2018: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Funções de Variáveis Discretas

Elias Vieira de Oliveira [1]
Mariana Garabini Cornelissen Hoyos[2]

Resumo: Neste trabalho discorremos sobre *conjuntos discretos* e funções de *variáveis discretas*, ou seja, funções definidas em *conjuntos discretos*. Apresentamos definições e exemplos no estudo de funções de variáveis discretas e na classificação de um conjunto discreto em regularmente espaçado ou não regularmente espaçado. Apresentamos também exemplos de aplicações, como no estudo de sequências recorrentes, reticulados, equações diofantinas, representação visual de funções usando ferramentas computacionais, o uso de transformadas discretas no processamento de sinais digitais e uma proposta de atividade para o Ensino Médio.

Palavras-chave: Variável Discreta. Funções. Computação

Abstract: In this work we discuss textit discrete sets and functions of textit discrete variables, that is, functions defined in textit discrete sets. We present definitions and examples in the study of functions of discrete variables and in the classification of a discrete set in regularly spaced or not regularly spaced. We also present examples of applications such as the study of recurrent sequences, lattice, diophantine equations, visual representation of functions using computational tools, the use of discrete transform in the digital signal processing and a proposal of activity for High School.

Key words: Discrete Variable. Functions. Computing.

1 Introdução

A matemática discreta não é um ramo da matemática, como a álgebra e a geometria, mas sim a parte da matemática que tem como objeto de estudo as estruturas discretas, ou seja, as propriedades de conjuntos discretos e as relações entre conjuntos discretos e entre elementos de um conjunto discreto ou ainda de um conjunto discreto obtido por amostragem de um conjunto contínuo. A matemática discreta, além da importância intrínseca à matemática, vem adquirindo importância para outras ciências com o avanço do uso de ferramentas computacionais, já que o computador trabalha de modo discreto para representar situações, na maioria das vezes, de variáveis contínuas.

[1] Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2017
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP
E-mail: eliasmatematica@ymail.com
[2] Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, UFSJ/CAP
E-mail: mariana@ufsj.edu.br

Entretanto, conforme Stewart([1]), o uso de ferramentas computacionais para traçar o gráfico de uma função não diminui a importância de se entender os conceitos por trás da representação gráfica. Deve-se sempre ter a clareza se o objeto que estamos representando é discreto, ou se é um objeto obtido por amostragem de um contínuo, assim como é importante saber transitar entre as várias maneiras de representar um mesmo objeto.

No ensino de matemática na educação básica, muitas vezes há uma tendência em dissociar a matemática discreta da “matemática contínua”, ou seja, da matemática que estuda o conjunto dos números reais e as funções nele definidas, ao invés da interação entre as partes. Por exemplo, o ensino de sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, dissociado do ensino de funções ou explicar sobre a origem dos números usando apenas a ideia de contagem([2]). Acreditamos que a interação entre discreto e contínuo é possível e benéfica ao ensino de matemática.

Neste trabalho estudamos as funções definidas em domínio discreto, procurando conexões com a “matemática contínua”, especialmente no que tange à representação visual de funções usando ferramentas computacionais.

Na seção 2 diferenciamos os conceitos de *discretude* e *continuidade*, definindo *conjunto contínuo* e *conjunto discreto* através de exemplos e definições de conceitos básicos como densidade, pontos isolados e enumerabilidade.

Na seção 3 temos exemplos de algumas funções de variáveis discretas, como as sequências recorrentes, os reticulados, que tem dentre as aplicações a análise de problemas de empacotamento, as equações diofantinas lineares de duas variáveis e a transformada discreta de Fourier, que tem uma interessante aplicação no processamento de sinais digitais. Os gráficos dessa seção foram construídos usando o Geogebra, com exceção do exemplo da transformada discreta de Fourier em que usamos o Octave.

Na seção 4 procuramos mostrar o estreito vínculo da matemática discreta com a computação, através de exemplos de plotagem de gráficos usando como ferramenta o Yag e deixamos uma proposta de atividade para o Ensino Médio.

2 Discreto *versus* Contínuo

A matemática elabora modelos para analisar e resolver problemas da vida real, de outras ciências ou ainda intrínsecos à matemática. No processo de construção de um modelo, as informações obtidas ou supostas são expressas em linguagem matemática para que possam servir de parâmetro para descrição e compreensão do problema. Em uma expressão matemática usamos símbolos e letras para representar as operações e as variáveis envolvidas. As variáveis podem ser quantitativas ou qualitativas. Uma variável quantitativa pode ser contínua ou discreta. Mas, o que significa uma variável ser contínua ou ser discreta? Quando usar uma ou outra?

De acordo com o dicionário da língua portuguesa ([3]), a etimologia da palavra **contínuo** vem do latim *continuus* e significa ininterrupto. Já a etimologia da palavra **discreto**, também vem do latim *discretus* e significa separado, posto à parte. Existe um outro sentido na língua portuguesa para a palavra discreto, bem mais utilizado no dia a dia, que é o adjetivo cujo significado é prudente; reservado, circunspecto; que se comporta de maneira comedida, mas, não é esse o sentido utilizado pela matemática e sim o original do latim de 'separado', posto à parte. E no caso da palavra contínuo em matemática, o sentido é mesmo de ininterrupto. Tentaremos diferenciar os conceitos de *contínuo* e *discreto* nos exemplos abaixo.

Exemplo 2.1 *Quantos alunos estão matriculadas na turma 3A do Ensino Médio da Escola X? Observe que a resposta à essa pergunta resulta de uma contagem, por exemplo, 32 ou 33 alunos (mas não podem ser 32,4 alunos). Neste caso, a variável "número de alunos"é discreta.*

Exemplo 2.2 *O tempo é uma variável contínua, ininterrupta, pois sabemos que o tempo não pára. Entretanto, a marcação do tempo por um relógio digital não é feita de modo contínuo. Um relógio digital em cujo visor aparece apenas as horas, os minutos e os segundos, salta abruptamente de 10:25:40 (dez horas, vinte e cinco minutos e quarenta segundos) para 10:25:41 (dez horas, vinte e cinco minutos e quarenta e um segundos) e depois para 10:25:42 e assim sucessivamente. Ou seja, não há tempo algum entre, por exemplo, 10:25:40 e 10:25:41 para esse relógio digital. Neste sentido, podemos dizer que a variável "tempo"é contínua enquanto a variável "marcação do relógio"é discreta.*

Exemplo 2.3 *A meia-vida de determinado fármaco é de 3 horas. Supondo que às 8 horas a concentração desse fármaco no plasma seja igual a 100 mcg/mL, qual das duas situações acontece?*

1. *De 8 horas até 11 horas a concentração do fármaco permanece constante no sangue e às 11 horas, abruptamente, a concentração abaixa para 50 mcg/mL ou*

2. *De 8 horas até 11 horas a concentração do fármaco diminui gradativamente no sangue e às 11 horas a concentração está em 50 mcg/mL.*

O leitor deve ter percebido que a situação plausível é a segunda o que nos mostra que a concentração plasmática não é um exemplo de variável discreta e sim de variável contínua.

Precisaremos de algumas definições, antes de formalizarmos melhor os conceitos matemáticos de Discreto e Contínuo.

Definição 2.1 *(**Bola aberta**) Dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real positivo δ, a bola aberta de centro a e raio δ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é estritamente menor que δ, denotado por*

$$\mathfrak{B}(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta\}.$$

Definição 2.2 *(**Densidade de um conjunto em** $\mathbb{R}$) Um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se para todo ponto $a \in \mathbb{X}$ e para qualquer número real positivo δ, tivermos*

$$\mathfrak{B}(a,\delta) \cap \mathbb{X} \neq \{a\}.$$

Decorre da definição acima, que se $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$, entre quaisquer dois elementos $a, b \in \mathbb{X}$, com $a < b$, sempre existe um terceiro elemento $r \in \mathbb{X}$ tal que $a < r < b$.

Observe que $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{R}$, pois $\mathfrak{B}(2,1) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$, ou seja, entre os inteiros 2 e 3(ou entre 1 e 2) não existe nenhum outro inteiro. Já o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, pois entre quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$ sempre existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$. Basta tomar $r = \frac{a+b}{2}$, por exemplo.

Convém agora perguntar: "Se um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{X}$, podemos afirmar que se o número real c é tal que $a < c < b$, então $c \in \mathbb{X}$? "

Definição 2.3 *(**Lacunas de um conjunto em** $\mathbb{R}$) Dados o ponto $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e o número real positivo δ, se existir $l \in \mathfrak{B}(x,\delta)$ tal que $l \notin \mathfrak{B}(x,\delta) \cap \mathbb{X}$, dizemos que o número real l é uma lacuna de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{R}$.*

O conjunto $\mathbb{Q}$, por exemplo, apesar de denso, possui lacunas: nem todos os pontos pertencentes à $\mathfrak{B}(1{,}41,\ 0{,}01)$ são números racionais já que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ e $\sqrt{2}$ não é racional. Portanto $\sqrt{2}$ é uma lacuna de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Definição 2.4 ***(Conjunto Contínuo)*** *Um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é dito contínuo se*

- *$\mathbb{X}$ é denso;*
- *$\mathbb{X}$ não possui lacunas.*

Portanto, $\mathbb{R}$ é contínuo, mas, $\mathbb{Q}$ não é contínuo, já que possui lacunas.

Definição 2.5 ***(Ponto isolado)*** *Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. Se existe $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$, tal que*

$$\mathfrak{B}(a,\delta) \cap \mathbb{X} = \{a\},$$

dizemos que a é um ponto isolado de $\mathbb{X}$.

Consideremos um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$, representado geometricamente abaixo, formado pelos pontos sobre a linha poligonal AK e os pontos L, M, N, O, P, Q, R e S.

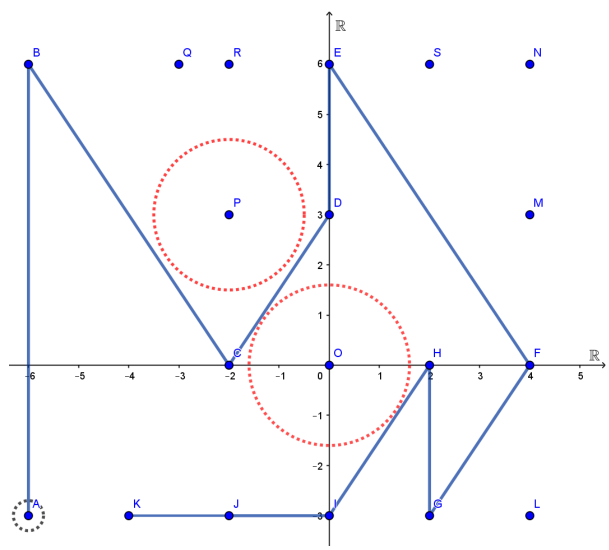

Figura 1: Exemplos de ponto isolado: O e P

Observe que existe um real positivo δ tal que $\mathfrak{B}(O,\delta) \cap \mathbb{X} = \{O\}$ e $\mathfrak{B}(P,\delta) \cap \mathbb{X} = \{P\}$. Mas não existe um real positivo δ tal que $\mathfrak{B}(A,\delta) \cap \mathbb{X} = \{A\}$. Portanto, os pontos O e P são pontos isolados de $\mathbb{X}$, mas A não é um ponto isolado de $\mathbb{X}$.

Definição 2.6 ***(Conjunto discreto)*** *Se todos os elementos de $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ são pontos isolados de $\mathbb{X}$, dizemos que $\mathbb{X}$ é um conjunto discreto.*

Os conjuntos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, dos naturais e $\mathbb{Z}$, dos inteiros, são exemplos de conjuntos discretos.

Nos próximos exemplos e definições, veremos a relação entre discretude e enumerabilidade de conjuntos.

Definição 2.7 *(**Conjunto Enumerável**) Dizemos que um conjunto é enumerável quando é finito, isto é, quando possui bijeção com $\mathbb{I}_n = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$, ou quando possui a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, ou seja, quando puder ser colocado em bijeção com $\mathbb{N}$.*

Neste trabalho sempre que referirmos a um conjunto enumerável infinito, o chamaremos simplesmente de conjunto enumerável e a um conjunto enumerável finito, chamaremos conjunto finito.

O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável. De fato, a função $f: \ \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1-n}{2}, & \text{se n ímpar} \\ \\ \dfrac{n}{2}, & \text{se n par} \end{cases}$$

é bijetiva.

Agora, considere $m \in \mathbb{Z}$. O produto cartesiano $\{m\} \times \mathbb{Z}$ também é enumerável. De fato, a função g que leva o par ordenado (m, x), com $x \in \mathbb{Z}$, em um inteiro $m + x$, é bijetiva. Logo, $\{m\} \times \mathbb{Z}$ é enumerável.

Se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são dois conjuntos finitos, sabemos que $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ é finito com cardinalidade igual a

$$card(\mathbb{X}) + card(\mathbb{Y}) - card(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}).$$

Mas o que dizer da cardinalidade da união de conjuntos enumeráveis?

Consideremos um conjunto $\mathbb{U}$ formado pela união enumerável de conjuntos enumeráveis

$$\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \ \cdots, \mathbb{X}_n, \ \cdots.$$

Como os conjuntos $\mathbb{X}_m$ são enumeráveis, podemos dispor os elementos de cada $\mathbb{X}_m$ em uma sequência $(x_{m1}, x_{m2}, \ \cdots, x_{mn}, \ \cdots)$, onde x_{mn} é o n-ésimo termo do Conjunto $\mathbb{X}_m$, ou seja, em x_{mn} o índice m denota a posição do conjunto em $\mathbb{U}$ e o índice n denota a posição do elemento no conjunto $\mathbb{X}_m$.

Abaixo distribuímos os elementos de $\mathbb{U}$, de forma que

- os elementos de $\mathbb{X}_1$ fiquem dispostos sequencialmente na linha 1, com x_{11} posicionado na coluna 1,
- os elementos de $\mathbb{X}_2$ fiquem dispostos sequencialmente na linha 2, com x_{21} posicionado na coluna 2,
- os elementos de $\mathbb{X}_m$ fiquem dispostos sequencialmente na linha m, com x_{m1} posicionado na coluna m e
- em cada coluna fiquem dispostos sequencialmente elementos de $\mathbb{U}$ com o mesmo somatório de índices, por exemplo, os elementos x_{13}, x_{22} e x_{31} pertencem a uma mesma coluna na disposição abaixo.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & \rightarrow & x_{12} & & x_{13} & & x_{14} & & x_{15} & & x_{16} & & \cdots \\
 & \diagdown & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & x_{21} & & x_{22} & & x_{23} & & x_{24} & & x_{25} & & \cdots \\
 & & & \diagdown & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & x_{31} & & x_{32} & & x_{33} & & x_{34} & & \cdots \\
 & & & & & \diagdown & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & & x_{41} & & x_{42} & & x_{43} & & \cdots \\
 & & & & & & & \diagdown & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
 & & & & & & & & x_{51} & & x_{52} & & \cdots \\
 & & & & & & & & & \diagdown & & &
\end{array},
$$

onde a seta $\nearrow$ indica para ir para o elemento da primeira linha da próxima coluna.

Construindo uma tabela relacionando a posição dos elementos de $\mathbb{X}_1$ em $\mathbb{U}$,

Elemento	Posição em $\mathbb{X}_1$	Posição em $\mathbb{U}$
x_{11}	1	1
x_{12}	2	2
x_{13}	3	4
x_{14}	4	7
x_{15}	5	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1k}	k	a_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

verificamos, usando técnica de recorrência linear(veja o exemplo 3.6), que um elemento de posição k em $\mathbb{X}_1$, tem posição $\dfrac{k^2-k+2}{2}$ em $\mathbb{U}$.

Consideremos então a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com termo geral $a_n = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n}{2} + 1$.

A partir dos termos de a_n podemos representar o conjunto dos naturais como

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} \;=\; & \{a_1,\, a_2,\, a_2+1,\, a_3,\, a_3+1,\, a_3+2,\, a_4,\, a_4+1,\, a_4+2,\, a_4+3,\, \cdots, \\
& a_k,\, a_k+1,\, a_k+2,\, \cdots,\, a_k+(k-1),\, \cdots\}.
\end{aligned}
$$

Como a função $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{U}$, definida por

$$\begin{cases} a_1 \longmapsto x_{11}, \\ a_2 \longmapsto x_{12}, \\ a_2+1 \longmapsto x_{21}, \\ a_3 \longmapsto x_{13}, \\ a_3+1 \longmapsto x_{22}, \\ a_3+2 \longmapsto x_{31}, \\ a_4 \longmapsto x_{14}, \\ \vdots \\ a_k \longmapsto x_{1k}, \\ a_k+1 \longmapsto x_{2(k-1)}, \\ a_k+2 \longmapsto x_{3(k-2)}, \\ \vdots \\ a_k+(k-1) \longmapsto x_{k1} \\ \vdots \end{cases}$$

é bijetiva, concluímos que $\mathbb{U}$, a união enumerável de conjuntos enumeráveis, é um conjunto enumerável. Podemos ainda concluir que se $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{U}$, $\mathbb{Y}$ é enumerável([4]).

Em particular, o conjunto $\mathbb{Z}^2$, união dos produtos cartesianos $\{m\}\times\mathbb{Z}$, com m percorrendo $\mathbb{Z}$, é enumerável.

Vimos que $\mathbb{Q}$ é denso, mas não é contínuo. Vamos mostrar agora que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Consideremos o conjunto $\mathbb{W} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b > 0 \text{ e } mdc(a,b) = 1\}$. Como $\mathbb{W}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{W}$ é enumerável. A função $f : \mathbb{W} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(a,b) = \dfrac{a}{b}$ é bijetiva. Portanto, $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema 2.1 ***Todo conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ discreto é enumerável.***

Demonstração: *Se um conjunto discreto é finito, não há o que demonstrar.*

Consideremos então um conjunto discreto infinito $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e δ a menor distância entre dois elementos quaisquer de $\mathbb{X}$.

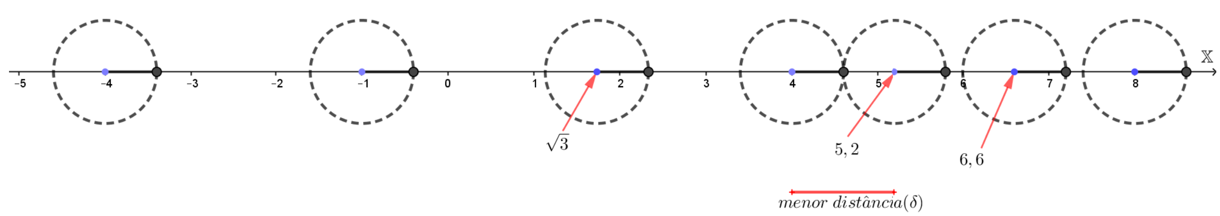

Figura 2: $\mathfrak{B}\left(x,\frac{\delta}{2}\right)$, com $x \in \mathbb{X}$

Observe que

$$\mathfrak{B}\left(x,\frac{\delta}{2}\right) \cap \mathbb{R} = \left(x-\frac{\delta}{2},x\right) \cup \left[x,x+\frac{\delta}{2}\right)$$

e como $\mathbb{X}$ é formado por pontos isolados,

$$\mathfrak{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \cap \mathbb{X} = \{x\}.$$

Mas $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Então para cada $x \in \mathbb{X}$ fixemos um racional q_x tal que $x \leq q_x < x + \frac{\delta}{2}$. Vamos considerar a função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = q_x$ e dois elementos, a e b, de $\mathbb{X}$, com $a < b$.

As expressões $f(a) = q_a$ e $a \leq q_a < a + \frac{\delta}{2}$ são equivalentes, assim como a desigualdade $a < b$ implica que existe um $\varepsilon \geq \delta$ tal que $b = a + \varepsilon$.

Somando ε à desigualdade $a \leq q_a < a + \frac{\delta}{2}$, temos

$$a + \varepsilon \leq q_a + \varepsilon < a + \varepsilon + \frac{\delta}{2},$$

substituindo $a + \varepsilon$ por b,

$$b \leq q_a + \varepsilon < b + \frac{\delta}{2}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $q_a = q_b$. Então

$$b \leq q_b + \varepsilon < b + \frac{\delta}{2},$$

o que implica que $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, o que é um absurdo, já que $\varepsilon \geq \delta$. Absurdo. Logo $q_b \neq q_a$, ou seja, f é injetiva e devemos ter

$$card(\mathbb{X}) \leq card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N}).$$

Portanto $\mathbb{X}$ é enumerável. □

Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são todos infinitos. Já vimos nos exemplos anteriores que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são densos em $\mathbb{R}$, mas $\mathbb{Q}$ possui lacunas. Portanto dos conjuntos aqui analisados, só $\mathbb{R}$ é contínuo. Salientamos que ser denso é condição necessária, mas não suficiente, para ser contínuo.

Importante ressaltar também que ser discreto é uma condição suficiente, mas não necessária, para ser enumerável. Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são enumeráveis e discretos, mas $\mathbb{Q}$ é enumerável e não é discreto, já que é denso em $\mathbb{R}$.

Ainda quanto à enumerabilidade, $\mathbb{R}$ é não-enumerável, pois qualquer que seja a função injetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sempre sobrará $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq f(n)$. Ou seja, nenhuma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva, logo não é possível bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Observe também que discreto e finito não são sinônimos. O conjunto $\mathbb{Z}$, por exemplo, é infinito e discreto. Retomando a pergunta do início da seção, podemos agora responder que

1. Uma variável é discreta quando assume valores em um conjunto discreto.

2. Uma variável é contínua quando assume valores em um conjunto contínuo.

Na seção seguinte veremos outros exemplos de conjuntos discretos e de funções de variáveis discretas.

3 Exemplos de funções de variáveis discretas

Definição 3.1 *(**Sequência**) Uma sequência de números reais é uma função*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\; ou \;\; \mathbb{I}_n \to \mathbb{R},$$

que associa a cada natural n um número real a_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Uma sequência com domínio em $\mathbb{N}$ é chamada sequência infinita e uma sequência com domínio em $\mathbb{I}_n$ é chamada sequência finita.

Usaremos as notações $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou simplesmente (a_n)) e $\{a_n\}$ para representar, respectivamente, uma sequência e um conjunto formado por seus termos.

Observe que $\{a_n\}$ é finito ou existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\{a_n\}$. Além disso, $\{a_n\}$ é formado por elementos isolados. Logo $\{a_n\}$ é um conjunto discreto e portanto enumerável, qualquer que seja a função a.

Exemplo 3.1 *Sejam as sequências infinitas (a_n) e (b_n), definidas por, respectivamente,*

$$a_n = \begin{cases} 0, & se\ n\ par, \\ 1, & se\ n\ ímpar \end{cases} \qquad e \;\; b_n = \begin{cases} 0, & se\ n\ é\ múltiplo\ de\ 3, \\ 1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Escrevendo os termos iniciais das sequências

$$(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots) \quad e \quad (b_n) = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \cdots),$$

é fácil ver que são sequências diferentes, mas que seus termos formam o mesmo conjunto:

$$\{a_n\} = \{b_n\} = \{0, 1\}.$$

Definição 3.2 *(**Operador Diferença**) Define-se para sequências (a_n) o operador Δ, chamado de operador diferença, dado por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.*

Aplicando o operador diferença nas sequências do exemplo 3.1, temos

$$\Delta(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots) \quad \text{e} \quad \Delta(b_n) = (0, -1, 1, 0, -1, 1, \cdots)\cdot$$

Observe que $\Delta(a_n)$ e $\Delta(b_n)$ também são sequências. Ou seja, aplicando o operador diferença a uma sequência geramos uma nova sequência.

Definição 3.3 *(**Progressão Aritmética**) Se $\Delta(a_n)$ é constante, (a_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem, denotada doravante por PA.*

Definição 3.4 *(**PA de ordens superiores**) Se $\Delta^m(a_n)$, $m \geq 2$, ou seja, a* m-ésima *aplicação do operador diferença, é constante e diferente de zero, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem* m*, denotada doravante por PA(m).*

Exemplo 3.2 *A sequência $a_n = (2, 4, 6, \cdots)$, dos naturais pares é um exemplo de PA, pois $\Delta a_n = 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Já a sequência $b_n = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \cdots)$, dos cubos dos naturais é um exemplo de PA(3). De fato, $\Delta(b_n) = (7, 19, 37, 61, 91, \cdots)$, $\Delta^2(b_n) = (12, 18, 24, 30, \cdots)$ e $\Delta^3 b_n = 6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto (b_n) é uma PA(3).

3.1 Recorrências Lineares

Definição 3.5 *(**Sequência Recorrente**) Uma sequência recorrente de ordem* m *é uma sequência em que cada termo é determinado como uma função dos* m *termos anteriores:*

$$a_n = f(a_{n-1,}, a_{n-2}, \cdots a_{n-(m-1)}, a_{n-m}, g(n)),$$

com n,$m \in \mathbb{N}$, $n > m$ *e* g *uma função qualquer com domínio nos naturais.*

Nessa subseção, abordaremos em particular algumas recorrências lineares homogêneas de ordem m, isto é, sequências em que a_n é combinação linear de m termos anteriores e $g(n) = 0$.

Exemplo 3.3 *Seja uma função* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definida recursivamente por*

$$b_n = q.\, b_{n-1}, \quad com \ q \neq 0\cdot$$

Procuraremos uma fórmula fechada que permita calcular b_n *em função apenas de* n.

Observe que b_n *é uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, ou seja,* b_n *depende apenas de* b_{n-1} *e* $g(n) = 0$ *e verifique que a sequência* $C.q^n$ *é solução de* b_n*, para qualquer* $C \in \mathbb{R}$*. De fato,*

$$C.q^n = q.C.q^{n-1}.$$

Em particular, para $C = 1$*, a sequência* q^n *é solução de* b_n*.*

Da solução geral $b_n = C.q^n$*, precisamos determinar* C*. Para isso basta conhecer um termo de* (b_n)*. Supondo conhecido* b_1 *temos*

$$C = \frac{b_1}{q},$$

o que fornece a fórmula

$$b_n = b_1\, q^{n-1}.$$

Portanto a recorrência

$$b_n = q.\, b_{n-1}, \quad com \ q \neq 0$$

caracteriza a progressão geométrica de primeira ordem (PG), e tem como fórmula fechada, uma função do tipo exponencial em n*. Observe ainda que, para qualquer* q*, o conjunto* $\{b_n\}$ *é discreto.*

A partir de agora, se um conjunto é discreto iremos classificá-lo quanto ao espaçamento.

Definição 3.6 *(**Conjunto discreto regularmente espaçado em** $\mathbb{R}$) Um conjunto discreto* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *é regularmente espaçado se para todo* $x \in \mathbb{X}$*, a distância de* x *até seus vizinhos, ou seja, seu antecessor e seu sucessor em* $\mathbb{X}$*, for a mesma.*

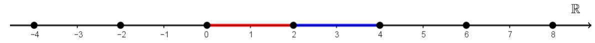

Figura 3: Espaçamento regular

Um exemplo de conjunto discreto regularmente espaçado é o conjunto $\mathbb{Z}$, dos inteiros. A distância entre quaisquer dois elementos consecutivos é sempre 1.

Analisaremos agora se $\{b_n\}$, do exemplo 3.3, é regularmente espaçado. Como (b_n) é uma PG, $\Delta(b_n)$ é uma PG de mesma razão de (b_n). Se a razão q da PG for igual a 1, $\{b_n\}$ é um conjunto unitário e não faz sentido falar em espaçamento. Nos interessa então o caso de PG com razão $q \neq 1$.

Representando geometricamente o conjunto $\{b_n\}$, como bolas Γ_k de centro b_k e raio $r_k = \dfrac{\Delta b_k}{q+1}$, podemos concluir que $\{b_n\}$ é um conjunto discreto não regularmente espaçado, pois Δb_k não é constante.

Como $\Delta(b_n)$ é uma PG de mesma razão de b_n, os raios das bolas Γ_k também são termos de uma PG. Relacionando os raios das bolas Γ_k e Γ_{k+1} com Δb_k, temos

$$\begin{aligned} r_k + r_{k+1} &= \Delta b_k \\ \Rightarrow r_k + q\, r_k &= \Delta b_k \\ \Rightarrow r_k\,(q+1) &= \Delta b_k \\ \Rightarrow r_k &= \frac{\Delta b_k}{q+1}. \end{aligned}$$

Na figura abaixo, os centros das bolas são, em particular, os termos da PG $b_n = 2^{n-1}$.

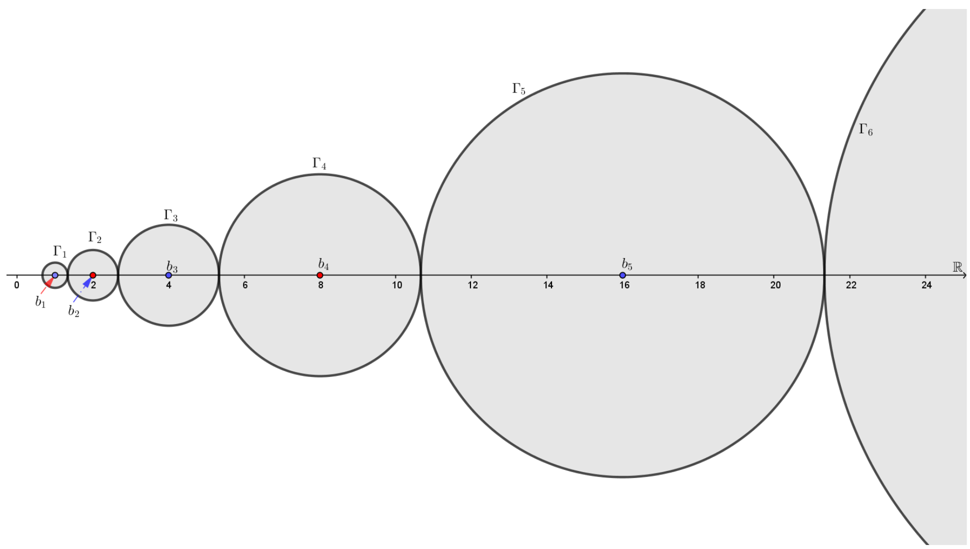

Figura 4: Conjunto $\{b_n\}$ dos termos da PG

Do exemplo 3.3, sabemos ainda que a PG q^n é uma solução particular de recorrências lineares homogêneas de ordem 1, da forma $b_n = q \cdot b_{n-1}$, com $q \neq 0\cdot$ Vamos supor agora que existe uma PG de razão λ, solução da recorrência linear homogênea de ordem m dada por

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m}, \quad n > 1,$$

o que equivale dizer que

$$\lambda^n = c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + c_m \lambda^{n-m}.$$

Dividindo por λ^{n-m}, obtemos uma equação polinomial de grau m:

$$\lambda^m - c_1 \lambda^{m-1} - c_2 \lambda^{m-2} - \cdots - c_m \lambda^{m-m} = 0,$$

que denominamos equação característica de a_n ([5],[6]) . Portanto, para λ^n ser solução da recorrência é necessário que λ seja raiz da equação característica. Além disso, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$

são as raízes da equação característica, as sequências $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_m^n$ são soluções da recorrência, assim como suas combinações lineares $C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_m\lambda_m^n$, com $C_i \in \mathbb{R}$.

De fato, tomando duas raízes distintas da equação característica, λ_i e λ_j,

$$\begin{cases} \lambda_i^n = c_1\lambda_i^{n-1} + c_2\lambda_i^{n-2} + \cdots + c_m\lambda_i^{n-m} \\ \lambda_j^n = c_1\lambda_j^{n-1} + c_2\lambda_j^{n-2} + \cdots + c_m\lambda_j^{n-m}, \end{cases}$$

multiplicando λ_i^n por C_1, λ_j^n por C_2 e somando obtemos

$$C_1\lambda_i^n + C_2\lambda_j^n = c_1(C_1\lambda_i^{n-1} + C_2\lambda_j^{n-1}) + c_2(C_1\lambda_i^{n-2} + C_2\lambda_j^{n-2}) + \cdots + c_m(C_1\lambda_i^{n-m} + C_2\lambda_j^{n-m}).$$

A solução geral de a_n é uma combinação linear de m soluções linearmente independentes,([6]) onde os coeficientes $C_1, C_2, \cdots, C_m$ podem ser determinados a partir de m termos conhecidos da sequência.

Uma observação importante acerca da solução geral e que será útil nos dois próximos exemplos é o caso da multiplicidade de raízes. Verifica-se que se λ_i é uma raiz de multiplicidade k, as sequências

$$\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \cdots, n^{k-1}\lambda_i^n$$

são k soluções linearmente independentes([6]). No caso extremo, uma raiz de multiplicidade m, a solução geral da recorrência linear homogênea de ordem m é a combinação linear

$$a_n = \lambda^n \sum_{i=1}^{m} n^{i-1} C_i.$$

Exemplo 3.4 *Seja uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida recursivamente por*

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Procuraremos uma fórmula fechada que permita calcular a_n em função apenas de n.

Observe que a_n é uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, com equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, que tem uma raiz dupla $\lambda = 1$. Então, a solução geral de a_n é da forma $a_n = 1^n(C_1 + nC_2)$, onde C_1 e C_2 são determinados se conhecidos dois termos de (a_n).

Supondo conhecidos a_k e a_{k+1}, temos

$$\begin{cases} a_k = C_1 + k\, C_2 \\ a_{k+1} = C_1 + (k+1)\, C_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta a_k = C_2, \text{ para qualquer } k$$

e tomando $k = 1$, temos $a_1 = C_1 + C_2$, ou seja, $C_1 = a_1 - \Delta a_n$. Portanto, de acordo com as definições 3.2 e 3.3, a recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

caracteriza a progressão aritmética de primeira ordem, tem como equação característica $(\lambda - 1)^2$ e como fórmula fechada

$$a_n = (\Delta a_n)n + (a_1 - \Delta a_n),$$

polinômio de primeiro grau em n.

Representando geometricamente o conjunto $\{a_n\}$ como bolas Γ_k de centro a_k e raio $r_k = \dfrac{\Delta a_k}{2}$, pois, como Δa_k é uma constante, os raios das bolas Γ_k e Γ_{k+1} são iguais. Portanto

$$\begin{aligned} r_k + r_{k+1} &= \Delta a_k \\ \Rightarrow 2r_k &= \Delta a_k \\ \Rightarrow r_k &= \frac{\Delta a_k}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\{a_n\}$, conjunto dos termos de uma PA, é um conjunto discreto regularmente espaçado. Na figura abaixo representamos geometricamente o conjunto $\{a_n\}$, formado, em particular, pelos termos de $a_n = 3n - 1$.

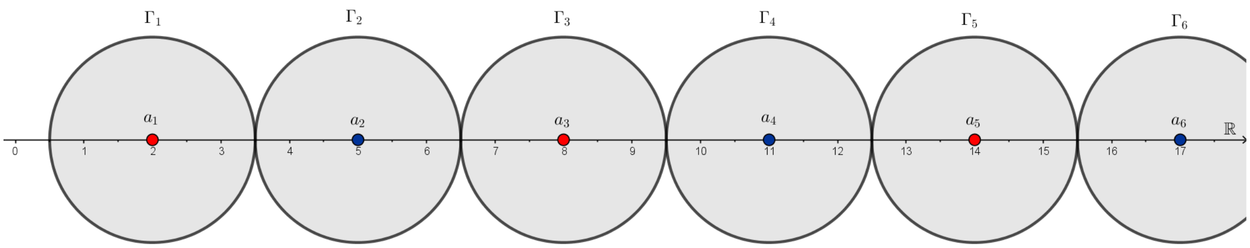

Figura 5: Conjunto discreto regularmente espaçado em $\mathbb{R}$

No próximo exemplo veremos que a fórmula fechada de uma recorrência linear de ordem *m+1*, com $m > 1$, é um polinômio de grau m em n, que gera uma *PA(m)*.

Exemplo 3.5 *A solução geral da recorrência*

$$u_n = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \binom{m+1}{k} u_{n-k},$$

de ordem $m+1$, é um polinômio de grau m em n e caracteriza uma PA(m)*.*

A equação característica de u_n é

$$(\lambda - 1)^{m+1} = 0,$$

que tem uma raiz real, $\lambda = 1$, de multiplicidade $m+1$. As $m+1$ soluções linearmente independentes de u_n são λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, $\cdots$, $n^{m-1}\lambda^n$ e $n^m\lambda^n$. Como $\lambda = 1$, a solução geral

$$u_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots + C_m n^{m-1} + + C_{m+1} n^m, \text{ com } C_{m+1} \neq 0,$$

é um polinômio de grau m em n. Para determinar os coeficientes do polinômio, precisamos conhecer $m+1$ termos da sequência.

Precisamos mostrar agora, que u_n é uma PA(m). Aplicando o operador diferença a u_n, resulta um polinômio de grau $m-1$, pois para o termo de maior grau

$$C_{m+1}(n+1)^m - C_{m+1}n^m = C_{m+1}\left(\binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \cdots + \binom{m}{m-1} n^1 + \binom{m}{m} n^0\right)\cdot$$

Então, se aplicarmos sucessivamente o operador diferença, a cada operação, o grau do polinômio diminui um, conforme tabelado abaixo:

Polinômio	*Grau*
$u(n) = u_n$	m
$\Delta(u_n)$	$m-1$
$\Delta(\Delta(u_n)) = \Delta^2(u_n)$	$(m-1)-1 = m-2$
$\Delta(\Delta^2(u_n)) = \Delta^3(u_n)$	$(m-2)-1 = m-3$
$\vdots$	$\vdots$
$\Delta(\Delta^{m-1}(u_n)) = \Delta^m(u_n)$	$m-m$

Logo, $\Delta^m(u_n)$, pela tabela acima, tem grau $m-m$, ou seja, é constante. Portanto, u_n caracteriza uma progressão aritmética de ordem m.

O conjunto $\{u_n\}$, dos termos de uma PA de ordem m maior que 1, é um conjunto discreto não regularmente espaçado, pois $\Delta(u_n)$ não é constante.

Representamos abaixo o conjunto $\{u_n\}$, para o caso de uma *PA(2)*, como bolas Γ_k de centro u_k e raio $r_k = \dfrac{\Delta u_k + \Delta u_{k-1}}{4}$. Sabemos que, como (u_n) é uma *PA(2)*, $\Delta(u_n)$ é uma PA. Então os raios das bolas não tem medidas iguais, pois Δu_n não é constante. Portanto $\{u_n\}$ é um conjunto discreto não regularmente espaçado. Relacionando os raios das bolas Γ_k e Γ_{k+1} com Δu_k, temos

$$\begin{aligned}
r_k + r_{k+1} &= \Delta u_k \\
\Rightarrow r_{k-1} + r_k &= \Delta u_{k-1} \\
\Rightarrow \Delta u_k + \Delta u_{k-1} &= r_k + (r_{k+1} + r_{k-1}) + r_k \\
\Rightarrow r_k + 2r_k + r_k &= \Delta u_k + \Delta u_{k-1} \\
\Rightarrow r_k &= \frac{\Delta u_k + \Delta u_{k-1}}{4},
\end{aligned}$$

ou seja, os raios formam uma PA. A figura abaixo representa, em particular, o conjunto $\{u_n\}$, dos termos de $u_n = \dfrac{n^2}{2} + n$.

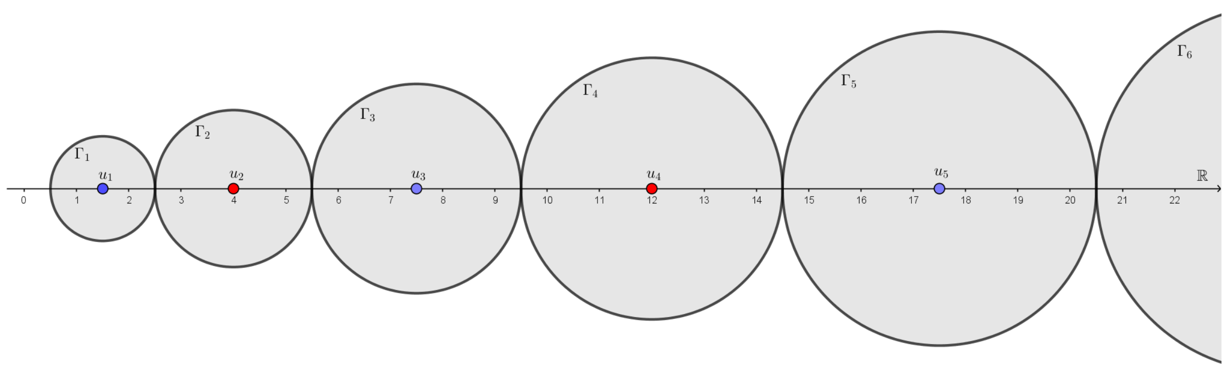

Figura 6: Conjunto $\{u_n\}$, dos termos da PA(2): discreto não regularmente espaçado

O próximo exemplo mostra uma técnica para descobrir fórmula fechada de uma *PA(m)*, dados os termos iniciais.

Exemplo 3.6 *Seja a sequência infinita (a_n), cujos termos iniciais são $1, 2, 4, 7, 11, 16$, nessa ordem. Queremos uma fórmula fechada para (a_n).*

Aplicando o operador diferença na sequência, temos $\Delta(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$ e $\Delta^2(a_n) = (1, 1, 1, \cdots)$, o que mostra que (a_n), é uma PA(2) e tem como fórmula fechada o polinômio

$C_1 + C_2 n + C_3 n^2$. *Como conhecemos termos suficientes para calcular os coeficientes do polinômio, temos*

$$\begin{cases} a_1 = C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ a_2 = C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 2 \\ a_3 = C_1 + 3C_2 + 9C_3 = 4 \end{cases}$$

ou seja, a fórmula fechada de (a_n) *é* $\dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n}{2} + 1$.

3.2 Reticulados

Nesta e nas próximas subseções vamos definir e exemplificar conjuntos discretos em $\mathbb{R}^n$ e funções com domínio nesses conjunto, enfatizando $n = 2$.

Definição 3.7 *Sejam* $\beta = \{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m\}$ *um conjunto linearmente independente de vetores do* $\mathbb{R}^n$ *e* $a = \{a_1, a_2,\ \cdots, a_m\} \in \mathbb{Z}^m$, *com* $m \leq n$.

Definindo uma função $f : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$ *por* $f(a) = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m$, *obtemos* $\Lambda = f(\mathbb{Z}^m)$, *que é um Conjunto Discreto no subespaço de dimensão m em* $\mathbb{R}^n$, *chamado de Reticulado m-dimensional em* $\mathbb{R}^n$. *O conjunto* β *é chamado de base de* Λ.

Exemplo 3.7 *Sejam* $u = (1,\frac{1}{2})$, $v = (0,1)$ *e* $\beta = \{u, v\}$. *A função* $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x, y) = x\,u + y\,v$, *corresponde ao reticulado bidimensional* Λ_1 *no plano, dado pela figura abaixo.*

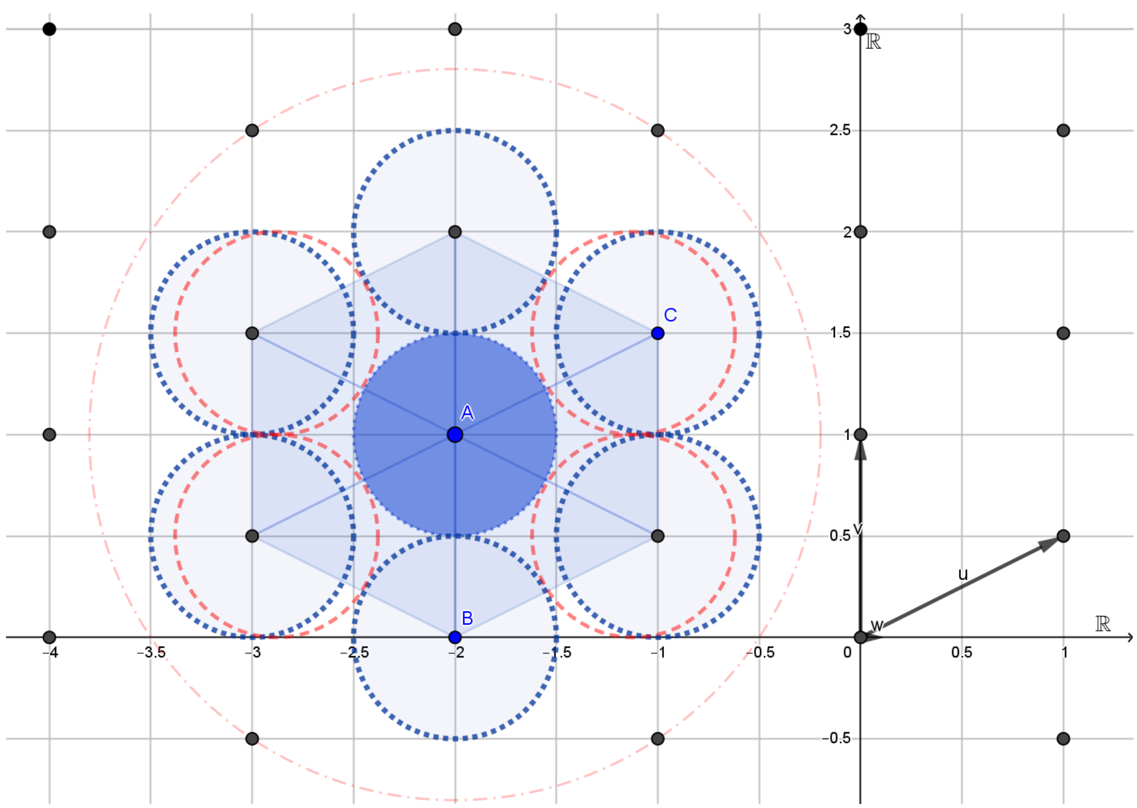

Figura 7: Reticulado no plano: Λ_1 gerado por $\beta = \{(1,\frac{1}{2}),\ (0,1)\}$

Suponha que vamos cobrir o plano com bolas centradas nos pontos de um reticulado e raio $r = \frac{\delta}{2}$, sendo δ a menor distância entre dois elementos quaisquer desse reticulado. Dado um elemento $A = (x, y)$ do reticulado, definimos como vizinhos de A os centros das bolas tangentes à $\mathfrak{B}(A,r)$ e os centros das bolas que podem tangenciar $\mathfrak{B}(A,r)$ através da translação por um vetor de norma igual a diferença das normas dos vetores da base, sem que intercecte nenhuma outra bola em mais de um ponto.

Definição 3.8 ***(Vizinhos)*** *Suponha que vamos cobrir o espaço n-dimensional com bolas centradas em pontos de um conjunto discreto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ e raio $r = \frac{\delta}{2}$, sendo δ a menor distância entre dois elementos quaisquer de $\mathbb{X}$. Dado $x \in \mathbb{X}$, definimos como vizinhos de x os centros das bolas tangentes à $\mathfrak{B}(x,r)$ e os centros das bolas que podem tangenciar $\mathfrak{B}(x,r)$ através de translação, sem que intersecte outras bolas em mais de um ponto.*

Definição 3.9 ***(Órbita de um elemento)*** *Seja x um elemento de um Conjunto Discreto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. Chamaremos órbita de x e denotaremos por $O_x(\mathbb{X})$ ao conjunto formado por seus vizinhos em $\mathbb{X}$.*

Por exemplo,

$$O_{(-2,1)}(\Lambda_1) = \left\{ \left(-1, \frac{3}{2}\right), (-2, 2), \left(-3, \frac{3}{2}\right), \left(-3, \frac{1}{2}\right), (-2, 0), \left(-1, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

e

$$O_{(-2,1)}(\mathbb{Z}^2) = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 1), (-2, 0)\}.$$

Definição 3.10 ***(Conjunto discreto regularmente espaçado em $\mathbb{R}^n$)*** *Seja um conjunto discreto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ e x um elemento de $\mathbb{X}$. Se a distância de x até qualquer elemento de $O_x(\mathbb{X})$ e a distância entre quaisquer dois elementos vizinhos em $O_x(\mathbb{X})$ é a mesma, dizemos que x possui uma órbita regularmente espaçada em $\mathbb{X}$. E se todos os elementos de $\mathbb{X}$ possuem órbitas regularmente espaçadas, dizemos que $\mathbb{X}$ é regularmente espaçado em $\mathbb{R}^n$.*

Observe que no reticulado Λ_1, da figura 7, a distância$(A, B) = 1$ e a distância$(A, C) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Mas, $1 \neq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Portanto, Λ_1 é um conjunto discreto não regularmente espaçado.

Analogamente, $\mathbb{Z}^2$, abaixo representado, também é um conjunto discreto não regularmente espaçado, pois a distância$(A, B) = 1$ e a distância$(B, D) = \sqrt{2}$.

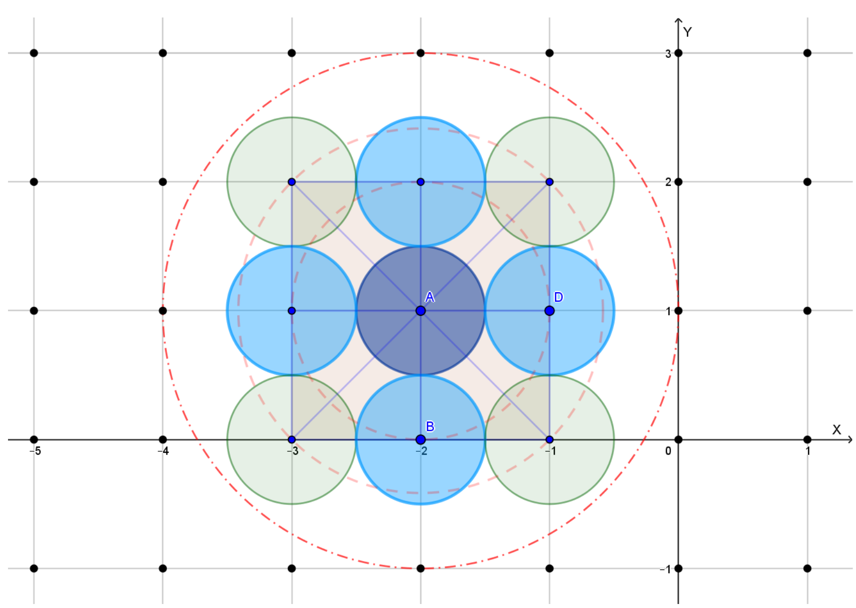

Figura 8: $\mathbb{Z}^2$: reticulado gerado pela base canônica $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$

Mas quais devem ser as condições para que o Reticulado no plano seja Regularmente Espaçado?

A figura abaixo mostra, em particular, um subconjunto $\mathbb{X}$ de $\mathbb{R}^2$ regularmente espaçado.

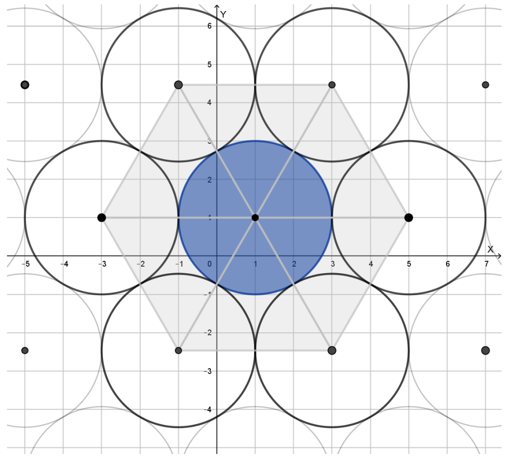

Figura 9: Conjunto discreto regularmente espaçado em $\mathbb{R}^2$

Observe que

$$O_{(1,1)}(\mathbb{X}) = \{(5,1), (3, 1+2\sqrt{3}), (-1, 1+2\sqrt{3}), (-3,1), (-1, 1-2\sqrt{3}), (3, 1-2\sqrt{3})\}$$

e que fixando $(1,1)$ e escolhendo dois elementos consecutivos de sua órbita formamos um triângulo equilátero.

O reticulado do próximo exemplo também é um conjunto discreto regularmente espaçado em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.8 *Sejam* $u = (0{,}2)$, $v = (\sqrt{3}{,}1)$ *e* $\beta = \{u, v\}$. *A função* $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x,y) = x\,u + y\,v$, *determina o reticulado bidimensional* Λ_2, *de formato hexagonal em* $\mathbb{R}^2$.

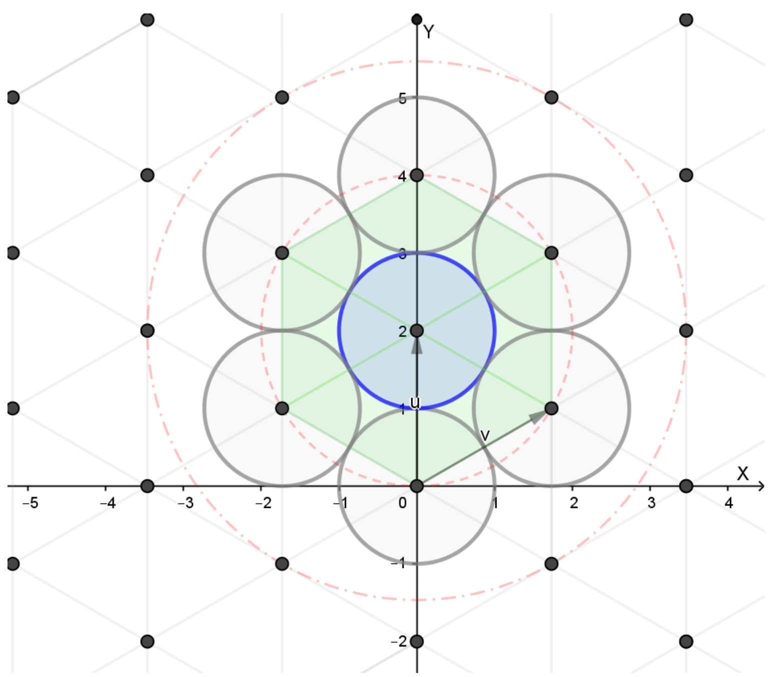

Figura 10: Reticulado Λ_2

Observe que

$$\|(0{,}2)\| = \left\|(\sqrt{3}{,}1)\right\|$$

e

$$\frac{\left\langle (0{,}2), (\sqrt{3}{,}1) \right\rangle}{\|(0{,}2)\| \ \left\|(\sqrt{3}{,}1)\right\|} = \frac{1}{2} = \cos(60°),$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ *denota o produto escalar usual.*

Pelo exemplo acima podemos ver que o reticulado hexagonal é um conjunto discreto regularmente espaçado, com as normas dos vetores da base iguais e os vetores formando ângulo de 60 graus. Uma região hexagonal com centro em um ponto qualquer do reticulado Λ_2 (10) pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes. Vamos mostrar que essa é a condição para um reticulado no plano ser um conjunto discreto regularmente espaçado, ou seja, que as normas dos vetores da base sejam iguais e os vetores formem ângulo de 60 graus.

Consideremos um reticulado Λ_i no plano, gerado pelos vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. É claro que $(0,0) \in \Lambda_i$, pois $0.u + 0.v = (0,0)$. Sabemos ainda que os pontos $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ pertencem à $O_{(0,0)}(\Lambda_i)$. No caso de $\|u\| \neq \|v\|$, a distância entre $(0,0)$ e U é diferente da distância entre $(0,0)$ e V, o que implica Λ_i não é regularmente espaçado. Nos interessa então o caso $\|u\| = \|v\| = d$. Pela lei dos cossenos a distância d_1 entre U e V é dada por

$$\begin{aligned} {d_1}^2 &= d^2 + d^2 - 2.d.d.\cos\theta \\ &= 2d^2 - 2d^2\cos\theta \\ &= 2d^2(1 - \cos\theta), \end{aligned}$$

com θ denotando o ângulo entre os vetores da base, u e v. Escrevendo $d_1 = d + \varepsilon$, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e substituindo na expressão acima temos

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos\theta)d^2 &= (d + \varepsilon)^2 \\ &= d^2 + 2d\varepsilon + \varepsilon^2, \end{aligned}$$

o que resulta $\cos\theta = \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = 0$, ou seja, o ângulo entre os vetores da base é de 60 graus e a distância entre de $(0,0)$ até qualquer elemento de $O_{(0,0)}(\Lambda_i)$ e a distância entre quaisquer dois elementos vizinhos em $O_{(0,0)}(\Lambda_i)$ é a mesma. Note que isso não vale apenas para $(0,0)$, pois um ponto $A = (a_1, a_2)$ pode ser obtido por translação de $(0,0)$ por um vetor $a = (a_1, a_2)$, assim como $O_A(\Lambda_i)$ pode ser obtida por translação de $O_{(0,0)}(\Lambda_i)$ pelo vetor $a = (a_1, a_2)$.

Portanto, um reticulado no plano é um conjunto discreto regularmente espaçado se as normas dos vetores da base são iguais e os vetores formam ângulo de 60 graus.

Uma aplicação importante dos reticulados é no estudo da densidade de empacotamento de esferas([7]) em $\mathbb{R}^n$. Um empacotamento esférico é a distribuição de esferas de mesmo raio no espaço euclidiano n-dimensional de tal modo que a intersecção de duas delas tenha no máximo um ponto ([8]). Dentre os empacotamentos reticulados de bolas em $\mathbb{R}^2$, o que apresenta melhor densidade, isto é, a maior razão entre a área ocupada por bolas em uma região do plano e a área dessa região, é o reticulado hexagonal Λ_2, ([9]) com densidade

$$\frac{3\pi}{6\sqrt{3}} \approx 90{,}69\%\cdot$$

O análogo do reticulado bidimensional Λ_2, em $\mathbb{R}^3$, com relação à densidade, é o reticulado denominado *fcc* (cubo de face centrada) ([7], [9], [10]), gerado por

$$\beta = \{(1{,}0{,}1), (0{,}1{,}1), (1{,}1{,}0)\},$$

com densidade

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74{,}05\%\cdot$$

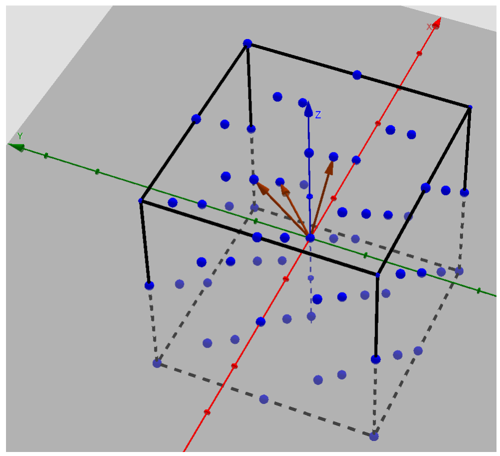

Figura 11: Reticulado fcc

Em 2005, o matemático Thomas Hales, publicou no volume 162 da seção 3 do Annals of Mathematics (`http://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf`) uma prova de que a densidade do reticulado *fcc* é a melhor densidade dentre todos os tipos de empacotamentos em $\mathbb{R}^3$.

No estudo da estrutura dos sólidos cristalinos, na química, o reticulado *fcc* é um dos catorze reticulados descritos por Bravais ([11]). Cada ponto do reticulado representa a posição de um átomo, íon ou molécula que formam o sólido cristalino. A forma como esses elementos fundamentais se agrupam determina qual reticulado representa a estrutura do sólido e permite estudar importantes propriedades das ligações químicas, o fator de compacidade atômica, as densidades volumétrica, planar e linear, bem como características do sólido, como o nível de estabilidade, por exemplo ([11], [12], [13]).

3.3 Equações Diofantinas

As equações do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, são chamadas equações diofantinas lineares com duas incógnitas (x e y). Todo par ordenado (x_0, y_0) de coordenadas inteiras tal que $ax_0 + by_0 = c$ é uma solução inteira da equação. Nesta subseção vamos analisar as condições para que uma equação diofantina linear tenha solução inteira e no caso afirmativo representar o conjunto de pares ordenados solução da equação.

Seja, por exemplo, a função $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x,y) = 6x + 9y$. Queremos saber quais valores f assume em $\mathbb{Z}$.

Como $mdc(6, 9) = 3$, para quaisquer valores inteiros de x e y, temos

$$6x + 9y \equiv 0 \ (mod\, 3).$$

Ou seja, f assume somente valores múltiplos de 3. O que permite afirmar que a equação $6x + 9y = 2000$ não tem solução inteira e que $6x + 9y = 201$ e $6x + 9y = 2000000001$ tem solução inteira.

Mas quais são as soluções inteiras de $6x + 9y = 201$?

Desenvolvendo temos $y = \dfrac{201 - 6x}{9}$.

Como queremos y inteiro é necessário que $201 - 6x \equiv 0 \ (mod\, 9)$, ou seja, devemos ter $x \equiv 2 \ (mod\, 9)$.

Tomando $x_0 = 2$, temos $y_0 = \dfrac{201 - 12}{9} = 21$.

Portanto $(2, 21)$ é uma solução de $6x + 9y = 201$. Em outras palavras, 201 pode ser escrito como combinação linear de 6 e 9 como $201 = 2 \cdot 6 + 21 \cdot 9$. A solução geral de $6x + 9y = 201$ é

$$S = \{(2, 21) + (9, -6)t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}\}.$$

É fácil ver que qualquer elemento de S é solução de $6x + 9y = 201$, pois

$$6(2 + 9t) + 9(21 - 6t) = 201.$$

Mais geralmente, considere os vetores $u = (2,21)$, $v = (9, -6)$ e a função $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = xu + yv$. Denotaremos o reticulado gerado por $\{u, v\}$ por Λ_3 e o representamos geometricamente abaixo, destacando de azul os pontos de S.

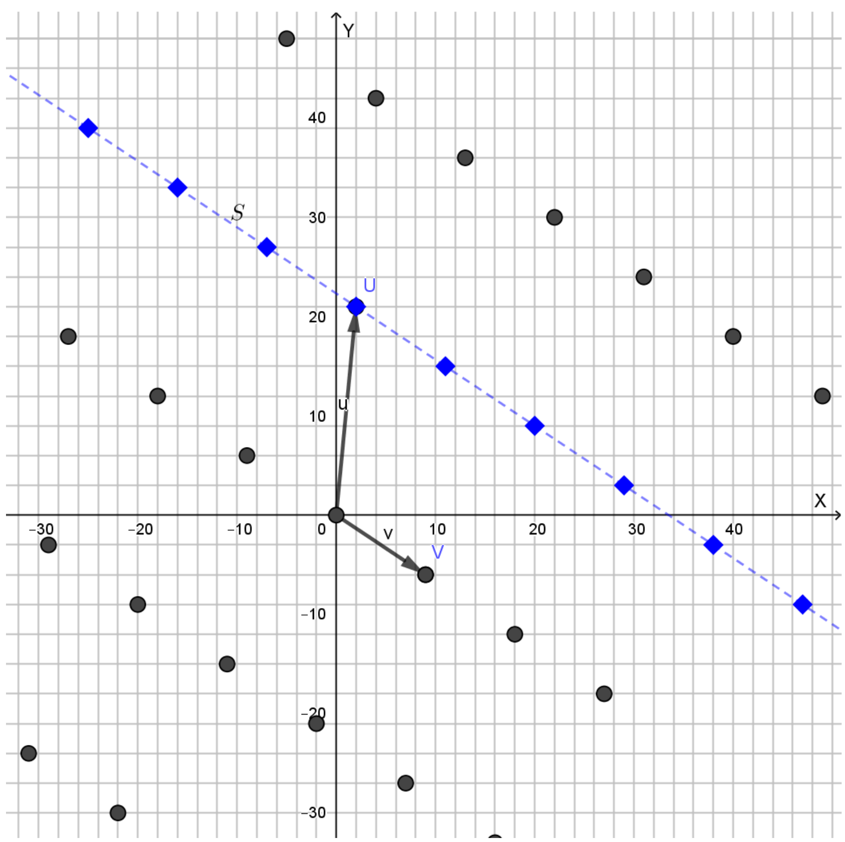

Figura 12: Λ_3

Observe que qualquer ponto de Λ_3 é da forma $(2k + 9t, 21k - 6t)$, para $k, t \in \mathbb{Z}$, e que $f(2k + 9t, 21k - 6t) = 6(2k + 9t) + 9(21k - 6t) = 201k$. Isso mostra que S é um subconjunto de Λ_3, tomando $k = 1$.

Importante ressaltar que Λ_3 é um conjunto discreto não regularmente espaçado. Basta ver que $\|u\| \neq \|v\|$. Não obstante, $S \subset \Lambda_3$ é um conjunto discreto regularmente espaçado, pois a distância entre dois vizinhos, $A = ((2,21) + (9,-6)t)$ e $B = ((2,21) + (9,-6)(t+1))$, em S, é igual a $\sqrt{6^2+9^2}$, para qualquer $t \in \mathbb{Z}$.

Considerando agora, dados $a, b \in \mathbb{Z}$ quaisquer e uma função $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ definida por $h(x,y) = ax + by$, podemos afirmar que

- $h(\mathbb{Z}^2) = \{c \equiv 0 \ (mod\, d), \text{ com } d = mdc(a,b)\}$, logo a equação $ax + by = c$ tem solução inteira para todo $c \in h(\mathbb{Z}^2)$;

- se (x_0, y_0) é uma solução da equação $ax + by = c$, existe um reticulado Λ_j gerado por $\beta = \{(x_0, y_0), (b, -a)\}$, tal que a solução geral da equação diofantina,

$$S = \{(x_0, y_0) + (b, -a)t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}\},$$

  é um subconjunto de Λ_j.

De fato, se um ponto pertence a Λ_j, então é da forma $(x_0k + bt, y_0k - at)$, para $k, t \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} h(x_0k + bt, y_0k - at) &= a(x_0k + bt) + b(y_0k - at) \\ &= (ax_0 + by_0).k \\ &= c.k, \end{aligned}$$

o que mostra que S é um subconjunto de Λ_j, tomando $k = 1$.

Além disso, considere os elementos de S:

$$A = (x_0 + bt, y_0 - at), B = (x_0 + b(t+1), y_0 - a(t+1)) \text{ e } C = (x_0 + b(t+2), y_0 - a(t+2)).$$

Temos que

$$\text{distância } (A, B) = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{ distância } (B, C).$$

Logo, concluí-se que S é um conjunto discreto regularmente espaçado, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.

3.4 Transformada Discreta de Fourier

O mundo físico nos fornece funções de variáveis contínuas, mas com o avanço das técnicas de inteligência computacional, as transformadas discretas vem adquirindo aplicações em vários campos. Uma função de variável discreta pode ser construída pela amostragem de uma função de variável contínua, por exemplo, a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 1$ é contínua, mas amostrando f para $\mathbb{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, a discretizamos.

Nesta subseção, apresentaremos a DFT, Transformada Discreta de Fourier, que é obtida da discretização da Transformada de Fourier em Tempo Contínuo.

Definição 3.11 ***(CTFT - Continuous Time Fourier Transform)*** *Seja $f(t)$ uma função contínua e integrável. A CTFT de $f(t)$ é dada por*

$$\mathfrak{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega),$$

onde t *é tempo, $\omega = 2\pi\,\mathfrak{f}$, com ω indicando a frequência em radianos/segundo e $\mathfrak{f}$ indicando frequência em Hertz, ou seja, ciclos por segundo. Portanto, uma CTFT transforma uma função com domínio no* tempo *em uma função com domínio na* frequência.

Observe que $f(t)$ e $F(\omega)$ são funções de variáveis contínuas. Discretizar a função f é considerar t variando em um conjunto discreto.

Definição 3.12 *(**DTFT - Discrete-time Fourier Transform**) A DTFT de $f(t)$ é dada por*

$$\mathfrak{F}_d(f(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-i\omega n} = F_d(\omega),$$

com a notação $f[n]$ representando uma sequência abrangendo todos os valores não-zero de f, amostrada para tempo discreto.

Observe que a DTFT de uma função f é obtida discretizando o tempo, mas a variável ω é contínua. Portanto, $F_d(\omega)$ é contínua e periódica, não podendo ser implementada de maneira exata num computador. Em aplicações práticas, o cálculo da DTFT pode ser aproximado pelo cálculo da DFT de N pontos regularmente espaçados em ω, com incremento de $\frac{2\pi}{N}$.

Definição 3.13 *(**DFT - Discrete Fourier Transform**) A DFT de $f(t)$ é dada por*

$$\hat{\mathfrak{F}}_d(f(t)) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\omega k n} = \hat{F}(k), \text{ com } \omega = \frac{2\pi}{N} \text{ e } k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

A DFT pode ser considerada, então, como uma amostragem finita da DTFT. Como os computadores só lidam com um número finito de valores, é possível implementar algoritmos para lidar com a DFT. O FFT (*Fast Fourier Transform*), por exemplo, é uma forma mais rápida de calcular a DFT, utilizando alguns algoritmos numéricos que permitem reduzir o número de operações. A DFT é uma transformada discreta importante, usada para realizar a análise de Fourier em muitas aplicações ([14]). No processamento digital de sinais, a função é qualquer quantidade ou sinal que varia ao longo do tempo, como um sinal de áudio, leituras de temperatura em intervalos finitos e regularmente espaçados ou amostras da QEE - qualidade da energia elétrica. No processamento de imagem, as amostras podem ser os valores de pixels ao longo de uma linha ou coluna de uma imagem gerada por pixels. A técnica de geração, transmissão e recepção de sinal da TV digital, OFDM - *Orthogonal frequency domain multiplex*, utiliza a DFT e a sua inversa, respectivamente, na recepção e transmissão de sinais([15],[16]).

Exemplo 3.9 *Vamos calcular a DTFT do sinal $f[n]$ obtido de $f(t) = 2^{-t}.u[n]$, onde*

$$u[n] = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{se } n < 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}, & \text{se } n \geq 0. \end{cases}$$

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_d(f(t)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-i\omega n}u[n] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-i\omega}}{2}\right)^n = F_d(\omega). \end{aligned}$$

Observando que a sequência $f_n = \left(\frac{e^{-i\omega}}{2}\right)^n$ *é uma PG podemos calcular o somatório como série geométrica,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_d(f(t)) = F_d(\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-i\omega}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega}}. \end{aligned}$$

O exemplo abaixo ([17]) ilustra de maneira bem rudimentar o uso dos algoritmos FFT, que calcula a DFT, e IFFT, que calcula a inversa da DFT, no processamento de sinais, no caso um sinal de voz.

Exemplo 3.10 *Neste exemplo usamos o Octave, que pode ser obtido por download em* `https://www.gnu.org/software/octave/`*, para capturar um sinal de voz durante 5 segundos, com uma taxa de amostragem de 8000 amostras/segundo. Em seguida calculamos a DFT desse sinal, pelo algoritmo FFT e pedimos para colocar as coordenadas da DFT em ordem decrescente de valor absoluto e medir quanto do sinal está concentrado nas frequências com maior amplitude. Zeramos as frequências com menor amplitude, observando que perdemos pouco do sinal. Comandamos, por último, o algoritmo IFFT que retorna a parte real da inversa da DFT. Neste exemplo, retorna o sinal de voz comprimido.*

```
>> f=record(5); % Você grava a sua voz, após digitar ";"
>> subplot(1,2,1);plot(f);subplot(1,2,2);stem(f)
>> F=fft(f);
>> [ES,n]=sort(abs(F),'descend');
>> norm(ES(1:2000))/norm(ES)
ans =  0.98376
>> norm(ES(1:1000))/norm(ES)
ans =  0.97820
>> norm(ES(1:800))/norm(ES)
ans =  0.97521

>> norm(ES(1:500))/norm(ES)
ans =  0.96275
>> F(n(501:8000))=zeros(7500,1);
>> g=real(ifft(F));
>> subplot(3,1,1);plot(f);
>> subplot(3,1,2);stem(F);
>> subplot(3,1,3);plot(g)

>> soundsc(f)
>> soundsc(g)
```

Figura 13: Algoritmo no Octave

O gráfico abaixo mostra o sinal de voz original e sua amostra (sinal discreto).

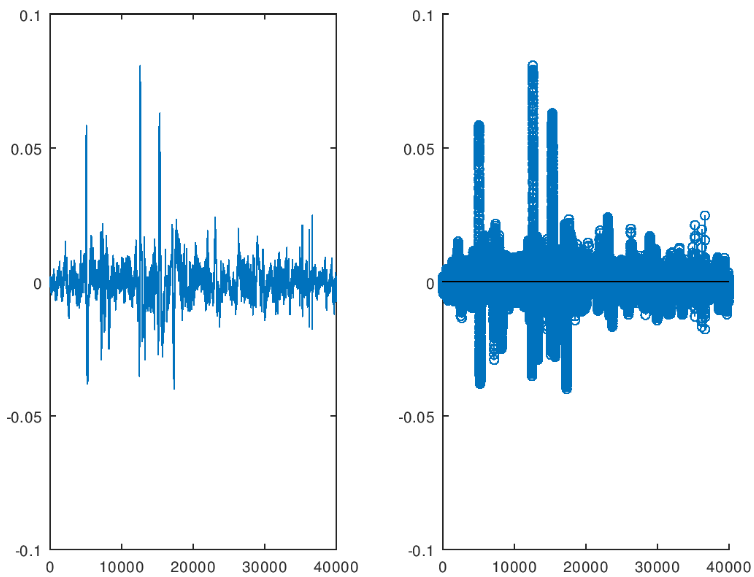

Figura 14: Sinal de voz original e sua amostra

Executando o programa acima, ao comandar "soundsc(f)" e "soundsc(g)" o que ouvimos é, respectivamente, o sinal de voz original e o efeito de uma projeção ortogonal desse sinal. Observamos que f e g são quase indistinguíveis, apesar de g ser um sinal comprimido.

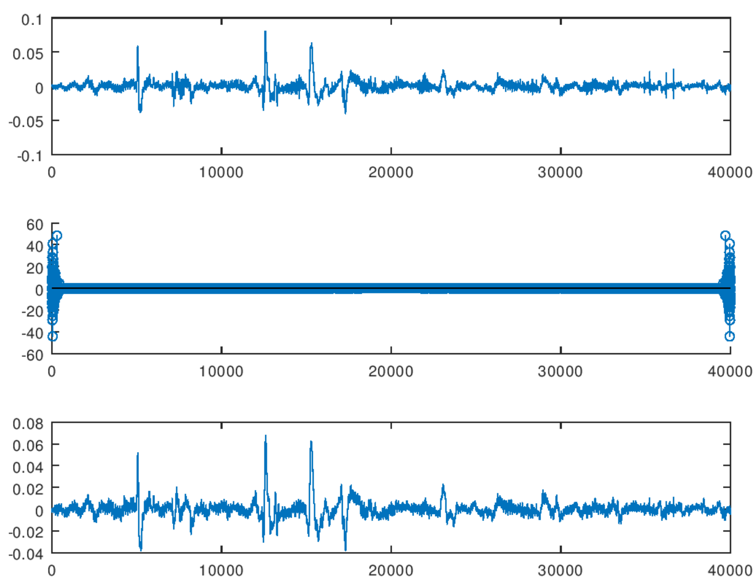

Figura 15: Sinal de voz original e sua compressão num fator 1:16

Outra transformada importante e que ganhou destaque recentemente são as wavelets. O pioneiro e principal estudioso da teoria dos wavelets foi agraciado em 2017 com o Prêmio Abel. Mais informações sobre a teoria dos wavelets e o matemático Yves Meyer podem ser obtidas em `https://impa.br/page-noticias/yves-meyer-faz-matematica-como-quem-compoe-sinfonia/`.

4 Funções e Computação

As ferramentas computacionais são aliadas no processo de aprendizagem em funções. Nesta seção utilizamos o software livre Yag, que pode ser obtido por download no link `http://www.matematica.pucminas.br/yag/yag.htm`, para exemplificar como um computador traça o gráfico de uma determinada função a partir de sua representação algébrica. Apresentamos também uma atividade a ser desenvolvida com alunos do ensino médio dentro do contexto de funções, mostrando a importância da não dissociação entre o discreto e o contínuo ao estudar determinadas funções.

Os programas gráficos traçam o gráfico das funções reais de uma variável real escolhendo um certo número de pontos da reta e calculando suas respectivas imagens pela função. Em seguida marcam pontos (x, y) e traçam um caminho poligonal, unindo os pontos por segmentos de reta formando assim a representação do gráfico da função, como podemos observar no exemplo abaixo.

O Yag apresenta uma interface simples. Basta digitar a lei da função, o intervalo do domínio e a quantidade de pontos que serão marcados pela máquina. A escolha da Janela de Visualização (ou Tela de Inspeção) é opcional.

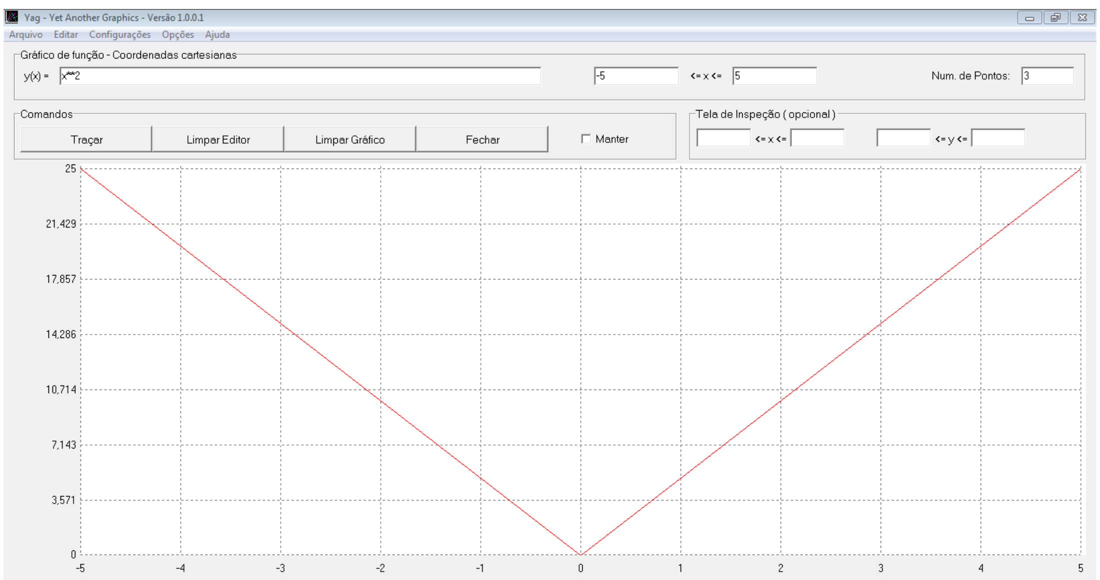

Figura 16: $f(x) = x^2$ com 3 pontos

Na figura acima, utilizamos o software Yag para construir o gráfico da função $f(x) = x^2$. Esse programa pede ao usuário que insira o intervalo em x no qual você deseja visualizar a função. Escolhemos nesta seção, como exemplo, o intervalo $-5 \leq x \leq 5$. O programa também permite que escolhamos quantos pontos a função irá utilizar para traçar o gráfico da função (como pode ser visto na janela "Número de Pontos"). Observe que o que o Yag fez foi escolher os pontos -5, 0 e 5 no intervalo $-5 \leq x \leq 5$, calcular suas respectivas imagens pela função f, gerando no plano os pontos $(-5, 25)$, $(0, 0)$, $(5, 25)$ e unindo-os por segmentos de reta, apresentando como gráfico de x^2 a figura que vemos acima.

Na próxima figura, vemos o que acontece se mudamos de 3 para 5 pontos:

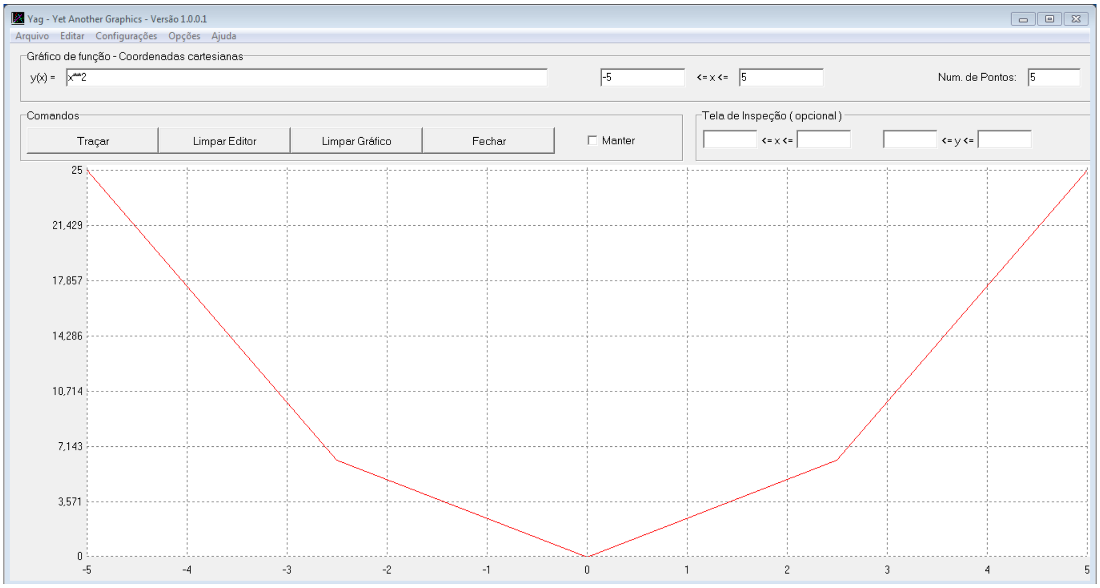

Figura 17: $f(x) = x^2$ com 5 pontos

Observe que nenhum dos dois gráficos corresponde ao gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$, mas com 5 pontos o número de segmentos traçados aumentou de 2 para 4, em relação ao gráfico com 3 pontos. Agora, deixando 1000 pontos (que é o padrão do Yag), o gráfico apresentado, na figura abaixo, já possui, pelo menos visualmente, o formato da parábola, como conhecemos, embora na realidade o que está traçado é uma poligonal composta por 999 segmentos de reta.

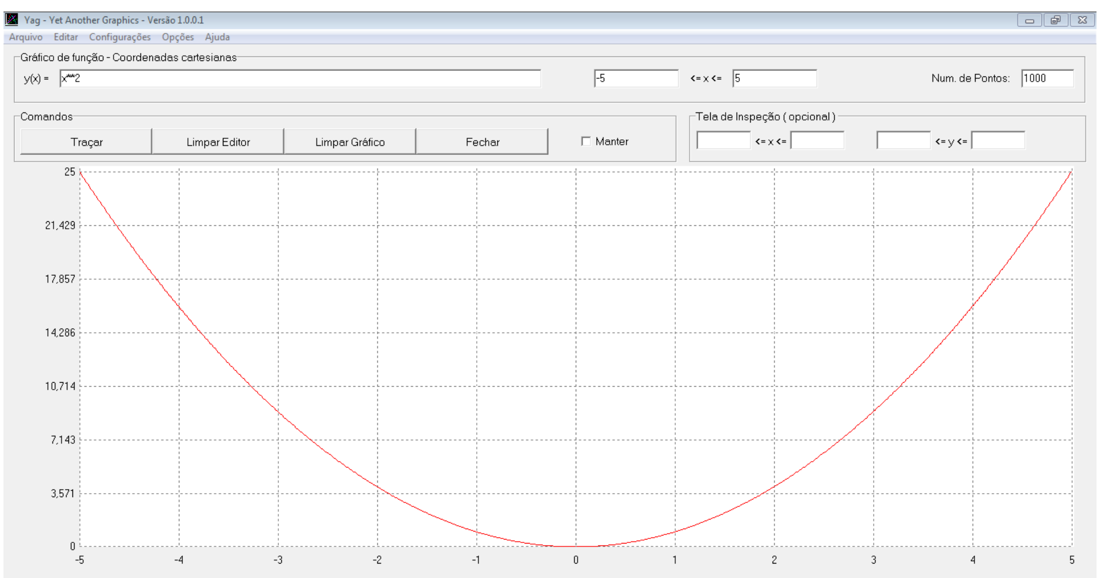

Figura 18: $f(x) = x^2$ com 1000 pontos

Portanto, o computador trabalha de maneira discreta ao traçar o gráfico de uma determinada função. Entretanto, como são utilizados diversos pontos nesse processo, o resultado final não mostra os segmentos de reta e sim o formato "original" do gráfico da função que pode ser comprovado através das técnicas do cálculo diferencial em conjuntos contínuos.

Outro problema dessa maneira discreta de trabalhar do computador ao se traçar um gráfico, pode ser visto no exemplo abaixo, ao traçar o gráfico de $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no Yag.

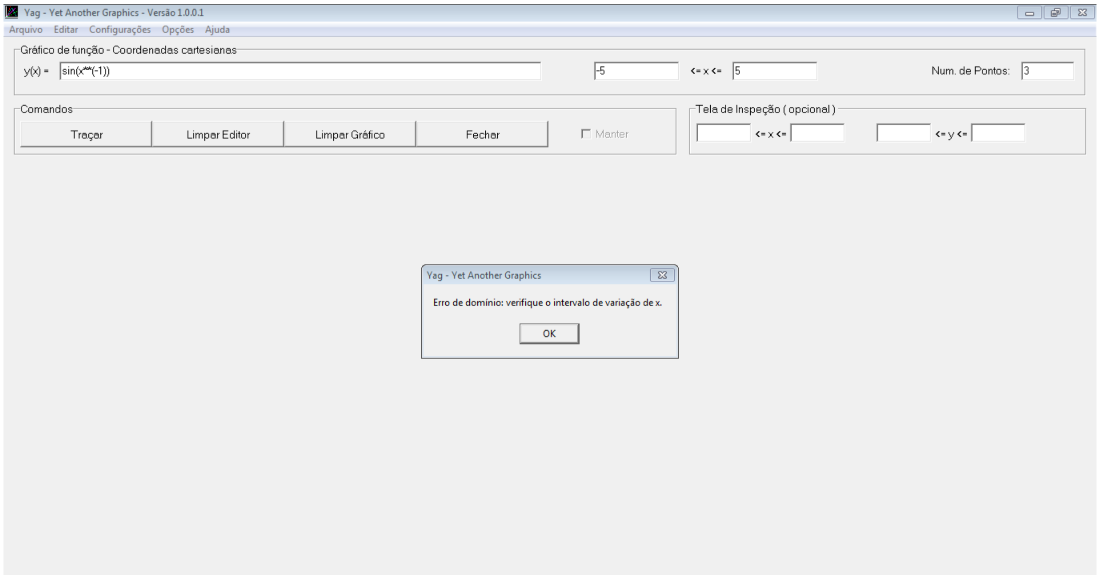

Figura 19: sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ com 3 pontos

Observe que quando escolhemos 3 pontos e o intervalo $-5 \leq x \leq 5$, o Yag não gerou nenhum gráfico e retornou a mensagem de erro do domínio, ou seja, alertou que no intervalo escolhido, $-5 \leq x \leq 5$, existe pelo menos um elemento que não pertence ao domínio da função. De fato não existe sen $\left(\frac{1}{0}\right)$. Mas alterando para 5 pontos, o YAG apresenta um gráfico considerando que 0 pertence ao domínio de g.

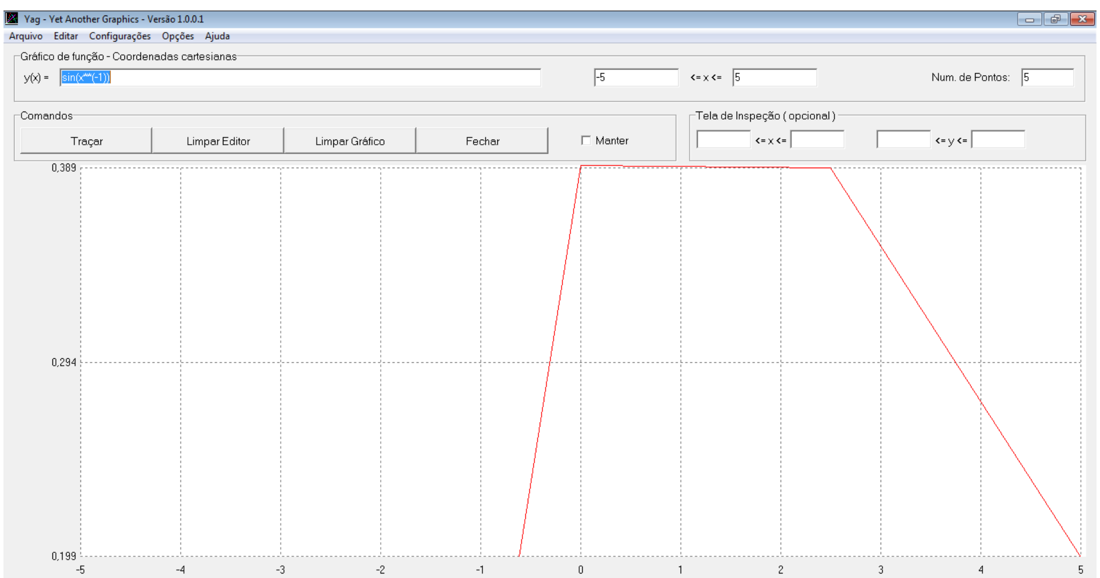

Figura 20: sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ com 5 pontos

Ou ainda, mantendo a escolha de 3 pontos, mas alterando o intervalo para $-4 \leq x \leq 6$, o Yag também apresenta um gráfico considerando que 0 pertence ao domínio de g.

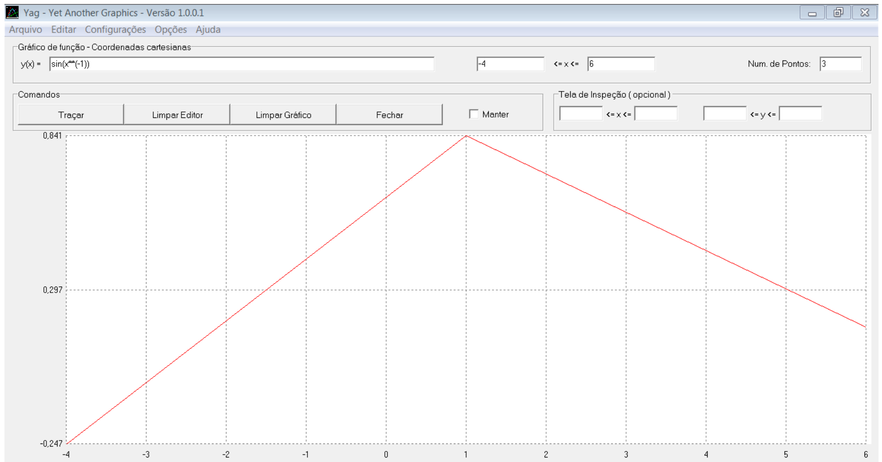

Figura 21: sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ com 3 pontos em $[-4{,}6]$

Percebemos que dado um intervalo em x, o Yag tenta marcar os pontos de um conjunto discreto regularmente espaçado em x e calcular as imagens desses pontos pela função dada. No caso de informarmos o intervalo $-5 \leq x \leq 5$ e 3 pontos, a escolha natural para o conjunto ser regularmente espaçado é $\{-5, 0, 5\}$. Mas zero não pertence ao domínio de sen $\left(\frac{1}{x}\right)$, o que faz o Yag retornar a mensagem de erro.

Alterando o número de pontos para 1000, temos o gráfico correto de sen $\left(\frac{1}{x}\right)$.

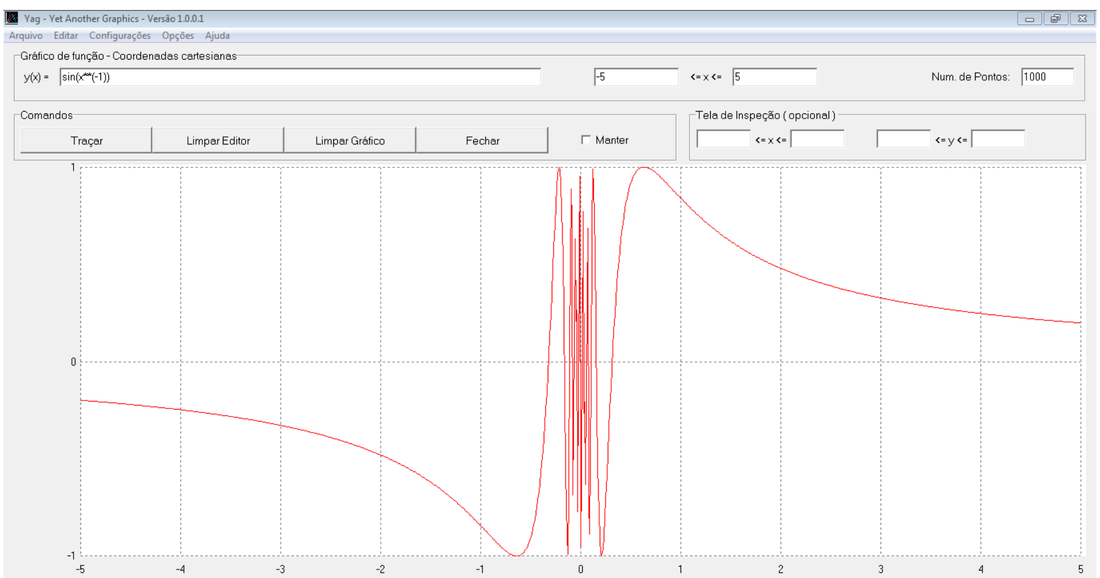

Figura 22: sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ com 1000 pontos

Observe que quanto mais próximo de zero, maior a taxa de variação de g, ou seja, mais rápido a função oscila entre -1 e 1, mas nunca corta o eixo Y, pois zero não está no domínio da função.

Abaixo propomos uma atividade que o professor do primeiro ano do Ensino médio pode realizar com seus alunos em um laboratório de informática ao estudar funções. O objetivo da atividade é mostrar que a máquina traça o gráfico da função da mesma forma que fazemos na sala de aula no Ensino Básico. Ela marca pontos (x, y) para um certo número de valores igualmente espaçados na reta e traça um caminho poligonal, formando assim a representação do gráfico da função. Mas, temos que tomar cuidado com esse processo discreto de traçar o gráfico e mostrar aos alunos a importância de um conhecimento maior e mais profundo, no mundo contínuo, para termos a certeza do traçado do gráfico.

Atividade 4.1 *Traçando os gráficos de $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$f(x) = |-4x| \text{ e } g(x) = x^2.$$

Para execução dessa atividade no Yag, recomenda-se seguir o seguinte roteiro:

- *Inicie o Yag e digite abs(-4*x) no campo da função, escolha o intervalo $[-4, 4]$ e para o número de pontos digite 3.*
- *Clique sobre o comando "Traçar" e em seguida selecione a opção "Manter".*
- *Apague a expressão abs(-4*x) no campo da função e digite x**2.*
- *Tente responder:*
  1. *Quantos segmentos de reta formam o gráfico apresentado na tela?*
  2. *Quais as coordenadas dos extremos de cada segmento de reta?*
  3. *Por que as curvas ficaram sobrepostas, apesar de representarem funções diferentes?*
  4. *A curva g ficou parecida com o que você esperava?*
- *Altere o campo número de pontos para 5 e clique em "Traçar".*
- *Tente responder:*
  1. *Quantos segmentos de reta formam o gráfico apresentado na tela?*
  2. *Quais as coordenadas dos extremos de cada segmento de reta?*
- *Repita o passo anterior para 9 pontos, para 11 pontos e para 1000 pontos.*
- *Tente responder:*
  1. *Quantos segmentos de reta formam o gráfico apresentado na tela quando escolhemos um número k de pontos?*
  2. *Como a máquina construiu o gráfico apresentado na tela?*

Considerações Finais

Ao discorrermos sobre conjuntos discretos e funções de variáveis discretas, percebemos que é possível trabalhar tópicos de matemática discreta no Ensino Médio em interação com a "matemática contínua". Como exemplo, podemos citar a possibilidade de aprender PA concomitante com função afim e PG com função exponencial, além de outros exemplos não tratados neste trabalho, como grafos ([18],[19],[20]) e o teorema de Pick([21]). Procuramos neste texto apresentar ao leitor exemplos e definições de forma gradual visando o entendimento sobre funções de variáveis discretas e suas aplicações tanto na matemática quanto em outras ciências.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me permitir chegar até aqui. Agradeço à minha companheira de todos os momentos, minha esposa Marli, ao meu filho Augusto, razão de minha persistência. Agradeço aos meus familiares, amigos, colegas de trabalho e colegas do Profmat turma 2017. Agradeço à CAPES e SBM por tornarem possível a realização do curso. Agradeço aos professores do Profmat pela disponibilidade em compartilhar sabedoria, em especial a minha orientadora, Professora Doutora Mariana Garabini Cornelissen Hoyos, pela disponibilidade, paciência, dedicação, compromisso, presteza, pelos ensinamentos que contribuíram decisivamente para a conclusão deste trabalho, bem como do mestrado.

Referências

[1] STEWART, James. Cálculo: volume 1. Cengage Learning, São Paulo, SP, 2009. Título original: Calculus. 6. ed. americana.

[2] BROLEZZI, Antônio C. A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática. Tese (Doutorado em Didática) - Faculdade de Educação, USP, São Paulo, SP, 1997. Disponível em: `http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-29082013-153622/pt-br.php`. Acesso em 30 maio.2018.

[3] FIGUEIREDO, Candido de. Novo Diccionário da Língua Portuguesa. Disponível em `http://dicionario-aberto.net/dict.pdf`. Acesso em 09 julho. 2018.

[4] LIMA, Elon L. Análise real. volume 1. Funções de uma variável. 8.ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[5] MORGADO, Augusto C. CARVALHO, Paulo C.P. Matemática Discreta. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[6] JIMÉNEZ, José Manuel G.; BARRASA, Víctor.L.. Elementos de Matemática Discreta. Espanha: Universidad de La Rioja, 2010. Disponível em `https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=424510`. Acesso em 01 julho.2018.

[7] STRAPASSON, João Eloir. Geometria Discreta e Códigos. UNICAMP, Campinas, SP, 2005. Disponível em: `http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/306623`. Acesso em 30 maio.2018.

[8] FERRARI, Agnaldo José. Reticulados algébricos via corpos abelianos. 2008. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2008. `https://repositorio.unesp.br/handle/11449/94237`. Acesso em 30 junho.2018.

[9] CAMPELLO, A., Reticulados, projeções e aplicações à teoria da informação. UNICAMP, Campinas, SP, 2014. Disponível em: `http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/306621`. Acesso em 11 maio.2018.

[10] NAVES, Lígia Rodrigues Bernabé. A densidade de empacotamentos esféricos em reticulados. UNICAMP, Campinas, SP, 2009. Disponível em: `http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/306625`. Acesso em 02 junho.2018.

[11] SMITH, Willian F. Princípios de ciência e engenharia dos materiais. 3.ed. Editora McGraw-Hill, Portugal, 1998.

[12] SHACKELFORD, James F. Introdução à ciência dos materiais para engenheiros. 6.ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2008.

[13] REBECHI, João G. Correlações numéricas entre taxas de resfriamento, microestruturas e propriedades mecânicas para o tratamento térmico do aço AISI/SAE 4140. Disponível em `http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/37383`. Acesso em 25 junho.2018.

[14] DINIZ, Paulo S.R., SILVA, Eduardo A.B. da, e NETTO, Sérgio L. Processamento Digital de Sinais. 2.ed. Projeto e Análise de Sistemas. UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2014.

[15] KAIDO, Rodrigo T. Uma contribuição ao ensino de Engenharia sobre o Sistema Brasileiro de TV Digital. UTFPR, Curitiba, PR, 2011. Disponível em: `http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/671`. Acesso em 24 junho.2018.

[16] BAPTISTA, Manuel C.P. Identificação e Caracterização da Modulação de Sinais Digitais em RF. Universidade de Aveiro, Portugal, 2008. Disponível em `http://ria.ua.pt/handle/10773/1905`. Acesso em 24 junho.2018.

[17] MALAJOVICH, Gregorio. Álgebra Linear. Disponível em `http://www.labma.ufrj.br/~gregorio/livro/al2.pdf`. Acesso em 08 de julho 2018.

[18] SCHEINERMAN, Edward R. Matemática Discreta: uma introdução. Cengage Learning, São Paulo, SP, 2016. Título original: Mathematics: a discrete introduction. 3. ed. norte-americana.

[19] LIPSCHUTZ, S. e LIPSON, Marc L. Teoria e problemas de matemática discreta. 2.ed. Bookman, Porto Alegre, RS, 2004.

[20] ROSEN, Kenneth H. Matemática Discreta e suas aplicações. Tradução técnica: Helena Castro, João Guilherme Giudice. 6. edição. AMGH, Porto Alegre, RS, 2010.

[21] G. Bo. Il teorema di Pick, Disponível em `http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/pickteor.htm`. Acesso 05 julho.2018.