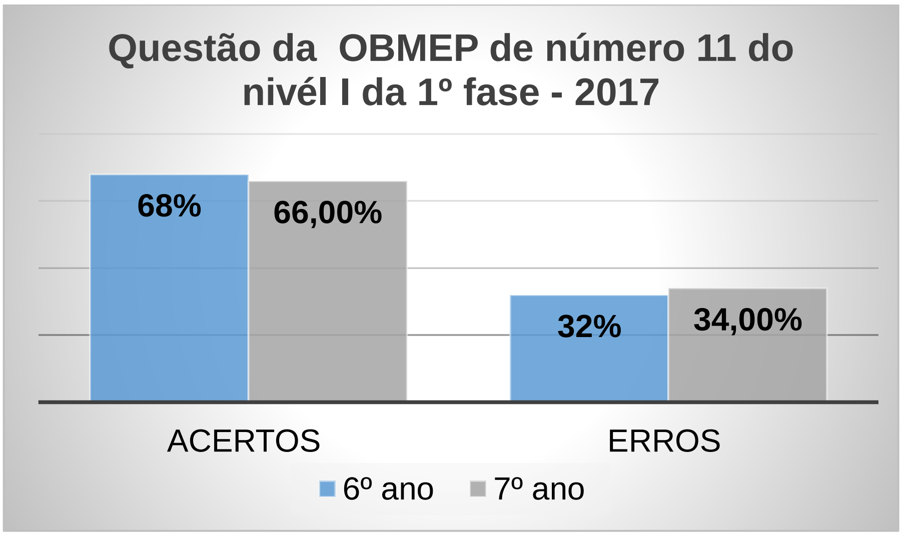
A) 14h
B) 14h 30min
C) 15h
D) 15h 30min
E) 16h

Você entende o que foi pedido na questão? Sim ______ Não ______
Nível de dificuldade: ____ fácil ____ médio ____ difícil

Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda questão investigada no teste principal, refere-se à questão de número onze da 1º fase de nível I aplicada em 2017. O gráfico 2 a seguir traz o consolidado dos números de acertos/erros dos alunos do 6º ano e 7º ano.

Gráfico 2: Consolidado da segunda questão aplicada no teste principal.

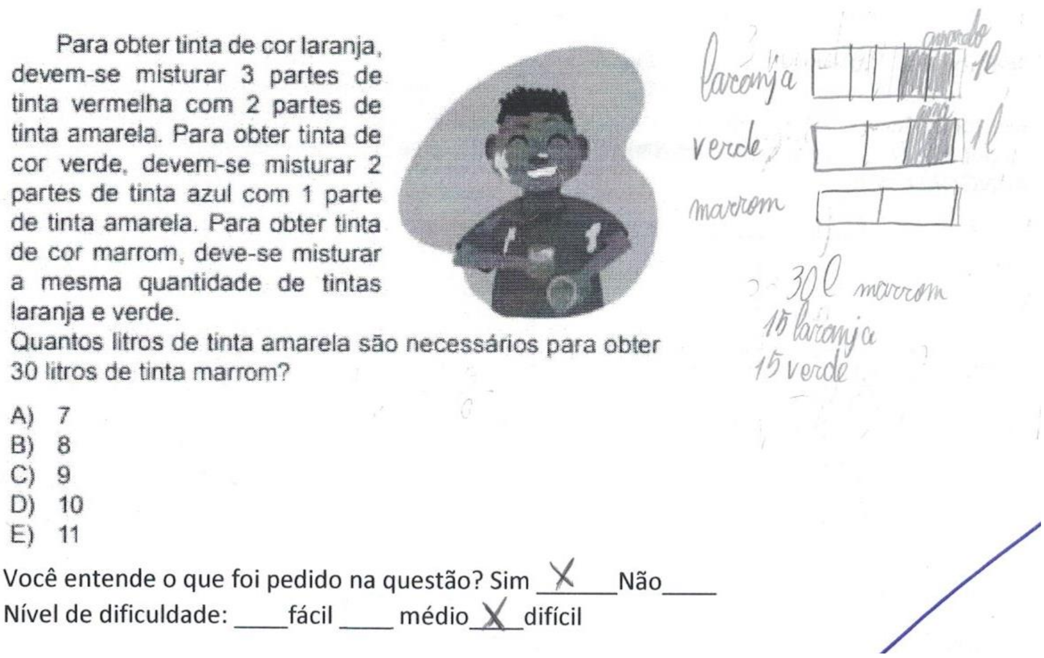


Fonte: Dados da pesquisa.

Elaborado pelo próprio autor.

Com base nas resoluções apresentadas pelos alunos e nos números trazidos pelo gráfico 2, observou-se um número satisfatório de resoluções corretas. No entanto conforme a análise das resoluções incorretas, notou-se que os alunos compreenderam o conceito de fração como razão e como parte de um todo, mas não souberam elaborar uma estratégia de resolução que os levassem à resposta correta, como mostra a figura 44 a seguir.

Figura 44: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.



Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde.

Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

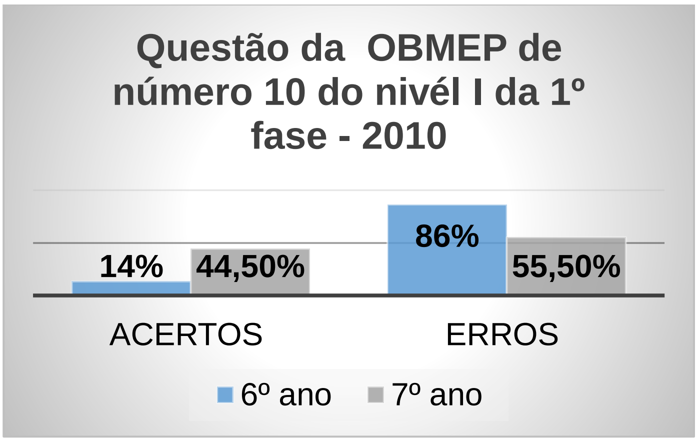
Você entende o que foi pedido na questão? Sim _X__ Não____

Nível de dificuldade: ____fácil ____ médio_X_difícil

Fonte: Dados da pesquisa.

A terceira questão investigada no teste principal refere-se à questão de número dez da 1º fase do nível I aplicado no ano de 2010. A seguir o gráfico 3 traz o consolidado do número de acertos/erros dos alunos do 6º ano e 7º ano.

Gráfico 3: Consolidado da terceira questão aplicada no teste principal.

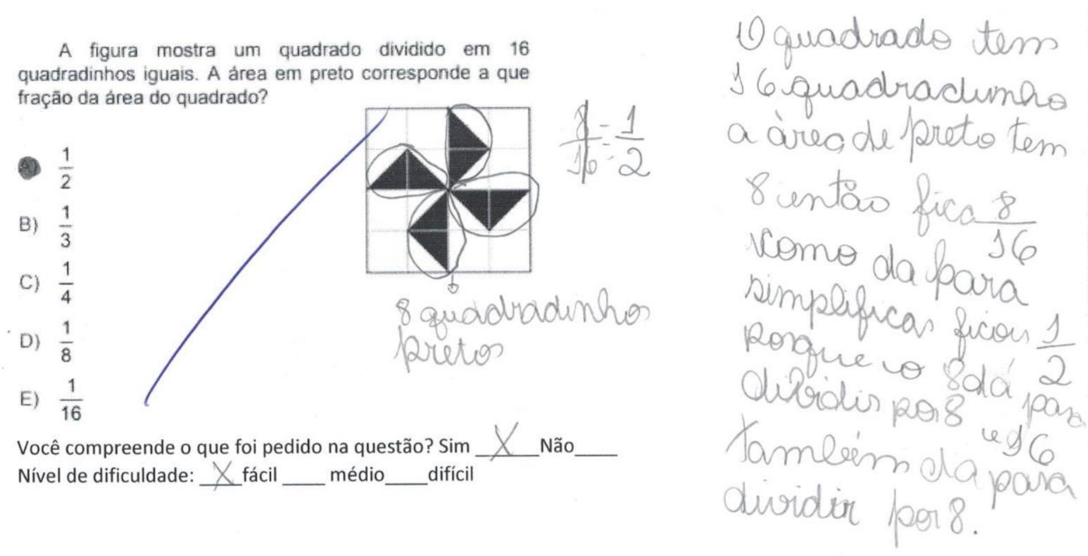


Fonte: Dados da pesquisa.

Elaborado pelo próprio autor.

Após a análise dos resultados, observou-se principalmente que os alunos do 6º ano têm deficiência na intepretação de figuras planas, visto que a turma apresentou 86% de questões com resoluções incorretas. A maior parte desses alunos não interpretou corretamente a divisão e relacionou duas partes de um todo de forma diferente, como se observa na resolução de um aluno do 6º ano trazida pela figura 45.

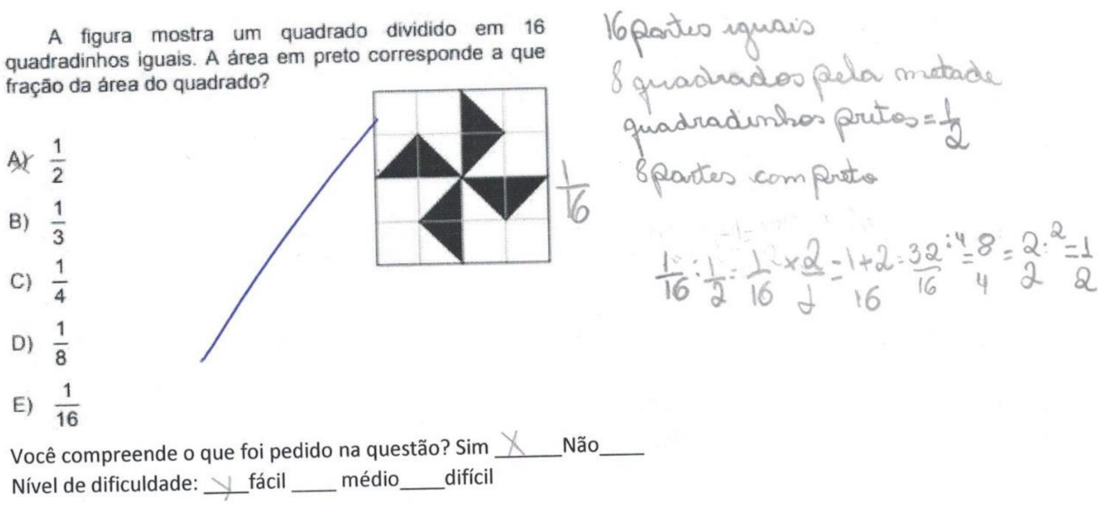
Figura 45: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.



Fonte: Dados da pesquisa.

Embora a grande parte dos alunos mostrou compreender o que foi pedido no exercício e relacionar corretamente a área em preto com a área em branco, outro erro muito comum percebido foi o fato de não conseguirem associar a estratégia de resolução geométrica com a resolução algébrica, como se observar na figura 46.

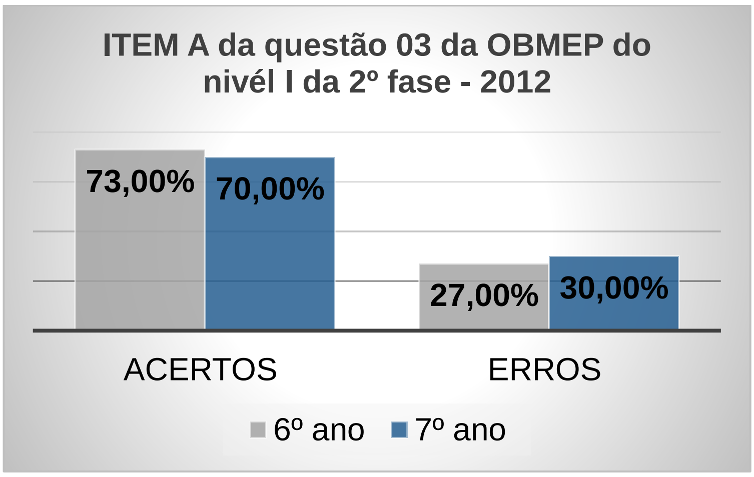
Figura 46: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 6º ano.



Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta e última questão a ser analisada, por se tratar de uma situação-problema aplicada em 2012 na 2º fase da OBMEP de nível I, necessita-se investigar o item A, B e C. O gráfico 4 a seguir refere-se ao consolidado dos números de acertos/erros do Item A.

Gráfico 4: Consolidado do Item A da quarta questão aplicada no teste principal.

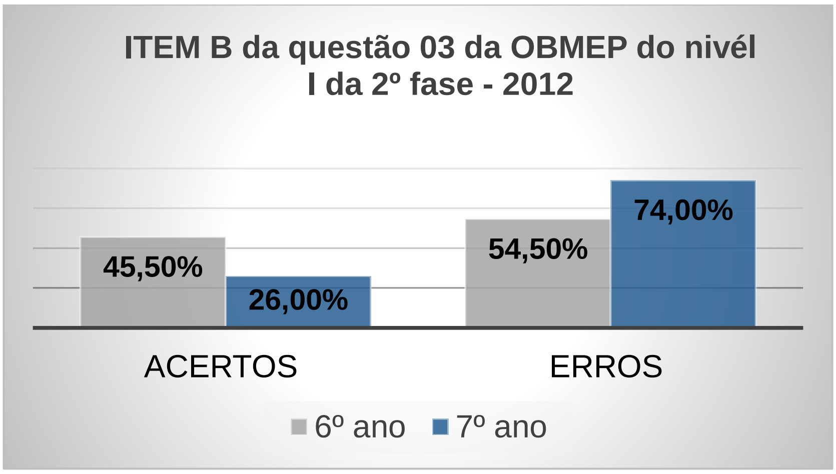


Fonte: Dados da pesquisa.

Elaborado pelo próprio autor.

O gráfico 5 a seguir refere-se ao consolidado do número de acertos/erros do Item B.

Gráfico 5: Consolidado do Item B da quarta questão aplicada no teste principal.

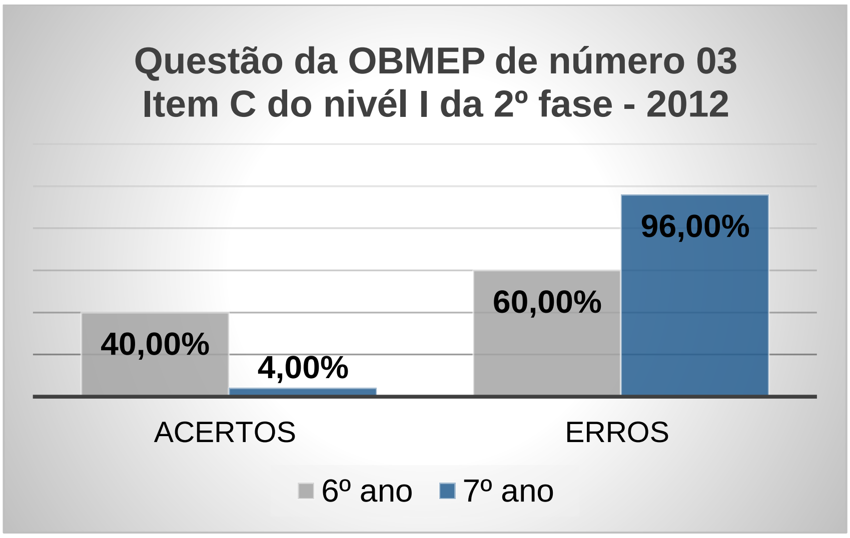


Fonte: Dados da pesquisa.

Elaborado pelo próprio autor.

O gráfico 6 a seguir refere-se ao consolidado do número de acertos/erros do Item C.

Gráfico 6: Consolidado do Item B da quarta questão aplicada no teste principal.



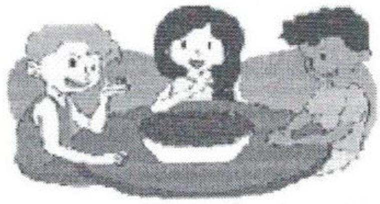
Fonte: Dados da pesquisa.

Elaborado pelo próprio autor.

Com base nos resultados apresentados nos gráficos 4, 5 e 6, percebe-se que na evolução de cada um dos itens, a forma de resolução fica mais complexa, uma vez que o índice de sucesso decaiu de forma significativa não só para os alunos do 6º como também para os do 7º ano. Com relação aos erros analisados, nota-se uma grande deficiência em interpretar situações-problema, pois muitos alunos deixaram vários itens, principalmente os itens B e C, em branco. Enquanto outros alunos apresentaram soluções sem fundamento algum, o que mostra uma grande deficiência quando se trata de situações-problema mais complexas, como se pode observar na figura 46 a seguir.

Figura 47: Exemplo de uma resolução feita por um aluno do 7º ano.

Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticaba restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.



a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?

b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas?
Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?

c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

Você entende o que foi pedido na questão? Sim ______Não X

Nível de dificuldade: ____fácil ____ médio X difícil

a) $= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{10} \times 2 = 20$

b = 10 jabuticabas para cada um

c havia na vasilha 50 jabuticabas

Fonte: Dados da pesquisa.

6 Considerações finais

Como ponto de partida, o presente estudo objetivou apresentar um contexto histórico sobre seu tema central, Números Racionais Fracionários, o qual dialoga com a abordagem metodológica nos dias atuais, orientada pela prática de contextualização. Apesar da inegável importância da abordagem histórica do tema para o trabalho aqui apresentado, seu destaque maior foi a resolução de problemas com base no referencial teórico contido nos documentos oficiais dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Além disso, com a intenção de compreender melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, buscou-se investigar e identificar os erros apresentados na resolução de questões trazidas pela Olimpíada Brasileira de Matemática. Tal fato foi verificado através de pesquisa feita por observação - técnica de coleta de dados que não consiste em apenas ver e ouvir, mas também examinar fatos e fenômenos que se deseja estudar.

A matemática faz parte da história do ser humano, pois foi construída ao longo dos séculos, está viva, dinâmica e em constante transformação. Ao revelar a matemática como mecanismo de construção do ser humano ao longo da história da humanidade e não como um conhecimento isolado, criam-se condições para que o processo de uma aprendizagem torne-se mais significativo. Assim, a História da Matemática pode ser usada em sala de aula, destacando-se as relações existentes entre ela e outras ciências, como por exemplo, nas artes, na cultura e na vida dos povos, como fora mostrado no início desse trabalho. Dessa forma, a abordagem por meio da História da Matemática pode contribuir para motivar os alunos a observar o modo como se deu a evolução das ideias matemáticas e procurar reproduzir, durante as aulas, passagens da evolução. Afinal, a Matemática é construída continuamente pelos alunos a cada novo aprendizado.

Embora os alunos não encontrem muitas dificuldades quando os exercícios se tratam de simples reprodução de conceitos, bem como na memorização ou na mecanização de outros tantos, a situação ganha um aspecto diferenciado quando exige interpretação e raciocínio lógico. Eis o porquê do destaque ao assunto principal deste trabalho - Números Racionais Fracionários - que foi capaz de comprovar as grandes deficiências apresentadas por muitos alunos. Diante do aspecto exposto, constata-se, sem dúvida, a necessidade da prática da contextualização, trazendo o conhecimento matemático para a vida do aluno.

O trabalho possibilitou ainda a verificação de que, antes da busca pela compreensão de conceitos e de suas propriedades, deve-se introduzir os conteúdos matemáticos instigando o aluno ao hábito de pensar, cultivar ideias bem como incentivá-lo à problematização com a busca de respostas de seus próprios mistérios e questionamentos. Deve-se quebrar o padrão no pensamento dos alunos de que os conhecimentos matemáticos são distantes e ineficazes em suas vidas. Todos os conceitos de números fracionários têm sua importância e devem ser trabalhados partindo da realidade que os cerca.

Portanto, a resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidades, tais como: observação, reflexão, comunicação e argumentação, além de impelir formas de raciocínio como intuição, dedução e estimativa. Ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro didático, o aluno que constrói sua própria estratégia de resolução desenvolve a capacidade de aprender a aprender, habituando-se a determinar por si próprio, respostas às questões que o inquieta, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana.

Através da análise dos resultados obtidos com a aplicação dos testes de conhecimentos, foi possível perceber que os alunos não apresentam grandes dificuldades quando se refere à mecanização das operações com números fracionários, mas que há um longo caminho a seguir quando se trata de resoluções de situações problema, visto que, os alunos tiveram baixo desempenho em quase todas as questões que envolviam interpretação e raciocínio matemático mais elaborado trazidas pelo teste principal. Neste caso, a porcentagem de acerto foi menor que 25%, o que mostra que as questões trazidas pela OBMEP ainda estão fora da realidade e da compreensão de grande parte dos alunos de escolas públicas. Naturalmente, com base nessa análise, o professor deve refletir sobre o que e como está ensinando e reavaliar sua prática em sala de aula

A partir das sugestões contidas nos PCN's, podemos resgatar a curiosidade e o espírito crítico dos alunos, procurando desenvolver as habilidades necessárias à vida de todos e que os mesmos não conseguem adquirir com prazer atualmente. Procurar contextualizar os conteúdos para que estes façam sentido para os alunos é de extrema importância, pois é muito melhor conseguirmos assimilar um conteúdo que faz parte da nossa realidade a outro que não tem nenhum sentido em nossa vida.

Pode-se concluir que os principais pontos abordados neste trabalho revelam a necessidade não apenas de rever a metodologia aplicada no ensino da matemática, como também da promoção de mudanças que venham facilitar a aprendizagem desse conteúdo de tão grande importância e utilização histórica. Espera-se que os resultados aqui apresentados possam contribuir para a melhoria de algumas falhas existentes no processo de ensino - aprendizagem dos números fracionários, levando os educadores a uma profunda reflexão sobre o “modo de ensinar” esses números.

A partir dos resultados e discussões do presente trabalho, torna-se evidente a necessidade de estudos mais aprofundados a respeito das estratégias de ensino para os números fracionários, como atividades lúdicas e jogos, com o propósito de aproximar ainda mais a matemática da realidade do aluno.

Esse estudo, certamente, contribui para a formação dos professores no sentido de melhor prepará-los para buscar uma efetiva aprendizagem de seus alunos e ainda de instiga-los a investigar e desenvolver novas metodologias de ensino para os números fracionários.

7 Referências Bibliográficas

[1] Presidência da República Casa Civil. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm> Acesso em 10 de Maio de 2017.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Último acesso em 26 de Setembro de 2017

[3] BROLLEZZI, Antônio Carlos. **Frações e Decimais: História e Significado**. CAEM/USP, 1996.

[4] IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos**. Tomo 1. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

[5] Euclides, **in COMMANDINO**. São Paulo: Edições Cultura, 1944. Disponível em: < http://livros01.livrosgratis.com.br/be00001a.pdf>

[6] Avaliações **Olimpíadas Brasileiras de Matemática da Escola públicas e Particulares.** Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>

[7] MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Orientação Pedagógica: Conjunto de Números Racionais.** Currículo Básico Comum – Matemática Ensino Fundamental. Centro de Referência Virtual do Professor. Disponível em: < http://crv.educacao.mg.gov.br>. Acesso em: 15 de Maio de 2017.

[8] BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 6º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2011.

[9] GIOVANNY JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**.7º ano. São Paulo: Editora Renovada FTD, 2009.

[10] BOYER, C. B. **História da Matemática**. [Tradução de Helena Castro] 3º Ed. – São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2012.

[11] BERTONI, NILZA EIGENHEER. Da forma fracionária à decimal: A lógica do processo. Explorando o ensino da Matemática. Artigos VOL.I. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

[12] BAKOS, Margaret Marchiori (org.). **O Imperador na Terra dos Faraós**. Revista Nossa História, São Paulo, jan. 2005, n. 15, v. 2.

8 Anexos

8.1 Anexo I: AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO.

Cara diretora da escola Estadual Coronel Xavier Chaves,

Eu, Wagner Cardoso Santos, Professor da Escola Estadual Coronel Xavier Chaves desde 2015 e aluno do Curso de Pós-graduação Stricto Sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, junto à Universidade Federal de São João Del Rei, solicito autorização de V. Exa. para realizar uma pesquisa de campo junto a alunos do 6º e 7º anos da escola.

A pesquisa tem como objetivo investigar e analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos do 6º ano e 7º ano em relação aos Números Racionais Fracionários. Serão utilizados como instrumentos de coleta de dados alguns questionários e testes no qual o dia e o horário serão previamente agendados. Os testes serão aplicados na própria escola em horário de aula.

Para realizar essa pesquisa, queremos solicitar o seu consentimento, garantindo que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina dos alunos nem das aulas de Matemática. Os dados coletados nos questionários e nas entrevistas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude dos envolvidos.

A pesquisa será realizada por mim, professor mestrando Wagner Cardoso Santos, com acompanhamento do professor Dr. Ronaldo Ribeiro Alves. Solicitamos a sua autorização para a realização do estudo e pesquisa para produção do trabalho. Caso aceite assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua, a outra é do pesquisador responsável.

Agradecemos desde já sua atenção!

Atenciosamente,

Orientador: Professor Dr. Ronaldo Ribeiro Alves
ronribal@ufsj.edu.br

Mestrando: Wagner Cardoso Santos
wcsantos85@gmail.com

Eu, ____ na função de ____, na escola ____, autorizo que a pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, seja realizada. ______________________________, ____ de____, de 2017 __________________________________ Assinatura

8.2 Anexo II: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS DE ALUNOS DO 6 ANO E 7 ANO DA ESCOLA ESTADUAL CORONEL XAVIER CHAVES.

Estamos convidando seu filho(a) para participar de uma pesquisa a ser realizada na Escola Estadual Coronel Xavier Chaves, com o tema “Números Racionais Fracionários: Mesopotâmia à OBMEP”. Para tanto, necessitamos do seu consentimento.

Esta pesquisa será realizada para fazer meu Trabalho de Conclusão de Curso do Curso Pós-graduação stricto sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que estou cursando junto à UFSJ. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento profissional de professores da Educação Básica.

A pesquisa tem como objetivo investigar e analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos do 6º ano e 7º ano em relação aos números racionais fracionários. Serão utilizados como instrumentos de coleta de dados alguns questionários e testes no qual o dia e o horário serão previamente agendados. Os testes serão aplicados na própria escola em horário de aula.

A identidade de seu filho(a) será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número.

A pesquisa será realizada por mim, professor mestrando Wagner Cardoso Santos, com acompanhamento do professor Dr. Ronaldo Ribeiro Alves. Solicitamos a sua autorização para a realização do estudo e pesquisa para produção do trabalho. Caso aceite assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua, a outra é do pesquisador responsável. Em caso de recusa você não será penalizado(a) de forma alguma.

Agradecemos desde já sua atenção!

Atenciosamente,

Orientador: Professor Dr. Ronaldo Ribeiro Alves
ronribal@ufsj.edu.br

Mestrando: Wagner Cardoso Santos
wcsantos85@gmail.com

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO

Eu,
____,
RG/CPF____, abaixo assinado, concordo que meu filho(a) participe do estudo como sujeito. Fui informado sobre a pesquisa e seus procedimentos e, todos os dados a seu respeito não deverão ser identificados por nome em qualquer uma das vias de publicação ou uso. Foi-me garantido que posso retirar o consentimento a qualquer momento.

Município de ____________________, de _____ de ________de 2017

Nome do responsável:

____

Assinatura:

____

8.3 Anexo III: Questionário Aplicado.

Caro aluno, este instrumento é parte de uma pesquisa cujo objetivo é analisar o processo ensino aprendizagem dos números fracionários no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. O trabalho faz parte da Dissertação de mestrado profissional - PROFMAT - pela Universidade Federal de São Joao del rei – UFSJ

Marque com um "X" sua resposta	
Ano de Escolaridade	6 ano _______ 7 ano _______
Idade	11_______ 12_______ 13_______ 14_______ 15_______
Sexo	Masculino_______ Feminino_______
Números de reprovações	0_______ 1_______ 2_______ Mais de 2 _______
Apresenta dificuldades na aprendizagem dos números racionais na forma fracionaria?	Sim _______ Não _______ Não sei responder _______
Considera o ensino da matemática importante para seu dia a dia?	Sim _______ Não _______ Não sei responder _______

8.4 Anexo IV: Primeiro Teste de Conhecimento.

Caro aluno, este primeiro teste é parte de uma pesquisa cujo objetivo é analisar o processo ensino aprendizagem dos números fracionários no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. O trabalho faz parte da Dissertação de mestrado profissional - PROFMAT - pela Universidade Federal de São Joao del rei – UFSJ.

RESOLVA AS QUESTÕES APRESENTANDO OS CÁLCULOS DE FORMA LEGÍVEL. Caro aluno, não é necessário se identificar

1) $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=$

---

2) $2.\frac{1}{8}=$

---

3) $1-\frac{1}{4}=$

---

4) $\frac{3}{4}:\frac{3}{8}$

---

5) 8% de 250

8.5 Anexo V: Teste de Conhecimento Principal

Caro aluno, este segundo teste é parte de uma pesquisa cujo objetivo é analisar o processo ensino aprendizagem dos números fracionários no 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. O trabalho faz parte da Dissertação de mestrado profissional - PROFMAT - pela Universidade Federal de São Joao del rei – UFSJ. Não precisa se identificar

Resolva as questões de forma legível. Não é necessário se identificar.

Questão 1

Uma torneira enche um tanque em oito horas e outra torneira enche o mesmo tanque em quatro horas. Ao meio dia, a primeira torneira foi aberta com o tanque vazio e, duas horas depois, a segunda torneira também foi aberta. A que horas o tanque ficou cheio?

A) 14h
B) 14h 30min
C) 15h
D) 15h 30min
E) 16h

Você entende o que foi pedido na questão? Sim ______Não____

Nível de dificuldade: ____fácil ____ médio____difícil

Questão 2

Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde.

Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

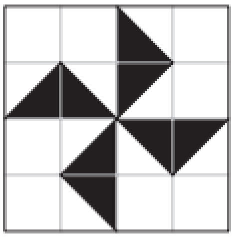
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

Você entende o que foi pedido na questão? Sim ______Não____

Nível de dificuldade: ____fácil ____ médio____difícil

Questão 3

A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?



A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{16}$

Você compreende o que foi pedido na questão? Sim ______Não____

Nível de dificuldade: ____fácil ____ médio____difícil

Questão 4

Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticaba restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?

b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas?
Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?

c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?