Universidade Federal de São João Del Rei
Departamento Matemática e Estatística
Câmpus de São João Del Rei

O Ensino de Cálculo no Ensino Médio

Joice Stella de Melo Rocha

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João Del Rei , Câmpus de São João Del Rei.

Orientadora
Profa. Dra. Andréia Malacarne

2018

Rocha, Joice Stella de Melo
O Ensino de Cálculo no Ensino Médio / Joice Stella de Melo Rocha- São João Del Rei: [s.n.], 2018.
62 f.: fig., tab.

Orientadora: Andréia Malacarne

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João Del Rei , Departamento Matemática e Estatística.

1. Cálculo Diferencial e Integral, Ensino Médio, Derivada. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do DEMAT
Câmpus de São João Del Rei

TERMO DE APROVAÇÃO

Joice Stella de Melo Rocha

O Ensino de Cálculo no Ensino Médio

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João Del Rei , pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Andréia Malacarne
Orientadora

Profa. Dra. Viviane Pardini Valério
Departamento Matemática e Estatística - UFSJ

Profa. Dra. Andrea Cristiane dos Santos Delfino
Departamento Matemática e Estatística - UFSJ

Profa. Dra. Andreza Cristina Beezão Moreira
Departamento de Ciências Exatas - UFLA

São João Del Rei, 28 de novembro de 2018

À minha filha Vittória pelo incentivo, amor e por entender minha ausência.
Ao meu pai sempre vivo no meu coração.

Agradecimentos

"A Deus toda honra e toda Glória! Senhor, obrigada por me conduzir com segurança pelas estradas, por ser Luz na minha vida e por todas as pessoas maravilhosas que encontrei nesta caminhada."

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFSJ, pelos ensinamentos.

À professora Andréia Malacarne, pela paciência e grande responsável pela realização deste trabalho.

À professora e coordenadora Viviani Pardini Valério, pelo incentivo e pela excelente atuação profissional de forma tão humana.

À técnica administrativa do PROFMAT da UFSJ Kátia Milena Mendonça Rios, pelo incentivo e ajuda constante durante todo curso.

Aos colegas da turma PROFMAT 2017 da UFSJ, pelo convívio fraterno.

À minha família, por torcerem pela realização deste sonho.

Ao Gustavo Teixeira de Castro, pelo incentivo e pela valiosa ajuda com o LaTeX.

O Sonho é que leva a gente para frente. Se a gente for seguir a razão, fica aquietado, acomodado.

Ariano Suassuna

Resumo

O presente trabalho é uma análise da possibilidade do ensino de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. A introdução destes conceitos tem como objetivo o desenvolvimento de um conhecimento prévio do conteúdo, facilitando o aprendizado nos cursos superiores, além da importância de sua aplicabilidade na resolução de diversos problemas. Para tanto, foi feito um levantamento bibliográfico sobre a história do ensino de Cálculo no Brasil e os motivos pelos quais este conteúdo não compõe mais os programas curriculares desta etapa de ensino. Além disso, foram elaboradas atividades, referentes ao conteúdo derivada, que poderiam ser utilizadas em aulas no Ensino Médio.

Palavra-chave: Cálculo Diferencial e Integral, Ensino Médio, Derivada.

Abstract

The present research is an analysis of the possibility of teaching Differential and Integral Calculus concepts in high school.The introduction of these concepts aims to develop a previous knowledge of the content, facilitating the learning in the higher courses, beyond the importance of its applicability in the resolution of several problems A bibliographical survey was carried out on the history of the teaching of calculus in Brazil and the reasons for this content no longer compose the curricular programs of this teaching stage. In addition, activities related to the derived content, which could be used in high school classes, were elaborated.

Keywords: Differential and Integral Calculus, High School, Derived.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos conteúdos mais importantes devido à sua influência e aplicabilidade em muitas áreas da Ciência e Tecnologia como, por exemplo, na Física, Administração, Engenharias e Ciências da Computação. Por isso, é comum vê-lo constar na grade curricular dos mais diversos cursos no Ensino Superior. No entanto, o Cálculo Diferencial e Integral é, também, uma disciplina com grande índice de reprovação nos cursos superiores.

Segundo Barufi (1999 apud Rezende, 2003, p.1) :"...o índice de não aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%". Rezende (2003), em uma pesquisa feita na Universidade Federal Fluminense - UFF, mostra que o percentual de reprovação na disciplina durante os anos de 1996 a 2000 variou entre 45% e 95%, que é sem dúvidas um resultado preocupante. Rafael (2017) realizou uma pesquisa em uma faculdade particular do Rio de Janeiro nos cursos de Engenharia e constatou que os índices de não aprovação no período de 2013 a 2015 variaram de 35% a 50%.

Em geral, os cursos superiores, que possuem o Cálculo Diferencial e Integral nos seus programas de ensino, ofertam a disciplina de Cálculo I já no primeiro período. Devido ao resultado desastroso no decorrer do curso, os professores relatam a "falta de base"com que os alunos iniciam o curso como uma das principais causas para tal resultado.

Rafael (2017, apud Machado, 2008) cita algumas possíveis causas para o desenvolvimento do cenário insatisfatório do ensino-aprendizagem de Cálculo:

> [...] as causas de natureza cognitiva, isto é, os alunos não apresentam estruturas cognitivas capazes de compreender as complexidades do Cálculo; as causas de natureza didática, segundo esta concepção as dificuldades estariam, em encontrar a metodologia mais adequada ao ensino e, por último, as dificuldades de natureza epistemológica, que se baseiam na ideia que as deficiências referentes ao ensino de Cálculo são anteriores ao espaço-tempo local do ensino de Cálculo. (Rafael, 2017, apud Machado, 2008)

Ainda sobre a "falta de base"com que os alunos ingressam no ensino superior, Reis (2001) diz que:

> As causas são muito conhecidas, principalmente a má formação adquirida no 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante inseguros. (REIS, 2001, p.4)

Por esse motivo, as instituições de ensino superior propõem algumas soluções como por exemplo, a que Rezende (2003) mostra em seu trabalho:

> Outro instrumento "normal"bastante usual nas instituições de ensino superior para o enfrentamento dos resultados catastróficos no ensino de Cálculo é a realização de cursos "preparatórios"para um curso inicial de Cálculo. É o caso por exemplo, do curso de "Cálculo Zero", "Pré- Cálculo", "Matemática Básica", já tão familiares no nosso meio acadêmico. (REZENDE, 2003, p.13)

Muitos pesquisadores sugerem o ensino de Cálculo já no Ensino Médio, com o objetivo de facilitar o entendimento do conteúdo além de sua aplicabilidade na resolução de problemas.

Segundo Machado (2015): "o melhor jeito de corrigir esse problema é justamente no Ensino Médio, onde o estudante conheceria as ideias mais importantes do cálculo por meio tão somente de funções simples, especialmente as funções polinomiais".

Para Ávila (1991), "o Cálculo traz ideias novas, diferentes do que o aluno do 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno".

André (2008, apud Rezende, 2003) relata sobre a importância de estudar os conceitos fundamentais do cálculo no Ensino Médio:

> [...]Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem "do atual"ensino de Cálculo esta "fora"dele e é "anterior"inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata de apenas da tão propalada "falta de base"dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores.[...]Assim, ao invés de se fazer menção a uma "falta de base"dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, é estabelecer os conceitos básicos e necessários para aprender as ideias básicas do Cálculo.[...](REZENDE, 2003, p.31)

Mas como ensinar Cálculo para alunos do Ensino médio? Seria possível? Uma vez que neste nível de ensino, os alunos são ainda mais imaturos e possuem menos conhecimento.

O ensino de Cálculo já fez parte do programa do Ensino Médio e é inquestionável a sua contribuição em vários conteúdos e disciplinas. Ávila (1991) resume a história do ensino de Cálculo no Brasil:

> [...]fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5ª à 8ª série mais o 2º grau era o curso ginasial de 5 anos, seguidos por dois anos de pré-universitários, já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia.(ÁVILA, 1991, p.1)

De acordo com Ávila (1991), "Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual".

Incluir o Cálculo no Ensino Médio, além de facilitar o aprendizado da disciplina, contribui para a formação geral dos alunos, uma vez que este conteúdo é uma ferramenta poderosa que pode ser aplicada com facilidade, já neste nível de ensino. Os conceitos de Cálculo bem entendidos torna, muitas vezes, o aprendizado mais prazeroso, pois simplifica resoluções que sem ele seriam mais trabalhosas.

É possível, desde cedo, desenvolver nos alunos a percepção dos conceitos básicos do Cálculo e dessa forma auxiliar na compreensão da disciplina. De acordo com Machado (2015): "Todo o Cálculo nasce de uma única ideia fundamental: o de usar uma linha reta para servir de aproximação a uma linha que não é tão reta. E dessa ideia surgem outras duas, que são a ideia de integral e derivada. Apesar dos nomes técnicos, são duas ideias muito simples".

Estas ideias são simples, e muito relevantes para o ensino. Estimular no aluno o desenvolvimento destes conceito de forma intuitiva, tendo em vista sua utilidade, inclusive em outras áreas, facilitaria a compreensão da disciplina. E não é difícil encontrar exemplos de aplicação que possam instigar o discente a chegar sozinho nas definições necessárias para prosseguir em um curso de Cálculo.

A inserção dos conceitos básicos de Cálculo já no Ensino Médio poderia ser dificultada pela possibilidade de uma mudança dos programas curriculares. Mas não é esse o caso; os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam sobre a necessidade de organizar estes conteúdos e de deixar de trabalhá-los de forma isolada.

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de reta e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.(PCN/EM, 2000, p.43)

Dessa forma, pode-se introduzir os conceitos de Cálculo junto com os conteúdos já existentes de maneira contextualizada e interdisciplinar. Ávila (1991) afirma que "para podermos mostrar ao aluno a importância do conceito de função, temos de ensinar-lhe os conceitos de derivada e integral e para que servem esses conceitos."Nos Parâmetros Curriculares Nacionais há ainda a informação de que é possível executar a ideia de Ávila:

> Se julgar mais apropriado, uma escola poderá iniciar algum trabalho de taxas de variação em Matemática na primeira série, juntamente com as funções; outra escola, por sua vez, pode atribuir à física ou à Química o desenvolvimento de taxas no tempo, nas velocidades espaciais e de reação de que fazem uso, adiantando um trabalho que pode ser desenvolvido mais tarde em Matemática de forma mais geral.(PCNs+, 2002, p.135)

Outra questão relevante a ser considerada é como poderia ser feita a introdução destes conceitos. Estes podem ser trabalhados de acordo com sua aplicação e, sobretudo, sem formalismo e rigor, uma vez que os alunos do Ensino Médio ainda não possuem maturidade para o entendimento formal. O foco deve ser na ideia fundamental, que consiste, basicamente, em apresentar algo de forma simples, com exemplos do cotidiano. Por exemplo, pode-se citar a ideia fundamental de integral:

> Para calcular a área sob gráficos, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia de área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos.(MACHADO, 2008, p.3)

Ainda, pode-se falar de outros conceitos do Cálculo, como derivada por exemplo, relacionando a sua aplicabilidade como ferramenta para outras áreas com o uso da ideia fundamental de taxa de variação:

> É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado e as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção da derivada, interpretada como velocidade instantânea. (ÁVILA, 1991, p.4)

Sobre a grande quantidade de conteúdos já existentes nos programas curriculares, os Parâmetros Curriculares Nacionais esclarecem que, além de relacionar as ideias dos conteúdos trabalhando de forma integrada, existem outros assuntos não tão importantes para a formação do aluno que podem ser deixados de lado.

> [...]o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizadas. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores. (PCN/EM, 2000, p.43)

Para exemplificar como a introdução de conceitos de Cálculo no Ensino Médio pode ser feita, foi desenvolvida neste trabalho uma proposta com atividades para aplicar as noções de derivada já no primeiro ano do Ensino Médio de forma simples, sem o formalismo e rigor ensinados nos cursos superiores. O objetivo é inserir seus conceitos básicos de maneira intuitiva aplicados em vários exemplos práticos, possibilitando ao aluno um maior aproveitamento, inclusive nos outros conteúdos ensinados. O conceito de derivada foi escolhido como tema para a proposta por estar presente no cotidiano das pessoas através das taxas de variação, como taxa de crescimento populacional, por exemplo, e dessa forma, a interdisciplinaridade, além de necessária, facilita o entendimento e motiva o aluno na busca do conhecimento.

Este trabalho, além da proposta para aplicação da derivada, apresenta no segundo capítulo uma reflexão sobre o Ensino de Cálculo no Ensino Médio no Brasil, fazendo um estudo sobre sua história, viabilidade da execução dos seus conceitos no Ensino Médio e inserção nos conteúdos programáticos.

O terceiro capítulo é destinado ao estudo da derivada, definição formal, interpretação geométrica e regras de derivação, com o intuito de embasar as atividades desenvolvidas de forma clara e objetiva.

Por fim, no quarto capítulo serão expostos roteiros de atividades que estimulam o aprendizado e aplicação da derivada junto às funções de primeiro e segundo graus. São atividades didáticas que envolvem conceitos de taxa de variação, reta tangente, problemas de máximos e mínimos. E a fim de ilustrar a interdisciplinaridade, serão apresentados exemplos envolvendo velocidade instantânea.

2 O Cálculo no Ensino Médio

2.1 História do Ensino de Cálculo no Brasil

O ensino da Matemática no Brasil sofreu diversas alterações ao longo dos anos, junto com as mudanças ocorridas na educação. Começou com os jesuítas em 1573, com a fundação de um colégio no Rio de Janeiro. Os jesuítas dominavam o ensino, que tinha como objetivo principal formar novos servos para a igreja. Portanto, somente homens tinham acesso. Nesta época, a Matemática era voltada apenas para os estudos superiores desenvolvidos nos cursos de Filosofia, Ciências e Artes, mas era dada pouca importância para este conteúdo.

No final de 1759 houve a expulsão dos jesuítas e o ensino passou pela primeira mudança: surgiram aulas de disciplinas isoladas que não possuíam um planejamento e nem professores com formação específica. Estas aulas eram denominadas "aulas régias" que, apesar do fracasso do modelo e de não atingirem muitas pessoas, modificou os conteúdos escolares incluindo novas disciplinas como, por exemplo, Aritmética e a Álgebra. Também, nesta época, foram criadas novas escolas, mas não incluíam o ensino da Matemática.

Mais tarde, em 1837, foi criada a primeira escola secundária pública no Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II. Neste momento, aconteceu a primeira mudança na Matemática: foram incluídas as disciplinas Aritmética, Geometria e Álgebra nos programas das oito séries que compunham o ensino desta época.

A primeira alteração significativa no ensino brasileiro ocorreu em 1890, quando o primeiro ministro Benjamin Constant decretou a eliminação de disciplinas tradicionais, latim e grego, por exemplo, e incluiu o ensino da Matemática abstrata e concreta. A partir daí, o Cálculo Diferencial e Integral passou a compor os conteúdos ensinados.

Em 1931, houve a reforma Francisco Campos, que dividiu o ensino em dois ciclos: o fundamental, com duração de cinco anos, e o complementar, com duração de dois anos. O ensino complementar preparava para o ingresso no Ensino Superior e era dividido em três modalidades: o pré-jurídico, pré-médico e pré-politécnico. O ensino de Cálculo figurava no pré-médico e pré-politécnico, com noções de limite e derivada.

Com a Reforma Capanema, que aconteceu entre 1935 e 1945, o então ministro da Educação e Saúde, Gustavo Capanema alterou novamente a estrutura do ensino secundário, que transformou o curso complementar em dois outros cursos: Clássico e Científico e ambos com duração de três anos.

Segundo Araújo (2016), nos programas para os cursos Clássicos e Científicos da Reforma Capanema não aparece nenhuma referência ao conteúdo do Cálculo Integral, nem mesmo para o curso Científico, que possui um grupo maior de assuntos em Matemática em relação ao curso Clássico. Há apenas referência de dois assuntos: os estudos de variações e das derivadas. Somente em 1951, o conteúdo de integrais e primitivas retornam oficialmente aos programas de ensino.

Mas, a partir de 1960, começou no Brasil o movimento da Matemática Moderna, que já acontecia em outros países. O objetivo deste movimento era aproximar o ensino das escolas com a pesquisa, contribuindo assim para o desenvolvimento tecnológico. Para isso, passou a ser implantado mais rigor e formalismo na exposição dos conteúdos. Foi proposta a inclusão de conteúdos que consideraram importantes, bem como a retirada de outros. Foi neste momento que o Cálculo começou a ser retirado das escolas secundárias, pois, segundo Ávila (1991, p.2), "não haveria mesmo espaço para tanta coisa nos programas, já que o rigor e formalismo exigiam o ensino da teoria dos conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos que toma tempo."

A retirada do Cálculo foi contraditória a um movimento que pregava a modernização do ensino da Matemática, uma vez que o Cálculo sempre foi o que há de mais moderno. E devido à sua aplicabilidade em diversas áreas vem, desde sua descoberta, contribuindo para o desenvolvimento tecnológico e científico.

Desta forma, prosseguiremos um estudo sobre como reinserir o Cálculo novamente no Ensino Médio, visto que historicamente isso é possível.

2.2 É possível inserir o conteúdo de Cálculo nos programas de Matemática?

O Ensino Médio é considerado a última etapa da educação básica. É nesta fase que os alunos são preparados para o ingresso nos cursos superiores.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o ensino de Ciências e Matemática deve complementar o que foi iniciado no Ensino Fundamental. Entretanto, os programas do Ensino Médio são extensos e muitos professores não conseguem preparar suas aulas de maneira que possibilite cumprir todos os conteúdos propostos.

Então, como inserir o conteúdo de Cálculo? Não seria mais um problema para professores e alunos? Para Ávila (1991, p.4)

> [...] os atuais programas estão isto sim, mal estruturados. A reforma dos anos 60 introduziu nos programas um pesado e excessivo formalismo. Não obstante as modificações que têm sido feitas nos últimos dez ou quinze anos, num esforço de melhoria do ensino, muito desse formalismo persiste em muitos livros e é responsável pelo inchaço desnecessário dos programas (Ávila,1991, p.4).

Em 2000, o currículo de Matemática foi revisto e sistematizado em três eixos para serem desenvolvidos nos três anos do Ensino Médio. São eles:

1. Álgebra (números e funções)
2. Geometria e Medidas
3. Análise de Dados

> Cada tema estruturador é composto de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetivos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino cada um deles foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização (PCN+, 2002, p.120).

Os PCN+ propuseram, dentro do eixo Álgebra, a unidade temática variação de grandezas e trigonometria, no entanto, observa-se que este tema é pouco trabalhado nas escolas. E neste sentido, observa-se que poderiam ser incluídas aí as noções de derivada, dada sua aplicação como taxa de variação. Este assunto poderia, inclusive, ser trabalhado já no primeiro ano junto com as funções de 1º e 2º grau.

Ávila (1991, p.4) afirma que "gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva, num esforço de poucos resultados práticos. É antipedagógico introduzir conceitos que não estejam sendo solicitados no desenvolvimento da disciplina". Esta afirmação vem de encontro às orientações dos PCN+, que diz:

> É importante evitar detalhamentos ou nomenclaturas excessivos. Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no Ensino Médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologaritmos, característica e mantissa.(PCN+, 2002, p.120).

Machado (2015) exemplifica a questão da reorganização dos conteúdos e do que realmente contribui para a formação do aluno:

> [...]na escola, tratamos os polinômios do nível da técnica - fatoração de polinômios, divisão de polinômios, etc. Tudo técnica. Ninguém entende bem o que está fazendo, ou por que aquilo é importante. Contudo, as funções polinomiais são as mais fáceis de estudar com as ideias de cálculo, e um curso de cálculo simples, focando em polinômios, daria ao aluno a justificativa para estudar muitas outras ideias e técnicas de um jeito mais natural.(MACHADO, 2015, p.1)

Sob a análise de correlação entre os conteúdos ensinados, é possível inserir todas as ideias de Cálculo junto com conteúdos já existentes no Ensino Médio. A noção de limite, por exemplo, pode ser inserida junto com o estudo de sequências, soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, ou ainda, no estudo das funções exponenciais, observando o comportamento da função para valores muito grandes ou muito pequenos do seu domínio, e até mesmo na representação decimal das dízimas periódicas. Já o conceito de integral seria facilmente trabalhado junto com o cálculo de áreas e as derivadas como taxa de variação instantânea, ambos em conjunto com o estudo de funções.

Machado (2015) sugere a seguinte abordagem como exemplo:

> O professor começa com a ideia mais simples, que é de integral, e com as funções mais simples, que são funções polinomiais de primeiro grau. Depois ele trabalha a ideia de derivada. E depois, a de equação diferencial. Assim, sempre trabalhando apenas com funções de grau 1, o professor passa as ideias mais importantes do cálculo. Isso dá para fazer em poucas horas.(MACHADO, 2015, p.1)

Observa-se, então, que a inclusão do Cálculo no Ensino Médio é uma questão de organização e otimização dos programas de ensino e de um olhar sob novas perspectivas do professor para o que é ensinado no Ensino Médio. É preciso entender que a construção do conhecimento matemático envolve a formação e percepção das ideias que o fundamentam.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, generalizar para muitas outras ações necessárias à sua formação.(PCNs+, 2002, p.111)

2.3 O que Ensinar?

Quando fala-se do ensino de Cálculo no Ensino Médio, o primeiro e mais importante questionamento é sobre o que ensinar. Uma dúvida que surge é: os alunos terão maturidade para entender tal conteúdo que já é de difícil compreensão por parte dos alunos dos cursos superiores? Este é, justamente, um dos objetivos de inserir o ensino de Cálculo no Ensino Médio: ajudar na compreensão da disciplina nos níveis superiores. Mas de que forma isto pode ser feito?

A proposta não é antecipar o modo que o Cálculo é ensinado nas universidades, pois não resolveria o problema, uma vez que, conforme apresentado, as dificuldades com o Cálculo está relacionada a falta de conhecimento dos seus conceitos básicos. O professor da disciplina de Cálculo 1 possui a difícil tarefa de ensinar o conteúdo com todo o seu formalismo e demonstrações e, ao mesmo tempo, falar sobre ideias básicas que compõem a disciplina. O intuito é antecipar os conceitos básicos e despertar no aluno as ideias fundamentais de forma fácil e sem repetição de fórmulas prontas, para que ele saiba usá-las em problemas do cotidiano.

Segundo Machado (2015), uma ideia fundamental é composta de três características:

- É possível explicar qualquer ideia fundamental e sua importância, recorrendo à linguagem cotidiana, à linguagem do senso comum.

- Nenhuma ideia fundamental está isolada. Ela está sempre ligada a muitas outras ideias, tanto da sua área como de outras.

- Toda ideia fundamental transborda uma disciplina específica: nenhuma ideia fundamental cabe numa disciplina só.

Quando a exposição de um conteúdo é feita de forma contextualiza, interdisciplinar e com uma linguagem simples, insere-se aí a ideia fundamental. Esta é democrática; qualquer aluno pode entender uma ideia fundamental. Se é preciso usar de meios técnicos para explicar uma ideia, ela não é mais fundamental.

As ideias fundamentais do Cálculo podem ser apresentadas através de definições simples dos seus conceitos, como taxa de variação, valor médio, crescimento e decrescimento, cálculo de área de figuras planas com contornos variados, problemas de máximos e mínimos. Nestes exemplos, estão presentes as ideias de derivada e integral, expressas em aplicações que podem ser relacionadas ao cotidiano do aluno e com definições de fácil compreensão.

A intenção, neste trabalho, é introduzir a ideia fundamental de derivada, dada sua importância na compreensão de conceitos da Matemática e Física. A abordagem será simples, junto com o ensino de funções. Não será usado o estudo sobre limites, embora seja o assunto que antecede a derivada nos cursos de Cálculo. Ávila afirma que:

> [...] há também uma certa reserva quanto à derivada, que costuma ser considerada difícil e imprópria para o Ensino Médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário. (ÁVILA, 2006, p.37)

Por esse motivo, inserir os conceitos básicos de derivada já no Ensino Médio, desenvolverá no aluno, de forma natural, uma base para entender com mais tranquilidade as próximas etapas do Cálculo.

A abordagem mais formal da derivada ficará para o Ensino Superior. A proposta aqui é permitir a absorção das ideias básicas e iniciais com um conjunto de atividades que serão desenvolvidas junto com o ensino de funções, mostrando aplicações com exemplos simples e interdisciplinares.

3 Noções de Derivada

Neste capítulo, serão apresentados, de forma simples e objetiva, a definição de derivada, resultados, propriedades e algumas aplicações. Todas as informações darão suporte ao professor, para o desenvolvimento das atividades propostas no capítulo 4. Com o intuito de facilitar o entendimento, os formalismos e demonstrações serão evitados.

Não será apresentada a definição matemática precisa de limite, entretanto, seu conceito e notação aparecerão em alguns momentos do texto, sem qualquer menção mais detalhada. Para mais detalhes, inclusive sobre derivada, exemplos e demonstrações, indica-se uma leitura das referências:

1. Thomas, George B. [et.al.]. Cálculo, volume 1. 12ª Ed. São Paulo: Pearson Education do Brasill, 2012.

2. Leithold, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª Ed. 1 Vol. São Paulo: Harbra, 1994.

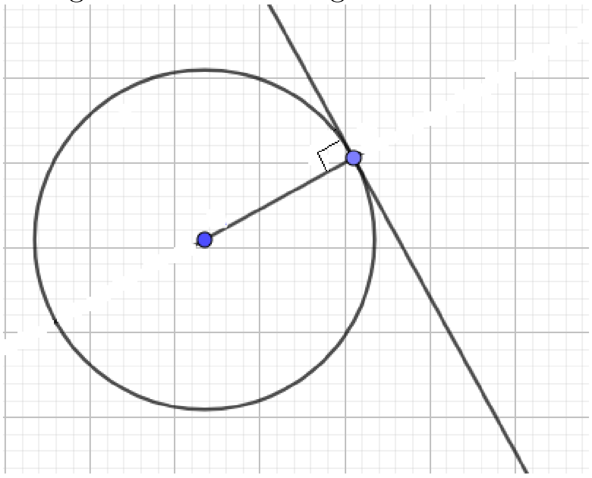
3. Stewart, J. Cálculo. Vol. 1 e 2. 6ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

3.1 A derivada e a reta tangente

O conceito de derivada surgiu do problema de encontrar a tangente à curva por um ponto arbitrário da mesma. Assim, inicialmente, será apresentado um breve estudo sobre o que é uma reta tangente.

Os gregos definiram a reta tangente a um ponto de um círculo como sendo a reta que passa por este ponto e é perpendicular ao raio.

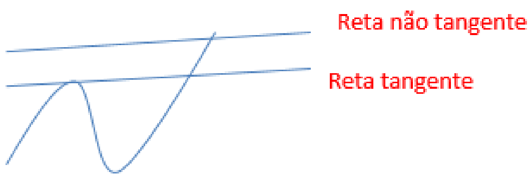
Figura 3.1: Reta Tangente ao Círculo



Fonte: Elaborada pela autora

Essa situação reflete a ideia intuitiva de tangente como sendo a reta que intercepta a curva em apenas um ponto. Mas, para curvas em geral, isto não é verdade, como pode-se ver abaixo.

Figura 3.2: Reta Tangente e Reta

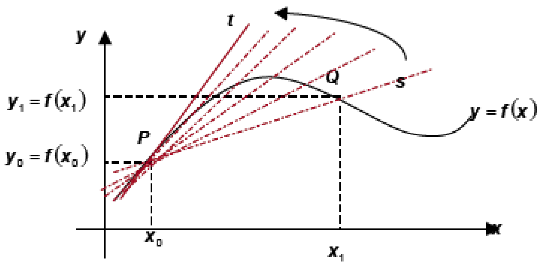


Fonte: Elaborada pela autora

A definição de tangente para uma curva qualquer foi dada muito depois, com Pierre de Fermat (1061-1665), em torno de 1630.

Considere uma curva $\mathcal{C}$ dada pela função real de uma variável real $y = f(x)$ e $P = (x_0, f(x_0))$ um ponto sobre essa curva. Considere $Q = (x_1, f(x_1))$ um outro ponto sobre essa curva e a reta secante PQ.

Figura 3.3: Gráfico y = f(x)



Fonte: Elaborada pela autora

Suponha, agora, que Q se desloque em direção a P ao longo da curva $\mathcal{C}$. Espera-se, intuitivamente, que a reta tangente em P possa ser encarada como a posição limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva em direção a P.

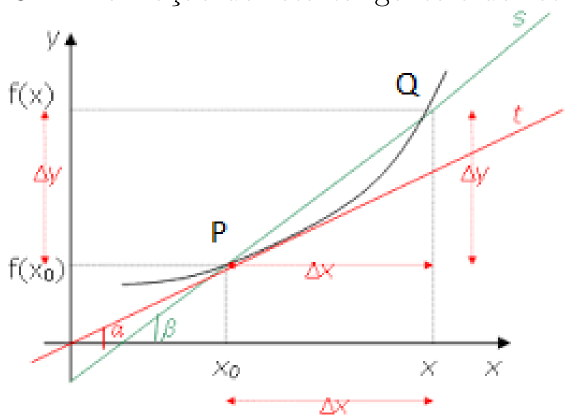
Agora, considere dois pontos distintos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x, f(x))$ da curva $\mathcal{C}$.

Sabe-se que uma reta não vertical fica determinada quando se conhece um de seus pontos e sua inclinação (coeficiente angular). A inclinação m_{sec} da reta secante PQ é dada por

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\beta.$$

Pode-se observar que, à medida que Q se aproxima de P, ou seja, à medida que x se aproxima de x_0, a inclinação m_{sec} da reta secante PQ se aproxima da inclinação $m = tg\alpha$ da reta tangente à curva em P.

Figura 3.4: Inclinação de reta tangente e de reta secante



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, se existir a reta tangente à curva dada por $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$, então sua inclinação $m = tg\alpha$ será obtida como o valor limite (caso exista) das inclinações $m_{sec}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\beta$ quando $Q = (x, f(x))$ se aproxima de P. Denota-se essa situação por

$$m = tg\alpha = \lim_{Q \to P} tg\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3.1}$$

É comum escrever $x = x_0 + \Delta_x$, com $\Delta_x \neq 0$. Com essa notação, a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$m = tg\alpha = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x}. \tag{3.2}$$

O número obtido através da equação (3.1) ou da equação (3.2) será chamado de derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0.

3.2 Definição de Derivada

Definição 3.1. *Sejam f uma função real de uma variável real e x_0 um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando existe, denomina-se derivada de f em x_0 e indica-se por $f'(x_0)$.

Com essa notação, resulta, da definição de reta tangente de (3.1), que a reta de equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Dessa forma, a derivada de f em x_0 é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

Se f admite derivada em x_0 dizemos que f é derivável em x_0. Dizemos que f é derivável em $A \subset D(f)$ se for derivável em cada $x \in A$. Diremos, simplesmente, que f é uma função derivável se f for derivável em cada ponto do seu domínio.

3.3 A Derivada e a Taxa de Variação

A derivada de uma função em um ponto também pode ser interpretada como a taxa de variação instantânea da função. Entende-se variação como a rapidez com que y varia com relação à x. De fato, o quociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ é a variação média de $y = f(x)$ entre os pontos x_0 e x.

Por exemplo, sabe-se que, se $x = x(t)$ representa a posição de um móvel que se desloca ao longo de uma reta no instante de tempo t, então a sua velocidade média v_m ao se deslocar do ponto $x(t_1)$ ao ponto $x(t)$ é

$$v_m = \frac{\Delta_x}{\Delta_t},$$

em que $\Delta_x = x(t) - x(t_1)$ é o espaço percorrido e $\Delta_t = t - t_1$ é o tempo gasto no percurso, ou seja,

$$v_m = \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}.$$

Para determinar a velocidade instantânea, isto é, a velocidade no instante t_1, $v(t_1)$, procede-se de seguinte forma: calcula-se a velocidade média $v_m = \frac{\Delta_x}{\Delta_t}$ para intervalos de tempo $\Delta_t = t - t_1$ cada vez menores, ou seja, considera-se $\Delta_t \to 0$, o que é equivalente a $t \to t_1$. Assim, temos

$$v(t_1) = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \lim_{t \to t_1} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} = x'(t_1).$$

Em outras palavras, a velocidade instantânea (ou simplesmente velocidade) no instante de tempo t_1, que é a taxa de variação instantânea do deslocamento nesse instante de tempo, é igual à derivada da função posição $x = x(t)$ em t_1.

No próximo capítulo, veremos outros exemplos de aplicação da derivada como taxa de variação.

3.4 Regras de Derivação

A fim de facilitar o uso das derivadas, serão apresentados, a seguir, algumas regras e propriedades que permitem calcular a derivada de algumas funções elementares sem aplicação direta da definição. Já que a ideia é de que, para o Ensino Médio, as regras utilizadas sejam deduzidas intuitivamente. Novamente, as demonstrações formais destas regras serão omitidas nesta seção.

(i) A derivada de uma função constante é igual a zero.

Exemplo 1: Dada a função constante $f(x) = 2$, temos que $f'(x) = 0$.

Que faz muito sentido, já que uma função constante não muda!

(ii) Seja $f(x) = x^n$, sendo n um inteiro positivo. Então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = x^2$, temos que $f'(x) = 2x$.

(iii) Se c é uma constante e f uma função derivável em x, então $(cf)'(x) = cf'(x)$. Isto é, a derivada de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes a derivada da função.

Exemplo 3: Dadas as funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = 2f(x)$, temos que

$$g'(x) = 2f'(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2.3x^2 = 6x^2.$$

(iv) Sejam f e g funções deriváveis em x. Então $f + g$ e $f - g$ também são deriváveis em x, satisfazendo:
a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
b) $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Exemplo 4: Dadas as funções $g(x) = x$, $f(x) = 2$ e $h(x) = g(x) + f(x)$, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 1.$$

Com as regras até aqui apresentadas, pode-se derivar qualquer função polinomial.

(v) Sejam f e g funções deriváveis em x. Então $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

Exemplo 5: Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x$, então

$$(f.g)'(x) = 2x.2x + 2(x^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad (f.g)'(x) = 4x^2 + 2x^2 + 2 = 6x^2 + 1.$$

(vi) Sejam f e g funções deriváveis em x. Então $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 6: Dadas as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x$, temos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(2x+3)'x - (2x+3)x'}{x^2} = \frac{2x - (2x+3)1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

desde que $x \neq 0$.

A regra a seguir permite calcular a derivada de funções compostas, chamada Regra da Cadeia.

(vii) Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \widetilde{D}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis e tais que função composta $h = f(g) : \widetilde{D}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esteja definida. Então h é derivável e h' é dada por $h'(x) = f'[g(x)]g'(x)$.

Exemplo 7: Dadas as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = f(g)$, temos que

$$h'(x) = f'[g(x)]g'(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2(2x + 1)2 = 8x + 4.$$

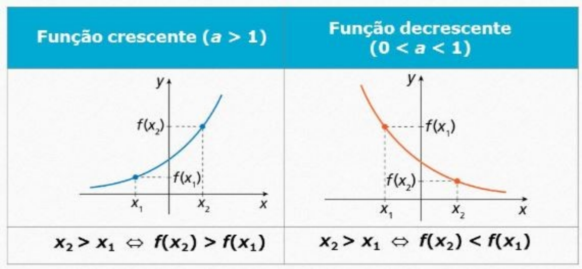
3.5 Aplicações de derivadas

Seguiremos com algumas aplicações de derivada no estudo de funções. As definições apresentadas nortearão o professor nas atividades propostas para o Ensino Médio.

3.5.1 Funções crescentes e decrescentes

Definição 3.2. *Dizemos que uma função real de uma variável real $y = f(x)$ é crescente num certo intervalo I do eixo x se, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, para quaisquer x_1, x_2 $\in I$. Analogamente, a função é dita decrescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$,para quaisquer x_1, $x_2 \in I$.*

Figura 3.5: Funções ($f(x) = a^x$) Crescente e Decrescente



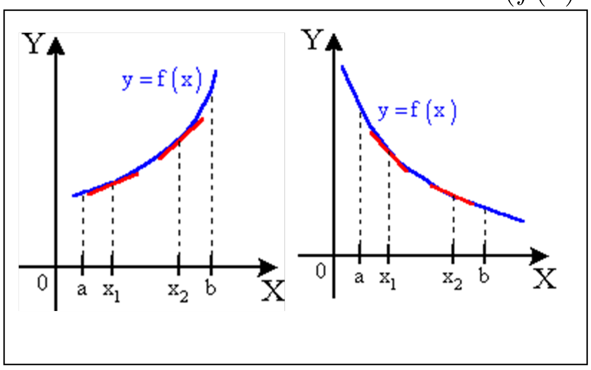
Fonte: Elaborada pela autora

Teorema 3.1. *Seja f uma função real de uma variável real contínua no intervalo I.*

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f é crescente em I.
b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f é decrescente em I.

Este resultado é geometricamente evidente se observa-se que, para uma função f ser crescente em um intervalo]a,b[, é preciso que os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f sejam positivos em todos os pontos deste intervalo. E da mesma forma, pra uma função f ser decrescente em um intervalo]a,b[é preciso que os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f sejam negativos em todos os pontos do intervalo.

Figura 3.6: Crescimento e Decrescimento ($f(x) = a^x$)



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt

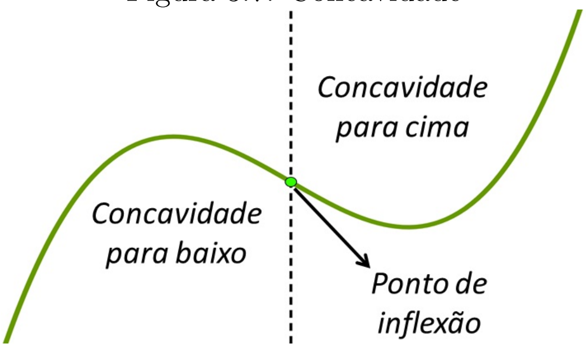
3.5.2 Concavidade e pontos de inflexão

Uma das aplicações do conceito de derivada ocorre na determinação dos pontos de inflexão sobre uma curva e na análise do sentido da concavidade desta curva definida por uma função $y = f(x)$. Para auxiliar neste estudo, inicia-se com a definição de derivada de 2º ordem.

Definição 3.3. *A derivada de $(f')'$, caso exista, denomina-se derivada de 2º ordem de f, e é indicada por f''. Assim $f'' = (f')'$. De modo análogo, define-se as derivadas de ordem superiores a 2 de f.*

O sinal da derivada de 2ª ordem de uma função nos fornece informações a respeito da concavidade do gráfico dessa função.

Figura 3.7: Concavidade



Fonte: https://www.dicasdecalculo.com.br

Se $f''(x) > 0$, então $y = f'(x)$ é uma função crescente de x. Analogamente, se $f''(x) < 0$, então $y = f'(x)$ é uma função decrescente.

Temos, assim, o seguinte resultado:

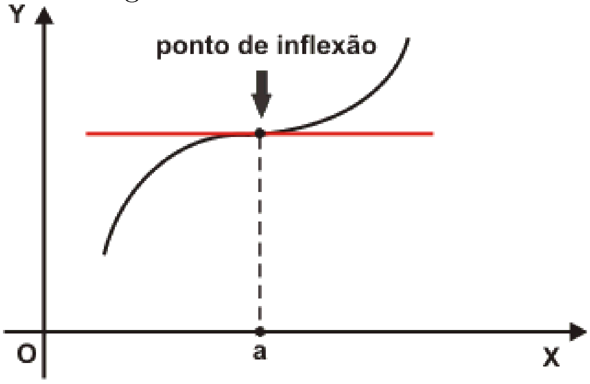
Teorema 3.2. *Seja f uma função que admite derivada de 2ª ordem no intervalo aberto I.*

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.
b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

Definição 3.4. *Seja $y = f(x)$ uma função tal que existe a derivada de 2ª ordem em $x = b$. Então, diz-se que $x = b$ é um ponto de inflexão de f se f tem concavidades contrárias nos intervalos (a, b) e (b, c).*

Observe que, como $f''(x)$ tem sinais opostos em cada lado de um ponto de inflexão $x = b$, então devemos ter $f''(b) = 0$.

Figura 3.8: Ponto de Inflexão



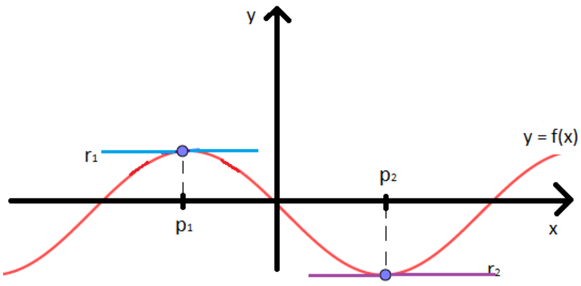
Fonte: https://www.matematica.pt

3.5.3 Máximos e Mínimos

Podemos analisar uma função real de uma variável real quanto aos seus valores extremos (máximos e mínimos) com o auxílio do conceito de derivada.

Definição 3.5. *Dizemos que $f(p_1)$ é um valor máximo relativo de f em I ou, ainda, que p_1 é um ponto de máximo relativo de f em I, se $f(x) \leq f(p_1)$ para todo x em I. Se $f(x) \geq f(p_2)$ para todo x em I, dizemos que $f(p_2)$ é um valor mínimo relativo de f em I, ou que p_2 é um ponto de mínimo relativo de f em I.*

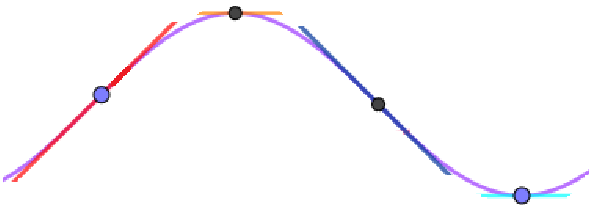
Figura 3.9: Máximos e Mínimos



Fonte: Elaborada pela autora

Podemos determinar os pontos de máximo e mínimo relativos de uma função f estudando o seu crescimento e decrescimento, pois uma curva só pode "mudar"de crescente para decrescente passando por um pico, onde o coeficiente angular da reta tangente é zero, caso a reta tangente exista nesse ponto. Da mesma forma, uma função só pode mudar de decrescente para crescente passando por ponto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ ou tal que f' não existe nesse ponto. Assim, os pontos x_0 no domínio de f para os quais $f'(x_0) = 0$ ou f' não existe serão os candidatos a pontos de máximos ou mínimo relativos de f. Esses pontos são chamados de pontos críticos de f.

Figura 3.10: Máximos e Mínimos (crescimento e decrescimento)



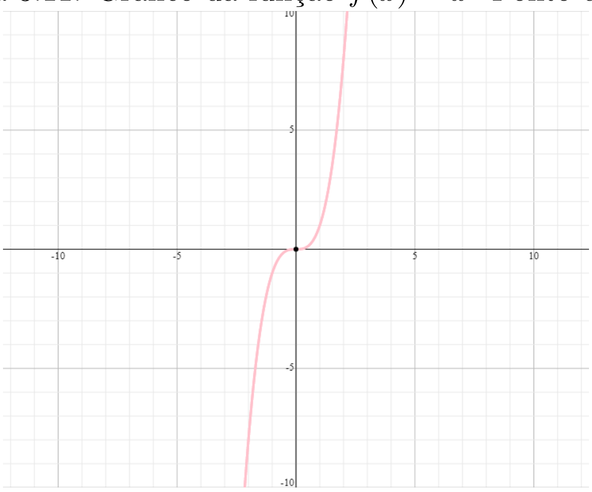
Fonte: Elaborada pela autora

Cabe ressaltar que, se x_0 é ponto de máximo ou mínimo relativo de f, então x_0 é ponto crítico de f. Entretanto, x_0 ser ponto crítico de f não implica, necessariamente, x_0 ser ponto de máximo ou mínimo relativo de f.

Como exemplo, temos a função $f(x) = x^3$, o ponto crítico de f não é ponto de máximo nem de mínimo, neste caso, o ponto crítico é denomidando ponto de sela.

Observemos que no gráfico 3.11 , o ponto crítico de f é $x = 0$ e a derivada ($f'(x) = 3x^2$) a esquerda e a direita de $x = 0$ é positiva.

Figura 3.11: Gráfico da função $f(x) = x^3$ Ponto de sela



Fonte: Elaborada pela autora

Teorema 3.3. *Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$. Se $x_0 \in (a, b)$ no qual*

a) $f'(x_0) = 0$ e
b) $f''(x_0) < 0$ (ou $f''(x_0) > 0$).

Então, x_0 é um ponto de máximo ou um mínimo relativo de f.

4 A derivada no Ensino Médio

Quando introduzida na hora errada ou no lugar errado, a boa lógica pode ser o pior inimigo do bom ensino. (G. Pólya)

Este capítulo trata sobre como introduzir os conceitos de derivada para alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Será apresentada uma sequência de atividades para trabalhar noções de derivada junto com o ensino de funções do primeiro e segundo grau. Os roteiros criados têm como objetivo despertar de maneira intuitiva, através de exemplos do cotidiano, a noção de derivada e suas aplicações.

No final deste capítulo foram inseridos alguns exercícios retirados do livro Matemática Contexto e Aplicaçãoes, Volume 1 do autor Luiz Roberto Dante (2012), cujo conteúdo é voltado para alunos do 1º ano do Ensino Médio. São exercícios comuns, encontrados na maioria dos livros desta fase de ensino e ilustram a possibilidade de resolvé-los à luz da derivada.

4.1 Proposta 1 - Taxa de variação

Objetivo: Usar o conceito de taxa de variação para introduzir, intuitivamente, o conceito de derivada.

Requisitos: Será necessário que os conceitos de função do primeiro grau já tenham sido introduzidos, bem como sua definição e gráfico. Também será pré-requisito a trigonometria no triângulo retângulo.

Atividade: Observando uma grandeza variável, analisar como ela varia, se cresce ou decresce rapidamente e com qual "intensidade"ela varia.

Exemplo 4.1. José precisou de uma professora particular para ajudá-lo em seus estudos de Matemática. A professora cobra $R\$10,00$ por hora de aula. Qual a variação do valor V quando o número de horas h varia:

a) De 1 para 2 horas?

b) De 2 para 3 horas?

c) De 4 para 5 horas?

Pelos dados do problema tem-se que o valor V pago à professora por cada hora h pode ser representado por

$$V = 10h.$$

Inicialmente, deve-se observar que a função $V = 10h$ é uma reta que passa passa pela origem.

(a) Quando José estuda uma hora com a professora particular, ou seja, quando $(h = 1)$, o valor pago é

$$V = 10 \times 1 = 10.$$

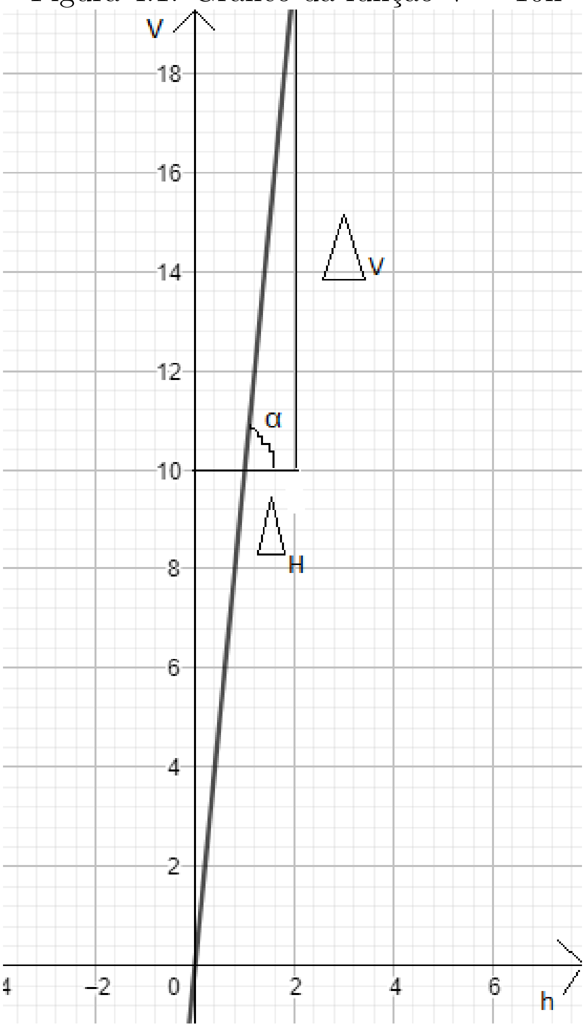
Já quando ele estuda duas horas, ou seja, quando $(h = 2)$, tem-se

$$V = 1 \times 2 = 20.$$

Assim, quando h varia de 1 para 2 horas, então houve um acréscimo de 1 hora, nesse caso, dizemos que o tempo sofreu uma variação de uma hora. Vamos denotar essa variação de $\Delta_h = 1$ hora. Observando agora o valor V, este variou de $R\$10,00$ para $R\$20,00$, ou seja, sofreu uma variação de $R\$10,00$. Vamos chamar essa variação de $\Delta_V = 10$.

Observe o gráfico:

Figura 4.1: Gráfico da função V = 10h



Fonte: Elaborada pela autora

Considere a inclinação α da reta de equação $V = 10h$. Então, analisando as relações métricas no triângulo retângulo, pode-se concluir que

$$tg\alpha = \frac{\Delta_V}{\Delta_h} = \frac{10}{1} = 10.$$

A razão $\frac{\Delta_V}{\Delta_h}$ **é chamada de taxa de variação**, ou seja, $\frac{\Delta_V}{\Delta_h} = \frac{10}{1} = 10$ é o "quanto" o valor V variou da hora 1 de estudo particular para a hora 2.

(b) Quando h varia de 2 para 3 horas, temos:

$$V(2) = 10 \times 2 = 20; V(3) = 10 \times 3 = 30.$$

Logo, para esse intervalo de tempo, temos

$$\Delta_h = 3 - 2 = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_V = 30 - 20 = 10.$$

Portanto,

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_h} = \frac{10}{1} = 10.$$

Isso significa que no intervalo de tempo da segunda hora de aula para a terceira hora de aula, o valor V também sofreu uma variação de $R\$10,00$.

(c) Quando h varia de 4 para 5 horas, temos:

$$V(4) = 10 \times 4 = 40; V(5) = 10 \times 5 = 50$$

Logo, a variação no tempo é $\Delta_h = 5 - 4 = 1$ e a variação no valor é

$$\Delta_V = 50 - 40 = 10.$$

Portanto, nesse caso,

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_h} = \frac{10}{1} = 10.$$

Podemos notar que a taxa de variação do valor V é a mesma quando o tempo h varia de 1 para 2 horas, 2 para 3 horas e de 4 para 5 horas.

Feita essa análise, pode-se pensar em novas questões um pouco mais generalizadas:

1. Essa variação de V de $R\$10,00$ se mantém se considerarmos outros intervalos de tempo de tamanho 1?

2. Como fica a variação do valor V se considerarmos outros intervalos de tempo?

Para essa primeira questão, consideramos que José estuda h_0 horas com a professora particular, ou seja, consideramos $(h = h_0)$. Nesse caso, o valor pago é

$$V = 10 \times h_0 = 10h_0.$$

Já quando ele estuda $h_0 + 1$ horas, ou seja, quando $(h = h_0 + 1)$, tem-se

$$V = 10 \times (h_0 + 1) = 10h_0 + 10.$$

Assim, quando h varia de h_0 para $h_0 + 1$ horas, há um acréscimo de 1 hora, nesse caso, temos que a variação de h é $\Delta_h = h_0 + 1 - h_0 = 1$ hora. Observando o valor V nesse intervalo de tempo, temos que V variou de $10h_0$ para $10h_0 + 10$, ou seja, sofreu uma variação de

$$\Delta_V = 10h_0 + 10 - 10h_0 = 10.$$

Logo, nesse caso, temos que a taxa de varição é

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_h} = \frac{10}{1} = 10.$$

Logo, percebe-se que o valor V sempre sofre uma variação de $R\$10,00$ quando a variação de horas h é de 1 hora. Ou seja, a taxa de variação de V nos intervalos de tempo de 1 horas se mantém constante e igual a $R\$10,00$.

Para a segunda questão, não vamos fixar o tamanho do intervalo de tempo. Assim, vamos considerar que José estudou h_0 horas com a professora particular, ou seja, consideramos $(h = h_0)$, e assim, o valor pago para essa quantidade de horas é

$$V = 10 \times h_0 = 10h_0.$$

Agora, se ele precisar estudar mais algumas horas, digamos, $h_0 + h_1$ horas, ou seja, quando $(h = h_0 + h_1)$, tem-se

$$V = 10 \times (h_0 + h_1) = 10h_0 + 10h_1.$$

Observemos que, quando h varia de h_0 para $h_0 + h_1$ horas, há um acréscimo de h_1 horas, nesse caso, temos que a variação de h é

$$\Delta_h = h_0 + h_1 - h_0 = h_1.$$

Já o valor pago V para $10(h_0+h)$ nesse intervalo de tempo variou de $10h_0$ para $10h_0+h_1$, logo, sofreu uma variação de $\Delta_V = 10h_0 + 10h_1 - 10h_0 = 10h_1$. Portanto, temos que a taxa de variação, nesse caso, é dada por

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_h} = \frac{10h_1}{h_1} = 10.$$

Portanto, podemos concluir que a taxa de variação de V se mantém a mesma, e é igual à $R\$10,00$, ao longo das horas estudadas. Nessa situação, dizemos que a taxa de variação de V em relação a h é constante.

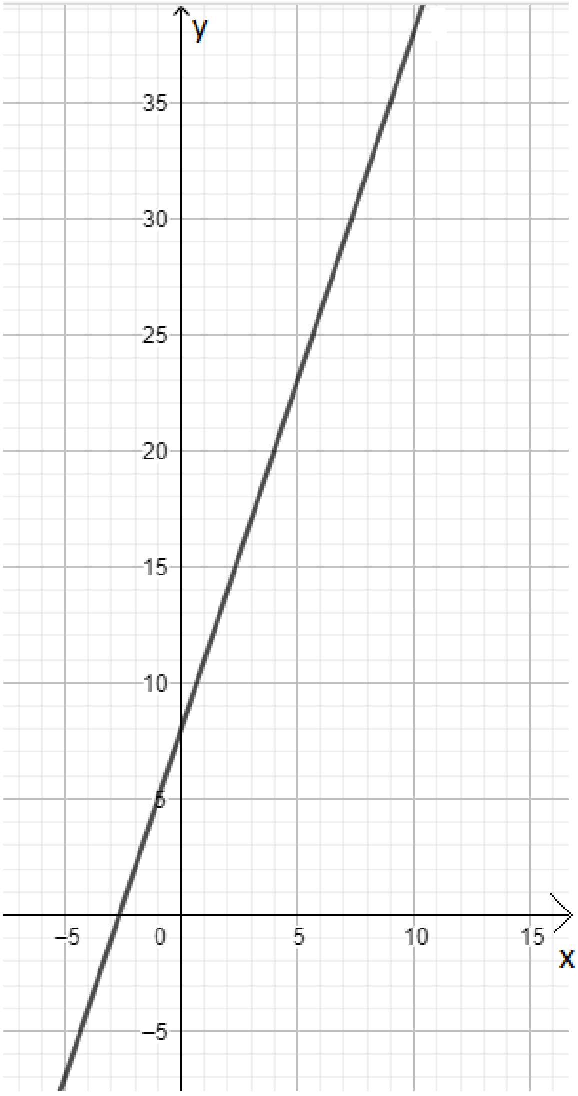
Exemplo 4.2. José pediu um desconto e a professora fez a seguinte oferta: R$8,00 fixo mais R$3,00 por hora. Nesse caso, como fica a variação do valor a ser pago em relação às horas estudadas?

Com essa proposta, a lei que associa o valor y a ser pago com as horas x de aula particular é:

$$y = 3x + 8.$$

Assim, o gráfico da função encontrada também é uma reta.

Figura 4.2: Gráfico da função y = 3x+8



Fonte: Elaborada pela autora

Vamos agora, determinar a taxa de variação $\frac{\Delta_x}{\Delta_y}$:

De forma análoga ao que fizemos no exercício anterior, vamos considerar que José estudou x_0 horas com a professora particular, ou seja, consideraremos $x = x_0$, e assim, o valor pago para essa quantidade de horas é

$$y = 3 \times x_0 + 8$$

Agora, se ele precisar estudar mais algumas horas, digamos, $x_0 + x_1$ horas, ou seja, quando $x = x_0 + x_1$, tem-se

$$y = 3 \times (x_0 + x_1) + 8.$$

Observemos que quando x varia de x_0 para x_0+x_1 horas, há um acréscimo de x_1 horas, nesse caso, temos que a variação de x é

$$\Delta_x = x_0 + x_1 - x_0 = x_1.$$

Sabemos que $y = 3x + 8$ pode ser representado como $g(x) = 3x + 8$ e vimos que $\Delta_x = x_1$, logo, podemos escrever a expressão $y = 3(x_0 + x_1) + 8$ da seguinte forma

$$g(x_0 + \Delta_x) = 3(x_0 + \Delta_x) + 8.$$

Já o valor pago $y = g(x)$ nesse intervalo de tempo variou de $g(x_0) = 3x_0 + 8$ para $g(x_0 + \Delta_x) = 3(x_0 + \Delta_x) + 8$, logo, sofreu uma variação de

$$\Delta_y = g(x_0+\Delta_x) - g(x_0) = 3(x_0+\Delta_x)+8-(3x_0+8) = 3x_0+3\Delta_x+8-3x_0-8 = 3\Delta_x$$

.

Portanto, temos que a taxa de variação, nesse caso, é dada por

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{g(x_0+\Delta_x) - g(x_0)}{\Delta_x} = \frac{3(x_0+\Delta_x)+8-(3x_0+8)}{\Delta_x} = \frac{3\Delta_x}{\Delta_x} = 3, \quad \Delta_x \neq 0.$$

Com esse resultado, observamos que novamente a taxa de variação foi constante, e é igual a R$3,00 por hora estudada. Veja também que o coeficiente angular da reta $y = 3x + 8$ e a taxa de variação $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = 3$ são iguais.

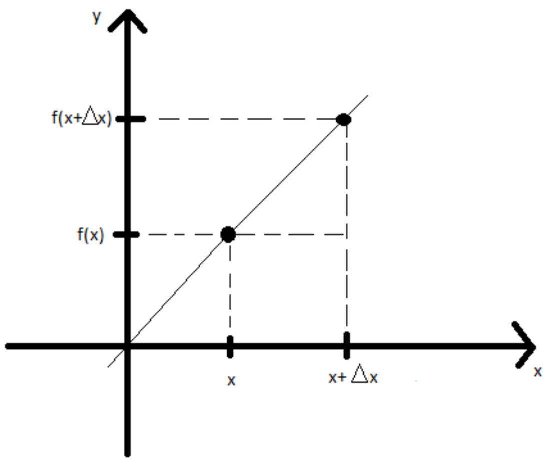
Daí, pode-se concluir que:

A taxa de variação das funções $f(x) = 10x$ e $g(x) = 3x + 8$, que são duas funções polinomiais de 1º grau, é constante e igual ao coeficiente angular das retas gráficos dessas funções. Esta taxa de variação é também denominada derivada da função e é denotada por $f'(x)$ e $g'(x)$, respectivaamente. Ou seja, dizemos que a derivada de $f(x) = 10x$ é igual a 10 e a derivada de $g(x) = 3x + 8$ igual a 3.

Será que a derivada de toda função da forma $f(x) = ax + b$ é constante e igual ao seu coeficiente angular, ou seja, $f'(x) = a$?

Vamos então analisar a variação da função $f(x) = ax + b$.

Figura 4.3: Gráfico da função f(x) = ax +b



Fonte: Elaborada pela autora

Analisando o gráfico de $f(x) = ax + b$, temos que para uma variação de Δ_x em x temos uma variação correspondente de $f(x + \Delta_x) - f(x)$ em y. Assim a taxa de variação ou derivada $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ da função $f(x) = ax + b$ é dada por

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x} = \frac{a(x+\Delta_x) + b - (ax+b)}{\Delta_x} = \frac{a\Delta_x}{\Delta_x} = a, \quad \Delta_x \neq 0.$$

Agora, podemos determinar facilmente a derivada (taxa de variação) de uma função polinomial do primeiro grau: basta observar o coeficiente angular! Ou seja, dada $f(x) = ax + b$ temos $f'(x) = a$.

4.2 Proposta 2 - Crescimento e decrescimento da função do 1º grau

Objetivo: Usar o conceito de derivada para analisar o crescimento e decrescimento da função do 1º grau.

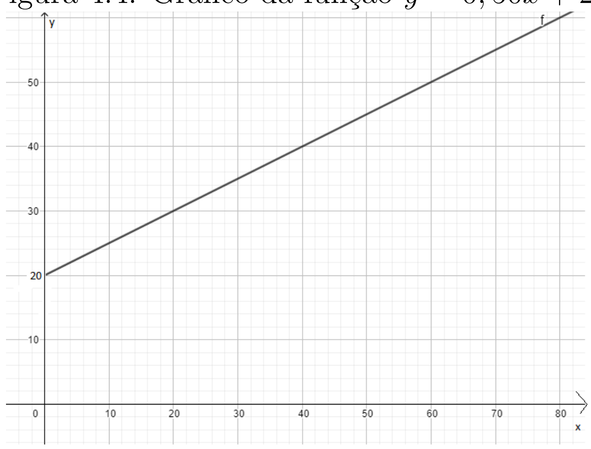
Requisitos: Conhecer o gráfico de uma função do 1º grau e os conceitos de função crescente e decrescente e conhecer a definição de derivada como coeficiente angular da função polinomial de grau 1.

Atividade: Observando o crescimento e decrescimento de uma grandeza variável, analisar a relação desse crescimento ou decrescimento com a derivada da função.

Exemplo 4.3. Para produzir coxinhas, a lanchonete da escola tem um custo fixo de $R\$20,00$ mais $R\$0,50$ por unidade produzida. Sendo x o número de coxinhas produzidas, a lei da função que fornece o custo da produção é $y = 0,50x + 20$. O custo total de produção cresce ou decresce quando o número de coxinhas produzidas aumenta?

Vamos observar o gráfico da função $f(x) = 0,50x + 20$:

Figura 4.4: Gráfico da função $y = 0,50x + 20$



Fonte: Elaborada pela autora

Para fabricar uma unidade $x = 1$ de coxinhas, o custo será de $f(1) = 0,50 \times 1 + 20 = 20,50$, ou seja, um custo de R\$ 20,50. Para fabricar 2 coxinhas, $(x = 2)$, teremos um custo de $f(2) = 0,50 \times 2 + 20 = 21$, ou seja, R\$21,00. Portanto, quando o número da produção de coxinhas aumentou de 1 para 2, o custo total aumentou.

Este comportamento de aumento do custo quando se aumenta o número na produção de coxinhas é uma característica da função f. De fato

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ou seja, a função $f(x) = 0,50x + 20$ é crescente.

Vamos analisar, agora, como o ocorre a variação do custo total em relação a variação na produção. Para isso, vamos calcular a taxa de variação $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ da função $y = 0,50x+20$.

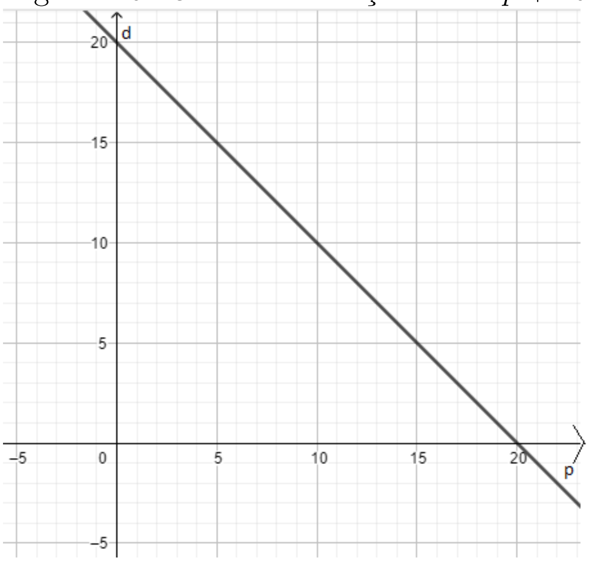
Como vimos anteriormente, a taxa de variação $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ é o coeficiente angular da reta dada por $f(x)$, que é também chamada de derivada. Logo, $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = f'(x) = 0,50$.

Assim a função f é crescente e sua derivada $f'(x)$ é positiva.

Exemplo 4.4. Segundo um levantamento sobre a relação da demanda d com o preço p das coxinhas, verificou-se que $d = -p + 20$.

Vamos observar o gráfico da função $d = -p + 20$.

Figura 4.5: Gráfico da função $d = -p + 20$



Fonte: Elaborada pela autora

Analisando a função da demanda, podemos observar que trata-se de uma função decrescente, pois a medida que p aumenta d diminui, por exemplo, para $p_1 = 2$, ou seja, um preço de R\$2,00, a demanda d_1 será de $d_1 = -2 + 20 = 18$ coxinhas. Agora, para um preço $p_2 = 4$, a demanda d_2 será de $d_2 = -4 + 20 = 16$ coxinhas.
De forma geral

$$p_1 < p_2 \Rightarrow d(p_1) > d(p_2).$$

A derivada desta função é $d' = \frac{\Delta_d}{\Delta_p} = -1$, logo a taxa de variação é constante.

Neste caso, a função d é decrescente e a sua derivada d' é negativa.

Vimos nestes dois exemplos que a função $f(x) = 0,50x + 20$ é crescente e sua derivada é positiva, já função $d(p) = -p + 20$ é decrescente e sua derivada é negativa. Agora podemos nos perguntar se essa relação entre crescimento/decrescimento e o sinal da derivada ocorre da mesma forma para qualquer função $F(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

Sabemos que $F(x) = ax + b$ será crescente, se e somente se, o seu coeficiente angular a for positivo. Como a derivada $F'(x)$ coincide com o coeficiente angular a, então $F(x) = ax + b$ será crescente, se e somente se, a sua derivada a for positiva.

Analogamente, temos que $F(x) = ax + b$ será decrescente, se e somente se, o seu coeficiente angular a for negativo. Como a derivada $F'(x)$ coincide com o coeficiente angular a, então $F(x) = ax + b$ será decrescente, se e somente se, a sua derivada a for negativa.

4.3 Proposta 3 - Inclinação da reta tangente

Objetivo: Usar o conceito de derivada como como inclinação da reta tangente à uma curva gráfico de uma função do segundo grau.

Requisitos: Conhecer os conceitos, definição e gráfico da função polinomial de segundo grau.

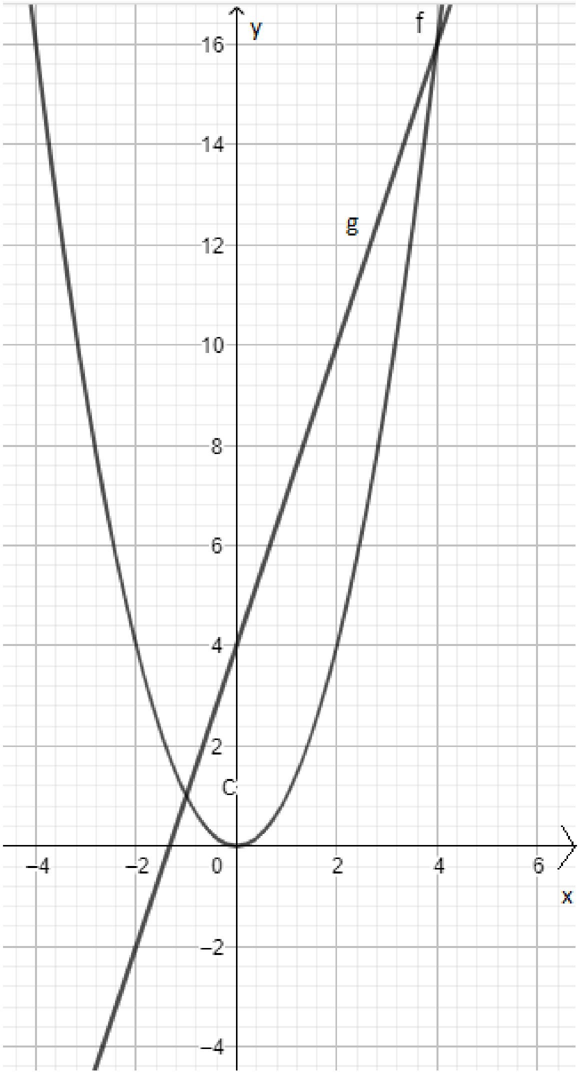
Atividade: Observando agora uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, calcular a taxa de variação (derivada) usando a inclinação da reta tangente a um ponto pertencente ao gráfico de f.

Vimos que a taxa de variação (derivada) de uma função é constante, quando essa função é da forma $f(x) = ax + b$.

Mas e quando a função é polinomial de grau 2?

Para responder a esta pergunta, vamos analisar o gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x + 4$.

Figura 4.6: Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x + 4$



Fonte: Elaborada pela autora

A reta r definida por $g(x)$ intercepta o gráfico da função $f(x)$ em dois pontos, por esse motivo dizemos que a reta r é secante a parábola nos pontos $(4, 16)$ e $(-1, 1)$.

Observação: Dados dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencentes a curva $y = f(x)$, a inclinação da reta secante a esta curva que passa por esses dois pontos é dada por:

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo, a inclinação da reta secante r definida por $g(x)$ é dada por

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{16 - 1}{4 - (-1)} = 3.$$

Agora vamos verificar a inclinação da reta secante r quando o ponto B se aproxima do ponto A 'percorrendo"a parábola pela função f.

a) $A(-1, 1)$ e $B(3, 9)$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{9 - 1}{3 - (-1)} = 2$

b) $A(-1,1)$ e $C(2,4) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{4-1}{2-(-1)} = 1$

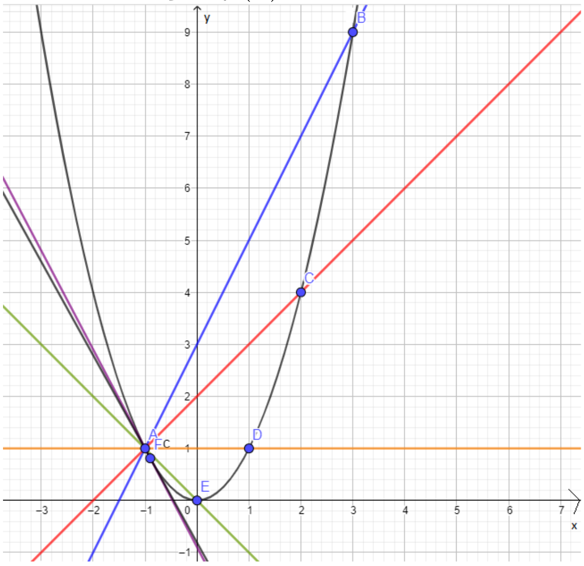
c) $A(-1,1)$ e $D(1,1) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{1-1}{1-(-1)} = 0$

d) $A(-1,1)$ e $E(0,0) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{0-1}{0-(-1)} = -1$

e) $A(-1,1)$ e $F(-0,9;0,81) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{0,81-1}{-0,9-(-1)} = -1,9$

f) $A(-1,1)$ e $G(-0,999;0,998001) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x} = \dfrac{0,998001-1}{-0,999-(-1)} = -1,999$

Figura 4.7: Gráfico da função $f(x) = x^2$, retas secantes e reta tangente



Fonte: Elaborada pela autora

Observe que tomando o ponto $A = (-1,1)$ fixo e considerando valores para Δ_x cada vez mais próximos de zero, a reta secante que passa pelos pontos $(-1,1)$ e $(-1+\Delta_x, f(-1+\Delta_x))$ se aproxima de uma reta limite, a qual denominamos de reta tangente t à curva dada por $f(x) = x^2$ no ponto (-1,1), conforme ilustra a Figura 4.7.

Observe que a taxa de variação, ou inclinação das retas secantes que passam pelos pontos $(-1,1)$ e $(-1+\Delta_x, f(-1+\Delta_x))$ é dada por

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(-1+\Delta_x) - f(-1)}{-1+\Delta_x-(-1)} = \frac{1-2\Delta_x+{\Delta_x}^2-1}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(-2+\Delta_x)}{\Delta_x} = -2+\Delta_x.$$

À medida que Δ_x se aproxima de zero, ou seja, a medida que a distância entre os pontos se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se aproxima de -2. Esse valor é a inclinação da reta tangente a curva $f(x) = x^2$ no ponto (-1,1), o qual também denominamos derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = -1$ e escrevemos $f'(-1) = -2$.

Agora, usando a mesma ideia do exemplo anterior, vamos calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ nos pontos $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$.

1º)Para calcular a derivada no ponto $x = 2$, temos

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(2+\Delta_x) - f(2)}{\Delta_x} = \frac{(2+\Delta_x)^2 - (2)^2}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(4+\Delta_x)}{\Delta_x} = 4 + \Delta_x.$$

Quando Δ_x se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se aproxima de 4. Logo a derivada de f no ponto $x = 2$ é 4 ou seja, $f'(2) = 4$.

2º) Para calcular a derivada no ponto $x = 3$, temos

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(3+\Delta_x) - f(3)}{\Delta_x} = \frac{(3+\Delta_x)^2 - (3)^2}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(6+\Delta_x)}{\Delta_x} = 6 + \Delta_x.$$

Assim quando Δ_x se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se aproxima de 6. Logo a derivada de f no ponto $x = 3$ é 6, e escrevemos $f'(3) = 6$.

3º) Para calcular a derivada no ponto $x = 4$, temos

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(4+\Delta_x) - f(4)}{\Delta_x} = \frac{(4+\Delta_x)^2 - (4)^2}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(8+\Delta_x)}{\Delta_x} = 8 + \Delta_x.$$

Nesse caso, quando Δ_x se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se aproxima de 8. Logo a derivada de f no ponto $x = 4$ é 8 e escrevemos $f'(4) = 8$.

Veja que em todos os casos a derivada varia em cada ponto testado (não é constante) e $f'(x)$ é o dobro do valor de x.

No caso geral, seja $x = x_0$ um número real fixado.

Para calcular a derivada no ponto $x = x_0$, temos

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_0+\Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \frac{(x_0+\Delta_x)^2 - (x_0)^2}{\Delta_x} = \frac{\Delta_x(2x_0+\Delta_x)}{\Delta_x} = 2x_0 + \Delta_x.$$

Portanto, quando Δ_x se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se aproxima de $2x_0$. Logo a derivada de f no ponto $x = x_0$ é $2x_0$ e escrevemos $f'(x_0) = 2x_0$.

Por fim, dado $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a,b e c $\in \mathbb{R}$, vamos mostrar que a derivada $f'(x) = 2x + b$. Nesse caso, observe que

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x} =$$

$$\frac{a(x+\Delta_x)^2 + b(x+\Delta_x) + c - (ax^2 + bx + c)}{\Delta_x} =$$

$$\frac{a(x^2 + 2x\Delta_x + (\Delta_x)^2) + bx + b\Delta_x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta_x} =$$

$$\frac{ax^2 + 2ax\Delta_x + a(\Delta_x)^2 + bx + b\Delta_x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta_x} =$$

$$\frac{2ax\Delta_x + a(\Delta_x)^2 + b\Delta_x}{\Delta_x} =$$

$$\frac{\Delta_x(2ax + a\Delta_x + b)}{\Delta_x} =$$

$$2ax + a\Delta_x + b$$

Da mesma forma, quando Δ_x se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se aproxima de $2ax + b$. Logo, a derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dada por $f'(x) = 2ax + b$.

4.4 Proposta 4 - Máximos e Mínimos

Objetivo: Usar o conceito de derivada para encontrar o vértice da função de segundo grau junto com os conceitos de pontos Máximo e Mínimo.

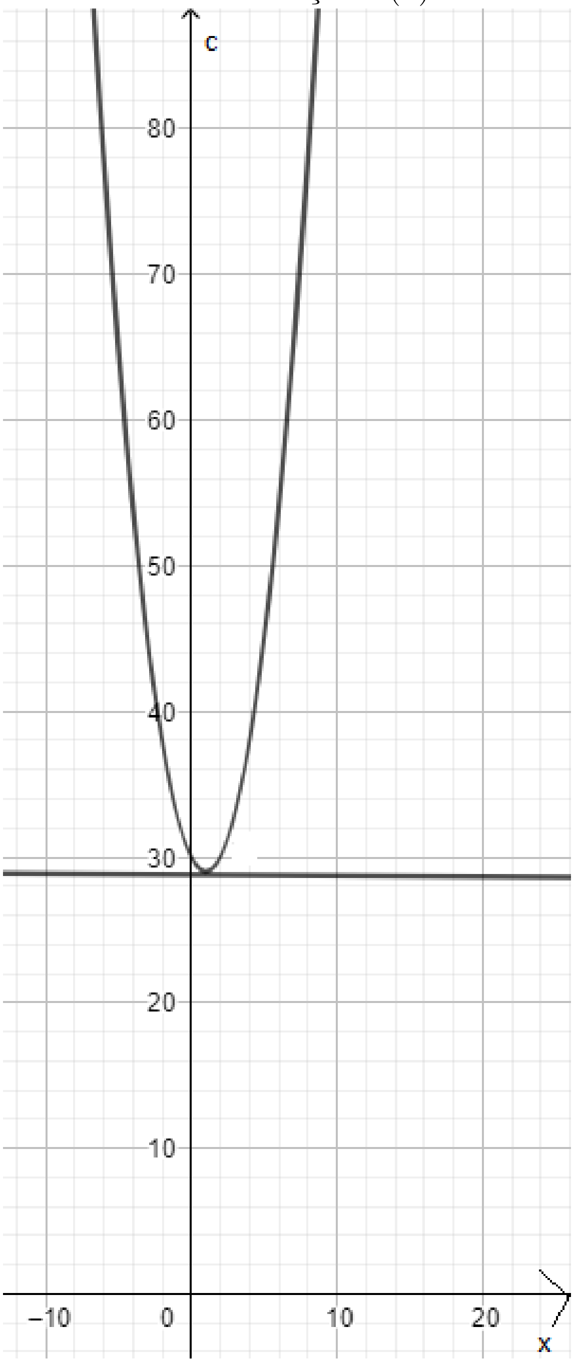
Requisitos: Conhecer os conceitos, definição, gráfico e vértice da função de segundo grau. Conhecer o conceito de derivada como inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função polinomial de segundo grau.

Atividade: Usando o conceito de reta tangente à curva, relacionar a derivada ao vértice da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos.

Exemplo 4.5. A turma do 3º ano irá fabricar picolés para arrecadar dinheiro para viagem do final de ano. O custo da produção de x unidades de picolés é dado por $C(x) = x^2 - 2x + 30$. Qual a quantidade de picolés produzida para que o custo seja mínimo? Qual custo mínimo?

Primeiramente, vamos observar o gráfico da função $C(x) = x^2 - 2x + 30$:

Figura 4.8: Gráfico da função $C(x) = x^2 - 2x + 30$



Fonte: Elaborada pela autora

Pelo gráfico vemos que o ponto mais baixo é o vértice da parábola, e a reta tangente ao vértice está na horizontal (paralela ao eixo x), assim sua inclinação é zero.

Dessa forma, o ponto de mínimo será o ponto onde a inclinação da reta tangente (derivada) é igual a zero.

Como a derivada de $C(x) = x^2 - 2x + 30$ é dada por $C'(x) = 2x - 2$, então o ponto em que a reta tangente à curva possui inclinação igual a zero, basta fazer $C'(x) = 0$. Logo

$$C'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

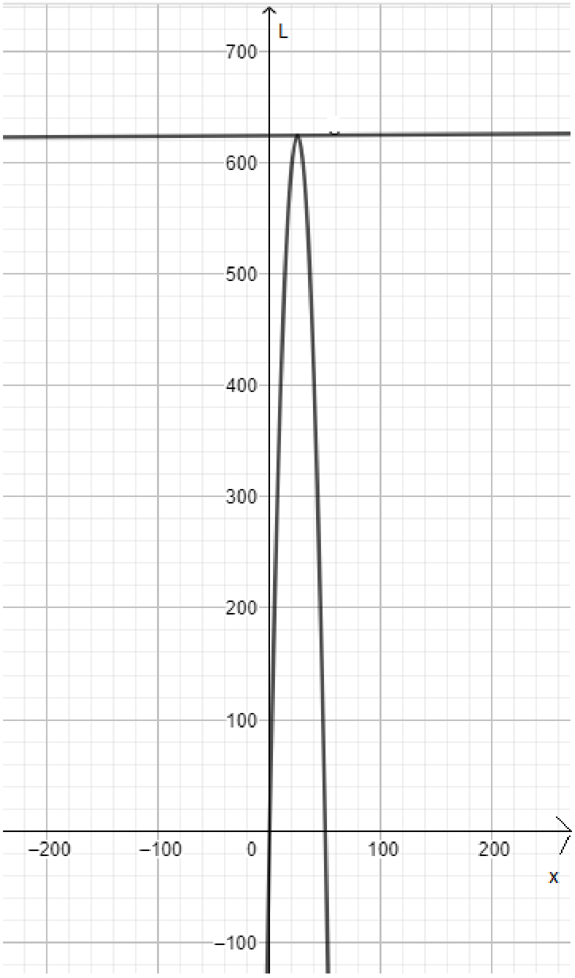
Desta forma, o custo mínimo será quando for produzida 1 unidade de picolé. Este custo mínimo será de

$$C(1) = (1)^2 - 2 \times 1 + 30 \Rightarrow C(1) = 29.$$

Ou seja, o custo mínimo será de R$29,00.

Exemplo 4.6. Na fabricação dos picolés, o lucro obtido é dado por $L(x) = -x^2 + 50x$. Qual a quantidade x de picolés para que o lucro seja máximo? Qual este lucro?

Figura 4.9: Gráfico da função $L(x) = -x^2 + 50x$



Fonte: Elaborada pela autora

Observe que o ponto mais alto está no vértice da parábola, e a reta tangente a esse gráfico possui inclinação igual ao zero. Então o ponto de máximo é $(x, L(x))$ ocorre quando a derivada de $L'(x) = 0$.

Temos que $L(x) = -x^2 + 50x$, então sua derivada será dada por

$$L'(x) = -2x + 50.$$

Fazendo $L'(x) = 0$, para determinar o ponto mais alto, temos

$$-2x + 50 = 0 \Rightarrow x = 25.$$

Logo, o lucro máximo será quando forem fabricados 25 picolés.
Este lucro será:

$$L(25) = -(25)^2 + 50 \times 25 \Rightarrow L(25) = 625.$$

Nos dois exemplos, vimos que os pontos de máximo e mínimo das funções $C(x) = x^2 - 2x + 30$ e $L(x) = -x^2 + 50x$ são os pontos onde a derivada da respectiva função é igual a zero, além disso, estes pontos são também os vértices das funções.

Daí, pode-se chegar à fórmula do vértice através da derivada:
Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$, fazendo a derivada igual a zero temos,

$$2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo o valor de $x = \frac{-b}{2a}$ na equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtemos:

$$f(x) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Logo, as coordenadas do vértice são dadas por $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, que também é chamado de ponto máximo ou mínimo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.5 Proposta 5 - Velocidade Instantânea

Objetivo: Usar o conceito de derivada na física como exemplo de aplicação desta ferramenta.

Requisitos: Conhecer os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea. Conhecer o conceito de derivada como taxa de variação de uma função polinomial de grau 2.

Atividade: Usando o conceito de derivada, calcular velocidade instantânea no movimento uniformemente variado.

Sabemos que a velocidade média calcula a média das velocidades durante um percurso. Quando dizemos que um automóvel percorreu um determinado trajeto com uma velocidade média de 80km/h não significa que ele andou o tempo todo com essa velocidade.

A velocidade marcada no velocímetro é chamada de velocidade instantânea, que é a velocidade medida no exato momento que se olha para o velocímetro. Esta velocidade pode ser considerada como taxa de variação instantânea, ou seja, quando o intervalo de tempo for considerado bem pequeno, tendendo a zero.

Vimos que na função de segundo grau, a derivada também pode representar uma taxa de variação instantânea, ou seja, a variação em um ponto $(x, f(x))$. Então, se tivermos uma função $S = f(t)$ que relaciona o espaço S percorrido em função de t, na forma $S(t) = at^2 + bt + c$, podemos analisar qual a velocidade em cada instante t pela derivada de S.

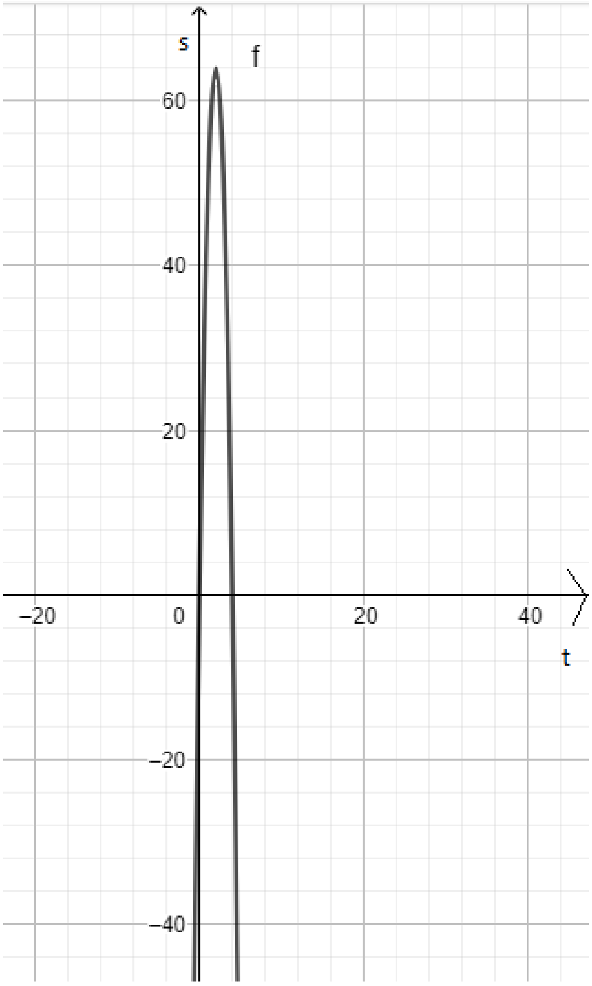
A velocidade média no intervalo de tempo $[t_1, t]$ é dada por

$$v = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}.$$

Quanto menor o intervalo de t_1 até t, mais próxima estará a velocidade média da velocidade instantânea em t_1. Podemos definir a velocidade instantânea como o valor do qual se aproxima o quociente $\frac{\Delta_s}{\Delta_t}$ quando Δ_t se aproxima de zero. Este valor também é conhecido como a derivada da função S que define o movimento.

Exemplo 4.7. Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será $S(t) = -16t^2 + 64t$.

Figura 4.10: Gráfico da função $s = -16t^2 + 64t$



Fonte: Elaborada pela autora

a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s.

Como vimos, a velocidade instantânea é dada pela derivada da função s quando $t = 1$.

Logo,

$$S'(t) = -32t + 64 \Rightarrow S'(1) = -32 \times 1 + 64 = 32m/s.$$

Portanto, a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s é igual a 32m/s.

b) Quantos segundos a bola leva para atingir seu ponto mais alto?

Analisando o gráfico, percebemos que o ponto mais alto é o vértice da parábola. Vimos que a abscissa do vértice é dada pela inclinação da reta tangente a esse ponto, em outras palavras, o ponto mais alto é correspondente ao valor de t para o qual a derivada de S é igual a zero.

Logo,

$$S'(t) = -32t + 64 = 0 \Rightarrow t = 2s.$$

Portanto, a bola leva 2s para atingir seu ponto mais alto.

c) Qual a altura máxima atingida pela bola?

A altura máxima é a ordenada do vértice, e neste caso é o valor de S quando $t =$ 2s. Logo,

$$S(2) = -16(2)^2 + 64 \times 2 = 64m.$$

4.6 Exercícios

Os exercícios a seguir, podem ser resolvidos usando a definição e aplicação de derivada. Embora o autor (Dante, L.R.2012) Matemática contexto e Aplicaçãoes) não faça menção a este conteúdo, vimos que serão resolvidos com maior facilidade usando este recurso.

1) Escreva a taxa de variação para cada uma das funções:

   a) $f(x) = 4x + 5$
   b) $f(x) = -3x + 7$
   c) $f(x) = 3$
   d) $f(x) = \frac{x}{3} + 2$

2) O preço do aluguel de um carro popular é dado pela tabela abaixo:

100 km	taxa fixa de R$50,00
300 km	taxa fixa de R$63,00
500 km	taxa fixa de R$75,00

Em todos os casos, paga-se R$ 0,37 por quilômetro excedente rodado.

   a) Escreva a lei da função para cada caso, chamando de x o número de quilômetros rodados
   b) Qual a taxa de variação de cada função?

3) Sabendo que a função $f(x) = ax + b$ é tal que $f(1) = 5$ e $f(-2) = -4$, determine:

   a) a taxa de variação da função;
   b) os valores de a e b;
   c) o gráfico de f;

4) Determine o vértice V da parábola que representa a função quadrática:

   a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
   b) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$
   c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

5) Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3000$. Nestas condições, calcule:

a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo.

b) o valor mínimo do custo

6) Deseja-se construir uma casa térrea de forma retangular. O retângulo onde a casa será construída tem 80 m de perímetro. Calcule as dimensões desse retângulo sabendo que a área de sua região deve ser a maior possível.

7) Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja $h(t) = -t^2 + 4t + 6$. Determine:

a) o instante que a bola atinge sua altura máxima;

b) a altura máxima atingida pela bola;

c) quantos segundos depois do lançamento ela toca o solo.

d) qual a velocidade da bola no instante $t = 1$ segundo

8) Uma pedra é atirada para cima, com velocidade inicial de 40m/s, do alto de um edifício de 100m de altura. A altura (h) atingida pela pedra em relação ao solo, em função do tempo (t), é dada pela expressão $h(t) = -5t^2 + 40t + 100$.

a) Em que instante t a pedra atinge a altura máxima?

b) qual a velocidade da pedra neste instante?

9) Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro $R\$20,00$ mais $R\$2,00$ por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima?

10) Um ponto material percorre um trajeto retilíneo com velocidade constante. A posição desse ponto material no intante $t_0 = 0$ é $S_0 = 100$ m e, no instante $t = 5,0s$, é $S = 400$m. Nessas condições determine:

a) a função da posição em relação ao tempo

b) a função da velocidade desse ponto material

5 Considerações Finais

Neste trabalho foi desenvolvida uma proposta e uma análise para introdução dos conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

A proposta apresentada refere-se especificamente ao conceito de derivada, objetivando o entendimento de derivada e suas aplicações como taxa de variação, reta tangente, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento e velocidade instantânea. Gostaríamos, com este trabalho, de ajudar a desenvolver nos alunos do Ensino Médio as ideias fundamentais de derivada e suas aplicações, usando uma estratégia didática com exemplos simples que possibilitem aos alunos chegarem às definições e regras de maneira intuitiva, e dessa forma saberem aplicar a derivada como ferramenta na resolução de problemas de várias naturezas.

A introdução destes conceitos logo cedo pode ajudar o discente a enxergar o Cálculo e o estudo de funções de forma mais analítica, além de democratizar o ensino de um conteúdo tão importante e útil, de forma a contribuir também no ensino/aprendizagem do Cálculo nos cursos superiores, já que esta disciplina possui alto índice de reprovação.

Foi feita uma pesquisa sobre o ensino de Cálculo no Brasil e uma reflexão sobre a possibilidade de inserir novamente este conteúdo nos Programas Curriculares Nacionais. Percebemos que não só é possível incluir o ensino de Cálculo no Ensino Médio, como também não há necessidade de alterar os programas curriculares. É preciso saber aplicar as definições nos conteúdos já existentes como uma maneira de facilitar as resoluções.

Nos roteiros desenvolvidos, foram criadas situações problemas que fazem parte do cotidiano do aluno. Acreditamos que com a ajuda do professor, estas atividades provoquem a curiosidade do discente, desenvolvendo intuitivamente os conceitos de derivada e suas aplicações sem a necessidade da definição de limite e de aplicação de regras ou fórmulas prontas.

Este trabalho não foi aplicado em sala de aula, mas estamos certos que é possível e que é preciso haver uma mudança na maneira com que os conteúdos são abordados. Inserir o ensino de Cálculo junto com funções, tornará as aulas mais contextualizadas e dinâmicas, além de possibilitar o entendimento posterior da definição formal.

Consideramos então que a viabilidade do ensino de Cálculo no Ensino Médio é possível, necessária e que os professores devem ser conscientizados da sua importância e motivados a analisar os conteúdos ensinados. Diante do exposto, também é importante o incentivo em pesquisa e desenvolvimento de atividades neste assunto.

Referências

[1] ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

[2] ÁVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio? In: **Revista do Professor de Matemática**, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

[3] BARRETO FILHO, **B. Coleção Matemática Aula por Aula**. São Paulo, FTD, 2003.

[4] BONJORNO, R.A. **Física Fundamental**, Segundo Grau, volume único, São Paulo, FTD, 1993.

[5] DUCLOS, R.C. Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

[6] CARVALHO, J. B. P. de. O cálculo na escola secundária – algumas considerações históricas. **Caderno CEDES**. Campinas: Papirus, n. 40, p. 68-81, 1996.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria da Educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais** +(PCNs+) – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

[8] SANTOS, D. A. T. **A Inclusão do Cálculo Diferencial e Integral no Currículo do Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2006.

[9] ARAÚJO, S. X. S. **Uma Introdução ao Estudo de Derivada no Ensino Médio.** Dissertação do Mestrado em Matemática – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2016.

[10] MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário.** São Paulo: USP, 2008. Disponível em: <http://www.nilsonmachado.net/sema20080311.pdf>. Acesso em : 22 de outubro de 2018.

[11] BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

[12] MACHADO, Nilson José. **Cálculo no ensino médio: já passou da hora**. São Paulo : Blog Imaginário Puro, 2015. Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/>. Acesso em : 22 de outubro de 2018.

[13] ANDRÉ, S. L.C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. Dissertação do Mestrado em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

[14] REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

[15] Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). **Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, p6, pp 40 – 46. 2000.

[16] REIS, Frederico da Silva. 2001. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a Visão de Professores - Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. Campinas – SP: Tese de Doutorado, 2001.

[17] BARUFI, Maria Cristina Bonomi. 1999. **A Construção/ Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: Tese de doutorado, 1999.

[18] THOMAS, George B. [et.al.]. **Cálculo, volume 1**. 12. Ed. São Paulo: Pearson Education do Brasill, 2012.

[19] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3º ed. 1 Vol. São Paulo: Harbra, 1994.

[20] RAFAEL, Rosane Cordeiro. **Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação.** Dissertação do Mestrado em Matemática – Universidade Federal de Juiz de Fora. 2017.

[21] MACHADO, S. (org). **Teoria das Situações Didáticas.** SãoPaulo: EDUC (Série Trilhas) (p.77 – 113), 2008.

[22] DANTE, L.R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 1º ed. Vol. 1. São Paulo: Ática, 2012.