Universidade Federal de São João Del Rei
Campus Santo Antônio
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT

Séries de Taylor e suas Aplicações no Ensino Médio

Paulo Rodolfo da Rocha

São João Del Rei - MG
2019

Universidade Federal de São João Del Rei Campus Santo Antônio
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Séries de Taylor e suas Aplicações no Ensino Médio

por

Paulo Rodolfo da Rocha

sob a orientação de

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

São João Del Rei - MG
2019

Todo mundo é um gênio. Mas, se você julgar um peixe por sua capacidade de subir em uma árvore, ele vai passar toda a sua vida acreditando que ele é estúpido.

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente, pois sua bondade me guiou quando mais precisei, sem ele nada seria possível.

À Marcela Furtado por toda paciência e compreensão durante esses anos, presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço a Conceição Aparecida de Oliveira, minha saudosa professora e colega de profissão, me inspirou e motivou a dar continuidade nos estudos.

Ao professor Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar por toda atenção e auxílio na orientação desse trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro, foi fundamental.

Resumo

Neste trabalho estudam-se os principais conceitos que envolvem o Teorema de Taylor. Inicialmente apresenta-se as sequências e séries, nos quais estudam-se o limite de uma sequência, e as séries infinitas de termos constantes. Destacam-se os critérios de convergência de sequências e séries bem como testes de convergência ou divergência de séries. Posteriormente, apresenta-se as séries de potências e as Séries de Taylor, no qual pode-se destacar a convergência, derivação e integração das séries de potências, as Séries de Taylor, o polinômio de Taylor, a Série de Maclaurin e as fórmulas de Taylor com resto de Lagrange, infinitesimal e integral. Por fim, apresenta-se uma proposta didática através de um plano de aulas, na qual trabalha-se as Séries de Taylor com algumas aplicações. Os temas estudados nas aulas são as Séries de Taylor para funções polinomiais, seno e cosseno com a intenção de aproximar valores de tais funções em torno de um ponto de interesse e o método de Newton com o propósito de aproximar a(s) raiz(raízes) de uma função polinomial de grau maior do que ou igual a três. Espera-se que essa proposta didática complemente o estudo das funções no ensino médio, mostrando uma maneira de tabular valores das funções seno e cosseno, bem como a aproximação dos valores de uma função polinomial através do polinômio de Taylor e aproximar suas raízes, quando houver.

Palavras-chave: Sequências, Séries, Série de Taylor, Fórmulas de Taylor, Método de Newton.

Abstract

In this paper we study the main concepts involving Taylor's Theorem. Initially we present the sequences and series, in which study the limit of a sequence, and the infinite series of constant terms. We highlight the convergence criteria of sequences and series as well as convergence tests or series divergence. Subsequently, the power series and the Taylor Series are presented, in which highlight the convergence, derivation and integration of the power series, the Taylor Series, the Taylor polynomial, the Maclaurin Series and the Taylor formulas. with rest of Lagrange, infinitesimal and integral. Finally, a didactic proposal is presented through a lesson plan, in which work the Taylor Series with some applications. The topics studied in the classes are the Taylor Series for polynomial, sine and cosine functions with the intention of approximating values of such functions around a point of interest and Newton's method for the purpose of approximating the root(s) of a polynomial function of a degree greater than or equal to three. This didactic proposal is expected to complement the study of functions in high school, showing a way of tabulating values of sine and cosine functions, as well as the approximation of values of a polynomial function through Taylor's polynomial and approximating its roots, when there is.

Keywords: Sequences, Series, Taylor Series, Taylor Formulas, Newton's Method.

Sumário

1 Introdução

Nós, professores de matemática, quando aplicamos o estudo das funções no ensino médio, usando o CBC(currículo básico comum) como orientação pedagógica, seguimos o seguinte roteiro: No primeiro ano, trabalhamos as funções polinomiais do primeiro e segundo grau, onde as habilidades desenvolvidas com o alunos envolvem representar graficamente uma função do primeiro grau, reconhecer sua monotonicidade, resolver problemas que envolvam funções do primeiro grau, representar graficamente uma função do segundo grau, resolver problemas que envolvam as raízes de funções do segundo grau e o conceito de máximo e mínimo.

Ainda no primeiro ano do ensino médio aplicamos os conceitos de trigonometria, onde desenvolve-se as habilidades de reconhecer o seno, o cosseno e a tangente como razões de semelhança e as relações entre elas, resolver problemas que envolvam as razões trigonométricas e calcular o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$. No segundo ano do ensino médio, desenvolve-se as habilidades de calcular o seno, cosseno e a tangente dos arcos notáveis de $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ e $360°$, reconhecer no circulo trigonométrico a variação de sinais, crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno e identificar o período das funções seno e cosseno. E no terceiro ano do ensino médio, trabalham-se as habilidades de identificar o gráfico das funções seno, cosseno e tangente, reconhecer o período das funções trigonométricas e resolver equações trigonométricas simples.

Durante esses estudos, nos deparamos com algumas dúvidas intrigantes dos alunos, por exemplo de como encontrar as raízes de funções polinomiais de grau maior ou igual a três, nas funções trigonométricas uma dúvida que aparece frequentemente é a maneira como foram construídas as tabulações de seno, cosseno e tangente, e como aproximar valores dessas funções, por exemplo em ângulos não notáveis.

Determinado em oferecer respostas para essas dúvidas, desenvolvemos uma proposta didática voltada em um método para aproximação de valores de funções polinomiais de grau maior do que ou igual a três bem como encontrar as possíveis raízes para essas funções polinomiais. Outro assunto a ser tratado é oferecer um método para aproximar os valores tabulados para as funções trigonométricas seno e cosseno de ângulos não notáveis compreendidos entre zero e noventa graus.

Nossa proposta utiliza o excelente trabalho do matemático Brook Taylor ($1683-1731$). As Séries de Taylor, como são conhecidas nos dias de hoje, foram publicadas por Taylor em 1715 no seu *"Methodus incrementorium directa et inversa"*.

> Taylor, graduado de Cambridge, era um entusiástico admirador de Newton e secretário da Royal Society. Interessava-se muito por perspectiva, sobre esse assunto publicou dois livros, em 1715 e 1719, no segundo dos quais deu o primeiro enunciado geral do princípio dos pontos de desaparecimento. No entanto, seu nome hoje é lembrado quase exclusivamente em conexão com a série que aparece em seu *Methodus incrementorium*. Essa série se torna a familiar série de Maclaurin... (BOYER, 2012, pág. 284)

Colin Maclaurin (1698-1746), em 1742, publica em seu *"Treatise of fluxions"* a série conhecida como série de Maclaurin, que é apenas um caso particular da Série de Taylor.

> A série de Taylor geral era conhecida por Jean Gregory muito antes, e em essência também por Jean Bernoulli; mas Taylor não sabia disso [...] O *Methodus incrementorium* continha também várias outras partes familiares do cálculo, tais como fórmulas relacionando a derivada de uma função com a derivada da função inversa, [...] soluções singulares de equações diferenciais e uma tentativa de achar uma equação para a corda vibrante. Depois de 1719, Taylor abandonou a pesquisa matemática. (BOYER, 2012, pág. 284)

Nessa dissertação teremos uma sequência de quatro capítulos a ser desenvolvida.

Nos capítulos 2 e 3, desenvolve-se toda a base matemática necessária para a construção da proposta didática, sendo que no capítulo 2 vamos tratar dos conceitos de: sequências, limite de uma sequência e séries infinitas de termos constantes. No capítulo 3 estudar-se à: séries de potências, derivação e integração de séries de potências, as Séries de Taylor, Fórmula de Taylor com resto Langrange, Fórmula de Taylor com resto infinitesimal e a Fórmula de Taylor com resto integral.

Finalizada a construção da base teórica das Séries de Taylor, que é o nosso foco, seguiremos para o capítulo 4. Nele, vamos construir nossa proposta de aproximação de valores de funções polinomiais e trigonométricas de maneira cautelosa, pois previamente os alunos irão tomar conhecimento de derivadas e a partir daí desenvolveremos as Séries de Taylor. Ressaltando que se trata de uma proposta didática, por isso o capítulo 4 será desenvolvido com a inclusão de um plano de aulas.

No capítulo 5 foi feita uma avaliação envolvendo os meus alunos do terceiro ano do ensino médio, por meio de questionários e exercícios, para obtermos assim uma análise dos resultados obtidos com a aplicação da proposta didática.

Finalmente, no capítulo 6 serão expostas as conclusões do trabalho e as considerações finais.

2 Sequências e Séries

2.1 Sequências e continuidade

Sequências de números são comuns em matemática. Por exemplo os números $1, 3, 5, 7, 9$ forma uma sequência denominada **finita**, pois tem um último número. Já a sequência $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, ...$ formam uma sequência denominada **infinita**, pois a mesma não possui um último número.

Nosso estudo está interessado nas sequências infinitas e quando usarmos a palavra "sequência"estaremos nos referindo a uma sequência infinita.

Definição 2.1.1:

Sequência é uma função f cujo domínio é o conjunto de todos os números inteiros positivos e a imagem é formada por números reais.

Os números reais que pertencem a imagem de uma sequência são chamados de **elementos** da sequência.

Exemplo 2.1.1:

Se $f(n) = \dfrac{n}{2n+1}$, então:

$$f(1) = \frac{1}{3},\ f(2) = \frac{2}{5},\ f(3) = \frac{3}{7},\ f(4) = \frac{4}{9} \text{ e assim por diante.}$$

A sequência pode ser escrita como:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...$$

Exemplo 2.1.2:

Se $f(n) = \dfrac{1}{n}$, então:

$$f(1) = 1,\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(3) = \frac{1}{3},\ f(4) = \frac{1}{4} \text{ e assim por diante.}$$

Construindo o gráfico da função $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (Figura 1: No qual x é real, e ressaltando alguns elementos desta função que coincidem com $f(n) = \dfrac{1}{n}$, onde n é inteiro positivo.), podemos ver que sua imagem são os elementos:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Alguns pares ordenados na sequência são:

$$(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right).$$

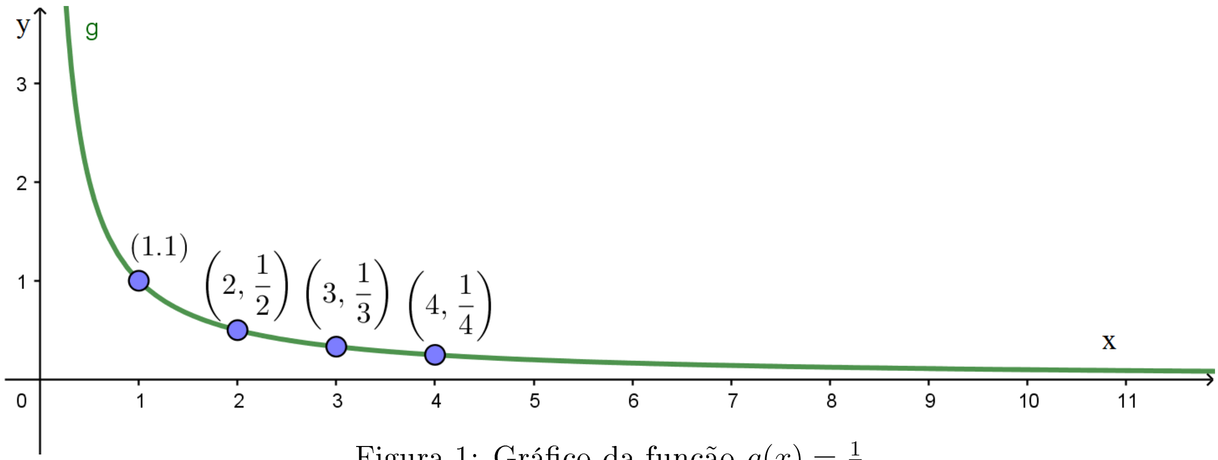


Figura 1: Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x}$

Observação 1: Como o domínio de toda sequência é o mesmo, a notação $f(n)$ usada para denotar uma sequência será trocada por $(a_n)_{n\geq 1}$, ou seja, $f(n) = (a_n)_{n\geq 1}$.

2.2 Limite de uma sequência

Antes de definir o limite de uma sequência, apresentaremos duas proposição a seguir, a primeira conhecida como *desigualdade triangular* e a segunda como *desigualdade de Bernoulli*, necessárias para futuras aplicações.

Proposição 2.2.1: ***Desigualdade triangular***

Sejam a e b números reais quaisquer, então:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Prova:

Se $a + b \geq 0$, então $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$. Caso contrário, se $|a + b| < 0$, então $|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|$.

$\square$

Proposição 2.2.2: ***Desigualdade de Bernoulli***

Se $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Prova:

Provaremos por indução em n.

(i) Para $n = 1$, temos que $(1+\alpha)^1 = 1+\alpha = 1+1\alpha$, o que mostra que a desigualdade acima é válida.

(ii) Suponhamos que a desigualdade seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ (hipótese indutiva). Para provarmos que a desigualdade também é válida para $n+1$, multiplicaremos ambos os membros da desigualdade por $(1+\alpha)$, o que é permitido, pois $\alpha > 0$. Obtemos, utilizando a hipótese indutiva:

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha) = (1+\alpha)^{n+1} \geq (1+n\alpha)(1+\alpha) \Rightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (1+n)\alpha + n\alpha^2.$$

Observe que a expressão do segundo membro da última desigualdade não ficou da forma $1 + (n+1)\alpha$. Porém:

$$1 + (1+n)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (1+n)\alpha, \text{ já que } \alpha^2 \geq 0.$$

Assim mostramos que $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (1+n)\alpha$. Portanto, por indução em n, a desigualdade de Bernoulli é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\alpha > 0$.

$\square$

Definição 2.2.1:

Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para um real p quando, fixado arbitrariamente um erro $\epsilon > 0$ para o valor de p, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - p| < \epsilon$, para todo $n > n_0$.

Alternativamente, se $(a_n)_{n\geq 1}$ convergir para um real p, diremos que a sequência é **convergente** e que p é um **limite** da mesma, fato que denotaremos escrevendo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = p$$

Por fim, se uma sequência não converge para real algum será dita **divergente**.

Exemplo 2.2.1:

(a) Se $a_n = \dfrac{1}{n}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, afim de que $|a_n - 0| < \epsilon$, basta que $n > \dfrac{1}{\epsilon}$; assim, fixando $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n_0 = \dfrac{1}{\epsilon}$, temos que:

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon.$$

(b) Se $a_n = (-1)^n$, então $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge.

Em efeito, os termos da sequência, sendo alternadamente iguais a -1 e 1, não podem se aproximar de um real p. Formalizando esse argumento intuitivo, fixado um $p \in \mathbb{R}$ qualquer, segue da *desigualdade triangular* que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k - p| + |a_{k+1} - p| = |a_k - p| + |p - a_{k+1}| \geq |(a_k - p) + (p - a_{k+1})| = |a_k - a_{k+1}| = 1 - (-1) = 2.$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $|a_k - p| \geq 1$ ou $|a_{k+1} - p| \geq 1$, de sorte que, quando $0 < \epsilon < 1$, não podemos tornar $|a_n - p| < \epsilon$, para todo n suficientemente grande.

(c) Se $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Isso porque, $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, de maneira que $|a_n - 1| < \epsilon$, para $n > \frac{1}{\epsilon}$.

(d) Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência constante, com $a_n = c$, para todo $n \geq 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$.

Isso porque, para todos $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$|a_n - c| = 0 < \epsilon$$

Exemplo 2.2.2:

Dado $0 < |q| < 1$, se $a_n = q^n$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Prova

Como $\frac{1}{|q|} > 1$, podemos escrever $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Portanto, a *desigualdade de Bernoulli* fornece

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

e, daí,

$$|a_n - 0| = |q|^n \leq \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Assim, se queremos que $|a_n - 0| < \epsilon$, basta impormos que $\frac{1}{1+n\alpha} < \epsilon$ ou, equivalentemente, que $n > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$.

□

Proposição 2.2.3:

Se a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ convergir, então seu limite é único.

Prova:

Por contradição, sejam p_1 e p_2 reais distintos e suponha que a sequência converge simultaneamente para p_1 e p_2. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}|p_1 - p_2| > 0$, a definição de limite garante a existência de n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - p_1| < \epsilon \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |a_n - p_2| < \epsilon.$$

Daí pela *desigualdade triangular*,

$$n > \textit{máx}\{n_1, n_2\} \Rightarrow |p_1 - p_2| \leq |p_1 - a_n| + |a_n - p_2| < 2\epsilon = |p_1 - p_2|,$$

o que é um absurdo.

□

Definição 2.2.2:

Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é

(i) **crescente**, se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n;

(ii) **decrescente**, se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

Chamamos de **monótona** uma sequência que seja crescente ou decrescente. Em especial, se $a_n < a_{n+1}$, a sequência é **estritamente crescente**; se $a_n > a_{n+1}$, a sequência é **estritamente decrescente**.

Exemplo 2.2.3:

Determine se as sequências dadas abaixo são crescentes ou decrescentes:

(a) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$;

(b) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

Solução:

(a) Os elementos da sequência são:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, ..., \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, ...$$

Obtendo a_{n+1} de a_n, substituindo n por $n+1$ temos

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Observe que os primeiros elementos de a_n crescem quando n cresce. Assim, suspeitamos de modo geral que $a_n \leq a_{n+1}$. Então:

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3} \tag{1}$$

Multiplicando cada membro da desigualdade (1) por $(2n+1)(2n+3)$ temos:

$$n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1) \Rightarrow 2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n + 1;$$

o que é verdadeiro, logo a sequência dada é crescente.

(b) Os elementos da sequência são:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...$$

Observe que os elementos da sequência a_n decrescem quando n cresce. Assim, suspeitamos de modo geral que $a_n \geq a_{n+1}$.

Como $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 > n$, o que é válido para todo n, a sequência é decrescente.

Definição 2.2.3:

O número α é chamado de **limitante inferior** da sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ se $\alpha \leq a_n$, para todo n inteiro positivo e o número β é chamado de **limitante superior** da sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ se $\beta \geq a_n$, para todo n inteiro positivo.

Exemplo 2.2.4:

(a) Na sequência $a_n = \frac{n}{2n+1}$, o número $\frac{1}{3}$ é um limitante inferior, observe que seus elementos são $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...$

Na verdade todo número menor do que ou igual a $\frac{1}{3}$ é um limitante inferior.

(b) Já na sequência $a_n = \frac{1}{n}$ o número 1 é um limitante superior. Observe que os elementos da sequência são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$

Na verdade todo número maior do que ou igual a 1 é um limitante superior.

Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** se existir um número real M tal que

$$X \subset (-\infty, M].$$

Nesse caso, dizemos que M é uma **cota superior** para X. Analogamente, um conjunto vazio $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado inferiormente** se existir um número real m tal que

$$X \subset [m, +\infty)$$

e, assim sendo, dizemos que m é uma **cota inferior** para X. Por fim, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado** se X for simultaneamente limitado superior e inferiormente.

Exemplo 2.2.5:

O conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ é limitado superiormente e inferiormente. Por exemplo 1 é uma cota superior e o 0 é uma cota inferior para X.

Axioma 2.2.1:

Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então X possui uma **menor cota superior**.

Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, e M é a menor cota superior de X, dizemos que M é o **supremo** de X, e denotamos

$$M = \text{sup}X.$$

Exemplo 2.2.6:

Já vimos que o conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ é limitado superiormente, tendo o 1 como cota superior. Por outro lado, como $1 \in X$, nenhum número real menor que 1 pode ser cota superior para X e, daí, $\text{sup}X = 1$.

Lema 2.2.1:

Toda sequência convergente é limitada.

Prova:

Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência que converge para um limite p. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - p| < 1$. Portanto, segue da *desigualdade triangular* que:

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - p| + |p| < 1 + |p|.$$

Por fim, se $M = máx\{1+|p|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}$, então $|a_n| < M$ para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que a sequência em questão é limitada.

$\square$

Proposição 2.2.4:

Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências convergentes de números reais e c um número real qualquer.

(a) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = ca$.

(b) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$.

(c) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = ab$.

(d) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ é limitada, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

(e) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, com $b \neq 0$ para todo $n \geq 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Prova:

(a) Se $c = 0$, então $ca_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e segue do *exemplo 2.2.1 item (d)* que $\lim\limits_{n\to 0} ca_n = ca$. Suponhamos que $c \neq 0$, e seja dado $\epsilon > 0$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{|c|}$. Logo:

$$n > n_0 \Rightarrow |ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

(b) Provemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = a + b$ (provar que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = a - b$ é análogo). Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, tomando $n > máx\{n_1, n_2\}$ e utilizando a *desigualdade triangular*, obtemos

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(c) Pelo *lema 2.2.1*, podemos tomar $p > 0$ tal que $|b_n| < p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2p} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a| + 1}$$

Então, para $n > máx\{n_1, n_2\}$ e utilizando a *desigualdade triangular*, uma vez mais, obtemos

$$|a_nb_n-ab| = |(a_n-a)b_n+a(b_n-b)| \leq |a_n-a||b_n|+|a||b_n-b| < \frac{\epsilon}{2p}p+|a|\frac{\epsilon}{2|a|+1} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(d) Seja $p > 0$ tal que $|b_n| < p$, para todo $n \geq 1$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{p}$. Então, para $n > n_0$, temos

$$|a_nb_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\epsilon}{p}p = \epsilon, \text{ de sorte que } (a_nb_n)_{n\geq 1} \text{ converge para } 0.$$

(e) Se mostrarmos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, seguirá do item (c) que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.\frac{1}{b_n} = a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Para o que falta, comecemos tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ para $n > n_1$. Então, para tais valores de n temos, pela *desigualdade triangular*

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}\frac{|b_n - b|}{|b_n|} \leq \frac{1}{|b|}\frac{|b_n - b|}{|b| - |b_n - b|} < \frac{1}{|b|}\frac{|b_n - b|}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon\frac{|b|^2}{2}.$$

Portanto, para $n > máx\{n_1, n_2\}$, temos

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\frac{\epsilon|b|^2}{2} = \epsilon.$$

□

Exemplo 2.2.7:

Prove que a sequência $a_n = \frac{n^2}{2n+1} sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é convergente e ache o seu limite.

Solução:

Observe que $\frac{n^2}{2n+1} sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2n+1}\, n\; sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Daí temos que a sequência $b_n = \frac{n}{2n+1}$ é convergente, pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo a sequência $c_n = n\; sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é convergente pois,

$$\lim_{n\to+\infty} n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi.$$

Assim, pela *Proposição 2.2.4 item (c)*,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1}\, n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} \lim_{n\to+\infty} n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Logo, a sequência dada é convergente e seu limite é $\dfrac{\pi}{2}$.

Lema 2.2.2:

Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Prova:

Suponhamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ seja uma sequência monótona não decrescente e limitada, isto é,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... < M,$$

para algum $M > 0$ (os demais casos podem ser tratados de forma análoga). Então, M é uma cota superior para o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, de sorte que tal conjunto possui supremo, digamos $\sup A = p$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = p$. Para tanto, seja $\epsilon > 0$ dado; como $p - \epsilon$ não é mais cota superior de A, algum elemento de A é maior que $p - \epsilon$, digamos $a_{n_0} > p - \epsilon$. Mas, como $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq ...$, concluímos que $a_n > p - \epsilon$, para todo $n > n_0$. Assim, para $n > n_0$, temos

$$p - \epsilon < a_n \leq p < p + \epsilon$$

ou,

$$|a_n - p| < \epsilon.$$

□

2.3 Séries infinitas de termos constantes

Uma parte importante no estudo do Cálculo envolve a representação de funções como "somas infinitas". Para isso, vamos estender a operação de adição em conjuntos finitos para conjuntos infinitos. Associamos à sequência $(a_n)_{n\geq 1} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ uma "soma infinita"dada por:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Nessa soma, formamos uma nova sequência $(S_n)_{n\geq 1}$, adicionando os sucessivos elementos de $(a_n)_{n\geq 1}$, assim:
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

A sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ é chamada de **somas parciais**.

Definição 2.3.1:

Se $(a_n)_{n\geq 1}$ for uma sequência e $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, então a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ será chamada de **série infinita**, a qual é denotada por:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Os números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ são chamados de **termos** da série infinita. Os números $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ são chamados de **somas parciais** da série infinita.

Note que quando $(S_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de somas parciais,
$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$. Assim, $S_n - S_{n-1} = a_n$

Exemplo 2.3.1:

Dada a série infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(a) determine os quatro primeiros elementos da sequência das somas parciais $(S_n)_{n\geq 1}$, e

(b) determine uma fórmula para $(S_n)_{n\geq 1}$ em termos de n.

Solução:

(a) Como $S_n - S_{n-1} = a_n$, temos:

$S_1 = a_1 = \dfrac{1}{1(2)} = \dfrac{1}{2}$,

$S_2 = S_1 + a_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(3)} = \dfrac{2}{3}$,

$S_3 = S_2 + a_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3(4)} = \dfrac{3}{4}$,

$S_4 = S_3 + a_4 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4(5)} = \dfrac{4}{5}$.

(b) Como $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ temos, por frações parciais, $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Logo:

$a_1 = 1 - \dfrac{1}{2}$,

$a_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$,

$a_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$,

$\vdots$

$a_{n-1} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$,

$a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,

Assim, como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, segue que:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Eliminando os parenteses e, combinando os termos obtemos

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Definição 2.3.2: Soma de uma Série infinita

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma dada série infinita, e seja $(S_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais que definem a série. Então, se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ existir e for igual a S, dizemos que a série dada será

convergente, sendo S a **soma** da série infinita dada. Se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existir, a série será **divergente** e não terá uma soma.

Exemplo 2.3.2:

Determine se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ tem uma soma.

Solução:

Como $S_n = \frac{n}{n+1}$, temos:

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$

Assim, a série infinita tem uma soma igual a 1, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ... = 1$$

Exemplo 2.3.3:

Determine a série infinita que tem a seguinte sequência de somas parciais $S_n = \frac{1}{2^n}$ e obtenha sua soma.

Solução:

Como $S_1 = \frac{1}{2}$. Se $n > 1$, então $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n}$.

Logo, a série infinita é $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Já que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, assim a soma da série é 0.

Teorema 2.3.1:

Seja $(S_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais de uma dada série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um número N, tal que, se $R > N$ e $T > N$, então $|S_R - S_T| < \epsilon$.

Prova:

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, seja S a sua soma. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$, tal que $n > N$, então $|S - S_n| < \frac{1}{2}\epsilon$. Logo, se $R > N$ e $T > N$,

$$|S_R - S_T| = |S_R - S + S - S_T| \leq |S_R - S| + |S - S_T| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Portanto, se $R > N$ e $T > N$, então $|S_R - S_T| < \epsilon$.

□

Exemplo 2.3.4:

Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, chamada de série **harmônica** é divergente.

Solução:

Temos que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \text{ e } S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}.$$

Logo,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

Se $n > 1$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}$$

Há n termos em cada lado do sinal da desigualdade; assim, o lado direito é $n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$. Logo, se $n > 1$, então:

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Mas o *Teorema 2.3.1* estabelece que se a série dada for convergente, $S_{2n} - S_n$ poderá se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando n suficientemente grande, isto é, se $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe um N tal que se $2n > N$ e $n > N$, então $S_{2n} - S_n < \frac{1}{2}$, contradizendo (2). Logo a série harmônica é divergente.

Uma **série geométrica** é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$$

Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$. A n-ésima soma parcial da série geométrica acima é dada por

$$S_n = a(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}) \qquad (3)$$

Da identidade

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1})$$

Podemos escrever (3) como

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \qquad (4)$$

Teorema 2.3.2:

Dado $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ converge se, e somente se, $0 < |r| < 1$. Nesse último caso, sua soma é igual a $\frac{1}{1-r}$.

Prova:

Sendo $S_n = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}$, segue de (4) que:

$$S_n = \frac{(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}.$$

Agora, se $0 < |r| < 1$, o *exemplo 2.2.2* garante que $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$. Portanto, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r} \right) = \frac{1}{1 - r}$$

Por outro lado, se $|r| \geq 1$, então $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$, de forma que a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ não converge em $\mathbb{R}$. Portanto, nesse caso, a série geométrica será divergente.

$\square$

Teorema 2.3.3:

Uma série infinita de termos positivos será convergente se, e somente se, sua sequência de somas parciais tiver um limitante superior.

Prova:

Para uma série infinita de termos positivos, a sequência de somas parciais tem um limitante inferior de 0. Se a sequência das somas parciais também tiver um limitante superior, então ela será limitada. Além disso, a sequência das somas parciais de uma série infinita de termos positivos é crescente, Segue-se então, do *Lema 2.2.2*, que a sequência das somas parciais é convergente, e portanto, a série infinita é convergente.

Vamos supor agora que uma série infinita de termos positivos seja convergente. Então, a sequência de somas parciais também será convergente. Segue do *Lema 2.2.1*, que a sequência das somas parciais será limitada e, assim sendo, terá um limitante superior.

□

Para uma série dada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, que queremos saber se é convergente, podemos compará-la com uma outra série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ que sabemos ser convergente. Para essa comparação, utilizamos um teorema conhecido como o **teste da comparação**.

Teorema 2.3.4: Teste da comparação

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos.

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for uma série de termos positivos que sabemos ser convergente e se $a_n \leq b_n$ para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será convergente.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ for uma série de termos positivos que sabemos ser divergente e se $a_n \geq c_n$ para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será divergente.

Prova:

(i) Seja $(S_n)_{n\geq 1}$ a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $(T_n)_{n\geq 1}$ a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série convergente de termos positivos, segue do *teorema 2.3.3* que a sequência $(T_n)_{n\geq 1}$ tem um limitante superior, o qual chamaremos de B. Como $a_n \leq b_n$ para todo n inteiro positivo, podemos concluir que $a_n \leq b_n \leq B$ para todo n inteiro positivo. Logo, B é um limitante superior da sequência $(S_n)_{n\geq 1}$. Como os termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ são todos positivos, segue do *teorema 2.3.3* que

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii)Suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja convergente. Então, como ambas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ são séries infinitas de termos positivos e $c_n \leq a_n$ para todo n inteiro positivo, segue da parte (i) que $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ é convergente. Porém isso contradiz a hipótese; logo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

□

Exemplo 2.3.5:

Determine se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n+1}$ é convergente.

Solução:

A série dada é:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{82} + ... + \frac{4}{3^n+1} + ...$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série com o n-ésimo termo da série geométrica convergente

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + ... + \frac{4}{3^n} + ...$$

Temos

$$\frac{4}{3^n+1} \leq \frac{4}{3^n}$$

para todo n inteiro positivo. Assim sendo, pelo *teste da comparação*, a série dada é convergente.

Definição 2.3.3:

Dizemos que a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente.

Exemplo 2.3.6:

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n}$ é absolutamente convergente.

Solução:

A série dada é

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}-\frac{2}{3^4}+...+(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n}+... \qquad (5)$$

Essa série será absolutamente convergente se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+...+\frac{2}{3^n}+...$$

for convergente. Como se trata de uma série geométrica com $r=\frac{1}{3}<1$ e primeiro termo igual a $\frac{2}{3}$, ela será convergente. Logo, a série (5) é absolutamente convergente.

Vamos propor agora o estudo do **teste da razão**, um teorema muito usado para determinar se uma dada série é absolutamente convergente.

Teorema 2.3.5: Teste da razão

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ uma série infinita dada para a qual todo a_n é não-nulo. Então:

(i) Se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=p<1$, a série dada é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=p>1$, ou se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ a série dada é divergente.

Prova:

(i) É dado que $p<1$. Seja R um número tal que $p<R<1$. Seja $R-p=\epsilon<1$. Como $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=p$, existe um inteiro $N>0$ tal que se $n\geq N$, então:

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-p\right|<\epsilon$$

Assim, se $n\geq N$, então:

$$0<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<p+\epsilon=R \qquad (6)$$

Vamos supor que n assuma os valores sucessivos $N, N+1, N+2, ...$ e assim por diante. De (6) obtemos:

$$|a_{N+1}| < R|a_N|$$

$$|a_{N+2}| < R|a_{N+1}| < R^2|a_N|$$

$$|a_{N+3}| < R|a_{N+2}| < R^3|a_N|$$

$$\vdots$$

$$|a_{N+k}| < R^k|a_N| \text{ para todo } k \text{ inteiro positivo.} \qquad (7)$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_N|R^k$ é convergente, pois é uma série geométrica com razão $R < 1$. De (7) e do *teste da comparação*, segue que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{N+k}|$ é convergente.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{N+k}|$ difere da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_N|$ somente nos N primeiros termos. Assim sendo, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_N|$ é convergente e, portanto, a série dada é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p > 1$ ou $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, então em ambos os casos existe um inteiro $N > 0$ tal que $n \geq N$, então:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1.$$

Vamos supor que n assuma valores sucessivos $N, N+1, N+2, ...$ e assim por diante. Obtemos:

$$|a_{N+1}| > |a_N|$$

$$|a_{N+2}| > |a_{N+1}| > |a_N|$$

$$|a_{N+3}| > |a_{N+2}| > |a_N|$$

$$\vdots$$

Assim, se $n > N$, então $|a_n| > |a_N|$. Logo, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, portanto, a série dada é divergente.

$\square$

Exemplo 2.3.7:

Dado um número natural m e um real $q > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{k^m}{q^k}$ converge ou diverge?

Solução:

Fazendo $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n^m}{q^n}$, para $n \geq 1$, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}\frac{q^n}{n^m} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^m\frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1$$

Portanto, pelo *Teste da razão*, a série dada é absolutamente convergente, logo, convergente.

Teorema 2.3.6: Teste da divergência

Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Prova:

Encontra-se em LEITHOLD, 1994 *pág.*706

3 Séries de potências e Séries de Taylor

3.1 Séries de potências

Definição 3.1.1:

Uma **série de potências** em $x - a$ é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

Observe que consideramos $(x-a)^0 = 1$.

Quando $a = 0$, a série torna-se um caso particular da forma definida acima, sendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$$

Estamos interessados em questões de convergência ou divergência desse tipo especial de série. Assim, considerando as séries de potências, queremos saber para quais valores de x a série converge. Para cada valor de x, para o qual a série converge, ela representa um número que é a sua soma. Desse modo, uma série de potências define uma função f, com valores:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

cujo o domínio são todos os valores de x para os quais a série de potências converge.

Exemplo 3.1.1:

Ache os valores de x para os quais as séries de potências abaixo são convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$

Solução:

(a) Para a série dada temos, $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ e $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Assim aplicando o *Teste da razão*,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Logo, a série de potências dada é absolutamente convergente, portanto convergente para todos os valores de x.

(b) Para a série dada temos, $a_n = n!x^n$ e $a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$.

Assim aplicando o *Teste da razão*,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n)!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}(n+1) = \lim_{n\to+\infty}\begin{cases} 0, & se \quad x = 0 \\ +\infty, & se \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Logo, a série dada é convergente quando $x = 0$.

Observa-se que o Teste da razão é uma ferramenta importante para determinar a convergência de séries de potências.

Teorema 3.1.1:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma dada série de potências. Então uma, e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) a série converge somente para $x = 0$;

(ii) a série é absolutamente convergente para todos os valores de x;

(iii) existe um número $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x, para os quais $|x| < R$ e, é divergente para todos os valores de x, para os quais $|x| > R$.

Prova:

Encontra-se em LEITHOLD, 1994, *pág.*748/749

Se, em vez da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, tivermos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$, então as afirmações (i) e (iii) do *Teorema 3.1.1*, x será substituído por $x-a$. As afirmações alteram-se para:

(i) a série converge somente para $x = a$;

(iii) existe um número $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x-a| < R$ e, é divergente para todos os valores de x para os quais $|x-a|>R$.

Ao conjunto de todos os valores de x para os quais uma dada série de potências é convergente, chamamos **intervalo de convergência** da série de potências. O número R citado no *Teorema 3.1.1* é denominado **raio de convergência** da série de potências.

Se R for o intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, o intervalo de convergência será um dos seguintes:

$$(-R,R),\ [-R,R],\ (-R,R] \text{ ou } [-R,R).$$

No caso mais geral da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$, o intervalo de convergência será um dos seguintes:

$$(a-R,a+R),\ [a-R,a+R],\ (a-R,a+R] \text{ ou } [a-R,a+R).$$

Exemplo 3.1.2:

Determine o intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$.

Solução:

A série dada é:

$$(x-2)+2(x-2)^2+\ldots+n(x-2)^n+(n+1)(x-2)^{n+1}+\ldots$$

Aplicanco o *teste da razão*, teremos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|$$

A série dada será, então, absoltamente convergente se $|x-2|<1$ ou, equivalentemente, $-1<x-2<1$, ou ainda, $1<x<3$.

Cujo raio de convergência é 1.

Quando $x=1$, a série será $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n$, que é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Quando $x=3$, a série torna-se $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, que também diverge, pois $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Assim, o intervalo de convergência será $(1,3)$. Logo, a série de potências define uma função cujo o domínio é o intervalo $(1,3)$.

3.2 Derivação e integração de séries de potências

Vimos que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ define uma função f cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Nessa secção, vamos ver como obtemos séries de outras séries dadas por derivação e por integração.

Teorema 3.2.1:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for uma função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

$f'(x)$ existirá para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$, sendo dada por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Prova:

Encontra-se no livro O Cálculo com Geometria Analítica *pág.* 755

Exemplo 3.2.1:

Seja f a função definida pela série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$:

(a) Ache o domínio de f;

(b) escreva a série de potências que define a função f' e determine o domínio de f'.

Solução:

(a) Para a série dada temos $a_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ e $a_{n+1} = \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}$.

Assim aplicando o *Teste da razão* temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} . \frac{(n+1)^2}{x^{n+1}}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4} = |x|$$

Dessa forma, a série de potências é convergente quando $|x| < 1$, assim seu raio de convergência é $R = 1$.

O domínio de f é o intervalo de convergência da série de potências, nesse caso a série de potências converge quando $|x| < 1$. Considere agora a série de potências quando $|x| = 1$. Para determinar a convergência da série em $x = 1$ e $x = -1$, fazemos análise local nesses pontos:

Para $x = 1$, a série de potências torna-se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, onde $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)^2}$. Assim, pelo *Teste da razão* temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{(n+2)^2}.\frac{(n+1)^2}{1}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}\right| = 1.$$

Portanto a série é convergente.

Para $x = -1$, a série de potências torna-se a série alternada $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$, onde $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ e $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+2)^2}$. Assim, pelo *Teste da razão* temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}.\frac{(n+1)^2}{(-1)^{n+2}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{-n^2-4n-4}\right| = 1.$$

Portanto a série é absolutamente convergente e pela *Definição 2.3.3* a série é convergente.

Logo o intervalo $[-1, 1]$ é o domínio de f.

(b) Derivando a série de potências dada obtemos:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)}$$

Para a nova série obtida temos $a_n = \dfrac{x^n}{(n+1)}$ e $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+2)}$.

Assim aplicando o *Teste da razão* temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)}.\frac{(n+1)}{x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = |x|$$

Desse modo a série é convergente para $|x| < 1$, assim seu raio de convergência é $R' = 1$.

$f'(x)$ existe para todo x no intervalo aberto $(-1, 1)$. Portanto:

Para $x = 1$ a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{(n+1)} + ...$$

é a série harmônica, portanto, diverge.

Para $x = -1$ a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^n \frac{1}{(n+1)} + ...$$

é uma série alternada convergente. Assim, o intervalo $[-1, 1)$ é o domínio de f'.

Teorema 3.2.2:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for uma função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

f será integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$ e calculamos a integral de f integrando termo a termo a série de potências dadas, isto é, se x está em $(-R, R)$, então

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}$$

Prova

Encontra-se no livro O Cálculo com Geometria Analítica *pág.* 761

Exemplo 3.2.2:

Obtenha uma representação em série de potências de $tg^{-1}x$.

Solução:

Da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, temos:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + ... = \frac{1}{1+x^2}, \text{ se } |x| < 1.$$

Integrando termo a termo, obtemos:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Logo, $tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, se $|x| < 1$.

3.3 Séries de Taylor

Vamos ver agora como uma função f definida pode ser representada por uma série de potências que se aproxima de f em um determinado ponto a de f. Vamos determinar essa representação sobre a origem, ou seja, $a = 0$ e também de um modo generalizado, ou seja, para qualquer valor a de f.

Se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ... \tag{8}$$

cujo o raio de convergência é $R > 0$, segue, de sucessivas aplicações do *teorema 3.2.1*, que f tem derivadas de todas as ordens em $(-R, R)$. Dizemos que tal função é **infinitamente derivável** em $(-R, R)$. Sucessivas derivações da função em (8) resultam em:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ... + nc_n x^{n-1} + ... \tag{9}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3 x + 3.4c_4 x^2 + ... + (n-1)nc_n x^{n-2} + ... \tag{10}$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4 x + ... + (n-2)(n-1)nc_n x^{n-3} + ... \tag{11}$$

$$f^{(iv)}(x) = 2.3.4c_4 + ... + (n-3)(n-2)(n-1)nc_n x^{n-4} + ... \tag{12}$$

$$\vdots$$

Se $x = 0$ em (8),

$f(0) = c_0$.

Se $x = 0$ em (9),

$f'(0) = c_1$.

Se $x = 0$ em (10),

$f''(0) = 2c_2 \Leftrightarrow c_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$.

Se $x = 0$ em (11),

$f'''(0) = 2.3c_3 \Leftrightarrow c_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!}$.

Se $x = 0$ em (12),

$$f^{(iv)}(0) = 2.3.4c_4 \Leftrightarrow c_4 = \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}.$$

Em geral,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ para todo } n \text{ inteiro positivo.}$$

Essa fórmula também é válida para $n = 0$, se tomarmos $f^{(0)}(0)$ como sendo $f(0)$ e $0! = 1$. Assim, dessa fórmula e de (8), a série de potências de f em x pode ser escrito como:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{13}$$

De um modo geral, consideremos a função f como uma série de potências em $x - a$, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ... \tag{14}$$

Se o raio de convergência dessa série for R, então f será infinitamente derivável em $(a - R, a + R)$. Sucessivas derivações da função (14) resultam em:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + ... + nc_n(x-a)^{n-1} + ...$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a)^2 + ... + (n-1)nc_n(x-a)^{n-2} + ...$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-a) + ... + (n-2)(n-1)nc_n(x-a)^{n-3} + ...$$

$$\vdots$$

Tomando $x = a$ nas representações de f em séries de potências, bem como nas suas derivadas, obtemos:

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}.$$

Em geral,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{15}$$

Dessa fórmula e de (14) podemos escrever a série de potências de f em $x - a$ como:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \tag{16}$$

A série (16) é chamada de **série de Taylor** de f em a. Quando $a = 0$, temos um caso especial que é a série (13), chamada de **série de Maclaurin**.

Exemplo 3.3.1:

Ache a série de Taylor para $sen(x)$ em a.

Solução:

Se $f(x) = sen\ (x)$, temos então que:

$$f'(x) = cos(x),\ f"(x) = -sen(x),\ f'''(x) = -cos(x),\ f^{(iv)}(x) = sen(x),\ \ldots$$

Assim, a fórmula $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$,

$$c_0 = sen(a)\ ,\ c_1 = cos(a),\ c_2 = \frac{-sen(a)}{2!},\ c_3 = \frac{-cos(a)}{3!},\ c_4 = \frac{sen(a)}{4!},\ \ldots$$

Logo a série de Taylor para $sen\ (x)$ em a é:

$$sen(x) = sen(a) + cos(a)(x-a) - sen(a)\tfrac{(x-a)^2}{2!} - cos(a)\tfrac{(x-a)^3}{3!} + sen(a)\tfrac{(x-a)^4}{4!}\ \ldots$$

Exemplo 3.3.2:

Ache a série de Maclaurin para $e^{(x)}$.

Solução:

Como $f'(x) = e^{(x)}$, então $f^{(n)} = e^{(x)}$, para todo n. Logo $f^{(n)}(0) = 1$, para todo n. Assim, de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ temos:

$$e^{(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

O polinômio $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, de grau máximo n é chamado de **polinômio de Taylor de grau n de f no ponto x_0**. A diferença $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ é chamada de resto.

3.4 Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Para demonstrarmos a fórmula de Taylor com resto de Lagrange iremos precisar do Teorema de Rolle que segundo LEITHOLD afirma que:

"Seja f função contínua de intervalo fechado $[a, b]$ derivável no intervalo aberto (a, b) e tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$, então existe um c entre a e b para o qual $f'(c) = 0$."

Teorema 3.4.1: Teorema de Rolle

Seja f uma função, tal que:

(i) ela seja contínua no intervalo fechado $[x_0, x]$;

(ii) ela seja derivável no intervalo aberto (x_0, x);

(iii) $f(x_0) = 0$ e $f(x) = 0$.

Então, existe um número c no intervalo aberto (x_0, x), tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Encontra-se em Encontra-se em LEITHOLD, 1994, *pág*.231

Dada uma função f num intervalo I, derivável até a ordem $(n+1)$. O teorema a seguir fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu polinômio de Taylor de ordem n, em termos da derivada $(n+1)$-ésima de f. Assim, se for possível estimar o módulo de tal derivada em I, o teorema pode ser aplicado para se obter uma estimativa superior do módulo do referido resto, o que é muito útil em cálculos aproximados.

Teorema 3.4.2: Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e f uma função derivável até a ordem n, tal que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ até a ordem $(n+1)$ e $x_0, x \in I$. Então existe um c entre x_0 e x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{17}$$

Demonstração:

Suponhamos que $x_0 < x$, para o caso $x_0 > x$ a demonstração é análoga. Tome $F : [x_0; x] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(a) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - A(x-a)^{n+1},$$

para todo $a \in [x_0; x]$ e $A \in \mathbb{R}$, onde A é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$. Tem-se:

F é contínua em $[x_0; x]$, derivável em $(x_0; x)$ e $F(x) = F(x_0) = 0$. Então, pelo *teorema de Rolle*, existe um $c \in (x_0; x)$ tal que $F'(c) = 0$.

Mas, para todo $a \in (x_0; x)$,

$F'(a) = -f'(a) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \right) +$
$(n+1)A(x-a)^n = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n)!}(x-a)^n + (n+1)A(x-a)^n.$

Como $c \neq x$, da última igualdade segue-se que $F'(c) = 0$ é equivalente a $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, portanto (17) segue-se de $F(x_0) = 0$.

□

O resto de Lagrange de ordem n, R_n, quando f é aproximada pelo polinômio de Taylor P_n em torno do ponto x_0 é dada pela expressão:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Exemplo 3.4.1:

Utilizando o polinômio de Taylor de grau 2, calcule um valor aproximado para $e^{0,03}$ e avalie o seu erro:

Solução:

Observe inicialmente que devido a $x = 0,03$, escolhe-se $x_0 = 0$.

Como $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$ e assim por diante. Logo como $x_0 = 0$, segue-se que:

$f'(0) = e^0 = 1$, $f''(0) = e^0 = 1$, $f'''(0) = e^0 = 1$, então, pelo *teorema 3.4.2*, tem-se que:

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{e^0 x^2}{2!} + \frac{e^c x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c x^3}{3!}, \qquad (18)$$

onde $0 < c < 0,03$.

Calculando, o polinômio de Taylor de grau 2, temos:

$$e^{0,03} \approx 1 + 0,03 + \frac{0,03^2}{2} = 1,03045.$$

Avaliando o erro:

Observe de (18) que $|e^x - 1,03045| = \dfrac{e^c x^3}{3!}$, ou seja, $|e^{0,03} - 1,03045| = \dfrac{e^c(0,03)^3}{6} = (4,5)(10^{-6})(e^c) < (4,5)(10^{-6})(e^{0,03})$.

Portanto, $|e^{0,03} - 1,03045| < (4,5)(10^{-6})$, ou seja, a aproximação tem pelo menos 5 casas decimais exatas.

3.5 Fórmula de Taylor com resto infinitesimal

Mostraremos agora, que dada uma função f derivável até ordem n em x_0 pertencente ao seu domínio, o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 é a única função polinomial P_n, de grau menor do que ou igual a n, tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

com $R_n(x) = R(x, x_0)$. Onde o resto $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ satisfaz a propriedade

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Esse limite será interpretado como "o resto $R_n(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$ tende a zero, quando x tende a x_0".

Lema 3.5.1 - Regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \text{ e se } \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = p, \text{ segue que } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = p.$$

Prova:

Encontra-se em LEITHOLD, 1994, *pág*.656/657

Proposição 3.5.1 - Fórmula de Taylor de ordem 1, com resto infinitesimal

Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em x_0.

(i) Se f for derivável em x_0 e $R_1 = f - P$, então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0,$$

(ii) Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor do que ou igual a 1 e $R = f - P$ satisfazer $\lim_{x \to x_0} \dfrac{R(x)}{x - x_0} = 0$,

então f é derivável em x_0 e P é o polinômio e Taylor de ordem 1 de f em x_0.

Prova:

(i) Com efeito, suponha que f seja derivável em x_0, isto é, existe

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Então, para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{R_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \text{ segue que } \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

(ii) Reciprocamente, seja:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a(x - x_0) + b, \end{aligned}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, uma função polinomial tal que, se $R = f - P$, então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Em particular, isto implica $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$; como f é contínua, segue que $b = f(x_0)$. Logo, para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a.$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R(x)}{x - x_0} = 0$, conclui-se que f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = a$, portanto P é o único polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0.

$\square$

Teorema 3.5.1 - Fórmula de Taylor de ordem n, com resto infinitesimal

(i) Se R_n é a diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem n em x_0, então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

(ii) Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor do que ou igual a n e $R = f - P$ satisfizer $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, então P é o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0.

Prova:

Por indução em n.

(1) Para $n = 1$, segue-se a *proposição 3.5.1.*

(2) Seja $k \geq 2$, e suponha que (i) e (ii) sejam verdadeiras para $n \leq k - 1$. Provemos que também serão verdadeiras para $n = k$. Com efeito:

(i) Se, para todo $x \in I$, $R_k(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$, então $R_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e para todo $x \in I$,

$$R_k'(x) = f'(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{(j-1)!}(x-x_0)^{j-1} = f'(x) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(f')^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m.$$

Portanto, pela hipótese de indução, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_k'(x)}{(x-x_0)^{k-1}} = 0$.

Assim, como $\lim\limits_{x \to x_0} R_k = 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)^k = 0$, a regra de L'Hospital implica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^k} = 0.$$

(ii) Suponha, que para todo $x \in I$, $f(x) = P(x) + R_k(x)$, com grau $P \leq k$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_k(x)}{(x-x_0)^k} = 0$. Isto implica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_k(x)}{(x-x_0)^m} = 0$, para $0 \leq m \leq k$.

Sejam $a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}$ tais que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n (x-x_0)^n + a_k (x-x_0)^k.$$

Definamos $\tilde{P}(x) = \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n (x-x_0)^n$, de forma que, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \tilde{P}(x) + a_k(x-x_0)^k + R(x) \tag{19}$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a_k(x-x_0)^k + R(x)}{(x-x_0)^{k-1}} = 0$ e o grau de $\tilde{P} \leq k-1$, pela hipótese de indução, conclui-se que $\tilde{P}$ é o polinômio de Taylor de ordem $(k-1)$ de f em x_0, isto é, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$.

Com efeito, para cada $j \in \{0, \ldots, k-2\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f^{(j)}(x) - \tilde{P}^{(j)}(x) \right] = 0$ e

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{d^j}{dx^j} \left[(x-x_0)^k \right] = \lim\limits_{x \to x_0} k(k-1)\ldots(k-j+1)(x-x_0)^{k-j} = 0.$

Como $f^{(k-1)}$ é derivável em x_0, por hipótese, e $\tilde{P}^{(k-1)}(x) = cte. = f^{(k-1)(x_0)}$, temos que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - \tilde{P}^{(k-1)}(x)}{k!(x-x_0)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!};$$

logo, aplicando-se $(k-1)$ vezes a regra de L'Hôpital, prova-se a afirmação. Por outro lado, de (19) segue-se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \tilde{P}(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \left[a_k + \frac{R_k(x)}{(x-x_0)^k} \right] = a_k.$$

Portanto, pela unicidade do limite, conclui- que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$, logo P é o polinômio de Taylor de ordem k de f em x_0.

$\square$

Exemplo 3.5.1

Usando a fórmula de Taylor com resto infinitesimal, podemos aperfeiçoar e generalizar o Teste da Derivada Segunda cujo o enunciado segue abaixo.

Dada uma função $f \in C^2\,(c, d)$ e $a \in (c, d)$ com $f'(a) = 0$, vale o que segue:

(i) Se $f''(a) > 0$, então a é o ponto mínimo no local de f;

(ii) Se $f''(a) < 0$, então a é o ponto máximo no local de f.

Notando que tal teste nada mais afirma que $f'(a) = f''(a) = 0$, provemos o que segue:

Proposição 3.5.2

Seja $f \in C^{n-1}(c, d)$, com $n \geq 2$, e $a \in (c, d)$ tal que existe $f^{(n)}(a)$ e que temos

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Suponhamos n par.

(i) Se $f^{(n)}(a) > 0$, então a é o ponto mínimo local estrito de f;

(ii) Se $f^{(n)}(a) < 0$, então a é o ponto máximo local estrito de f.

Prova:

Pelas hipóteses e pelo *teorema: 3.5.1*, temos:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + E(h)h^n, \text{ com } \lim_{h \to 0} E(h) = 0.$$

Logo, supondo $|h|$ suficientemente pequeno e $h \neq 0$,
$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h^n} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + E(h).$

Notemos que como $E(h) \to 0$ se $h \to 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, para $|h|$ suficientemente pequeno e não nulo, os sinais de $f^{(n)}(a)$ e $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h^n}$ são iguais. No caso n par, tal sinal é o sinal de $f(a+h)-f(a)$.

Consequentemente, para h suficientemente pequeno e não nulo, vale o que segue:

(a)

(i) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então temos $f(a+h)-f(a) > 0$ e concluímos que a é o ponto de mínimo local estrito.

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então temos $f(a+h)-f(a) < 0$ e concluímos que a é o ponto de máximo local estrito.

(b) Se n é ímpar, a expressão $f(a+h)-f(a)$ muda de sinal segundo h muda de sinal.

$\square$

3.6 Fórmula de Taylor com resto integral

Inicialmente, falaremos da integral de Riemann, que têm como objetivo calcular a região limitada por funções limitadas em intervalos limitados. E calcularemos esta região através da divisão da mesma em retângulos.

Definição 3.6.1

A **integral de Riemann** da função f no intervalo $[a, b]$ é o limite seguinte, desde que ele exista:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(z_i)\Delta x_i,$$

onde os números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ satisfazem $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ e onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e z_i é arbitrariamente escolhido no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Teorema 3.6.1: Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo $[a, b] \subset I$ e $F : I \to \mathbb{R}$ a integral indefinida de f baseada em $c \in I$. Se f é contínua em $x_0 \in I$, então F é derivável em x_0, com $F'(x_0) = f(x_0)$.

Prova:

Encontra-se em NETO, 2015, *pág.*246

Vamos deduzir uma fórmula integral para o resto da fórmula de Taylor de ordem n de uma função derivável até ordem $n + 1$, cuja derivada de ordem $n + 1$ seja Riemann-integrável.

Seja $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivável até segunda ordem, com $\phi'' : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrável. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt$$

Faremos uma integração por partes da seguinte maneira:
Vamos por $f = \phi'$, $g(t) = 1 - t$, de modo que $fg' = -\phi$; assim,

$$\int_0^1 \phi'(t)dt = -\int_0^1 f(t)g'(t)dt = -f(t)g(t)|_0^1 + \int_0^1 f'(t)g(t)dt,$$

ou seja:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt$$

Se ϕ'' tiver derivada Riemann-integrável, continuamos a integrar por partes. Suponha, assim, que $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $n+1$, com $n \in \mathbb{N}$, e que $\phi^{(n+1)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja Riemann-integrável. Mostraremos por indução em n que:

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{(n)}}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt \tag{20}$$

Em efeito:

(i) Para $n = 0$, (20) é o Teorema fundamental do Cálculo.

(ii) Suponhamos que (20) seja válida para $n = p \in \mathbb{N}$. Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $p+2$ e suponha que $\phi^{(p+2)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja Riemann-integrável. Em particular, $\phi^{(p+1)}$ é contínua, portanto Riemann-integrável; pela hipótese de indução, tem-se:

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{(p)}}{p!}\phi^{(p+1)}(t)dt.$$

Tome $f = \phi^{(p+1)}$ e $g(t) = \dfrac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}$. Então $f(t)g'(t) = -\dfrac{(1-t)^{p}}{(p)!}\phi^{(p+1)}(t)$.

Logo, integrando por partes, obtemos:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!}\phi^{(p+1)}(t)dt = -f(t)g(t)|_0^1 + \int_0^1 f'(t)g(t)dt =$$
$$\frac{\phi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\phi^{(p+2)}(t)dt,$$

donde se conclui que (20) vale para $n = p+1$.

Teorema 3.6.2: Fórmula de Taylor de Ordem n, com resto integral

Sejam $x_0, h \in \mathbb{R}, h > 0, n \in \mathbb{N}$ e $f : [x_0; x_0 + h] \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $n+1$, com $f^{(n+1)}$ Riemann-integrável no intervalo $[x_0; x_0+h]$. Então:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{(n)}}{n!} f^{(n+1)}(x_0+h)dt\right] h^{n+1}. \tag{21}$$

Prova:

Definimos $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\phi(t) = f(x_0 + th)$. Então, aplicando-se a regra da cadeia sucessivas vezes, conclui-se que ϕ é derivável até ordem $n+1$ e, para $0 \leq k \leq n$, $\phi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0 + th)h^k$. Em particular, $\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(x_0 + th)h^{(n+1)}$ é Riemann-integrável. Assim por (20), demonstrada acima, obtém-se (21).

$\square$

Fazendo as mudanças: $x = x_0 + h$ e $\zeta = x_0 + th$ temos $h = x - x_0$ e $t = \dfrac{\zeta - x_0}{h}$. Substituindo em (21), obtemos:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(x - \zeta)^n dt. \tag{22}$$

Observe então, que (21) e (22) são iguais com estas mudanças.

Exemplo 3.6.1

A fórmula de Taylor com resto integral da função $cos\ x$, onde $x \in \mathbb{R}$, com seu polinômio de Taylor P_{2n+1} e resto no ponto $x_0 = 0$ é:

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \int_0^x \frac{cos^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}dt = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

Verificação:

Sendo $f(x) = cos\ x$. Derivando sucessivas vezes $f(x_0)$ no ponto $x_0 = 0$ temos:

$f(0) = cos(0) = 1,$

$f'(0) = -sen(0) = 0,$

$f"(0) = -cos(0) = -1,$

$f'''(0) = sen(0) = 0,$

$f^{(iv)}(0) = cos(0) = 1,$

$\vdots$

Logo, temos a sequência ordenada dos números $cos^{(m)}(x)$, para $m = 0, 1, 2, \ldots,$ é:

$$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots).$$

Aplicando a fórmula (22) do *teorema 3.6.2* temos:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \int_0^x \frac{f^{(m+1)}(t)}{(m)!}(x-t)^m dt.$$

Observe que para m ímpar o valor é 0, portanto usaremos m com valores pares, ou seja, $m = 2n$. Logo:

$$cos\ \ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \int_0^x \frac{cos^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}dt$$

4 Proposta didática para aproximação de funções no ensino médio

Com o propósito de aplicar a Série de Taylor no ensino médio, este capítulo é dedicado ao desenvolvimento de aulas com o objetivo de aprofundar o estudo das funções polinomiais e trigonométricas de maneira didática para os alunos do ensino médio.

PLANO DE AULAS

Objetivo

O objetivo dos assuntos a serem tratados nas aulas é propor aos alunos do terceiro ano do ensino médio um método numérico para aproximarmos de raízes de funções polinomiais de grau maior do que ou igual a três e outro método para aproximar valores das funções polinomiais, seno e cosseno. A ferramenta matemática para aproximar zeros de raízes de polinômios será o Método de Newton, e por sua vez a ferramenta para aproximar valores das funções trigonométricas seno e cosseno são os polinômios de Taylor, os quais serão introduzidos de uma maneira adequada ao nível de ensino que estas aulas estão dedicadas.

Conteúdo

Os temas a serem desenvolvidos seguirão a seguinte proposta:

- Reta tangente;
- Inclinação de uma reta;
- Derivada de uma função;
- Derivadas sucessivas de uma função;
- Regras de derivação;
- Séries de Taylor para funções polinomiais;
- Séries de Taylor para funções seno e cosseno.

Formas de avaliação

Como se trata de um capítulo sobre funções envolvendo cálculo de ensino superior, a forma de avaliação será a aplicação de uma lista de exercícios geral, no qual os alunos irão resolver os mesmos em sala de aula com o auxílio do professor responsável. E ao final de cada conteúdo, serão propostos exercícios sobre o assunto dos quais serão revisados para acompanhar a evolução dos alunos sobre o assunto.

Bibliografia

[1] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria analítica. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2005. vol. 7.

[2] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos da Matemática Elementar - limites, derivadas e noções de integral. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005. vol. 8.

[3] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, 1994. vol. 1.

[4] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, 1994. vol. 2.

AULA 1

Para tratarmos dos assuntos elencados nos objetivo do plano de aula, os alunos do terceiro ano do ensino médio precisam ter noções do estudo da reta em geometria analítica e de funções polinomiais, seno e cosseno. Como se trata de um assunto de ensino superior, precisamos tomar alguns cuidados ao ser lecionado, pois vamos passar pela definição de limite e o objetivo dessa aula é introduzir o estudo das derivadas de um modo que os alunos entendam.

4.1 Reta tangente

Definimos como reta tangente a uma curva $f(x)$ dada, a reta r que possui um único ponto P em comum a essa curva. Observe a Figura 2:

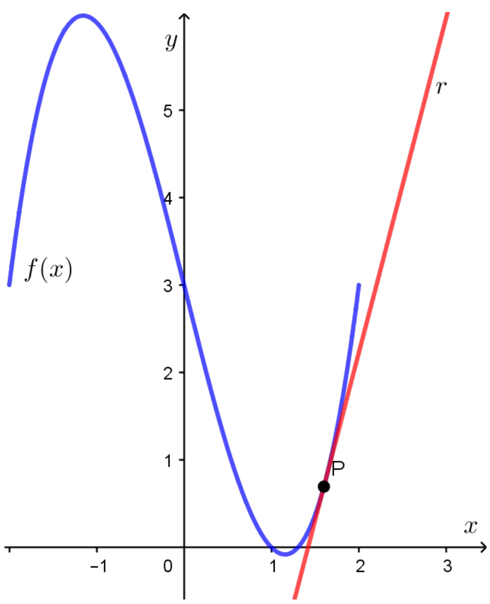


Figura 2: Gráfico da reta r tangente a curva $f(x)$ em um determinado ponto P.

Para se chegar a equação de uma reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos, precisamos definir a inclinação da reta tangente no ponto escolhido, ou seja, a reta tangente é determinada por sua inclinação e pelo seu ponto de tangência.

4.2 Inclinação de uma reta

Considere uma função f pertencente a um intervalo real I. Tomando os pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ pertencentes à f e traçando uma reta através de P e Q (ver Figura 3), observamos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é uma reta secante à f, pois ela intersecta f em dois pontos distintos.

Vamos denotar a diferença entre as abscissas de P e Q por Δx, ou seja, $\Delta x = x_2 - x_1$.

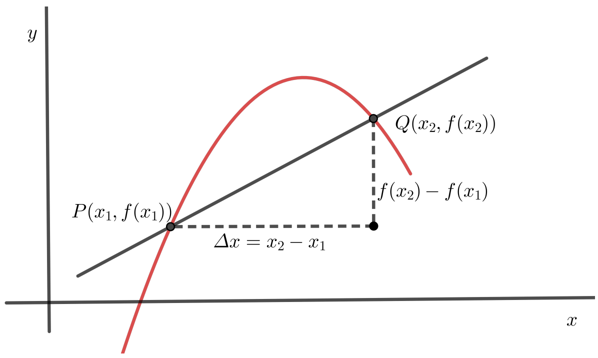


Figura 3: Reta secante e variação de valores

Observe que Δx é uma variação nos valores de x, quando ele muda de x_1 para x_2. Essa variação é chamada de *incremento de x*.

Assim, a inclinação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$, é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ pode ser escrita como:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Agora, considere o ponto P como fixo e o ponto Q como móvel, ao longo da curva em direção a P, isto é, Q tende a P. Isso é o mesmo que dizer que Δx tende a zero, pois quanto mais Q se aproxima de P, mais Δx se aproxima de zero.

Por outro lado, quando Δx tende a zero, a reta gira em torno de P, alterando assim sua inclinação e aproximando da reta tangente a f no ponto P, ou seja, à medida que tomamos valores para Δx suficientemente pequenos, a reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ aproxima-se da reta tangente em P ou, geometricamente, as retas secantes $s, s_1, s_2, s_3, \ldots$ se aproximam da reta tangente t.(ver Figura 4).

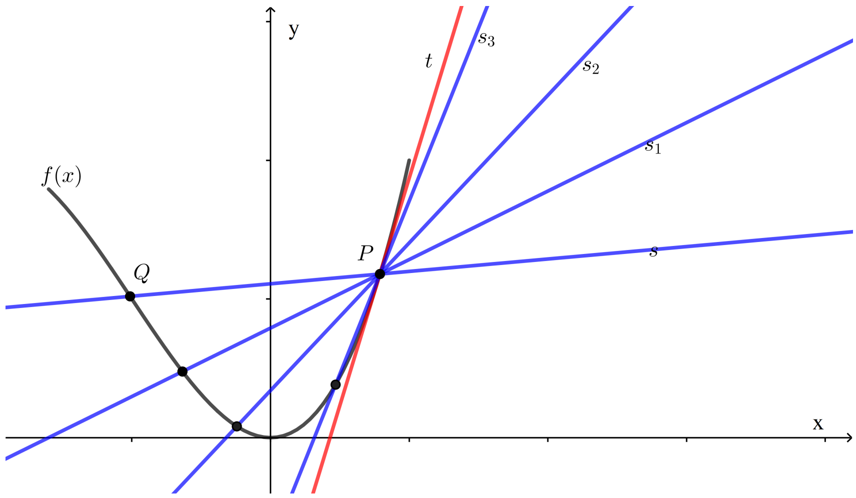


Figura 4: Reta s secante a função $f(x)$ se aproximando da reta t, quando Q tende a P.

Exemplo 4.2.1

Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f dada por $f(x) = x^2 - 3x + 4$ no ponto $P = (1, 2)$, sabendo que $x = 1$ pertence ao domínio de f.

Solução:

Primeiramente, observa-se que P pertence ao gráfico da função $f(x)$. Seja m a inclinação da reta, temos que:

$$m = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^2 - 3(1+\Delta x) + 4 - 2}{\Delta x} =$$

$$\frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 3 - 3\Delta x + 4 - 2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{\Delta x}, \text{ logo } m = \Delta x - 1$$

Como Δx tende a zero, concluímos que $m = -1$.

Quando queremos obter a equação de uma reta r que passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ e com inclinação m, podemos utilizar a fórmula:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Exemplo 4.2.2

Determine a equação da reta r que passa pelo ponto $P = (2, 3)$, sabendo que a sua inclinação é 5.
Solução:

Como $m = 5$, $x = 2$ e $y = 3$, temos que:

$$(y-3) = 5(x-2) \Rightarrow y-3 = 5x-10 \Rightarrow y = 5x-7$$

Portanto, a equação da reta r é $y = 5x - 7$. (Ver Figura 5)

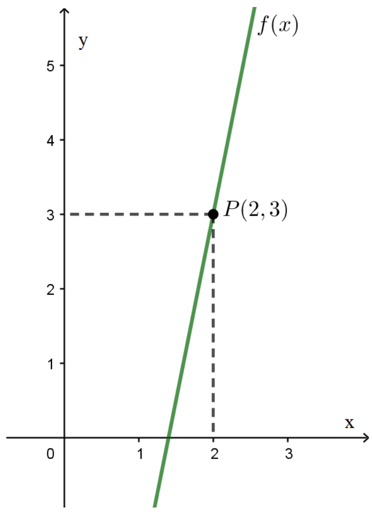


Figura 5: Gráfico da função $f(x) = 5x - 7$

Exemplo 4.2.3

Ache a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x + 1$ no ponto $P(1, 0)$.

Solução:

Inicialmente, vamos determinar a inclinação da reta.

$$m = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 - 0}{\Delta x} =$$

$$\frac{1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2 - 2\Delta x + 1 - 0}{\Delta x} = \frac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta x(\Delta x^2 + 3\Delta x + 1)}{\Delta x} = \Delta x^2 + 3\Delta x + 1$$

Como Δx tende a zero, concluímos que $m = 1$.

Agora temos a inclinação da reta e o seu ponto de tangência. Segue daí que:

$$(y-0) = 1(x-1) \Rightarrow y = x-1$$

Portanto, a reta de equação $y = x - 1$ é a reta tangente a $f(x) = x^3 - 2x + 1$ no ponto $P(1, 0)$. (Ver Figura 6)

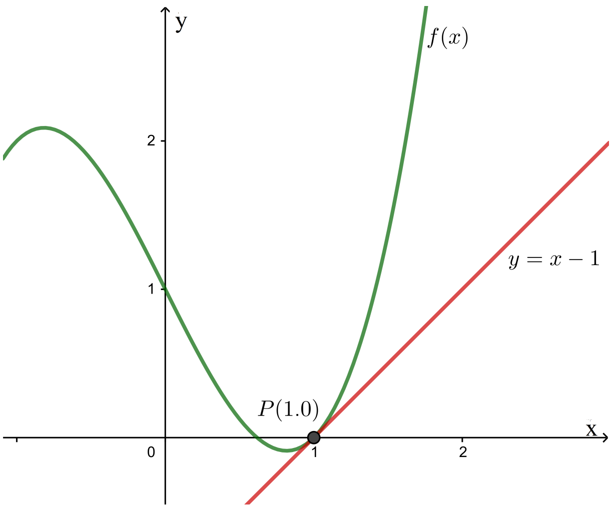


Figura 6: Gráfico da reta de equação $y = x - 1$ tangente a função $f(x) = x^3 - 2x + 1$ no ponto $P(1, 0)$.

Exercícios propostos

1) Ache a inclinação da reta r tangente ao gráfico da função $f(x)$ em cada caso:

a) $f(x) = -x^2 + 9$, para $x = 2$;

b) $f(x) = -2x^2 + 4x$, para $x = 1$;

c) $f(x) = x^3 + 1$, para $x = -3$.

2) Ache a equação da reta r que passa pelo ponto $P(2, -5)$ e tem inclinação $m = -\dfrac{4}{5}$.

3) Ache a equação da reta r que passa pelo ponto $P(-2, 4)$ e tem inclinação $m = 1$.

4) Ache a equação da reta r tangente ao gráfico da função $f(x)$, no ponto P, em cada caso:

a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ e $P(-2, 7)$;

b) $f(x) = x^4 - 4x$ e $P(0, 0)$.

AULA 2

Essa aula tem como objetivo definir a derivada de uma função e as derivadas sucessivas de uma função polinomial, propondo alguns exemplos de aplicação para um melhor entendimento dos alunos. Isso é algo importante para os alunos, pois é parte fundamental para a construção das Séries de Taylor. A definição de derivada será proposta em uma linguagem apropriada para os alunos do terceiro ano do ensino médio.

4.3 Derivada de uma função

Seja uma função f definida no intervalo I. A derivada de f é a função denotada por f', tal que seu valor em x, pertencente ao seu domínio, é dado por:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ onde } \Delta x \text{ tende a zero.}$$

Se x_1 for um determinado número no intervalo de f, então:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ onde } \Delta x \text{ tende a zero.}$$

Uma vez determinada a função derivada $f'(x)$ para todo x, quando $x = x_1$, avaliamos apenas a função derivada nesse ponto.

Interpretando geometricamente, dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$. Como mostra a Figura 7:

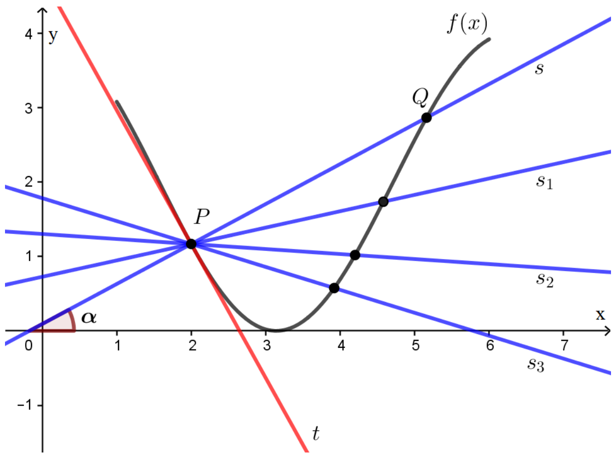


Figura 7: Reta s secante a curva $f(x)$, nos pontos P e Q e t tangente a $f(x)$ no ponto P.

A reta s é secante com o gráfico de f e sua inclinação é:

$$m = tg(\alpha) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Portanto, $tg(\alpha)$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Se f é contínua em I, então, quando x tende a x_0, Q desloca-se sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Consequentemente, a reta s desloca-se tomando sucessivas posições $s_1, s_2, \ldots,$ e tende a coincidir com a reta t, tangente a curva no ponto P. Logo, podemos concluir que a inclinação da reta tangente pode ser calculada como uma função e que essa função é a derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0. Que denotamos por $f'(x_0)$

Ou seja, feita a interpretação da derivada num ponto x_0, podemos fazer este processo continuamente para um ponto x, e aí teremos a função $f'(x)$.

Exemplo 4.3.1

Qual é a derivada da função $f(x) = 3x^2 - 12$?

Solução:

Aplicando a fórmula $f'(x) = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ na função dada temos:

$$f'(x) = \frac{[3(x+\Delta x)^2 - 12] - (3x^2 - 12)}{\Delta x} = \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 12 - (3x^2 - 12)}{\Delta x} =$$

$$\frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 12 - 3x^2 + 12}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

Como Δx tende a zero, concluímos que $f'(x) = 6x$.

Exemplo 4.3.2

Qual é a derivada da função $f(x) = 3x^2 - 12$ para $x = 2$?

Solução:

Aplicando a fórmula $f'(x_1) = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ na função dada temos:

$$f'(2) = \frac{[3(2+\Delta x)^2 - 12] - [3(2)^2 - 12]}{\Delta x} = \frac{3(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) - 12 - (12 - 12)}{\Delta x} =$$

$$\frac{12 + 12\Delta x + 3\Delta x^2 - 12 + 12 - 12}{\Delta x} = \frac{12\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(12 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 12 + 3\Delta x$$

Como Δx tende a zero, concluímos que $f'(2) = 12$.

4.4 Derivadas sucessivas de uma função

Seja f' a derivada de uma função f, f' é chamada de **função derivada primeira** de f.

A derivada da função f' é chamada de **função derivada segunda** de f e indicaremos por f''. Repetindo esse processo, podemos definir a derivada terceira (f'''), quarta ($f^{(4)}$), etc. A derivada de ordem n de f representaremos por $f^{(n)}$.

Exemplo 4.4.1

Calcule as derivadas primeira e segunda da função $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.

Solução:

Aplicando o método para calcular a derivada temos:

$$f'(x) = \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 6] - (3x^2 + 5x + 6)}{\Delta x} =$$

$$\frac{3x^2 + 6x\Delta x + \Delta x^2 + 5x + 5\Delta x + 6 - 3x^2 - 5x - 6}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta x^2 + 6x\Delta x + 5\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x + 6x + 5)}{\Delta x} = \Delta x + 6x + 5$$

Como Δx tende a zero temos que $f'(x) = 6x + 5$.

Derivando mais uma vez, ou seja, fazendo a derivada da derivada $f'(x)$, temos:

$$f''(x) = \frac{6(x + \Delta x) + 5 - (6x + 5)}{\Delta x} = \frac{6x + 6\Delta x + 5 - 6x - 5}{\Delta x} = \frac{6\Delta x}{\Delta x} = 6$$

Logo as funções derivadas de $f(x)$ são $f'(x) = 6x+5$ e $f''(x) = 6$. (Observe a Figura 8)

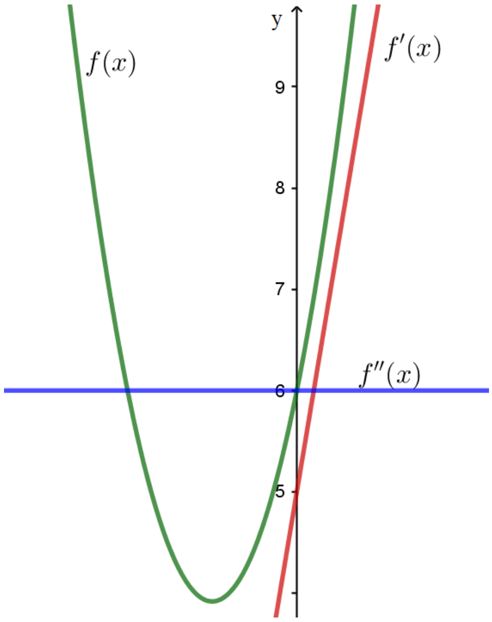


Figura 8: Gráfico das funções $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$

Exercícios propostos

1) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = 7x^2 - 2x + 1$.

2) Encontre $f'(2)$ se $f(x) = 2x^3$.

3) Se $f(x) = 3x^2 + 5x$, então calcule $f'(1)$.

4) Calcule a derivada segunda da função $f(x) = x^3$.

5) Calcule $f''(2)$ da função $f(x) = x^3 + 2x^2$.

<u>**AULA 3**</u>

O objetivo dessa aula é definir as regras de derivação. Para isso é necessário que os alunos tenham conhecimento do binômio de Newton para a demonstração da derivada de uma função polinomial e das fórmulas trigonométricas de transformações em produto, pois são fundamentais para construirmos as ideias das regras de derivação das funções seno e cosseno.

4.5 Regras de derivação

Como podemos observar, o cálculo de uma função derivada através da definição é um processo muito trabalhoso. Porém existem regras de derivação para algumas funções elementares, dentre elas, as funções polinomiais e as funções seno e cosseno.

Teorema 4.5.1 - Derivada de uma função polinomial

Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então:

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

Para a demonstrar esse teorema vamos utilizar o Binômio de Newton, dado a seguir:

Seja $(x+a)^n$ para n inteiro não negativo e x, $a \in \mathbb{R}$ e sendo $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, onde p é inteiro não negativo, temos que:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{p} x^{n-p}a^p + \cdots + \binom{n}{n} a^n$$

Demonstração

Dada uma função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Fazendo a derivada de $f(x)$ temos:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^1 + \cdots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1}.$$

Como Δx tende a zero, temos $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}$. Portanto,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}$$

$\square$

Exemplo 4.5.1

a) Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$.

b) Se $f(x) = 5x^3$, então $f'(x) = 3.5x^2 = 15x^2$.

c) Se $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$, então $f'(x) = 6x + 4$.

Derivada da função seno e cosseno

Antes de mostrarmos essas derivadas, precisaremos das seguintes transformações em produto:

$$sen(x) - sen(y) = 2sen\left(\frac{x-y}{2}\right) cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1)$$
$$cos(x) - cos(y) = -2sen\left(\frac{x+y}{2}\right) sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad (2)$$

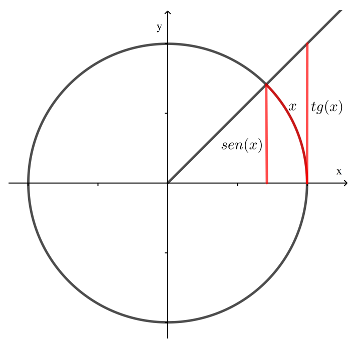
Além dessas transformações, vamos precisar do seguinte Lema:

Lema 4.5.1

$$\frac{sen(x)}{x} = 1 \text{ , quando } x \text{ tende a zero.}$$

Demonstração

Da trigonometria temos:



Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $sen(x) < x < tg(x)$, então $\frac{1}{sen(x)} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tg(x)}$. Multiplicando a última desigualdade por $sen(x)$, temos:

$$\frac{sen(x)}{sen(x)} > \frac{sen(x)}{x} > \frac{sen(x)}{tg(x)}, \text{ então } 1 > \frac{sen(x)}{x} > cos(x).$$

Como x tende a zero, $cos(x) = cos(0) = 1$. Logo: $\frac{sen(x)}{x} = 1$, quando x tende a zero.

Teorema 4.5.2: Derivada da função seno

Dada a função $f(x) = sen(x)$, aplicando a definição de derivada temos:

$$f'(x) = \frac{sen(x + \Delta x) - sen(x)}{\Delta x},$$

e pela fórmula (1) temos:

$$f'(x) = \frac{2sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right) cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Como Δx tende a zero, temos pelo *Lema 4.5.1* que $\dfrac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1$ e $cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = cos(x)$. Portanto:

$$f'(x) = cos(x)$$

Teorema 4.5.3: Derivada da função cosseno

Dada a função $f(x) = cos(x)$, aplicando a definição de derivada temos:

$$f'(x) = \frac{cos(x + \Delta x) - cos(x)}{\Delta x},$$

e pela fórmula (2) temos:

$$f'(x) = \frac{-2sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.$$

Como Δx tende a zero, temos pelo *Lema 4.5.1* que $\dfrac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1$ e $sen\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = sen(x)$. Portanto:

$$f'(x) = -sen(x)$$

Exemplo 4.5.2

a) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = cos(x)$ no ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Solução

Se $f(x) = cos(x)$, $f'(x) = -sen(x)$. Então, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, a inclinação da reta tangente é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e como ela passa pelo ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$, temos a equação da reta:

$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Construindo os gráficos de $f(x)$ e $f'(x)$, temos:

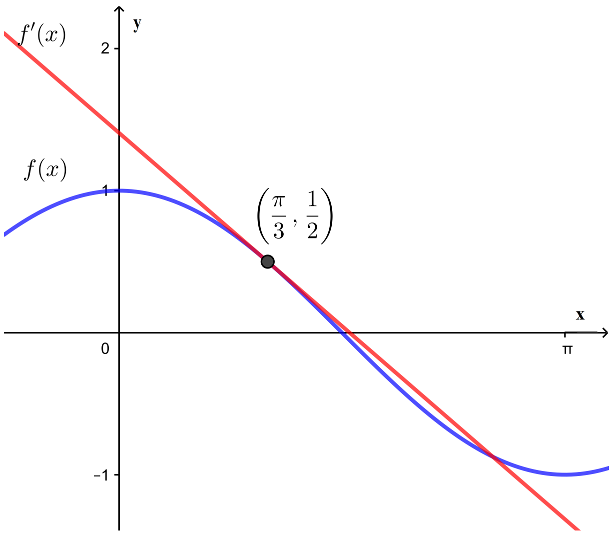


Figura 9: Gráfico das funções $f(x)$ e $f'(x)$.

b) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = sen(x)$ no ponto $(\pi, 0)$.

Solução

Se $f(x) = sen(x)$, $f'(x) = cos(x)$. Então, $f'(\pi) = cos(\pi) = -1$.

Assim, a inclinação da reta tangente é -1 e como ela passa pelo ponto $(\pi, 0)$, temos a equação da reta:

$y = -(x - \pi)$.

Construindo os gráficos de $f(x)$ e $f'(x)$, temos:

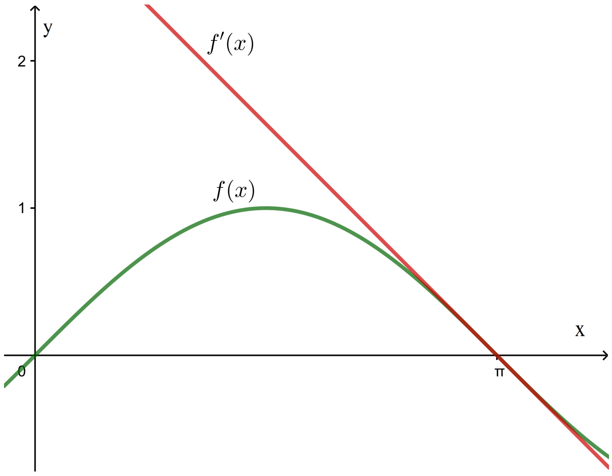


Figura 10: Gráfico das funções $f(x)$ e $f'(x)$.

Exercícios propostos

1) Determine em cada caso, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P:

a) $f(x) = x^2 - 3x$ e $P = (4, 4)$;

b) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $P = (1, 2)$;

c) $f(x) = sen(x)$ e $P = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

d) $f(x) = cos(x)$ e $P = \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$;

AULA 4

Definidas as derivadas, as derivadas sucessivas, as regras de derivação para funções polinomiais, seno e cosseno construímos um conjunto de conceitos que os alunos precisarão para as Séries Taylor. Portanto vamos introduzir as Séries de Taylor, como um método para aproximação dos valores de uma função, seja ela polinomial, seno ou cosseno e também a aproximação dos valores das raízes de uma função polinomial de grau maior do que ou igual a três.

4.6 Aproximação dos valores de uma função polinomial e de suas raízes

4.6.1 - Aproximação das raízes de uma função do 1º e 2º grau.

Quando estudamos raízes de uma função polinomial no ensino médio, trabalhamos basicamente as raízes das funções do 1º e do 2º grau.

Para as funções do 1º grau, que são do tipo $f(x) = ax + b$,com $a \neq 0$, determinamos suas raízes isolando a abscissa x quando $f(x) = 0$, encontrando a raiz $x = -\dfrac{b}{a}$.

Exemplo 4.6.1

Determine a raiz da função $f(x) = 2x - 4$ e faça um esboço de seu gráfico:

Solução:

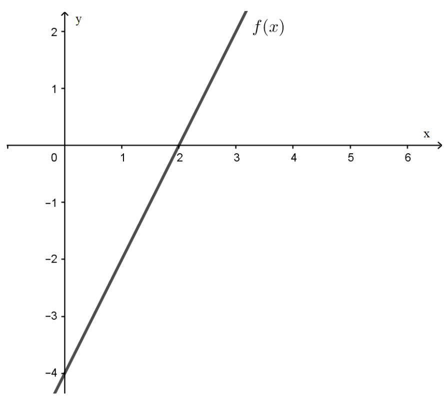
Para a raiz temos:

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$. Logo a raiz da função $f(x)$ é 2.

Para o gráfico de $f(x)$, vamos escolher os valores 0 e 2 para a abscissa.

x	$f(x) = 2x - 4$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = 2.0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
2	$f(2) = 2.2 - 4 = 0$	$(2, 0)$

Localizando os pontos obtidos no plano cartesiano, construímos o gráfico da função $f(x)$.



Para as funções do 2º grau, que são do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos vários métodos para encontrarmos suas raízes. Desses métodos o mais comum é a fórmula de Bhaskara.

Exemplo 4.6.2

Determine a raiz da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e faça um esboço de seu gráfico:

Solução:

Para as raízes temos que, inicialmente, determinar Δ, onde $\Delta = b^2 - 4ac$:

Como $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, segue-se que $\Delta = 1$.

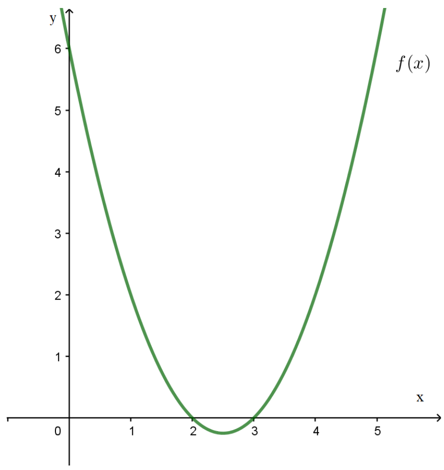
Aplicando o valor obtido na fórmula de Bhaskara $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ temos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Logo: $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ e $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

Para o gráfico de $f(x)$, vamos escolher os valores 1, 2, $\dfrac{5}{2}$, 3 e 4 para a abscissa.

x	$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$(x, f(x))$
1	$f(1) = 1^2 - 5.1 + 6$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 - 5.2 + 6$	$(2, 0)$
$\frac{5}{2}$	$f(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2})^2 - 5(\frac{5}{2}) + 6$	$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$
3	$f(3) = 3^2 - 5.3 + 6$	$(3, 0)$
4	$f(4) = 4^2 - 5.4 + 6$	$(4, 2)$



Localizando os pontos obtidos no plano cartesiano, construímos o gráfico da função $f(x)$.

4.6.2 - Aproximação das raízes de uma função polinomial de grau maior ou igual a 3.

Existem métodos analíticos para encontrar raízes de polinômios de graus 3 e 4. Para encontrar raízes de um polinômio de terceiro grau, um método conhecido é o *método de Cardano*, que podemos encontrar referências no livro [12] B. Boyer, Carl; C. Merzbach, Uta. História da matemática, nas páginas 200, 201 e 202. E para encontrar raízes de um polinômio de quarto grau, um método conhecido é o *método de Ferrari*, que podemos encontrar referências no livro [12] B. Boyer, Carl; C. Merzbach, Uta. História da matemática, nas páginas 202 e 203. Os dois métodos citados aqui, além de serem trabalhosos não são o nosso foco, por isso não aprofundaremos esse assunto.

Agora, para determinarmos ou aproximarmos de uma raiz de uma função polinomial de grau maior do que ou igual a três iremos recorrer ao método de Newton. Começamos definindo a série de Taylor de uma função:

Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em I. Para $x_0, x \in I$ distintos, chamamos de **Série de Taylor** de f em x_0 a soma infinita:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

onde $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$ são as derivadas sucessivas de f no ponto x_0 e x tem que estar perto de x_0.

Observe que a expressão acima precisa de derivadas de todas as ordens, porém se desenvolvermos a Série de Taylor até a primeira derivada de $f(x)$, obtemos um polinômio de Taylor de primeira ordem, denotado por $P_1(x)$. Cuja expressão é:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) = P_1(x) + R(x, x_0),$$

onde

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Observe que estamos aproximando valores, portanto há um resto entre a função $f(x)$ e o seu polinômio de Taylor $P_1(x)$, que denotamos acima por $R(x, x_0)$. Esse resto é obtido pelo módulo da diferença entre $f(x)$ e seu polinômio de Taylor, ou seja:

$$R(x, x_0) = |f(x) - P_n(x)|$$

Se desenvolvermos a Série de Taylor até a segunda derivada de $f(x)$, obtemos um polinômio de Taylor de segunda ordem, denotado por $P_2(x)$. Cuja expressão é:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R(x, x_0) = P_2(x) + R(x, x_0),$$

onde

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Continuando com esse raciocínio, podemos obter um polinômio de Taylor de qualquer ordem que desejarmos, ou seja:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R(x, x_0) =$$

$$P_n(x) + R(x, x_0),$$

onde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Seja f uma função polinomial que possua derivadas de todas as ordens. Suponhamos que f é um polinômio de grau maior do que ou igual a três, e x_0 um ponto pertencente ao domínio de f. Para aproximarmos de valores de f, utilizando as Séries de Taylor, seguiremos os seguintes passos:

- Calcular as derivadas de $f(x)$ até a ordem desejada;
- Calcular os valores de x_0 em $f(x)$ e em suas derivadas;
- Construir o polinômio de Taylor da ordem desejada;
- Substituir o ponto em questão.

Exemplo 4.6.3

Vamos construir os polinômios de Taylor de primeira, segunda e terceira ordem da função $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2$ em torno de $x_0 = 1$ e visualizar graficamente os resultados obtidos:

Solução

Inicialmente vamos calcular as derivadas primeira, segunda e terceira de $f(x)$.

$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x;$

$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 2;$

$f'''(x) = 60x^2 + 48x.$

Agora vamos calcular $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ e $f'''(1)$.

$f(1) + 1^5 + 2.1^4 - 1^2 = 2;$

$f'(1) = 5.1^4 + 8.1^3 - 2.1 = 11;$

$f''(1) = 20.1^3 + 24.1^2 - 2 = 42;$

$f'''(1) = 60.1^2 + 48x.1 = 108.$

Por fim, substituímos os valores obtidos na Série de Taylor para obtermos os polinômios de Taylor de primeira, segunda e terceira ordem:

$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + 11(x - 1) = 11x - 9;$

$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = f(1) + f'(1)(x - 1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 = 2 + 11(x - 1) + 21(x - 1)^2 = 21x^2 - 31x + 12;$

$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dfrac{f''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 = f(1) + f'(1)(x - 1) + \dfrac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \dfrac{f''(1)}{3!}(x - 1)^3 = 2 + 11(x - 1) + 21(x - 1)^2 + 18(x - 1)^3 = 18x^3 - 33x^2 + 23x - 6.$

Portanto, os polinômios de Taylor que procuramos são:

$P_1(x) = 11x - 9$, $P_2(x) = 21x^2 - 31x + 12$ e $P_3(x) = 18x^3 - 33x^2 + 23x - 6$.

Finalmente construindo em um mesmo gráfico os resultados obtidos temos:

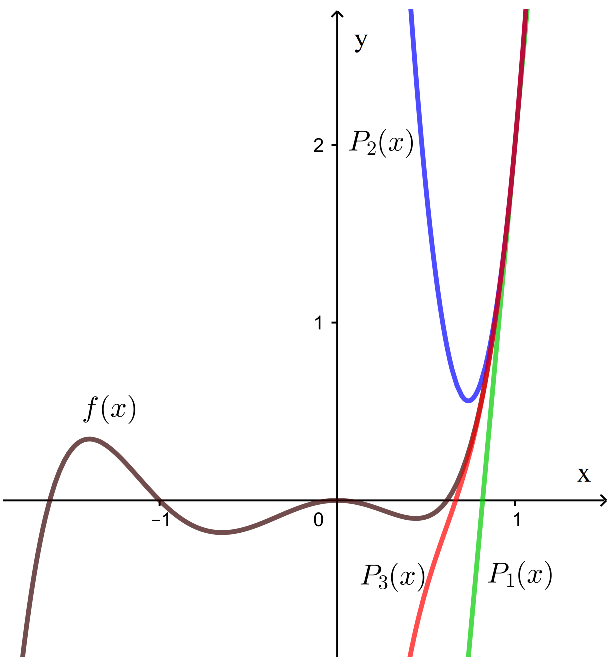


Figura 11: Gráfico das funções $f(x)$, $P_1(x)$,$P_2(x)$ e $P_3(x)$.

Observe, pelo gráfico da figura 11, que quanto maior for o grau do polinômio de Taylor da função $f(x)$, melhor é a sua aproximação gráfica de $f(x)$ e consequentemente menor será o resto.

Exemplo 4.6.4

Utilizando os polinômios de Taylor de primeira, segunda e terceira ordem, calcule um valor aproximado de $f(1,01)$ da função $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2$ e avalie o erro cometido em cada polinômio de Taylor:

Solução

Inicialmente precisamos determinar $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ para $x_0 = 1$, já que 1 está próximo de $1,01$. Pelo **Exemplo 4.6.3** temos os seguintes polinômios de Taylor:

$P_1(x) = 11x - 9$, $P_2(x) = 21x^2 - 31x + 12$ e $P_3(x) = 18x^3 - 33x^2 + 23x - 6$.

Vamos calcular $f(1,01)$, $P_1(1,01)$, $P_2(1,01)$ e $P_3(1,01)$:

$f(1,01) = (1,01)^5 + 2(1,01)^4 - (1,01)^2 = 2,11211807$;

$P_1(1,01) = 11(1,01) - 9 = 2,11$;

$P_2(1,01) = 21(1,01)^2 - 31(1,01) + 12 = 2,1121$;

$P_3(1,01) = 18(1,01)^3 - 33(1,01)^2 + 23(1,01) - 6 = 2,112118$.

Iremos avaliar o erro cometido em cada polinômio de Taylor temos:

$|f(1,01) - P_1(1,01)| = |2,11211807 - 2,11| = 0,0021187 \approx 2,1(10^{-3})$. Portanto o erro cometido é menor que 10^{-2}, ou seja, a aproximação tem pelo menos 2 casas decimais exatas.

$|f(1,01) - P_2(1,01)| = |2,11211807 - 2,1121| = 0,0000187 \approx 1,8(10^{-5})$. Portanto o erro cometido é menor que 10^{-4}, ou seja, a aproximação tem pelo menos 4 casas decimais exatas.

$|f(1,01) - P_2(1,01)| = |2,11211807 - 2,112118| = 0,0000007 \approx 7(10^{-7})$. Portanto o erro cometido é menor que 10^{-6}, ou seja, a aproximação tem pelo menos 6 casas decimais exatas.

Como podemos observar nesse exemplo, quanto maior a ordem do polinômio de Taylor, melhor será a aproximação. Ressaltando que o valor da aproximação está bem próximo de $x_0 = 1$. Se escolhermos um valor que não esteja próximo de $x_0 = 1$, por exemplo $x_0 = 0,5$, esses polinômios não se aproximam tão bem do valor desejado.

Embora, o objetivo dessa aula é a aproximação de raízes de polinômios de grau maior do que ou igual a três, achamos conveniente introduzir primeiro a aproximação de valores, sendo que na próxima aula será desenvolvido um método numérico para aproximação de raízes.

Exercícios propostos

1) Determine, nos casos abaixo, o polinômio de Taylor de segunda ordem de $f(x)$ em torno x_0:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$ no ponto $x_0 = 5$;

b) $f(x) = x^3 - 10x^2 - x + 10$ no ponto $x_0 = 2$;

2) Determine o polinômio de Taylor de terceira ordem de $f(x) = x^4 - 17x^2 + 16$ em torno $x_0 = 3$.

3) Utilizando os polinômios de Taylor de terceira e quarta ordem, calcule um valor aproximado de $f(2,01)$ da função $f(x) = x^5 - 34x^3 + 225x$ e avalie o erro cometido em cada um dos polinômios de Taylor.

AULA 5

O objetivo dessa aula é propor o método de Newton para aproximação dos valores das raízes de uma função polinomial de grau maior do que ou igual a três.

Método de Newton

Existem vários métodos para aproximar raízes de equações, além do que vamos propor aqui, entre eles temos o método da secante e o método da falsa posição. Podemos encontrar referência no livro Análise numérica de Burden, Richard L., nas páginas de 77 a 82.

Na aula anterior apresentamos a expressão da Série de Taylor de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, que possui todas as derivadas em I, em torno de um ponto $x_0 \in I$. Se desejamos aproximar valores de raízes de funções polinomiais de grau maior do que ou igual a três, podemos recorrer ao **Método de Newton** que é baseado na aproximação dos dois primeiros termos da Série de Taylor, ou seja:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0),$$

aqui vamos considerar $f(x) = 0$, pois estamos interessados em conhecer as raízes de $f(x)$. logo:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \Rightarrow f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \approx 0$$

Consideramos $R(x, x_0)$ pequeno, bem próximo de zero.

Isolando x obtemos

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Isso nos fornece uma estrutura para a aproximação do método de Newton, que começa com uma aproximação inicial x_0 e gera uma sequência dada por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ n \geq 1.$$

Observe a figura 12. Começamos com uma aproximação inicial x_0, a aproximação x_1 é a intersecção da reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ com o eixo x, a aproximação x_2 é a intersecção da reta tangente ao gráfico de f em $(x_1, f(x_1))$ com o eixo x, e assim por diante.

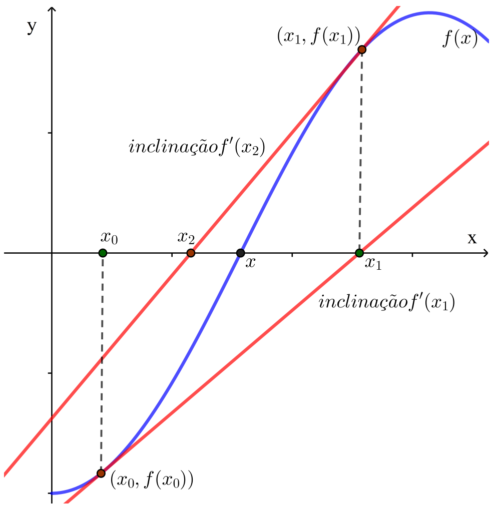


Figura 12: Raiz de $f(x)$ por aproximação de retas tangentes, pelo método de Newton.

Definição 4.6.1: Tolerância de erro

Dadas as aproximações sucessivas x_n e x_{n-1} a tolerância de erro ϵ consiste em considerar x_n como aproximação da raiz, se $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, onde ϵ foi pré-determinada, ou seja, que estas soluções estejam tão próximas quanto desejarmos.

Para determinar uma solução para $f(x) = 0$, dada uma aproximação inicial x_0 com uma tolerância de erro, seguimos os seguintes passos:

- Calcular $f'(x)$;

- Determinar os valores de $f(x_0)$ e $f'(x_0)$;

- Substituir os valores no processo interativo do método de Newton, obtendo o valor x_1;

- Verificar se $|x_1 - x_0| < \epsilon$, então o objetivo foi concluído, nesse caso o valor aproximado é x_1. Caso $|x_1 - x_0| > \epsilon$, repetir o processo novamente com x_1 para encontrar x_2;

- Verificar se $|x_2 - x_1| < \epsilon$, então o objetivo foi concluído, nesse caso o valor aproximado é x_2. Caso $|x_2 - x_1| > \epsilon$, repetir o processo novamente com x_2 para encontrar x_3, e repetir esse processo para x_4, x_5, $\ldots$, x_n, até obtermos $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$.

Observação: Para calcularmos x_n em função de x_{n-1}, $f(x_{n-1})$ e $f'(x_{n-1})$, geralmente, utilizamos uma calculadora.

O método de Newton converge, desde que uma aproximação inicial seja escolhida adequadamente. Em geral, essas aproximações sucessivas convergirão rapidamente para a raiz ou indicarão claramente que a convergência será improvável. Para escolhas do valor inicial, podemos encontrar referências no livro Análise numérica de Burden, Richard L., nas páginas 75 e 76

A Figura 13, dada abaixo, mostra um caso em que o método de Newton não converge. Nota-se que a derivada de f se anula para x_1. Concluímos que, nesse caso, a aproximação inicial não foi escolhida adequadamente.

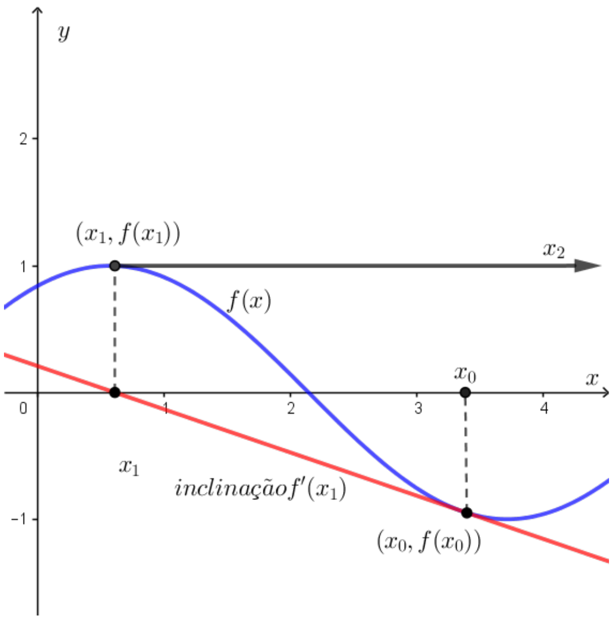


Figura 13: Aproximação da raiz de $f(x)$ pelo método de Newton em um caso de não convergência

Exemplo 4.6.5

Determine uma raiz aproximada para a função $f(x) = x^3 - 2x - 5$, com aproximação inicial $x_0 = 2$ e um erro menor que $\epsilon = 0,01$, sabendo que a função possui apenas uma raiz real:

Solução

Para resolver este exemplo utilizamos uma calculadora simples, para agilizar alguns cálculos que envolvem números decimais.

Como $f(x) = x^3 - 2x - 5$ segue-se que $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Calculando $f(2)$ e $f'(2)$ temos:

$f(2) = 2^3 - 2.2 - 5 = -1$ e $f'(2) = 3.2^2 - 2 = 10$

Substituindo no Método de Newton temos:

$x = 2 + \dfrac{1}{10} = 2,1$

Verificando se $|x_1 - x_0| < \epsilon$:

$|2,1 - 2| = 0,1 > 0,01$. Portanto devemos calcular x_2.

Calculando $f(2,1)$ e $f'(2,1)$ temos:

$f(2,1) = (2,1)^3 - 2(2,1) - 5 = 0,061$ e $f'(2,1) = 3(2,1)^2 - 2 = 11,23$

Substituindo no Método de Newton temos:

$x = 2,1 - \dfrac{0,061}{11,23} = 2,095$

Verificando se $|x_2 - x_1| < \epsilon$:

$|2,095 - 2,1| = 0,005 < 0,01$. Portanto, $x_2 = 2,095$ é uma raiz aproximada de $f(x)$.

A raiz exata de $f(x)$ é $2,0945514815$. Vamos fazer a análise dela com a nossa raiz aproximada $x_2 = 2,095$ e avaliar o erro:

$|2,0945514815 - 2,095| = 0,0004485185 < 0,001$. Isso nos mostra como a aproximação obtida foi rápida, pois precisaram apenas 2 interações para encontrar uma aproximação precisa, por possuir 2 casas decimais exatas precisa para o erro ϵ fixado.

Existem polinômios de grau maior do que ou igual a três que podem ter raízes reais ou complexas, então, pode acontecer algum caso em que um polinômio possua todas as raízes reais ou raízes reais e complexas conjugadas. Portanto, recomendamos a utilização do Geogebra para graficar a função e ter uma ideia de quantas raízes reais há, termos uma noção da proximidade entre elas e poder propor um valor inicial adequado.

Exercícios propostos

1) Determine a raiz real aproximada da função $f(x) = x^5 + x^4 - 1$, sabendo que a raiz está próxima de $x_0 = 1$ e com uma tolerância de erro menor que $\epsilon = 0,01$. (Utilize o Geogebra para graficar a função.)

2) Determine uma raiz aproximada para as funções abaixo, sabendo que elas estão próximas das suas respectivas aproximações iniciais x_0, com uma tolerância de erro menor que $\epsilon = 0,1$:(Utilize o Geogebra para graficar a função.)

a) $f(x) = x^5 + x^4 - x - 3$ e $x_0 = 1$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x + 1$ e $x_0 = 2$

AULA 6

O objetivo dessa aula é propor aos alunos as Séries de Taylor para aproximarmos os valores tabulados para as funções seno e cosseno. Para isso, vamos construir com os alunos essas fórmulas, finalizando com algumas aplicações.

4.6.3 - Aproximação de valores da função seno.

Seja a função $f(x) = sen(x)$ tal que $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e P_5, o polinômio de Taylor de quinta ordem em torno da origem, ou seja, quando $x_0 = 0$, então:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(iv)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(v)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5 + R(x, x_0)$$

Determinando, pelas regras de derivação, as derivadas sucessivas da função $f(x) = sen(x)$, no ponto $x_0 = 0$ obtemos:

$f'(0) = cos(0) = 1$, $f''(0) = -sen(0) = 0$, $f'''(0) = -cos(0) = -1$, $f^{(iv)}(0) = sen(0) = 0$ e $f^{(v)}(0) = cos(0) = 1$.

Substituindo as derivadas da função seno no ponto $x_0 = 0$ no polinômio de quinta ordem e desenvolvendo, temos:

$sen(x) \approx sen(0) + cos(0)x - \frac{sen(0)}{2}x^2 - \frac{cos(0)}{6}x^3 + \frac{sen(0)}{24}x^4 + \frac{cos(0)}{120}x^5 =$

$0 + x - \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Portanto, $sen(x) \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Observe na figura 14, o gráfico da aproximação de $f(x) = sen(x)$ dada por P_5 e torno de $x_0 = 0$:

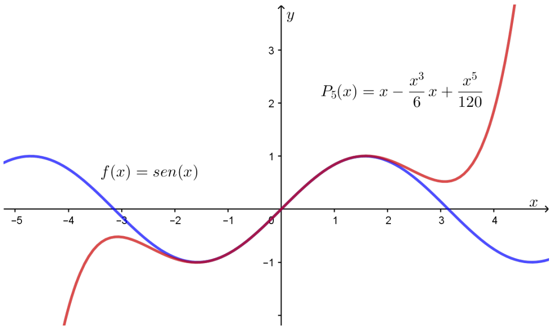


Figura 14: Aproximação de $f(x) = sen(x)$ pelo polinômio de Taylor P_5 em torno de $x_0 = 0$.

A fórmula obtida acima nos fornece os valores aproximados do seno de qualquer ângulo no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Porém, para determinar esses valores, o ângulo deve ser convertido em radianos, considerando quatro casas decimais. Essa conversão pode ser obtida pela fórmula:

$$x \approx \frac{\alpha\pi}{180}, \text{ onde } \alpha \text{ é o valor do ângulo em graus e consideramos } \pi = 3,1416.$$

Feita a conversão, basta substituir na fórmula desenvolvida acima e o resultado obtido será uma aproximação dos valores tabulados para a função seno no ponto $x = 0$.

Observação: Para $sen(x) \approx P_5(x)$, o valor de x tem que ser próximo de 0, pois o polinômio de Taylor foi obtido em torno desse ponto, por isso para $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ temos que $\frac{\alpha\pi}{180}$ é próximo de 0, e podemos usar a Série de Taylor como método de aproximação do valor de x próximo de $x_0 = 0$.

Vale ressaltar que para tais cálculos o auxílio de uma calculadora será de grande ajuda.

Exemplo 4.6.6

Calcule o valor aproximado para $f(x) = sen(40°)$.

Solução:

1º) Convertendo 40° em radianos, usando a fórmula $x \approx \frac{\alpha.\pi}{180}$, temos:

$$40° = \frac{40\pi}{180} \approx 0,6981$$

2º) Substituindo $x \approx 0,6981$ na fórmula $sen(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, temos:

$$sen(40°) \approx 0,6981 - \frac{(0,6981)^3}{6} + \frac{(0,6981)^5}{120} \approx 0,6981 - 0,0567 + 0,013 \approx 0,6427$$

Portanto, $sen(40°) \approx 0,6427$

O valor exato de $sen(40°)$ é $0,6427787609$, avaliando o erro cometido temos:

$|sen(40°) - P_5(0)| = |0,6427787609 - 0,6427| < (8,7)(10^{-5})$, ou seja, a aproximação tem pelo menos quatro casas decimais exatas.

4.6.4 - Aproximação de valores da função cosseno.

Seja a função $f(x) = cos(x)$ tal que $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e P_5, o polinômio de Taylor de quinta ordem em torno da origem, ou seja, quando $x_0 = 0$, então:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$
$$\frac{f^{(iv)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(v)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5 + R(x, x_0)$$

Determinando, pelas regras de derivação, as derivadas sucessivas da função $f(x) = cos(x)$, no ponto $x_0 = 0$ obtemos:

$f'(0) = -sen(0) = 0$, $f''(0) = -cos(0) = -1$, $f'''(0) = sen(0) = 0$, $f^{(iv)}(0) = cos(0) = 1$ e $f^{(v)}(0) = -sen(0) = 0$.

Substituindo as derivadas da função seno no ponto $x_0 = 0$ no polinômio de quinta ordem e desenvolvendo, temos:

$cos(x) \approx cos(0) - sen(0)x - \frac{-cos(0)}{2}x^2 + \frac{sen(0)}{6}x^3 + \frac{cos(0)}{24}x^4 - \frac{sen(0)}{120}x^5 \approx$

$1 - 0x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{0}{120}x^5 \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Portanto, $cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

Observe na figura 15, o gráfico da aproximação de $f(x) = cos(x)$ dada por P_4 e torno de $x_0 = 0$:

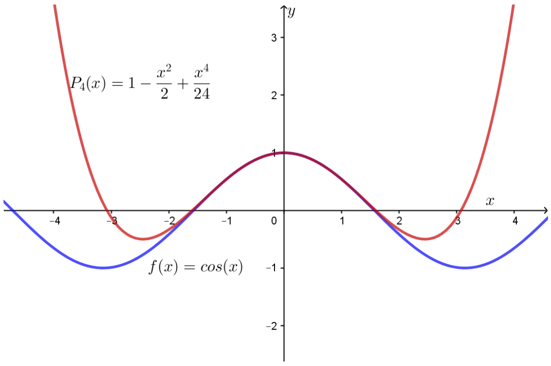


Figura 15: Aproximação de $f(x) = cos(x)$ pelo polinômio de Taylor P_4 em torno de $x_0 = 0$.

A fórmula obtida acima nos fornece os valores aproximados do cosseno de qualquer ângulo no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. O método para encontrar esses valores é semelhante ao do seno proposto no *item* 4.6.3, onde convertemos o valor do ângulo em graus para radianos e depois substituímos na fórmula do cosseno.

Exemplo 4.6.7

Calcule o valor aproximado para $f(x) = cos(20°)$.

Solução:

1º) Convertendo 20° em radianos, usando a fórmula $x \approx \frac{\alpha.\pi}{180}$, temos:

$$20° = \frac{20\pi}{180} \approx 0,349$$

2º) Substituindo $x \approx 0,349$ na fórmula $cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, temos:

$$cos(20°) \approx 1 - \frac{(0,349)^2}{2} + \frac{(0,349)^4}{24} \approx 1 - 0,0609 + 0,0006 \approx 0,9397$$

Portanto, $cos(20°) \approx 0,9397$

O valor exato de $cos(20°)$ é $0,93969262$, avaliando o erro cometido temos:

$|cos(20°) - P_5(0)| = |0,93969262 - 0,9397| < (7,3)(10^{-6})$, ou seja, a aproximação tem pelo menos três casas decimais exatas.

Vamos considerar o primeiro quadrante de um plano cartesiano unitário, onde o eixo Ox representa o cosseno e o eixo Oy representa o seno.

Dado um ângulo de valor α pertencente ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Se calcularmos os valores do $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha)$, obtemos as coordenadas de um ponto $P = (cos(\alpha), sen(\alpha))$. Localizando esse ponto no plano e traçando a reta que passa por P a origem do plano, obtemos uma reta cujo o ângulo de inclinação se aproxima de α. Como explicamos no seguinte exemplo:

Exemplo 4.6.8

Localize no plano cartesiano o ângulo aproximado de 35°.

Solução:

1º) Transformar 35° em radianos:

$$35^\circ = \frac{35\pi}{180} \approx 0,6108$$

2º) Substituindo $x \approx 0,6108$ nas fórmulas do $cos(x)$ e do $sen(x)$, temos:

$$cos(35^\circ) \approx 1 - \frac{(0,6108)^2}{2} + \frac{(0,6108)^4}{24} \approx 1 - 0,1865 + 0,0057 \approx 0,8192.$$
$$sen(35^\circ) \approx 0,6108 - \frac{(0,6108)^3}{6} + \frac{(0,6108)^5}{120} \approx 0,6108 - 0,0379 + 0,0007 \approx 0,5736.$$

Pontando, considerando duas casa decimais, $cos(35^\circ) \approx 0,81$ e $sen(35^\circ) \approx 0,57$. Obtemos assim, o ponto $P = (0,81; 0,57)$.

3º) Localizando o ponto $P = (0,81; 0,57)$ no plano cartesiano e traçando a reta que passa por P e pela origem obtemos o ângulo de 35°.

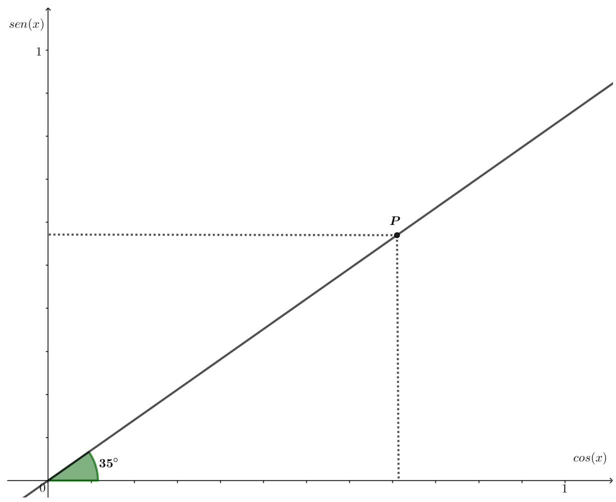


Figura 16: Construção de um ângulo de 35° no plano cartesiano

Para determinar o valor da tangente de um ângulo podemos recorrer as séries de seno e cosseno, utilizando a fórmula trigonométrica $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$.

Exemplo 4.6.9

Para determinar a $tg(35°)$, precisamos calcular o $sen(35°)$ e o $cos(35°)$. Observe que no *Exemplo 4.6.8*, obtemos os seguintes valores:

$cos(35°) \approx 0,8192$ e $sen(35°) \approx 0,5736$.

Como $tg(35°) = \dfrac{sen(35°)}{cos(35°)}$ temos que:

$tg(35°) = \dfrac{0,5736}{0,8192} = 0,7001$

O valor exato da $tg(35°)$ é $0,700207538$, avaliando o erro cometido temos:

$|tg(35°) - P_4(0)| = |0,700207538 - 0,7001| < 10^{-4}$, ou seja, a aproximação tem pelo menos três casas decimais exatas.

Exercícios propostos

1) Calcule o valor aproximado para:

a) $f(x) = sen(36°)$;

b) $f(x) = cos(36°)$;

c) $f(x) = tg(36°)$;

2) Desenhe no plano cartesiano os ângulos de 26° e 65°.

Exercícios de revisão

1) Determine em cada caso, o polinômio de Taylor de segunda ordem de $f(x)$ ponto x_0 determinado:

a) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ no ponto $x_0 = 1$;

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ no ponto $x_0 = -1$;

c) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ no ponto $x_0 = -3$;

2) Utilizando o polinômio de Taylor de quinta ordem de $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$, calcule um valor aproximado para $f(0,001)$ e avalie o erro obtido.

3) Determine uma raiz aproximada para a função $f(x) = x^4 - 2$, com aproximação inicial $x_0 = 1$ e um erro menor que $0,01$.

4) Complete a tabela abaixo, utilizando o método das Séries de Taylor:

Ângulo em Grau	**Ângulo em radianos**	**Seno**	**Cosseno**
31°			
32°			
33°			
34°			
35°			

5) Localize em um plano cartesiano unitário os ângulos de 75°, 65°, 55° e 25°:

6) Calcule a tangente de 85°

5 Resultados da proposta didática

As aulas propostas no capítulo 4 foram apresentadas aos alunos do 3º ano do ensino médio de um colégio de rede particular. A turma é constituída por 10 alunos, os quais serão denominados aluno A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

O objetivo de fazer essas aulas e coletar essas informações é verificar se as questões de como encontrar valores aproximados para as funções polinomiais, seno e cosseno e de como aproximar raízes de polinômios de grau maior do que ou igual a três foram absorvidas pelos alunos que participaram das aulas.

A coleta dos dados para a construção dos resultados apresentados seguiram a seguinte metodologia:

• No fim da apresentação de cada aula, os alunos responderam um questionário referente ao conteúdo oferecido e resolveram alguns exercícios propostos. As respostas do questionário e dos exercícios foram analisadas e relatadas.

• No fim da apresentação de toda a proposta, os alunos responderam um questionário de sondagem de aprendizagem com a finalidade de investigar se já tinham algum conhecimento sobre o conteúdo proposto, se esse novo conteúdo proposto é importante para o ensino médio e se eles tem ou não preferência pela disciplina de Matemática, pois tal preferência tem impacto direto com os resultados obtidos. Além de alguns exercícios de revisão, que eles levaram para resolver em casa. As respostas do questionário e dos exercícios foram analisadas e relatadas.

Relatório da aula 1

Os tópicos trabalhados nessa aula foram a reta tangente e a inclinação de uma reta. A duração da aula foi de 50 minutos.

Resultados do questionário

1) Compreendeu o conceito de reta tangente?

9 dos 10 alunos responderam que sim. O aluno F, que respondeu não, alegou que ficou confuso com o conteúdo proposto.

2) Compreendeu o conceito de inclinação de uma reta?

9 alunos responderam que sim. O aluno F, que respondeu não, alegou que achou o tópico confuso devido ao incremento.

3) Compreendeu a construção da fórmula $m = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$?

Todos disseram que sim, os alunos A, D, E, G, H e J comentaram a semelhança com a fórmula do coeficiente angular de uma reta em Geometria Analítica.

4) Compreendeu a aplicação da fórmula $(y - y_1) = m(x - x_1)$?

8 alunos responderam que sim. Os alunos C e F, que responderam não, acharam a aplicação da fórmula como foi proposta confusa. Observei que a confusão desses alunos foi na interpretação da aplicação que envolvia as duas fórmulas, tiveram dificuldade de identificar qual das fórmulas seria utilizada primeiro e isso os levou a confusão.

5) Compreendeu os exemplos propostos?

9 alunos responderam que sim. O aluno F, que respondeu que não, achou o desenvolvimento trabalhoso, levando-o a confusão.

Análise dos exercícios propostos

No exercício 1, referente a encontrar a inclinação da uma reta tangente ao gráfico de uma função $f(x)$ em um dado o ponto de tangencia, todos os alunos resolveram o exercício.

Os exercícios 2 e 3 se referem a encontrar a equação de uma reta, onde é conhecido um ponto da reta e sua inclinação. Todos os alunos conseguiram resolver os exercícios.

O exercício 4, envolve encontrar a inclinação da reta tangente a partir de uma função $f(x)$, dado seu ponto de tangencia e depois encontrar a sua equação. Nesse exercício 8 alunos resolveram a questão. Os alunos C e F, que não conseguiram resolver a questão, ficaram confusos na aplicação das fórmulas.

Relatório da aula 2

Os tópicos desenvolvidos nessa aula foram a derivada de uma função e as derivadas sucessivas de uma função. A aula teve duração de 50 minutos.

Resultados do questionário

1) Compreendeu o conceito de derivada de uma função?

Todos responderam que sim.

2) Compreendeu o conceito de derivadas sucessivas de uma função?

Todos responderam que sim.

3) Compreendeu os exemplos propostos?

Todos disseram que sim.

Nota-se, pelos resultados obtidos nesse questionário, que os alunos começaram a se familiarizar com o conteúdo proposto.

Análise dos exercícios propostos

No exercício 1, referente a encontrar $f'(x)$ de uma dada função $f(x)$, todos os alunos resolveram o exercício.

Os exercícios 2 e 3 se referem a encontrar $f'(x_1)$ de uma dada função $f(x)$,onde x_1 é fornecido. Todos os alunos resolveram os exercícios.

O exercício 4, envolve encontrar $f''(x)$ de uma dada função $f(x)$, todos os alunos resolveram o exercício.

O exercício 5 se referem a encontrar $f''(x_1)$ de uma dada função $f(x)$,onde x_1 é fornecido. Todos os alunos resolveram o exercício.

Relatório da aula 3

Os tópicos desenvolvidos nessa aula foram as regras de derivação. A aula teve duração de 50 minutos.

Resultados do questionário

1) Entendeu a demonstração da derivada de uma função polinomial?

9 alunos responderam que sim. O aluno F que respondeu não, disse que se confundiu no desenvolvimento do binômio de Newton, utilizado na demonstração.

2) Entendeu a demonstração da derivada da função seno?

Todos responderam que sim.

3) Entendeu a demonstração da derivada da função cosseno?

9 alunos responderam que sim. O aluno F que respondeu não, alegou que ficou confuso com a aplicação do arco duplo, utilizado na demonstração.

4) Compreendeu os exemplos propostos?

Todos responderam que sim.

Os alunos A, B, D, E, G, H, I e J comentaram que gostaram das regras de derivação, pois facilitam os cálculos.

Análise dos exercícios propostos

No exercício proposto, os alunos aplicaram as regras de derivação para determinar a equação de uma reta tangente ao gráfico de uma função real f em um dado ponto P. Para resolver esse exercício foi sugerido a utilização do software Geogebra para graficar os resultados obtidos. Os alunos utilizaram o Geogebra no celular, porém nenhum deles tinha conhecimento do Geogebra, portanto foi necessário ensiná-los os comandos necessários para graficar os resultados obtidos.

Todos os alunos resolveram o exercício com certa facilidade, apresentando uma certa familiaridade na aplicação das regras de derivação. Comentaram que gostaram muito da visualização gráfica dos resultados obtidos, pelo Geogebra. Observe o gráfico contido na Figura 17, criado pelo aluno D, usando o Geogebra.

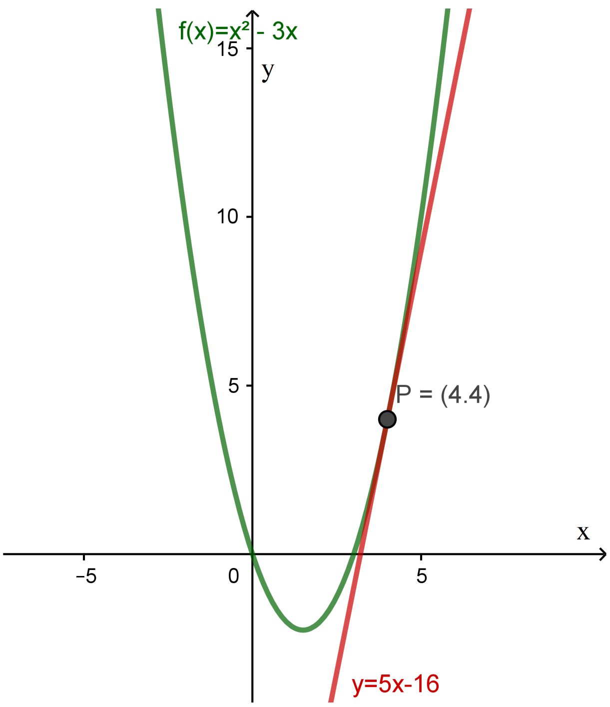


Figura 17: Gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ e $y = 5x - 16$

Relatório da aula 4

O tópico desenvolvido nessa aula foi a Série de Taylor para aproximar os valores de uma função. Sugeri aos alunos a utilização do Geogebra para graficarem os resultados obtidos nos exemplos propostos. A aula teve duração de 50 minutos.

Resultados do questionário

1) Entendeu o conceito das Séries de Taylor?

7 alunos responderam que sim. Dos 3 alunos que disseram não, os alunos C e F não entenderam os passos do método sugerido e o aluno B respondeu que não entendeu o desenvolvimento da Série de Taylor.

2) Entendeu o conceito do resto (erro) de uma Série de Taylor?

9 disseram que sim e o aluno F que disse não, alegou que não entendeu sua utilidade.

3) Entendeu o método para a aproximação do valor de uma função polinomial?

8 alunos responderam que sim. Os alunos C e F disseram que não, alegaram que não compreenderam a sequência de passos sugeridos para aproximar o valor.

4) Compreendeu os exemplos propostos?

Todos responderam que sim.

Os alunos B, C, F e I comentaram que acharam confuso a avaliação do erro, porém gostaram da visualização gráfica dos resultados obtidos, pelo Geogebra.

Análise dos exercícios propostos

No 1º exercício, foi proposto aos alunos construir o polinômio de segunda ordem de uma função f em torno de um ponto x_0 dado.

7 alunos conseguiram resolver o exercício e os alunos B, C e F apresentaram confusão no desenvolvimento.

No 2º exercício, foi proposto aos alunos construir o polinômio de terceira ordem de uma função f em torno de um ponto x_0 dado.

8 alunos conseguiram resolver o exercício e os alunos C e F apresentaram confusão no desenvolvimento.

No 3º exercício, foi proposto aos alunos utilizar os polinômios de terceira e quarta ordem de uma função f em torno de um ponto x_0 para aproximar um determinado valor e avaliar o erro cometido.

8 alunos conseguiram resolver o exercício e os alunos C e F apresentaram confusão no desenvolvimento.

Os alunos comentaram que acharam um pouco confuso e trabalhoso avaliar o erro de uma aproximação pelo Polinômio de Taylor. Os alunos A, D, E, G, H, I e J alegaram que a análise do erro é trabalhosa. Já os alunos B, C e F alegaram que ficaram confusos com a análise do erro.

Relatório da aula 5

O tópico desenvolvido nessa aula foi o método de Newton para aproximar das raízes de funções. A aula teve duração de 50 minutos.

Resultados do questionário

1) Entendeu o conceito do método de Newton?

7 alunos responderam que sim. Os alunos B, C e F que disseram não, alegaram que o método é muito difícil.

2) Compreendeu os exemplos propostos?

Todos responderam que sim.

Análise dos exercícios propostos

Os 2 exercícios propostos tratam de como aproximar os valores de uma raiz de uma dada função f com aproximação inicial x_0 e tolerância de erro ϵ.

8 alunos conseguiram fazer os exercícios. Os alunos C e F desenvolveram os exercícios parcialmente, apresentando certa confusão. Observei que a confusão foi na segunda e terceira tentativa de aproximação, onde os alunos não conseguiram identificar se era a aproximação x_0, x_1 ou x_2 a ser substituída. Essa confusão achei normal, pois não tiveram tempo suficiente para absorver o conteúdo e são alunos com certo grau de dificuldade em matemática.

Os alunos comentaram que acharam confuso a avaliação do erro e cansativo as tentativas de aproximação.

Relatório da aula 6

Os tópicos desenvolvidos nessa aula foram as Séries de Taylor para aproximação dos valores da função seno e da função cosseno. A aula teve duração de 50 minutos.

Resultados do questionário

1) Entendeu a aproximação dos valores de uma função seno?

Todos responderam que sim.

2) Entendeu a aproximação dos valores de função cosseno?

Todos responderam que sim.

3) Compreendeu os exemplos propostos?

Todos responderam que sim.

Os alunos apresentaram certa facilidade nessa aula, pois definidas as séries de Taylor para funções seno e cosseno, as suas aplicações foram rápidas, mostrando que o método desenvolvido foi bem absorvido.

Análise dos exercícios propostos

O exercício propostos tinham como objetivo a aproximação dos valores de uma função seno, cosseno e tangente.

Todos conseguiram resolver.

Os alunos comentaram que gostaram desses tópicos, pois suas aplicações são rápidas e fáceis.

Relatório do questionário de Sondagem

1) Você gosta de matemática?

6 alunos disseram que sim, Os alunos B e I disseram que gostam um pouco e os alunos C e F disseram que não gostam de matemática.

O objetivo dessa pergunta foi verificar, quais alunos podem apresentar um baixo desempenho e dedicação na disciplina, pois suas preferências didáticas refletem diretamente no desenvolvimento do conteúdo oferecido. Podemos observar que os alunos que não gostam ou gostam pouco de matemática são os mesmo que apresentaram dificuldades em toda a apresentação didática.

2) Quando você erra um exercício você tenta resolvê-lo novamente? Costuma tentar quantas vezes?

6 alunos disseram que sim, tentam várias vezes. O aluno I disse que tenta 2 vezes e os alunos B, C e F disseram que fazem apenas 1 tentativa.

Essa pergunta teve como objetivo identificar os alunos que de fato tentaram resolver os exercícios propostos e de revisão. Pode-se observar que os alunos que tentam resolver 1 ou 2 vezes os exercícios são aqueles que apresentaram dificuldades no desenvolvimento de toda a proposta didática.

3) Você já ouviu falar das Séries de Taylor?

Todos disseram que não. Era uma resposta esperada, pois as Séries de Taylor é um assunto de graduação.

4) Você já ouviu falar do método de Newton?

Todos disseram que não. Era algo esperado, pois além de ser um assunto de graduação, no ensino médio se trabalha apenas as funções polinomial do primeiro e do segundo grau, onde não é necessário o método de Newton.

5) Após o estudo das Séries de Taylor, você considerou sua aplicação importante no ensino médio?

6 alunos disseram que sim e dos 4 alunos que disseram não, o aluno F justificou que o assunto é muito complexo e os alunos B, C e I disseram que acharam parcialmente importante. O aluno F veio apresentando dificuldade desde o começo do desenvolvimento de nossa proposta. Já os alunos B, C e I acharam importante apenas as aplicações da Série de Taylor para seno e cosseno. Nota-se que os alunos do ensino médio tem certa dificuldade em acompanhar demonstrações, tal dificuldade é devido a própria proposta nacional de ensino básico, onde não se exige as demonstrações mas apenas as definições e aplicações. Nesse contexto acho que as demonstrações das regras de derivação não são necessárias, basta apenas apresentar as regras e aplicá-las.

6) Sobre o número de aulas, você achou suficiente ou necessitaria de mais aulas para absorver o conteúdo proposto?

8 alunos acham suficiente e os alunos C e F acham que precisaria de mais aulas práticas. De fato, se tivermos mais aulas práticas com exercícios e exemplos os alunos terão mais tempo para absorver o conteúdo proposto e os resultados obtidos seriam melhores.

7) O que você acha que precisa melhorar nas aulas?

Todos disseram que nada precisa mudar. Os alunos A, D, E, G, H e J apresentaram mais facilidade pelo assunto, enalteceram que a explicação das aulas foi ótima. Já os alunos B, C, F e I não apresentaram o interesse esperado pelo assunto, ficaram um pouco confusos com as demonstrações. Portanto, mesmo que eles não tenham sugerido melhoria nas aulas, pode-se concluir que a apresentação das aulas deve ser revista principalmente nas demonstrações.

8) Entre as aplicações da Séries de Taylor, qual ou quais você mais gostou?

Os alunos A, D, E, G, H e J gostaram de todas as aplicações. Notei pelos exercícios de revisão que esses alunos aprenderam muito bem o conteúdo e isso foi ótimo, pois mostrou que o assunto pode ser de fato aplicado no ensino médio. Os alunos B, C e F gostaram apenas das aproximações dos valores das funções seno e cosseno e o aluno I gostou das aproximações dos valores das funções polinomiais, seno e cosseno. Pode-se observar que todos gostaram das aplicações das funções seno e cosseno, pois elas são mais fáceis de serem aplicadas. Sobre as aproximações das funções polinomiais, eles tiveram mais facilidade em encontrar o polinômio de Taylor e visualizar os resultados graficamente no Geogebra. Agora, avalio que a aproximação de valores de funções não teve o interesse esperado, quando foi proposto a analisar o erro. Observei que eles acharam cansativo. Sobre o método de Newton, eles compreenderam o objetivo do conteúdo, porém as tentativas de aproximação de uma raiz ficou um pouco cansativa mesmo com a utilização de uma calculadora para facilitar os cálculos, pois é um pouco repetitivo. Para despertar o interesse deles nesse assunto, sugere-se a proposição de questões contextualizadas com alguma aplicação no dia a dia do aluno.

9) Sobre o nível do conteúdo propostos, você considera fácil, médio ou difícil?

Os alunos A, E, H e J acharam o nível médio e os alunos B, C, D, F, G e I acharam o nível difícil.

Notei que os alunos conseguem aprender o conteúdo proposto, o que de fato aumentou o nível de dificuldade deles em aprender o conteúdo foi a utilização das demonstrações na construção do conteúdo, pois eles não tem o hábito de trabalhar demonstrações.

Nas aulas $1, 2$ e 3, onde construímos os conceitos de derivada, derivadas sucessivas e as regras de derivação, notei que foi onde eles apresentaram maior dificuldade para absorver o conteúdo. Porém, como a derivada é base para as Séries de Taylor, devemos trabalhá-la de uma forma mais prática com mais exercícios e exemplos e descartar suas demonstrações, pois elas que dificultaram o entendimento dos alunos.

Na aula 4, onde construímos as Séries de Taylor para aproximar os valores de uma função por um polinômio de Taylor, notei que a dificuldade foi em avaliar o erro. Portanto uma solução para inibir essa dificuldade é a utilização de mais uma aula só para resolução de exercícios de avaliar o erro, onde a contextualização dos exercícios do conteúdo prático possa ser ao mesmo tempo motivador para sua execução e que os alunos possam ver que a matemática esta presente no dia a dia deles.

Na aula 5, sobre o método de Newton para aproximar raízes de funções polinomiais, notei que a dificuldade foi pouca. Porém eles não demonstraram interesse em fazer as tentativas de aproximação, foi cansativo. Uma solução para essa situação é propor o método de Newton de um modo mais superficial, ou seja, apenas com uma, ou duas aproximações da raiz sem exigir mais, pois foi essas tentativas que os levou ao desinteresse sobre o assunto. Nessa questão podemos contextualizar os exercícios para despertar maior interesse dos alunos para o assunto.

Na aula 6, sobre a aproximação dos valores das funções seno e cosseno, eles não apresentaram dificuldades nas aplicações. Aqui pode-se observar que a facilidade da resolução demonstra que os principais conceitos desenvolvidos nas aulas foram absorvidos pelos alunos, e o conhecimento e familiaridade com as funções seno e cosseno permitiu um melhor desempenho dos mesmos.

Relatório dos exercícios de revisão

Exercício 1.

No 1º exercício, foi proposto aos alunos utilizar o polinômio de segunda ordem de uma função f em torno de um ponto x_0 para aproximar um determinado valor e avaliar o erro cometido.

Relatório do exercício 1.

6 alunos fizeram o exercício, os alunos B e I fizeram parcialmente, não conseguiram avaliar o erro e os alunos C e F não conseguiram encontrar o polinômio e consequentemente não avaliaram o erro.

Exercício 2

No 2º exercício proposto a aluno deveria aproximar do valor de uma raiz de uma dada função f com aproximação inicial x_0 e erro ϵ.

Relatório do exercício 2.

5 alunos fizeram o exercício, os alunos B, H e I fizeram parcialmente, pois se perderam na segunda tentativa de aproximar e os alunos C e F não conseguiram aplicar o método.

Exercício 3

O 3º exercício proposto era para aproximar dos valores de uma função seno, cosseno e tangente.

Relatório do exercício 3.

7 alunos fizeram o exercício, os alunos B, C e I fizeram parcialmente e o aluno F não conseguiu aplicar o método.

6 Considerações Finais

Inicialmente, quando meu orientador sugeriu o tema Séries de Taylor e suas aplicações no ensino médio, fique muito inseguro, pois se tratava de um assunto de graduação e precisava de muita cautela para ser proposto aos alunos do ensino médio. Esse tema envolve os conceitos de limite e derivada, portanto precisava de uma adaptação do nível superior para o nível médio.

Com os conhecimentos adquiridos no mestrado, principalmente na disciplina de Cálculo, nos meus estudos independentes, na minha experiência com o ensino médio e com as sugestões do meu orientador consegui perceber a grande utilidade das Séries de Taylor em aproximar valores de funções polinomiais, seno e cosseno e de aproximar do valor de uma raiz pelo método de Newton. Dessas aplicações, a aproximação dos valores das funções seno e cosseno despertaram muito minha atenção, pois é um assunto que envolve a tabulação dos valores de seno e cosseno, dando aos alunos mais clareza nesse assunto, que já é tratado no ensino médio.

Para escrever sobre as Séries de Taylor achei importante, primeiramente criar os capítulos 2 e 3. No capítulo 2, que chamei de Sequências e Séries, falei sobre sequências e continuidade, limites de uma sequência, as propriedades dos limites de uma sequência e as séries infinitas de termos constantes. No capítulo 3, que chamei de Séries de potências e Séries de Taylor, abordamos as séries de potências, derivação e integração de séries de potências, Séries de Taylor, fórmula de Taylor com resto Langrange, fórmula de Taylor com resto infinitesimal e fórmula de Taylor com resto integral. A importância desses capítulos para o professor é nortear a construção de nosso tema e oferecer uma estrutura em que ele possa ter um melhor domínio sobre as Séries de Taylor. Pode-se observar que o capítulo 3 é continuação do capítulo 2, onde focamos desenvolver as Séries de Taylor com diferentes abordagens sobre os restos e aplicações das Séries. As aplicações foram de extrema importância para construímos o polinômio de Taylor, as Séries de Taylor para as funções seno e cosseno e a avaliação do resto (erro), oferecendo ao professor exemplos de todo o conteúdo que será desenvolvido na proposta.

A partir dos capítulos 2 e 3, tive uma base para desenvolver uma proposta didática adaptada para o nível de ensino médio, contendo seis aulas. Essa proposta possui conteúdo teórico, exemplos resolvidos e exercícios propostos para que eu pudesse avaliar o quanto eles desenvolveram nas aulas. Além dos exercícios propostos, apliquei um questionário por aula para investigar mais detalhadamente a evolução dos alunos em cada aula. Após a apresentação de toda a proposta didática apliquei um questionário final para investigar a familiaridade do aluno com a disciplina de matemática e uma lista de exercícios de revisão para avaliar o conhecimento adquirido pelo aluno. Nessa proposta tive que tomar alguns cuidados, pois a construção das Séries de Taylor precisa passar por conceitos de limite e derivada.

Na proposta, comecei falando sobre o conceito de reta tangente e a inclinação de uma reta, onde inseri o conceito de limite apenas como o incremento de x tendendo a zero e aplicando-o para encontrar a inclinação de uma reta bem como determinar a equação de uma reta. Seguidamente, construí a ideia da derivada de uma função e assimilando seu método com a inclinação de uma reta os alunos compreenderam facilmente. Depois falei sobre as derivadas sucessivas que é o assunto base para o polinômio de Taylor. Esses assuntos foram inseridos com maior cuidado para os alunos porque é um assunto de nível superior e que forma a nossa base para as Séries de Taylor.

Seguindo a proposta, demonstrei as regras de derivada para uma função polinomial, seno e cosseno, mas notei que as demonstrações dessas regras os levaram a confusão, motivo pelo qual acredito de não ser trabalhado demonstrações no ensino médio. Concluí que será melhor propor as regras de derivação sem demonstra-lás. Ao construir as Séries de Taylor para aproximação dos valores de funções, bem como a aplicação do método de Newton para aproximar valores de raízes de uma função polinomial de grau maior do que o igual a três foi muito tranquilo e os alunos aceitaram de modo natural, porém a avaliação do erro e as tentativas de aproximação da raiz foi algo desinteressante para eles. Para melhorar esse desinteresse na avaliação do erro e na aproximação de uma raiz, sugiro exercícios mais contextualizados envolvendo o dia a dia do aluno e mais uma aula de resolução de exercícios para uma melhor absorvição do conteúdo proposto. E por fim, ao construir as Séries de Taylor para determinar os valores de uma função seno e de uma função cosseno, eles desenvolveram muito bem os exercícios, posso dizer que foi a aplicação das Séries de Taylor que eles mais gostaram, vejo que essa preferência se deu pelos conhecimentos prévios sobre os valores destas funções e a facilidade dos cálculos.

A utilização do software Geogebra foi muito importante na construção gráfica dos resultados que eles obtiveram nos exercícios, pois eles assimilaram as gráficações como prova real de que os exercícios estavam certos. Achei essa assimilação muito interessante por parte deles. Posso afirmar que o uso do Geogebra foi fundamental para a construção do conhecimento oferecido em nossa proposta do início ao fim.

Em relação ao baixo desempenho dos alunos que não gostam de matemática é que eles não demonstraram o interesse esperado e apresentaram uma extrema dificuldade em acompanhar o desenvolvimento do conteúdo. Observei que esse desgosto e desinteresse em matemática é algo que de certa forma pode desmotivar aqueles que de fato apresentam interesse e gostam de matemática. Para lidar com essa situação é importante primeiramente buscar a origem desse desgosto e desinteresse dos alunos individualmente, pois isso mostra a preocupação com o desempenho deles no conteúdo proposto. A partir daí, dar o monitoramento adequado a cada aluno, individualmente, oferecendo a atenção necessária para que eles possam aprender o conteúdo e não influenciar os demais interessados. Ressaltando que o uso de recursos tecnológicos e a contextualização das atividades práticas, com a intenção de fazê-los enxergar a importância da matemática em seu dia a dia, pode despertar o interesse desses alunos.

A importância de abordar as Séries de Taylor e suas aplicações no ensino médio vai além de responder questões de como encontrar as raízes de uma função polinomial de grau maior do que ou igual a três e dos valores tabulados para seno e cosseno. Essa abordagem oferece, principalmente aos alunos que tem interesse em trilhar o caminho das exatas, uma introdução de limites, derivadas e as Séries de Taylor, dando a eles uma noção de temas abordados no ensino superior. Eles não serão surpreendidos com esses temas, podendo assim ter um melhor desempenho com os conteúdos oferecidos em seus cursos superiores.

Finalmente, percebi que no sistema de educação do nosso pais, o ensino da matemática precisa ser reformulado com urgência, pois é preciso que se torne mais atrativo para o aluno. Precisamos buscar um modo de apresentar para o aluno o quanto a matemática é útil e bela. Nesse contexto, as Séries de Taylor se mostra uma ferramenta muito atrativa na suas aplicações, quando envolvemos o uso de softwares para graficar os resultados. Essa dissertação deixa sua contribuição para que no futuro este tema seja oferecido aos alunos do ensino médio.

7 Apêndice

7.1 Apêndice A - Questionário dos alunos

Questionário - Aula 1 Prof^{o} Paulo Rocha

1) Compreendeu o conceito de reta tangente?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

2) Compreendeu o conceito de inclinação de uma reta?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

3) Compreendeu a construção da fórmula $m = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

4) Compreendeu a aplicação da fórmula $(y - y_1) = m(x - x_1)$?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

5) Compreendeu os exemplos propostos?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

Questionário - Aula 2 Prof^{o} Paulo Rocha

1) Compreendeu o conceito de derivada de uma função?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

2) Compreendeu o conceito de derivadas sucessivas de uma função?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

3) Compreendeu os exemplos propostos?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

Questionário - Aula 3 Prof^{o} Paulo Rocha

1) Entendeu a demonstração da derivada de uma função polinomial?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

2) Entendeu a demonstração da derivada da função seno?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

3) Entendeu a demonstração da derivada da função cosseno?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

4) Compreendeu os exemplos propostos?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

Questionário - Aula 4 Prof^o Paulo Rocha

1) Entendeu o conceito das Séries de Taylor?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

2) Entendeu o conceito do resto (erro) de uma Série de Taylor?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

3) Entendeu o método para a aproximação do valor de uma função polinomial?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

4) Compreendeu os exemplos propostos?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

Questionário - Aula 5 Prof^o Paulo Rocha

1) Entendeu o conceito do método de Newton?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

2) Compreendeu os exemplos propostos?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

Questionário - Aula 6 Prof^{o} Paulo Rocha

1) Entendeu a aproximação dos valores de uma função seno?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

2) Entendeu a aproximação dos valores de função cosseno?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

3) Compreendeu os exemplos propostos?

☐ SIM

☐ NÃO. Nesse caso o que você não entendeu?

Questionário - Sondagem   Prof^{o} Paulo Rocha

1) Você gosta de matemática?

2) Quando você erra um exercício você tenta resolvê-lo novamente? Costuma tentar quantas vezes?

3) Você já ouviu falar das Séries de Taylor?

4) Você já ouviu falar do método de Newton?

5) Após o estudo das Séries de Taylor, você considerou sua aplicação importante no ensino médio?

6) Sobre o número de aulas, você achou suficiente ou necessitaria de mais aulas para absorver o conteúdo proposto?

7) O que você acha que precisa melhorar nas aulas?

8) Entre as aplicações da Séries de Taylor, qual ou quais você mais gostou?

9) Sobre o nível do conteúdo propostos, você considera fácil, médio ou difícil?

8 Bibliografia

[1] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos da Matemática Elementar - conjuntos e funções. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2004. vol. 1.

[2] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar - trigonometria. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2004. vol. 3.

[3] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar - complexos, polinômios e equações. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2005. vol. 6.

[4] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria analítica. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2005. vol. 7.

[5] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos da Matemática Elementar - limites, derivadas e noções de integral. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005. vol. 8.

[6] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, 1994. vol. 1.

[7] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: HARBRA, 1994. vol. 2.

[8] Lima, Elon Lages. Coleção PROFMAT - Números e funções reais. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] Delgado, Jorge; Frensel, Katia; Crissaff, Lhaylla. Coleção PROFMAT - Geometria analítica. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[10] Neto, Antonio Caminha Muniz. Coleção PROFMAT - Fundamentos de cálculo. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[11] Burden, Richard L; Faires, Douglas J; Burden, Annette M. Análise numérica. 3ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

[12] B. Boyer, Carl; C. Merzbach, Uta. História da matemática. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.

[13] Terra, Gláucio. *Fórmulas de Taylor - Notas complementares ao Curso de Cálculo I*. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/ glaucio/textos/FormulasDeTaylor.pdf>. Acesso em: 21 out. 2019.

[14] Rio Branco de Oliveira, Oswaldo. *Fórmulas de Taylor com resto integral, infinitsimal, de Lagrange e de Cauchy*. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/ oliveira/ELE-FORMULATAYLOR.pdf>. Acesso em: 21 out. 2019.