Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

HELIANE SANTOS PENHA

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E SUA APLICABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

São João Del-Rei
AGOSTO/2021

Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

HELIANE SANTOS PENHA

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E SUA APLICABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São João Del-Rei, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

São João Del-Rei
AGOSTO/2021

HELIANE SANTOS PENHA

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E SUA APLICABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São João Del-Rei, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
São João Del-Rei,___ de ____________de 2021.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ
Orientador

____

Prof. Dr. José Angel Dávalos Chuquipoma
Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ
Examinador

____

Prof. Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio
Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me fazer chegar até aqui. Obrigada pela força diária, pela resiliência nas batalhas e pela fé.

A minha família, que sempre esteve presente e me incentivou a nunca desistir dos meus sonhos. Em especial, meu marido Evando e meu filho Gustavo, que foram peças fundamentais para que eu nunca desistisse, apesar das dificuldades e desafios.

Ao amigo Kenny, por sua imensa contribuição em vários momentos dessa minha jornada. Nossa parceria foi a chave para o meu sucesso.

Aos colegas de Classe, sem nossa união e parceria não teria sido possível percorrer o caminho até aqui. Minha mais genuína gratidão a cada um de vocês.

Aos professores do Mestrado por sua grande contribuição na minha busca por conhecimento, por sua paciência e dedicação, e principalmente ao Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar, pela preciosa orientação, apoio, incentivo e paciência.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

Bertrand Russel

RESUMO

PENHA, H. S. **RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E SUA APLICABILIDADE NO ENSINO MÉDIO.** 2021. 138f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT/UFSJ), São João Del-Rei – MG.

Este trabalho aborda uma perspectiva para resolução de sistemas lineares e sua aplicabilidade no Ensino Médio, em que é dada ênfase ao estudo da existência e unicidade de soluções de sistemas lineares bem como as técnicas analíticas e numéricas para encontrar soluções, caso existam, através de métodos como: Eliminação Gaussiana, Fatoração LU, Método de Jacobi, Método de Gauss-Seidel bem como analisar-se-á as técnicas de resolução de sistemas lineares mais comuns nas escolas de Ensino Médio. Dessa forma, este trabalho tem por objetivo apontar a importância do ensino de sistemas lineares no ensino médio e contribuir no sentido de tornar estes conteúdos matemáticos mais significativos para os alunos. A ideia principal defendida no presente trabalho é que, quando expostos a situações desafiadoras, os alunos sentem a necessidade de aprender novas técnicas e ferramentas matemáticas, que proporcionam o domínio de habilidades e competências que podem ser aplicadas situações do cotidiano. A necessidade de aprender um novo conteúdo deve partir dos próprios alunos, a partir do momento que forem colocados frente a uma situação que os desafie e motive. Assim pois, trata-se de uma proposta para o ensino de sistemas de equações lineares em que são apresentados tópicos contemplados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio bem como complementar este assunto com outros métodos analíticos e numéricos, de maneira que o estudante tenha uma visão mais ampla sobre a gama de métodos e problemas que podem ser contemplados. Para isso, é proposto um plano de aulas em que são apresentadas as principais ferramentas teóricas, bem como a solução de problemas contextualizados através de diferentes técnicas analíticas e numéricas.

Palavras-chave: Sistemas Lineares; Existência e Unicidade de Soluções de Sistemas Lineares; Método diretos e iterativos; Resolução de Problemas; Ensino Médio.

ABSTRACT

PENHA, H. S. **Resolution of Systems of linear equations and their applicability in high school.** 2021. 138 f. Dissertation (Professional Master's Program in Mathematics in the National Network) - Department of Mathematics and Statistics (DEMAT/ UFSJ), São João Del-Rei - MG.

This work approaches a perspective for solving linear systems and its applicability in high school, in wich emphasis is given to the study of the existence and uniqueness of solutions of linear systems as well as analytical and numerical techniques to find solutions, if any, through methods such as: Gaussian elimination, LU factorization, Jacobi method, Gauss-Seidel method. It will also analyze the most common techniques for solving linear systems in high schools. This way, this work aims to point out the importance of teaching linear systems in high school and to contribute towards making this mathematical content more meaningful to students. The main idea defended in this work is that when exposed to challenging situations, students feel the need to learn new mathematical techniques and tools, which provide the mastery of skills and competencies that can be applied to everyday situations. The need to learn a new content should come from the students themselves, as soon as they are faced with a situation that challenges and motivates them. So it is a proposal for the teaching of systems of linear equations in which topics contemplated in the Common National Curricular Base (BNCC) of high school are presented as well as complement this subject with other analytical and numerical methods, so that the student has a broader view of the range of methods and problems that can be contemplated. For this, a lesson plan is proposed in which the main theoretical tools are presented, as well as the solution of contextualized problems through different analytical and numerical techniques.

Keywords: Linear Systems; Existence and Uniqueness of Solutions of Linear Systems; Direct and Iterative Methods; Problem Solving; High School.

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata de resoluções de sistemas de equações lineares no Ensino Médio, e visa elucidar sobre os desafios de tornar esse tema mais atraente para os alunos bem como mostrar ferramentas e metodologias que podem ser úteis para essa finalidade.

> *"Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. ...pode servir de ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. ...Entretanto, sua abordagem nos compêndios adotados em nossas escolas e na maioria das vezes, obsoleta, árida e desmotivada. Em certos casos, até mesmo contém erros matemáticos de fato."(LIMA, 1993)*

A Matemática, ao longo dos anos, tem sido mitificada com relação ao conhecimento. Desde a antiguidade acreditava-se que somente pessoas bem-dotadas intelectualmente eram capazes de compreender tal disciplina.

O desempenho dos estudantes nos índices de aprendizagem de matemática, como por exemplo, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), revela que grande parte dos alunos passa pelo sistema educacional sem aprender. Percebe-se que a vida escolar de muitos alunos se restringe a emaranhados de fórmulas que muitas vezes não fazem sentido para a vida deles.

Um dos grandes desafios encontrados atualmente em sala de aula é trazer aos alunos um apreço pela Matemática. Consegue-se perceber que geralmente, quando as questões são simplesmente de cálculo ou aplicações de fórmulas matemáticas os alunos em sua maioria conseguem chegar sem mais percalços no resultado esperado. Porém, basta trazer problemas que exija deles uma interpretação e a retirada ou mudança de dados para a resolução da questão, nesse caso, nos deparamos com grandes dificuldades ou mesmo a negação em resolver tal questão. E isso nos traz cada vez mais forte a reflexão de que algo precisa ser aprimorado quando se trata de metodologias de Ensino de Matemática.

Segundo (UHLIG, 2002), não se pode ter sucesso partindo do ensino de uma sequência rigorosa fundamentada na Definição-Lema-Prova-Teorema-Prova-Corolário, sendo necessário preparar os alunos lentamente para a prova e o rigor matemático.

A sequência de apresentação do conteúdo tem que levar os alunos a entenderem, construírem, raciocinarem, apreciarem os pontos essenciais do raciocínio axiomático e, posteriormente, prepará-los mentalmente para a sequência axiomática. A reflexão dessa prática deve contemplar questões relacionadas com o currículo, uso de metodologias diferenciadas, em particular, incorporando ferramentas tecnológicas no ensino, dentre outras.

Essa preocupação não é recente. Na França, nos anos 1980, uma reforma no currículo da matemática foi proposta para modificar a relação entre teoria e aplicações, organizando o ensino em torno de alguns problemas maiores, reequilibrando perspectivas qualitativas e quantitativas, formalizando só o que for necessário e quando necessário, promovendo uma abordagem construtivista da aprendizagem (HAREL; TRGALOVÁ, 1996).

No início dos anos 1990, nos EUA, um grupo de educadores universitários, chamado *Linear Álgebra Curriculum Study Group* (LACSG), preocupados em tornar a álgebra linear mais acessível a todos, produziu um conjunto de recomendações para um primeiro curso de álgebra linear (CARLSON et al, 1993): (1) o programa de álgebra linear deveria responder a necessidade do público alvo da disciplina; (2) considerar as matrizes como eixo principal; (3) os professores deveriam considerar as necessidades e interesses dos estudantes; (4) os professores deveriam ser encorajados a utilizar a tecnologia; (5) ao menos um “segundo curso” em teoria matricial/álgebra linear deveria ser altamente prioritário para todo currículo de matemática.

Recentemente a nível nacional, também foi lançado um documento (SBEM, 2013) produzido por uma comissão paritária de representantes da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que traz recomendações em relação ao foco que deve ser dado ao ensino de álgebra linear nos cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil, ressaltando a importância deste domínio da matemática na formação do futuro professor de matemática.

O documento chama a atenção que vários dos tópicos de álgebra linear estão presentes no currículo do ensino médio, como funções, matrizes, determinantes e sistemas lineares, porém nem sempre são explorados de forma adequada. Muitas vezes os professores pouco conhecem o significado das operações com matrizes, das operações com as linhas de uma matriz durante um escalonamento ou do cálculo de um determinante e se limitam apenas ao cálculo mecanizado, ou raramente exploram os conceitos de linearidade dos fenômenos descritos por funções usando regressão linear. Assim, um estudo cuidadoso da interpretação destes conceitos e do seu significado geométrico é fundamental para a formação do futuro professor.

Segundo (DORIER, 2000) observa-se que a maior dificuldade que os professores enfrentam no ensino de álgebra linear é lidar com a dificuldade dos alunos em relação à abstração devido à natureza teórica e formal da disciplina. Alguns professores revelam ter dificuldades em responder aos alunos a finalidade de conteúdos em estudo e em mostrar aos alunos a importância da abstração.

Baseados nisso, a proposta do presente trabalho foca-se na construção de uma base sólida de conhecimentos nesta disciplina bem como na procura por metodologias que consigam a construção do próprio conhecimento e a sua contextualização, conforme a realidade dos alunos e o ambiente onde estão inseridos. Desse modo, estudar-se-á diferentes tipos de resolução de sistemas de equações lineares, os quais tem o propósito de consolidar e complementar o ensino de tópicos já tratados atualmente no ensino médio.

Para que nosso estudo possa ser complementado, e devido ao momento de pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, não realizaremos um experimento em sala de aula como gostaríamos. Em vez disso, será proposta uma abordagem pedagógica em forma de um plano sequencial de aulas, onde estarão alguns conceitos básicos de resolução de sistemas de equações lineares, e traremos algumas sugestões de problemas que podem auxiliar os professores na aplicação das metodologias propostas, por se tratar de problemas contextualizados e que tem relação com o cotidiano dos alunos.

A seguir apresenta-se um exemplo contextualizado, que pode ser encontrado em (PANCIERA; FERREIRA, 2006), e que pode ser modelado matematicamente através de sistemas de equações lineares:

Fernando é um aluno que pesa 73 quilos. Ele quer perder peso por meio de um programa de dieta e exercícios.

Após consultar a Tabela 1, ele montou o programa de exercícios conforme a Tabela 2.

Fonte: (PANCIERA; FERREIRA, 2006)

Peso	Caminhar a 3 Km/h	Correr a 9 Km/h	Andar de bicicleta a 9 Km/h	Jogar Futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

Tabela 1: Calorias queimadas por hora

Fonte: (PANCIERA; FERREIRA, 2006)

	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar Futebol
Segunda	1,0	0,0	1,0	0,0
Terça	0,0	0,0	0,0	2,0
Quarta	0,4	0,5	0,0	0,0
Quinta	0,0	0,0	0,5	2,0
Sexta	0,4	0,5	0,0	0,0

Tabela 2: Horas por dia para cada atividade

Quantas calorias ele vai queimar por dia?

O tipo de problemas, como o exemplificado, trata sobre o processo de Modelagem Matemática, sendo que a solução do mesmo passa pela solução de sistemas de equações lineares. Entretanto, também se apresenta como um tema relevante e atual e que pode despertar o interesse dos alunos. Espera-se que a solução desse tipo de problemas ajude a enxergar a matemática como uma disciplina útil e que ultrapassa seu teor abstrato, ajudando a resolver situações cotidianas e assim torná-la significativa.

O estudo de sistemas de equações lineares que hoje conhecemos são o resultado de diversas contribuições de matemáticos e outros profissionais que usam a matemática como ferramenta. Os principais conceitos, teoremas e notações foram sendo aprimorados ao longo do tempo. Inicialmente, não se imaginava que um procedimento simples de resolver problemas em que a resposta era composta de dois ou mais valores, iria se desencadear para um problema bem mais complexo, que por intermédio da programação linear e/ou não linear, ajuda-nos a resolver problemas com grandes quantidades de equações e variáveis.

Segundo (EVES, 2004, p. 444), é atribuído a Leibniz, em 1693 a criação da Teoria dos Determinantes, com vistas ao estudo dos sistemas de equações lineares, ainda que 10 anos antes já existisse algumas menções sobre o assunto. No Japão, Seki Kowa (apud EVES, op. cit.) lista que em uma antiga obra de título K'ui-ch'ang Suan-shu (Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática), o qual foi publicado na China durante o período de Hans (206 a. C – 220 d. C), já tratava no oitavo capítulo sobre estudos acerca de sistemas de equações lineares e procedimentos relacionados a matrizes. Também de acordo com Katz (1995, apud NEMAN, 2013) existem indícios de que os chineses já utilizavam de um procedimento similar de resolver sistemas lineares por volta de 200 a.C.

De acordo com Tavares e Pereira (2013, p. 552), os chineses determinavam soluções para sistemas lineares com coeficientes positivos, manuseando gravetos, método muito próximo ao da eliminação de Gauss, apresentado no séc. XIX e por Cayley (1821-1895), em 1857, quando pesquisava a álgebra não comutativa das matrizes.

Como trata Boyer (2003), em um texto para a academia de Paris em 1764, e pouco depois em um tratado de 1779 que recebeu o título de Théorie générale équations algébriques, Bézout trouxe regras artificiais muito parecidas às de Cramer para a solução de n equações lineares simultâneas. E ainda, de acordo com o mesmo autor:

> *"(LAGRANGE, 1736 – 1813) Admite que a área de um triângulo é igual ao determinante da matriz quadrada que é formada pelos vértices do mesmo, dividido por 2 fatorial. O volume de uma pirâmide triangular qualquer é dado pelo determinante de uma matriz quadrada que é formada pelos seus vértices, dividido por 3 fatorial."(BOYER, 2003)*

Em 1843, Cayley começava a geometria analítica ordinária do espaço dimensional, utilizando os determinantes como ferramenta essencial para seus registros homogêneos sobre a reta e o plano.

Segundo Valiente (2015), em 1841 já era possível verificar que as tabelas, que até então eram trabalhadas como caixas de agrupar coeficientes das equações de um dado sistema linear, não eram estáticas e sim dinâmicas, permitindo assim que sejam estudadas de forma metodizada. Então Ferdinand Gotthold Max Eisentein (1823-1852), em 1844, realizou um estudo sobre essas tabelas e as nomeou de matrizes.

O método de eliminação de Gauss-Jordan, para Sistemas Lineares surgiu assim:

> *Em 1º de janeiro de 1801, o astrônomo siciliano Giuseppe Piazzi (1746- 1826) observou um pequeno objeto celeste que ele acreditou que pudesse ser um "planeta que faltava". Ele considerou o objeto por Ceres e fez um número de medições sobre sua posição antes de perdê-lo de vista nas proximidades do sol. Gauss tomou para si a tarefa de calcular a órbita a partir de dados muito limitado com o procedimento que agora denominamos eliminação gaussiana. O trabalho de Gauss causou sensação quando o planeta reapareceu um ano depois na constelação de Virgem. Praticamente na posição exata predita por Gauss. O método foi popularizado pelo engenheiro Wilhelm Jordan em seu livro de geodesia (a ciência de medir as formas terrestres) em 1888 (ANTON; RORRES, 2012, p 15).*

Este método ficou conhecido como método de escalonamento, ao longo do tempo sua aplicação as tecnologias computacionais foi permitindo encontrar a solução com maior rapidez para os sistemas com número elevado de variáveis.

Em 1951, trabalhos envolvendo programação linear e resolução de Sistemas de Equações Lineares se tornaram muito mais simples, tornando possível ainda um alto grau de expansão; mas os primórdios da programação linear vêm de muito antes, precisamente da antiguidade, no sec. III a. C. De acordo com o livro II de Euclides (300 a. C.) ele já tentava descobrir a distância de um ponto a uma circunferência, e no livro IV ele caracteriza uma maneira de se determinar um paralelogramo de área máxima de um conhecido perímetro.

Analisando-se a forma como é feita a disposição pedagógica dos conteúdos trabalhados nos livros didáticos atualmente, temos esses conteúdos colocados na seguinte ordem: Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Isto nos traz a impressão de que estes foram sendo estudados e determinados também nesta ordem.

Porém, a ideia de resolver problemas que envolvem duas ou mais variáveis simultâneas vem desde o sec. III a. C, com os chineses buscando solucionar alguns problemas simples que estavam diretamente ligados aos trabalhos do campo.

Em relação aos determinantes, Vander Monde não fazia o uso do termo matriz para um grupo de dados organizados por linhas e colunas, somente entre 1770 e 1773 realizou um trabalho sobre eles publicando três artigos, entre eles o estudo dos determinantes, de acordo com Anton e Busby (2007, p. 212), *"Vander Monde se tornou a primeira pessoa a estudar determinantes sem levar em conta sua relação com as equações lineares e, nesse sentido, é o fundador da teoria dos determinantes".*

Falar sobre o desenvolvimento histórico que permitiu o desenvolvimento de metodologias para resolver Sistemas de Equações Lineares se fez necessário para situar o leitor no tempo e acompanhar as estratégias que marcaram a evolução deste conteúdo, de acordo com as necessidades da vida humana em seu contexto temporal. E ao longo do tempo, observa-se também suas aplicações, ao passo em que sua utilidade foi se intensificando em outras setores do conhecimento que se percebe desde as aplicações em estruturas complexas da programação linear às atividades simples como planejar um balanceamento alimentar envolvendo dois ou três nutrientes, ou aplicações em jogos para descontrair alunos como a caça ao tesouro.

Sabe-se que o estudo de sistemas de equações lineares é fundamental tanto na própria Matemática como nas áreas que a usam como ferramenta, entre elas, Física, Química, Biologia, Medicina, Engenharia, Economia, entre outras. Devido a importância que está disciplina tem, acredita-se que suas diferentes técnicas, diretas e iterativas, de solução devem ser tratadas desde o Ensino Médio. Assim, considerando que na atualidade os problemas a serem solucionados são cada vez mais complexos, muitos sistemas de equações lineares podem ser resolvidos apenas por métodos numéricos. Desde esse ponto de vista, é preciso também o estudo desse tipo de técnicas de solução de sistemas de equações lineares como foco na solução de problemas contextualizados à realidade dos alunos.

Para que possamos embasar este trabalho, fizemos uma breve análise da BNCC do ensino médio, no qual verifica-se que o conteúdo de sistemas de equações lineares no ensino médio se faz presente. Contudo, a BNCC não deixa explícitos os critérios e formas com os quais o professor deve trabalhar tais habilidades com seus alunos; deixando assim, a critério do professor, otimizar as diferentes metodologias e conteúdo que facilitem o ensino aprendizagem em sala de aula.

Para se compreender esse trabalho, aponta-se a seguir a organização desta dissertação: primeiramente a Introdução que relata sobre os objetivos e o levantamento histórico, as quais elucidam sobre a importância deste estudo, registra-se em seguida o Capítulo 1, em que é tratada a Existência e Unicidade de Soluções de Sistemas. Nesse capítulo, descreve-se todos os elementos teóricos iniciais sobre matrizes, determinantes e soluções sistemas lineares. Em seguida expõe-se o Capítulo 2, sobre as Métodos de Solução de Sistemas Lineares, onde apresenta-se algumas técnicas de solução, as quais estão contidas em dois grupos, a saber, os métodos diretos e os métodos iterativos. Estudar-se-á cada método aqui contemplado bem como seus respectivos exemplos. Na sequência, apresenta-se um plano de aula para o ensino médio, envolvendo os principais conceitos tratados nesta dissertação, adaptados para os alunos do ensino médio. Finalmente, aponta-se as Considerações Finais e as Referências Bibliográficas.

CAPÍTULO 1: EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Nesse primeiro capítulo nosso objetivo precípuo é enunciar e analisar um dos mais importantes teoremas relacionados àquilo que se denomina Sistemas Lineares.

Nossa abordagem será feita em duas etapas. A primeira delas consiste na apresentação de conceitos e noções preliminares, associados a matrizes e determinantes. Já na segunda etapa trataremos de alguns aspectos importantes pertinentes às chamadas equações lineares, bem como sistemas lineares. Todavia nesta segunda etapa o foco não consistirá na análise de processos resolutivos para este grupo de equações e sistemas, mas sim se referirá a noções alusivas a existência ou não de soluções.

Em especial, no que diz respeito aos sistemas lineares o principal tópico que nos interessa neste capítulo concerne ao teorema de grande relevância associado à ideia de existência e unicidade de solução de sistema lineares. Em outras palavras estamos nos referindo a um teorema cujo enunciado apresenta a condição necessária e suficiente para que um determinado sistema linear admita uma única solução. Doravante faremos menção a tal teorema como simplesmente "Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Sistemas Lineares". Para uma plena compreensão do referido teorema analisaremos uma diversa quantidade de exemplos de aplicação dele.

1.1 – Aspectos Teóricos.

Matrizes:

Definição 1: Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de $m\ x\ n$ elementos (números, polinômios, funções e etc.) dispostos em m linhas e n colunas.

De modo informal podemos dizer que uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em filas horizontais (chamadas linhas) e filas verticais (chamadas colunas). Chamando de m o número de linhas e n o número de colunas dizemos que se trata de uma matriz de ordem $m\ por\ n$, ou de ordem $m\ x\ n$.

É muito comum nomear uma matriz utilizando letras maiúsculas do nosso alfabeto. Geralmente os elementos são colocados entre parênteses ou colchetes.

Para exemplificar, sejam as duas matrizes a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \pi \\ -1 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Em relação a matriz A, vemos que ela possui duas linhas e três colunas, portanto essa matriz é de ordem $2\ x\ 3$ e escrevemos abreviadamente $A = (a_{ij})_{2x3}$. Já com relação a matriz B, notamos que ela é formada por três linhas e duas colunas, logo indica-se $B = (b_{ij})_{3x2}$.

Vale informar que convencionalmente as linhas são numeradas de cima para baixo, enquanto as colunas são numeradas da esquerda para a direita.

Na matriz A, por exemplo, os números 2, -1 e 0 constituem a primeira linha e os números 5, 8 e -7 formam a segunda linha. No que diz respeito as colunas da mesma matriz, a primeira coluna é constituída por 2 e 5, a segunda coluna por -1 e 8 e a terceira coluna por 0 e -7. Comentários análogos seriam feitos a matriz B exemplificada.

Quanto a identificação da "posição" de um determinado elemento na matriz, utilizamos a letra minúscula correspondente ao nome da matriz, acompanhada de dois índices, os quais indicam respectivamente o número correspondente a linha e a coluna em que ele se encontra.

No caso da matriz A, podemos escrever por exemplo $a_{12} = -1$, (ou seja, o elemento que se situa na linha 1 e coluna 2 é o -1). Se quisermos nos referir ao elemento na segunda linha e terceira coluna indicamos $a_{23} = -7$.

De um modo geral quando escrevemos a_{ij}, estamos fazendo alusão ao elemento situado na linha i e na coluna j. Sendo assim, podemos representar genericamente uma matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ da seguinte maneira:

$$A = (a_{ij})_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Embora os exemplos de matrizes dados envolvam apenas elementos numéricos, é possível nos deparar com matrizes contendo algum elemento que possua: variáveis ou incógnitas, expressões algébricas, entre outras expressões matemáticas. Por exemplo na seguinte matriz $C = (c_{ij})_{2x2}$:

$$C = (c_{ij})_{2x2} = \begin{bmatrix} x^2 - 3x & 2x - 7 \\ 8 & -x \end{bmatrix}$$

Vemos que há elementos que consiste em polinômios de uma variável (de graus 1 e 2).

Vejamos a seguir um exemplo de como construir uma matriz, dada a sua ordem e a lei de formação de seus elementos. Consideremos o exercício proposto em (LINDEN, 2014).

Exemplo 1: Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3\,x\,3}$ com seus elementos, tais que $a_{ij} = 2i + 3j$.

Primeiramente é conveniente escrever em termos genéricos a matriz considerada:

$$A = (a_{ij})_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Em seguida calculamos o valor de cada um dos elementos aplicando a fórmula explicitada no enunciado da questão.

Sendo, $a_{ij} = 2i + 3j$, vem:

$$a_{11} = 2(1) + 3(1) = 5 \qquad a_{21} = 2(2) + 3(1) = 7 \qquad a_{31} = 2(3) + 3(1) = 9$$

$$a_{12} = 2(1) + 3(2) = 8 \qquad a_{22} = 2(2) + 3(2) = 10 \qquad a_{32} = 2(3) + 3(2) = 12$$

$$a_{13} = 2(1) + 3(3) = 11 \qquad a_{23} = 2(2) + 3(3) = 13 \qquad a_{33} = 2(3) + 3(3) = 15$$

Por fim, conhecidos todos os elementos da matriz em questão podemos reconstrui-la, agora substituindo cada a_{ij} pelo respectivo valor obtido.

Portanto, a matriz procurada é: $A = (a_{ij})_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$.

Classificações de Matrizes:

No que se refere a comparação entre o número de linhas e o de colunas, as matrizes se classificam em dois grupos. Quando $m \neq n$ dizemos que se trata de uma matriz retangular, por outro lado quando $m = n$, dizemos que a matriz é quadrada. Neste último caso, costuma-se escrever abreviadamente como matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 2:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 6 & 8 \\ \frac{3}{4} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ é retangular de ordem $3\,x\,2$.

Já a matriz $B = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0{,}8 \\ -0{,}3 & -12 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 2.

Ainda em relação com as matrizes quadradas os elementos a_{ij}, tais que $i = j$ constituem a chamada diagonal principal que é a diagonal que liga o canto superior esquerdo da matriz ao seu canto inferior direito, já os elementos a_{ij}, tais que $i + j = n + 1$ compõem a chamada diagonal secundária que é a diagonal que liga o canto superior direito ao canto inferior esquerdo.

Exemplo 3: Seja a matriz quadrada C de ordem 3:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 3 & 0 & -4 \\ -8 & 14 & 19 \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária Diagonal Principal

Os elementos $c_{11} = 4$, $c_{22} = 0$ e $c_{33} = 19$ formam a diagonal principal e os elementos $c_{13} = 6$. $c_{22} = 0$ e $c_{31} = -8$ determinam a diagonal secundária.

Chamamos de matriz linha toda matriz de ordem $1\ x\ n$ (ou seja, tem apenas uma linha) e definimos matriz coluna toda matriz de ordem $m\ x\ 1$ (ou seja, tem apenas uma coluna).

Exemplo 4: A matriz $D = [4 \quad -15 \quad 19]$, de ordem $1\ x\ 3$ é uma matriz linha, em contrapartida a matriz $E = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{7}{6} \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix}$, de ordem $4\ x\ 1$ constitui um exemplo de matriz coluna.

Qualquer matriz que tenha todos os elementos nulos, é classificada como matriz nula ou matriz zero. Indica-se uma matriz nula de ordem $m\ x\ n$, por $0 = (a_{ij})_{m\ xn}, a_{ij} = 0$.

Exemplo 5: Uma matriz nula de ordem $3\ x\ 2$ é $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ou simplesmente 0.

Dada uma matriz A qualquer, define-se a matriz oposta de A e indica-se por $-A$ a matriz obtida substituindo cada elemento de A por seu simétrico.

Exemplo 6: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 17 \\ -4 & -13 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$, neste caso a matriz oposta de A é

$$-A = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 0 & -17 \\ 4 & 13 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Certas matrizes quadradas recebem classificações especiais de acordo com determinadas especificidades que apresentam. Dentre essas classificações, vamos destacar aqui matriz diagonal, matriz triangular, matriz escalar e matriz identidade.

Uma matriz diagonal é quadrada com $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ ou seja, os elementos que não pertencem a diagonal principal são todos nulos.

Exemplo 7: Como exemplos diagonais, temos as seguintes matrizes M e N:

$$M = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada é classificada como triangular quando todos os elementos situados acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplo 8: Temos como exemplo a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Neste caso, todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Um outro comentário a ser feito diz respeito à uma subdivisão das matrizes triangulares. Uma matriz triangular superior é caracterizada por ter os elementos a_{ij} nulos para $i > j$.

Exemplo 9: A seguinte matriz Q é um exemplo de matriz triangular superior de ordem 4:

$$Q = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & \sqrt{7} & 22 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, diz-se que uma matriz quadrada é triangular inferior quando seus elementos a_{ij} são iguais a zero para $i < j$.

Exemplo 10: A seguinte matriz T é um exemplo de matriz triangular inferior de ordem 4:

De matriz triangular inferior é a matriz T a seguir:

$$T = \begin{bmatrix} -11 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & 14 & 0 & 0 \\ 102 & 4 & 1 & 0 \\ -13 & \sqrt{11} & -10 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vale destacar que toda matriz diagonal é também triangular, uma vez que nas matrizes diagonais são nulos tanto os elementos situados acima da diagonal principal, como também os situados abaixo.

Como definido por (STEINBRUCH, 1987), “*a matriz diagonal que tem os elementos* a_{ij} *iguais entre si para* $i = j$ *é uma matriz escalar*”

Exemplo 11:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Um caso particular de matrizes escalar é a chamada matriz identidade ou matriz unidade, cuja característica principal é possuir todos os elementos da diagonal principal igual a 1. Denotamos por I_n a matriz identidade de ordem n. Por exemplo, I_2 representa a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, já I_3 representa a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Igualdade de Matrizes:

Definição 2: *Duas matrizes* A *e* B *são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais.*

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, *temos simbolicamente:*

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Dadas as matrizes A e B abaixo, percebe-se pela Definição 2 que elas são iguais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 4 & 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3^0 & 2^{-1} & -3 \\ \sqrt{16} & log1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Em alguns casos, é necessário calcular valores de incógnitas para que tenhamos uma igualdade matricial, como exemplo, nas seguintes matrizes C e D, calcular x e y para que se tenha $C = D$.

$$C = \begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ -2 & 3y+5 \\ 19 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2x-5 & 0 \\ -2 & 6 \\ 19 & -7 \end{bmatrix}$$

Para que as matrizes C e D sejam iguais, elas devem ter elementos correspondentes iguais entre si. Como já se tem elementos correspondentes numericamente iguais entre si, para garantir a igualdade matricial basta resolver as equações: $x + 2 = 2x - 5$ (I) e $3y + 5 = 6$ (II).

Resolvendo (I), temos: $2x - 5 = x + 2 \Rightarrow 2x - 2 = 2 + 5 \Rightarrow x = 7$.

Resolvendo (II), temos: $3y + 5 = 6 \Rightarrow 3y = 6 - 5 \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$.

Uma vez conhecidos os valores de x e y, podemos reescrever as matrizes dadas. Portanto, como temos garantida a igualdade matricial, vem: $C = D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 6 \\ 19 & -7 \end{bmatrix}$.

Transposição de Matrizes:

Definição 3: Dada uma matriz A de ordem $m\ x\ n$, denominamos matriz transposta de A (indicamos A^t) a matriz de ordem $n\ x\ m$ obtida trocando-se ordenadamente as linhas de A pelas colunas de A.

Exemplo 12: No caso da matriz A a seguir: $A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 18 & -6 \\ 0 & \sqrt{2} & -5 & 17 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & -1 & 7 \end{bmatrix}$, segundo a Definição 3, pode-se determinar que sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 14 & \sqrt{2} & \frac{2}{5} \\ 18 & -5 & -1 \\ -6 & 17 & 7 \end{bmatrix}$.

A título de curiosidade uma matriz quadrada recebe o nome de simétrica, quando é igual a sua transposta. Já no caso em que a sua transposta fica igual a sua oposta a matriz é dita antissimétrica.

Podemos notar que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & -3 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, pois fazendo sua transposição obtemos $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & -3 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, ou seja, $A^t = A$.

Já a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -9 \\ 2 & 0 & -10 \\ 9 & 10 & 0 \end{bmatrix}$, é antissimétrica, já que $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & 10 \\ -9 & -10 & 0 \end{bmatrix}$, em que se nota que a transposta de B é igual a $-B$.

Operações envolvendo matrizes:

Adição de Matrizes:

Definição 4: Dadas 2 matrizes A e B de mesma ordem $m\,x\,n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C de ordem $m\,x\,n$, na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de ordem $m\,x\,n$, a soma $A + B$ é uma matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m\,x\,n$ tal que: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo 13: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 11 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -8 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, como ambas são de ordem (neste caso $2\,x\,3$) a adição entre elas está definida. A matriz soma é dada por:

$A + B = \begin{bmatrix} -3+5 & 4+(-2) & 11+7 \\ -5+(-8) & 0+(-4) & 6+(-1) \end{bmatrix}$, que define a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 18 \\ -13 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Supondo a matriz A é de ordem $m\,x\,n$, uma constatação pertinente é que a soma de uma matriz com sua oposta sempre resulta em uma matriz nula da mesma ordem: $A + (-A) = 0$.

Subtração de matrizes:

Definição 5: *Dadas as matrizes* $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, $A - B = (c_{ij})_{m\,x\,n}$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, *para* $1 \le i \le m$ *e* $1 \le j \le n$.

Exemplo 14: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -4 & 5 \\ 8 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & -7 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, efetuando a subtração entre elas, na ordem que se apresentam, temos $A - B = \begin{bmatrix} 10-(-6) & -11-2 \\ -4-0 & 5-(-2) \\ 8-5 & -7-(-7) \\ -1-(-4) & 3-1 \end{bmatrix}$, definimos a matriz $C = \begin{bmatrix} 16 & -13 \\ -4 & 7 \\ 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Uma forma alternativa de se definir a subtração de matrizes é que tal operação corresponde a adição da primeira com a oposta da segunda, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Multiplicação de matriz por escalar:

Definição 6: *Se λ é um escalar, o produto de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ por esse escalar é uma matriz $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, tal que: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.*

Exemplo 15: Dados o número $\lambda = -2$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, podemos calcular o produto entre o escalar dado e a matriz:

$$\lambda(A) = -2\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)4 & (-2)(-3) \\ (-2)(-1) & (-2)5 \\ (-2)\sqrt{3} & (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 2 & -10 \\ -2\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação entre matrizes:

Definição 7: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{n\,x\,p}$, denomina-se produto de A por B a matriz $C = (c_{ij})_{m\,x\,p}$, tal que o elemento c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos da *i-ésima* linha de A com os correspondentes elementos (mesma ordem) da *j-ésima* coluna de B.

Uma informação importante é que a multiplicação matricial não é comutativa, ou seja, em muitos casos $AB \neq BA$. Nas situações em que os produtos AB e BA são iguais dizemos que as matrizes A e B comutam na multiplicação.

Tendo em vista a Definição 7, vemos que a condição para a existência do produto entre duas matrizes, tomadas numa certa ordem, é que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda. Do contrário a multiplicação não se define. Estando aqui definida a multiplicação matricial, ainda com base na mesma definição, tem-se que a matriz produto terá o número m de linhas da primeira e o número p de colunas da segunda. Como consequência dessa condição podemos concluir que o produto de duas matrizes quadradas só se define se ambas forem de mesma ordem. Neste caso a matriz produto também será quadrada e de mesma ordem das duas matrizes envolvidas.

Exemplo 16: Primeiramente, vejamos um exemplo de multiplicação entre duas matrizes retangulares. Sejam as matrizes, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Observando que a primeira é do tipo $3\ x\ 4$ e a segunda é do tipo $4\ x\ 2$, percebemos que está atendida a condição que garante a existência da matriz produto AB. Isto porque o número de colunas de $A\ (4)$ é igual ao número de linhas de $B\ (\ também\ 4)$. Pela Definição 7, notamos que a matriz produto $A\ x\ B$ terá três linhas e duas colunas, ou seja, será de ordem $3\ x\ 2$.

Denotemos por C a matriz produto AB, temos que C é da forma: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$.

Agora basta calcular o valor de cada elemento da matriz C, atentando-se para as operações apresentadas na Definição 7. Temos que:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Efetuando os cálculos determinamos C, daí vem:

$c_{11} = 2(-2) + (-1)1 + 0(0) + 3(4) = 7.$

$c_{12} = 2(1) + (-1)(-3) + 0(5) + 3(-4) = -7.$

$c_{21} = (-4)(-2) + 6(1) + 5(0) + (-2)4 = 6.$

$c_{22} = (-4)1 + 6(-3) + 5(5) + (-2)(-4) = 11.$

$c_{31} = 7(-2) + 0(1) + (-3)0 + 4(4) = 2.$

$c_{32} = 7(1) + 0(-3) + (-3)5 + 4(-4) = -24.$

Então, concluímos que $C = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 6 & 11 \\ 2 & -24 \end{bmatrix}$.

Analisaremos agora, um caso de multiplicação envolvendo duas matrizes quadradas de mesma ordem:

Exemplo 17: Dadas as matrizes quadradas de ordem 2, $M = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, sabemos que a matriz produto MN, também será quadrada. Nomeando por P esta matriz produto, temos que P é da forma: $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$. Calculando o valor de cada elemento da matriz P, vem:

$$MN = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = P.$$

Como $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$, daí vem:

$p_{11} = (-3)0 + 5(-5) = -25. \quad p_{12} = (-3)(-4) + 5(2) = 22.$

$p_{21} = (6)0 + (-2)(-5) = 10. \quad p_{22} = 6(-4) + (-2)2 = -28.$

Portanto, $P = \begin{bmatrix} -25 & 22 \\ 10 & -28 \end{bmatrix}$.

Matrizes Inversas:

Definição 8: *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, se B é uma matriz tal que:*

$$AB = I_n \text{ e } BA = I_n,$$

Então B será chamada de matriz inversa da matriz A, sendo indicada por A^{-1}:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Exemplo 18: Ainda em (LINDEN, 2014) temos como exemplo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$. Mostremos que elas são inversas entre si.

Calculando o produto AB, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-3) + 2(8) & 5(2) + 2(-5) \\ 8(-3) + 3(8) & 8(2) + 3(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos agora o produto BA, daí vem:

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3).5 + 2.8 & (-3).2 + 2.3 \\ 8.5 + (-5).8 & 8.2 + (-5).3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como podemos perceber, tanto AB quanto BA resultaram na matriz identidade de mesma ordem que A e B, ou seja, ordem 2. Este fato é o que comprova que B é a inversa de A e vice-versa.

Vale salientar que nem toda matriz quadrada admite inversa. Quando uma matriz quadrada não é invertível ela é dita matriz singular. Veremos mais adiante, ainda neste capítulo, mais detalhes acerca da ideia de matriz inversa. Em especial mostraremos um processo simples que nos permite identificar se uma dada matriz quadrada admite ou não uma inversa. Ademais apresentaremos duas técnicas para obtenção da inversa de uma matriz quadrada que seja invertível.

Escalonamento de Matrizes:

Para que se tenha uma plena compreensão do processo que se denomina escalonamento de matrizes faz-se necessário definir alguns conceitos preliminares, quais sejam, linha (ou coluna) não nula, elemento líder de uma linha, matriz escalonada, matriz escalonada reduzida, matriz linha-equivalente e característica de uma matriz.

Linha (ou coluna) não nula:

Dada uma matriz qualquer, se uma linha (ou uma coluna) possui pelo menos um elemento diferente de zero, ela é dita não nula.

Exemplo 19: Na matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, vemos que a primeira linha é não nula, assim como a segunda coluna também o é.

Elemento líder de uma linha:

Definição 9: O ***elemento líder*** *de uma linha é o primeiro elemento diferente de zero desta linha, olhando da esquerda para a direita. Uma linha só de zeros não tem elemento líder.*

Na matriz A de exemplo 19, vemos que somente a primeira linha possui elemento líder, que é o termo $a_{12} = 3$.

Matriz escalonada:

Definição 10: *Dizemos que uma matriz está em* ***forma escalonada****, ou, simplesmente, que é uma* ***matriz escalonada****, se ela tem as seguintes propriedades:*

1. As linhas não-nulas estão todas acima de qualquer linha só de zeros. Ou seja, se há linhas só de zeros, elas estão todas agrupadas na parte de baixo da matriz.

2. O elemento líder de cada linha não-nula está numa coluna à direita do elemento líder da linha acima.

Exemplo 20: A seguinte matriz ilustra o que chamamos de forma escalonada:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a matriz B atende as propriedades 1 e 2 contidas na Definição 10, podemos afirmar que se trata de uma matriz escalonada.

Matriz escalonada reduzida:

Definição 11: *Dizemos que uma matriz está na* ***forma escalonada reduzida****, ou que é uma* ***matriz escalonada reduzida****, se ela tem as propriedades seguintes, além das anteriores:*

3. O elemento líder de cada linha não-nula é igual a 1.

4. Cada elemento líder é o único elemento diferente de zero da sua coluna.

Exemplo 21: A matriz C a seguir é uma matriz na forma de uma matriz escalonada reduzida:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Pode-se ver que essa matriz C além de ser escalonada (uma vez que atende as propriedades 1 e 2 da Definição 10) mais especificamente é escalonada reduzida pois satisfaz também as propriedades da Definição 11.

Matriz linha – equivalente:

Definição 12: *Dizemos que a matriz A' é linha-equivalente à matriz A, se A' for obtida de A por meio de uma sequência finita de operações, chamadas operações elementares sobre linhas. Tais operações são:*

1) Troca de posição de duas linhas;

2) Multiplicação de uma linha qualquer por um número $k \neq 0$;

3) Substituição de uma linha, pela soma desta com outra qualquer.

Com estas três operações podemos, dada uma matriz A, encontrar uma matriz A' na forma escalonada, linha-equivalente a A.

Exemplo 22: Tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & -9 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

Com o objetivo de efetuar o escalonamento desta matriz, ou seja, obter a matriz A' que esteja na forma escalonada e seja linha-equivalente a matriz A, o primeiro passo é substituir a segunda linha pela soma dela com a primeira multiplicada por 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & -9 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Após este primeiro passo obtemos a matriz A_1 a seguir:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

O segundo passo consiste, em A_1 substituir a terceira linha pela soma dela com a primeira multiplicada por -3.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Após este segundo passo obtemos a matriz A_2 a seguir:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -9 & -2 & -17 \end{bmatrix}$$

Por fim o terceiro passo, se refere a substituição em A_2 da terceira linha pela soma dela com a segunda multiplicada por 9.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -9 & -2 & -17 \end{bmatrix}$$

Após essa sequência de operações, encontramos finalmente uma matriz escalonada que é linha-equivalente a matriz A dada inicialmente.

Então temos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 46 \end{bmatrix}.$$

Como observação vale salientar que se valendo das operações elementares sobre linhas que constam da definição 12 é possível obter na verdade não apenas uma, mas sim infinitas matrizes na forma escalonada cada qual linha-equivalente a matriz dada.

Característica de uma matriz:

Definição 13: Dada uma matriz A, denotando por A' uma matriz escalonada linha-equivalente a A, definimos característica da matriz A como sendo o número de linhas não nulas de A'. Denotamos a característica de uma matriz A por $\tau(A)$.

Exemplo 23: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$, apresentada por (IEZZI, 2004).

O primeiro passo é substituir a segunda linha pela soma dela com a primeira multiplicada por -2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Após este primeiro passo obtemos a matriz A_1 a seguir:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

O segundo passo consiste em A_1 substituir a terceira linha pela soma dela com a primeira multiplicada por -2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Após este segundo passo obtemos a matriz A_2 a seguir:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

Por fim, o terceiro passo se refere a substituição em A_2 da terceira linha pela soma dela com a segunda multiplicada por -2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

Após essa sequência de operações, encontramos finalmente uma matriz escalonada que é linha-equivalente a matriz A dada inicialmente.

Então temos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como podemos perceber, a matriz A' apresenta duas linhas não-nulas (já que a terceira linha é constituída só de zeros). Portanto, temos que : $\tau(A) = 2$.

Determinante de matriz quadrada:

Dada uma matriz quadrada de ordem um, genericamente dada por: $A = [a_{11}]$. Definimos o seu determinante como sendo o número que corresponde ao único elemento da matriz. Denotamos por $\det(A) = a_{11}$ ou $|a_{11}| = a_{11}$. Vale deixar claro que neste contexto o uso de barras não se refere a ideia de módulo de um número real, mas sim serve para denotar determinantes.

Por exemplo, no caso da matriz $A = [-2]$, temos que o seu determinante é o número real -2, em símbolos podemos escrever: $\det(A) = -2$ ou $|-2| = -2$.

No caso de a matriz quadrada ser de ordem 2, sabemos que sua representação genérica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal Principal

O seu determinante é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nesta ordem.

De um modo mais geral temos a seguinte fórmula:

$$detA = a_{11}(a_{22}) - a_{12}(a_{21}) \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}) - a_{12}(a_{21}).$$

Exemplo 24: Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Pela fórmula dada, tem-se:

$$detA = 3(4) - (-2)5 = 12 - (-10) = 12 + 10 = 22.$$

Doravante, referir-nos-emos a essa fórmula, como “Regra prática para determinante de ordem 2”.

Antes de nos aprofundarmos na ideia e no cálculo de determinantes, alguns comentários importantes devem ser feitos. Primeiramente, devemos ter em mente que o determinante é um número real associado a matriz quadrada. As matrizes retangulares não admitem determinantes.

Além do mais é essencial distinguir que o uso de parênteses ou colchetes é feito para representação de matrizes, enquanto a notação com barras simboliza o determinante de matrizes.

Em (DANTE, 2018) temos o seguinte lembrete:

"Não é correto escrever $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = -30$, pois não é a matriz, e sim o seu determinante, que é -30. Então, $\det(A) = -30$ ou $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -30$."

Para generalizar a definição de determinante é imprescindível o conhecimento de dois conceitos: menor complementar e cofator.

Menor complementar:

Definição 14: Sendo A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, denomina-se **menor complementar** de A pelo elemento a_{ij} o determinante D_{ij} associado à matriz quadrada que se obtém de A ao se suprimir a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij} considerado. Esse determinante é indicado por D_{ij}.

Exemplo 25: seja a matriz quadrada de ordem 2: $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Para se obter por exemplo o menor complementar de A pelo elemento $a_{21} = 6$, devemos suprimir a linha dois e a coluna um, ficando então com o seguinte determinante $D_{21} = |-4|$. Pela definição de determinante de ordem 1 temos que $D_{21} = -4$. Neste caso o menor complementar de A pelo elemento mencionado é o -4.

Exemplo 26: Tomando como referência agora a matriz quadrada B de ordem 3, seja calcular o menor complementar de B pelo elemento b_{32}.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Para o cálculo de D_{32} devemos primeiramente suprimir na matriz B em questão a terceira linha e a segunda coluna.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Ao fazê-lo ficamos com o seguinte determinante:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$$

Calculando este último determinante pela regra prática para determinante de ordem 2, segue que:

$D_{32} = (-2)10 - 6(5) = -20 - 30 = -50.$

Logo, o menor complementar de B pelo elemento b_{32} é $D_{32} = -50$.

Cofator ou complemento algébrico:

Definição 15: Para uma matriz quadrada A, de ordem $n \geq 2$, sendo n um número natural, define-se cofator (ou complemento algébrico) do elemento a_{ij} de A como sendo o número real expresso por $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, em que D_{ij} representa o menor complementar de A pelo elemento a_{ij}.

Notemos que quando $i + j$ é par, a expressão para o cofator se reduz a $A_{ij} = D_{ij}$ (ou seja, nesse caso o cofator é igual ao valor do menor complementar). Isso porque sendo o expoente $i + j$ par a potência $(-1)^{i+j}$, resulta em 1 positivo. Por outro lado quando $i + j$ for ímpar, a potência $(-1)^{i+j}$ resulta em -1, o que consequentemente faz com que a expressão do cofator fique $A_{ij} = -D_{ij}$ (isto é, neste caso o cofator é o oposto do valor do menor complementar).

Exemplo 27: Vamos calcular os cofatores dos elementos a_{22} e a_{23} para a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ 11 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de A_{22}: Primeiramente calculando o menor complementar D_{22}, temos:

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} = 0(-3) - (-1)11 = 0 + 11 = 11.$$

Dado que $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, temos que:

$A_{22} = (-1)^{2+2} D_{22}$. Daí vem que:

$A_{22} = (-1)^4 11 = 1(11) = 11.$

- Cálculo de A_{23}: Calculando inicialmente o menor complementar D_{23}, temos:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = 0(-5) - 11(-4) = 0 + 44 = 44.$$

Aplicando a fórmula para calcular o A_{ij}, com $i = 2$ e $j = 3$, segue:

$A_{23} = (-1)^{2+3} . D_{23}$. Daí, vem: $A_{23} = (-1)^5 . 44 = -1.44 = -44.$

Neste momento já estamos em condições de apresentar uma definição mais generalizada de determinante. Tal definição está estribada no conhecido “Teorema de Laplace”.

Teorema 1: (Teorema de Laplace) - *O determinante associado a uma matriz quadrada* A *de ordem* $n \geq 2$ *é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) qualquer pelos respectivos cofatores.*

O Teorema 1 foi extraído de (DANTE, 2018) e uma demonstração pode ser encontrada em (Sá, 2014).

Vale enfatizar que para o cálculo de qualquer determinante pela aplicação do Teorema 1, a escolha de qualquer uma das linhas ou colunas conduzirá sempre ao mesmo valor para um dado determinante procurado. É indiferente pois, a linha ou coluna escolhida como referência para se aplicar o Teorema 1. Entretanto não deixa de ser mais conveniente e mais prático, escolher uma fila que eventualmente apresente elementos nulos. Pois para cada elemento nulo é dispensável a obtenção do seu cofator, isto por sua vez facilita sobremaneira o cálculo do determinante.

Inicialmente, vamos mostrar a aplicação do Teorema 1 para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de segunda ordem.

Exemplo 28: O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ pelo Teorema de Laplace.

Desenvolvendo pela 1ª linha, devemos inicialmente calcular os cofatores de a_{11} e a_{12}. Então temos que:

$A_{11} = (-1)^{1+1}D_{11} = (-1)^2(7) = 1(7) = 7$.

$A_{12} = (-1)^{1+2}D_{12} = (-1)^3|-4| = -4$.

Segundo o Teorema 1, desenvolvido pela 1ª linha, temos que:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$\det(A) = 8(7) + 5(-4) = 56 + (-20) = 36$$

Notemos que a expressão numérica $(8(7) + 5(-4))$ é equivalente a $(8(7) - 5(4))$. Esta última, por seu turno, corresponde exatamente à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Como se pode notar, a regra prática para o cálculo de determinante de 2ª ordem, baseada nos produtos dos elementos de cada diagonal, pode ser vista como uma versão simplificada do Teorema 1 para o caso específico para o determinante de ordem 2.

Como um outro exemplo de aplicação do Teorema 1, vejamos o cálculo de um determinante de uma matriz de terceira ordem.

Exemplo 29: Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, desta vez vamos desenvolver o cálculo do determinante pela 1ª coluna.

Está é mais conveniente pois possui elementos “mais favoráveis” (o elemento nulo e a unidade).

Neste caso então a aplicação do Teorema 1 requer a determinação dos cofatores A_{11}, A_{21} e A_{31}, os quais por sua vez dependem respectivamente de D_{11}, D_{21} e D_{31}. Calculando cada um dos menores complementares, temos:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 5(7) - 3(-2) = 35 + 6 = 41.$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 4(7) - (-2)3 = 28 + 6 = 34.$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4(3) - 5(3) = 12 - 15 = -3.$$

Daí seguem os cálculos dos cofatores A_{11}, A_{21} e A_{31}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}D_{11} = (-1)^2 41 = 41.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}D_{21} = (-1)^3 34 = -34.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}D_{31} = (-1)^4(-3) = -3.$$

Por fim, chegamos ao valor de $\det(B)$ efetuando a soma dos produtos dos elementos da primeira coluna por seus respectivos cofatores. Então:

$$\det(B) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\det(B) = 1(41) + 0(-34) + (-1)(-3) = 41 + 0 + 3 = 44$$

É importante ressaltar que o Teorema de Laplace se aplica ao cálculo do determinante de qualquer ordem acima de um, uma vez que, por recorrência, o processo de aplicação deste Teorema vai conduzindo a determinantes cuja ordem é uma unidade inferior à ordem do determinante do passo anterior.

Principais propriedades do Determinante:

Propriedade 1- Fila de zeros:

Se uma matriz quadrada qualquer tem uma linha (ou coluna) constituída só de elementos nulos, então o determinante desta matriz é igual a zero.

Exemplo 30: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo pelo Teorema 1, pela coluna 1, temos:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0(8) - 0(6) = 0.$

$D_{21} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(8) - (6)\sqrt{3} = \frac{8}{3} - 6\sqrt{3}.$

$D_{31} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(0) - (0)\sqrt{3} = 0.$

Calculando os cofatores A_{11}, A_{21} e A_{31}:

$A_{11} = (-1)^{1+1}0 = 0.$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\left(\frac{8}{3} - 6\sqrt{3}\right) = -\frac{8}{3} + 6\sqrt{3}.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}0 = 0.$

Com esses dados chegamos ao $\det(A)$:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\det(A) = 2(0) + 0\left(-\frac{8}{3} + 6\sqrt{3}\right) + (-2)0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Já que está matriz tem uma fila só de zeros (no caso a sua segunda linha é nula), de modo imediato já se conclui que o seu determinante é igual a zero. O cálculo deste determinante pelo Teorema 1, conforme desenvolvido acima, confirma que de fato seu valor é zero.

Propriedade 2 – Filas paralelas iguais:

Se em uma matriz quadrada qualquer existirem duas linhas (ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então o seu determinante será nulo.

Exemplo 31: Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo seu determinante pelo Teorema 1, vem:

Pela coluna 1:

$D_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 7(-5) - 7(-5) = 0.$

$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 2(7) - 2(7) = 0.$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 2(-5) = 0.$

Calculando os cofatores B_{11}, B_{21} e B_{31}:

$B_{11} = (-1)^{1+1}0 = 0.$

$B_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0.$

$B_{31} = (-1)^{3+1}0 = 0.$

Com esses dados chegamos ao $\det(B)$:

$$\det(B) = b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + b_{31}B_{31}$$

$$\det(B) = 1(0) + 4(0) + (-8)0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Como se pode notar nesta matriz B, a segunda e terceira colunas apresentam elementos respectivamente iguais; e pela Propriedade 2, este fato por si só já garante que o valor do determinante é zero. Valor este que também pode ser encontrado por meio da aplicação do Teorema 1, conforme mostram os cálculos acima.

Propriedade 3 – Filas paralelas proporcionais:

Dada uma matriz quadrada qualquer, caso ela possua duas linhas (ou colunas) proporcionais, o determinante associado a essa matriz terá valor zero.

Para ilustrar esta Propriedade 3, tomemos um exemplo de matriz quadrada de ordem 2, presente em (DANTE, 2018).

Exemplo 32: “Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$.”

Aplicando a “Regra prática para determinante de ordem 2”, vemos que o determinante dessa matriz é dado por:

$$\det(A) = a(kb) - b(ka)$$

Em que se nota que esta expressão é identicamente nula. Todavia este resultado nulo já pode ser constatado pela simples observação de que a segunda linha é múltipla da primeira (sendo k a constante de proporcionalidade).

Propriedade 4 – Troca de filas paralelas:

Se a partir de uma matriz quadrada A qualquer construirmos uma nova matriz quadrada B por meio da troca entre si da posição de duas linhas (ou duas colunas) da matriz A, os determinantes de A e B serão números simétricos. Em símbolos teremos neste caso: $\det(B) = -\det(A)$ e $\det(A) = -\det(B)$.

Exemplo 33: Para mostrar a validade desta propriedade em um caso particular, iniciemos com a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & 5 \\ 6 & 14 & -11 \end{bmatrix}$.

Vamos formar uma nova matriz B, trocando-se entre si a segunda e a terceira linhas da matriz A. Então, teremos a matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & -11 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$.

Valendo-se do Teorema de Laplace, mostraremos que os determinantes dessas matrizes são números opostos.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & 5 \\ 6 & 14 & -11 \end{bmatrix}$,

Pela coluna 3:

$D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 4(14) - 6(-7) = 98.$

$D_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = (-1)14 - 6(3) = -32.$

$D_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-7) - 4(3) = -5.$

Calculando os cofatores A_{13}, A_{23} e A_{33}:

$A_{13} = (-1)^{1+3}98 = 98.$

$A_{23} = (-1)^{2+3}(-32) = 32.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}(-5) = -5.$

Com esses dados chegamos ao $\det(A)$:

$$\det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$\det(A) = 2(98) + 5(32) + (-11)(-5) = 196 + 160 + 55 = 411$$

Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & -11 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$,

Pela coluna 3:

$D_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 6(-7) - 4(14) = -98.$

$D_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-7) - 4(3) = -5.$

$D_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = (-1)(14) - 6(3) = -32.$

Calculando os cofatores B_{13}, B_{23} e B_{33}:

$B_{13} = (-1)^{1+3}(-98) = -98.$

$B_{23} = (-1)^{2+3}(-5) = 5.$

$B_{33} = (-1)^{3+3}(-32) = -32.$

Com esses dados chegamos ao $\det(B)$:

$$\det(B) = b_{13}B_{13} + b_{23}B_{23} + b_{33}B_{33}$$

$$\det(B) = 2(-98) + (-11)(5) + 5(-32) = (-196) + (-55) + (-160) = -411$$

Como se pode ver é válido que $\det(B) = -\det(A)$ e $\det(A) = -\det(B)$.

Propriedade 5 – Multiplicação de uma fila por uma constante:

Dada uma matriz quadrada A qualquer, seja B uma nova matriz obtida pela multiplicação de todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A por uma constante real k, então o determinante de B será igual ao produto de k pelo determinante de A. Em símbolos podemos escrever que $\det(B) = k\,\det(A)$.

Exemplo 34: Tomemos como referência a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$. Atribuamos um valor real para k, por exemplo $k = 2$.

Multiplicando por 2 os elementos da primeira coluna de A, teremos a matriz $B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

Calculando $\det(A)$ e $\det(B)$ pelo Teorema 1, vem:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Pela 1ª linha:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0(10) - (-1)6 = 0 + 6 = 6.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 2(10) - (-1)(-3) = 20 - 3 = 17.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 2(6) - 0(-3) = 12 + 0 = 12.$

Calculando os cofatores, vem:

$A_{11} = (-1)^{1+1}6 = 6.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}17 = -17.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}12 = 12.$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det(A) = 4(6) + (-3)(-17) + 5(12) = 24 + 51 + 60 = 135$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Pela 1ª linha:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0(10) - (-1)6 = 0 + 6 = 6.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 4(10) - (-1)(-6) = 40 - 6 = 34.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - 0(-6) = 24 - 0 = 24.$

Calculando os cofatores, vem:

$B_{11} = (-1)^{1+1}6 = 6.$

$B_{12} = (-1)^{1+2}34 = -34.$

$B_{13} = (-1)^{1+3}24 = 24.$

$$\det(B) = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13}$$

$$\det(B) = 8(6) + (-3)(-34) + 5(24) = 48 + 102 + 120 = 270$$

Como se pode notar o determinante de B corresponde ao produto do determinante de A pelo valor atribuído a k (2). Neste nosso exemplo podemos escrever a seguinte relação entre os dois determinantes envolvidos $\det(B) = 2\det(A)$.

Como consequência desta Propriedade 5 podemos tratar o caso que envolve multiplicação de toda a matriz por uma constante. Para uma matriz quadrada qualquer que tenha n linhas (e consequentemente n colunas), multiplicar a matriz por uma constante k equivale a multiplicar cada uma das n linhas (ou n colunas) por essa constante.

Conforme sugere a propriedade em questão, o determinante da matriz kA corresponderia ao produto do determinante de A por n fatores iguais a k. Genericamente temos, $\det(kA) = k^n \det(A)$, sendo n a ordem da matriz quadrada A.

Como exemplo vamos considerar a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e o $k = 3$.

Primeiramente vamos calcular a matriz kA.

$$kA = 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora, utilizando a “Regra prática para determinante de ordem 2”, vamos calcular $\det(A)$ e $\det(kA)$:

$$\det(A) = 3(-1) - 5(2) = -3 - 10 = -13$$

$$\det(kA) = 9(-3) - 15(6) = -27 - 90 = -117$$

Portanto, temos que:

$$k^n \det(A) = -117$$

$$3^2(-13) = -117$$

Propriedade 6 – Determinante da matriz transposta:

Denotando por $\det(A)$ o determinante de uma matriz quadrada A qualquer e por $\det(A^t)$ o determinante da transposta de A, teremos sempre $\det(A) = \det(A^t)$. Em outras palavras, o determinante da transposta de uma matriz quadrada é sempre igual ao determinante da matriz quadrada originalmente considerada.

Conforme ilustra o exemplo a seguir, adaptado de (DANTE, 2018) *“Na ordem 2, essa propriedade é quase intuitiva.”*

Seja a matriz quadrada A de ordem 2 com seus 4 elementos designados por a, b, c e d dispostos da seguinte maneira: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A transposição desta matriz A conduz à matriz $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.” calculando os respectivos determinantes utilizando a “Regra prática para determinante de ordem 2”, temos:

$$\det(A) = ad - bc$$

$$\det(A^t) = ad - cb$$

Como se pode notar as expressões algébricas correspondentes a esses determinantes são equivalentes. Cabe ressaltar que essa propriedade referente ao determinante da transposta é válida para as matrizes em geral, qualquer que seja sua ordem.

Propriedade 7 – Determinante da Matriz Triangular:

O determinante de uma matriz triangular de ordem n, com n natural, tal que $n \geq 2$ pode ser obtido pela multiplicação de todos os elementos que compõem sua diagonal principal. A título de curiosidade, vários autores designam por “termo principal” o produto dos elementos que constituem a diagonal principal de uma matriz quadrada qualquer, excetuando-se as matrizes de ordem 1.

Exemplo 35: Consideremos a matriz triangular a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Calculando pelo teorema 1, temos:

Pela 3ª linha:

$$D_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-5)(-1) - 8(3) = 5 - 24 = -19.$$

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 0(8) = -2 - 0 = -2.$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 0(-5) = 6 - 0 = 6.$$

Calculando os cofatores, vem:

$A_{31} = (-1)^{3+1}(-19) = -19.$

$A_{32} = (-1)^{3+2}(-2) = 2.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}6 = 6.$

$$\det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\det(A) = 0(-19) + 0(2) + (-4)6 = 0 + 0 - 24 = -24$$

Este resultado poderia ter sido obtido de forma mais rápida e prática recorrendo-se a está Propriedade 7, já que se trata de uma matriz triangular. Basta calcular o termo principal da matriz A: $\det(A) = 2(3)(-4) = -24$.

Lembrando que a matriz diagonal é um caso particular de matriz triangular, (STEINBRUCH, 1987) chama atenção para o seguinte:

"*O determinante de uma matriz diagonal A ... é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.*"

Na matriz diagonal A de ordem 3 generalizada (muito embora a propriedade em questão se aplica, conforme já ressaltado anteriormente, a qualquer matriz triangular de ordem superior a 1, inclusive claro às matrizes diagonais).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pela propriedade em questão, segue que:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Ainda em relação a Propriedade 7, merece destaque o determinante associado as matrizes identidade. Haja vista que uma matriz identidade é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1.

Conclui-se que o determinante de uma matriz identidade de ordem n sempre será igual a 1. Afinal se $n = 1$, $I_1 = [1]$ donde se vê de modo imediato que $\det(I_1) = 1$. Já nos casos em que $n \geq 2$ o determinante de I_n será dado pelo produto de n fatores iguais a 1. O que obviamente resultará na unidade.

Propriedade 8 – Teorema de Binet.

Teorema 2: (Teorema de Binet) **-** Dadas duas matrizes quadradas A e B de mesma ordem, o determinante da matriz produto $A.B$ é igual ao produto dos determinantes de A pelo determinante de B. Em símbolos, temos: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

A demonstração do Teorema 2, pode ser encontrada em (Sá,2014).

Exemplo 36: Tomemos um caso particular para mostrar a validade deste Teorema. Para tanto, consideremos as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Primeiro vamos determinar AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(6)+5(2) & 2(7)+5(3) \\ 3(6)+8(2) & 3(7)+8(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 29 \\ 34 & 45 \end{bmatrix}$$

Agora, pela "Regra prática para determinante de ordem 2", vamos calcular $\det(AB)$, $\det(B)$ e $\det(A)$.

Iniciando por $\det(A)$:

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2(8) - 3(5) = 16 - 15 = 1.$

Agora, $\det(B)$:

$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6(3) - 2(7) = 18 - 14 = 4.$

E então, $\det(AB)$:

$\det(AB) = \begin{vmatrix} 22 & 29 \\ 34 & 45 \end{vmatrix} = 22(45) - 34(29) = 990 - 986 = 4.$

Portanto:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$4 = 1(4)$$

Com efeito, o determinante da matriz produto AB corresponde ao produto dos determinantes de A e B.

Uma interessante constatação a ser feita acerca do Teorema 2 é a reflexão feita por (DANTE, 2018), *"Como $det(A)$ e $det(B)$ são números reais, $det(A)\,det(B) = det(B)\,det(A)$, pois vale a propriedade comutativa na multiplicação de números reais. Logo, existindo AB e BA, podemos concluir que $det(AB) = det(BA)$, mesmo que $AB \neq BA$ (ou seja, mesmo que A e B não sejam comutáveis)."*

Como consequência do "Teorema de Binet" pode-se estabelecer uma importante relação entre o determinante de uma matriz quadrada A qualquer invertível e o determinante de sua inversa A^{-1}. Como A é invertível, é certo que existe A^{-1} e por definição o produto entre A e A^{-1} resulta na matriz identidade I (ou seja, $AA^{-1} = I$).

Da relação $AA^{-1} = I$, é imediato que: $\det(AA^{-1}) = \det(I)$.

O primeiro membro desta última igualdade pode ser desenvolvido pelo Teorema 2, transformando-se em $(\det(A)\det(A^{-1}))$, já o segundo membro corresponde a unidade, conforme apresentamos como caso particular da Propriedade 7. Com isso, ficamos com a seguinte igualdade:

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1 \text{ ou ainda } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Concluímos então que o produto do determinante de uma matriz quadrada invertível pelo determinante de sua matriz inversa é sempre igual a 1. Ou de modo equivalente, o determinante da inversa de uma matriz corresponde ao inverso do determinante da matriz considerada.

Analisando a relação $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, a presença de $\det(A)$ no denominador nos leva a impor a restrição $\det(A) \neq 0$. Assim como destaca (DANTE, 2018): *"Essa propriedade sugere um fato importante: A é invertível se e somente se $det(A) \neq 0$."*

Exemplo 37: Resolvamos este problema proposto por (GIOVANNI,2015).

“(Vunesp-SP) Os valores de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}$ não admita inversa são:

a) 0 e 3

b) 1 e -1

c) 1 e 2

d) 1 e 3

e) 3 e -1”

Diga-se de passagem, uma matriz quadrada que não admite inversa, é chamada de “Matriz Singular”. Conforme já mencionado anteriormente, para que uma matriz quadrada seja singular é necessário e suficiente que o seu determinante seja nulo. Daí, no caso da matriz A em questão devemos calcular o seu determinante em função de k e igualar a zero a expressão algébrica obtida e por fim resolver a equação resultante para que se possa obter os valores da incógnita envolvida.

Resolvendo o determinante pelo Teorema 1, vem:

Pela 1ª linha, temos:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - k(3) = 3 - 3k.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = k(3) - 1(3) = 3k - 3.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k(k) - 1(1) = k^2 - 1.$

Calculando os cofatores, vem:

$A_{11} = (-1)^{1+1}(3 - 3k) = 3 - 3k.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(3k - 3) = -3k + 3.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(k^2 - 1) = k^2 - 1.$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det(A) = 1(3 - 3k) + 0(-3k + 3) + 1(k^2 - 1) = 3 - 3k + 0 + k^2 - 1$$

$$\det(A) = k^2 - 3k + 2$$

Igualando a expressão algébrica a zero e resolvendo a equação, temos:

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$k = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$k' = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ e $k" = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Concluímos então que se $k = 1$ ou $k = 2$ o determinante da matriz dada é igual a zero o que por sua vez garante que A seja não invertível. Logo, temos como resposta a alternativa C.

Propriedade 9 – Teorema de Jacobi.

Teorema 3: (Teorema de Jacobi) - *Quando substituímos uma fila de uma matriz quadrada A pela soma dos elementos dela com os elementos de outra fila paralela previamente multiplicada por um número real (não nulo), obtemos uma matriz A'.*

Temos: $\det(A') = \det(A)$.

O Teorema 3 foi extraído de (IEZZI, 2004) e uma demonstração pode ser encontrada em (Sá, 2014).

Exemplo 38: Tomemos a seguinte matriz quadrada A de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Construamos a matriz A', substituindo a segunda linha de A pela soma da mesma com a primeira linha multiplicada por 2.

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

A seguir mostraremos que os determinantes de A e A' são iguais. Reforçando a validade do Teorema 3.

Calculando cada um dos determinantes pelo Teorema 1, temos:

Comecemos pelo determinante da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Pela 1ª linha:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - (-1)(-5) = -12 - 5 = -17.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 5(-4) - 2(-5) = -20 + 10 = -10.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1) - 2(3) = -5 - 6 = -11.$

Calculando os cofatores:

$A_{11} = (-1)^{1+1}(-17) = -17.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(-10) = 10.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(-11) = -11.$

$$\det(A) = (-2)(-17) + 1(10) + 4(-11) = 34 + 10 - 44 = 0$$

E agora calculemos o determinante da matriz A'

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Pela 1ª linha:

$D'_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5(-4) - (-1)3 = -20 + 3 = -17.$

$D'_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1(-4) - 2(3) = -4 - 6 = -10.$

$D'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 2(5) = -1 - 10 = -11.$

Calculando os cofatores:

$A'_{11} = (-1)^{1+1}(-17) = -17.$

$A'_{12} = (-1)^{1+2}(-10) = 10.$

$A'_{13} = (-1)^{1+3}(-11) = -11.$

$$\det(A') = (-2)(-17) + 1(10) + 4(-11) = 34 + 10 - 44 = 0$$

Como vemos, a matriz A' construída a partir de A nas condições sugeridas pelo "Teorema de Jacob" tem o valor do seu determinante igual àquele da matriz A.

Técnica para determinação da inversa de uma matriz quadrada invertível:

Como ainda veremos neste capítulo, uma suficiente para que uma matriz quadrada M seja invertível é que seu determinante seja não nulo ($\det(M) \neq 0$). Veremos agora, uma fórmula para se obter a inversa de uma matriz quadrada, quando garantida sua existência.

Para tanto temos que apresentar dois conceitos prévios, quais sejam, matriz dos cofatores e matriz adjunta.

Matriz dos cofatores:

Definição 16: *Seja M uma matriz quadrada de ordem n. chamamos de matriz dos cofatores de M, e indicamos por M', a matriz que se obtém de M, substituindo cada elemento de M por seu cofator.*

Assim, se

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \textit{então } M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 39:

Seja a seguinte matriz $M = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos obter a matriz dos cofatores de M.

Para tanto calculemos primeiramente o menor complementar de cada um dos elementos constituintes dessa matriz.

$D_{11} = 1, \quad D_{12} = 2,$

$D_{21} = 3$ e $D_{22} = -4.$

Agora determinamos os cofatores de cada elemento:

$M_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1, \quad M_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2,$

$M_{21} = (-1)^{2+1}3 = -3$ e $M_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4.$

Sendo assim a matriz dos cofatores de M é dada por: $M' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

Exemplo 40:

Dada a matriz $N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 10 & 8 & -7 \end{bmatrix}$, vamos encontrar o cofator de cada um de seus elementos e assim construir a matriz dos cofatores de N.

Primeiramente, determinamos o menor complementar de cada elemento da matriz N.

$D_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 4(-7) - 8(-1) = -20.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = 5(-7) - 10(-1) = -25.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 5(8) - 10(4) = 0.$

$D_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = (-2)(-7) - 8(3) = -10.$

$D_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = 0(-7) - 10(3) = -30.$

$D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 0(8) - 10(-2) = 20.$

$D_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - 4(3) = -10.$

$D_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0(-1) - 5(3) = -15.$

$D_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0(4) - 5(-2) = 10.$

Agora determinamos os cofatores de cada elemento:

$N_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20.$

$N_{12} = (-1)^{1+2}(-25) = 25.$

$N_{13} = (-1)^{1+3}(0) = 0.$

$N_{21} = (-1)^{2+1}(-10) = 10.$

$N_{22} = (-1)^{2+2}(-30) = -30.$

$N_{23} = (-1)^{2+3}(20) = -20.$

$N_{31} = (-1)^{3+1}(-10) = -10.$

$N_{32} = (-1)^{3+2}(-15) = 15.$

$N_{33} = (-1)^{3+3}(10) = 10.$

Daí, $N' = \begin{bmatrix} -20 & 25 & 0 \\ 10 & -30 & -20 \\ -10 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$

Matriz adjunta:

Definição 17: *Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M. Chamamos de matriz adjunta de M, e indicamos por $\overline{M}$, a transposta da matriz M', isto é, $\overline{M} = (M')^t$.*

Em resumo:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\ e\ \overline{M} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\text{em que } B_{ij} = A_{ij} \begin{cases} \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}, \\ \forall j \in \{1,2,\dots,n\} \end{cases}.$$

Recorrendo às matrizes M e N apresentadas nos exemplos 39 e 40, a construção das respectivas adjuntas é imediata uma vez que M' e N' já foram determinadas. Transpondo essas últimas, temos que a matriz adjunta de M e a matriz adjunta de N são respectivamente:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{N} = \begin{bmatrix} -20 & 10 & -10 \\ 25 & -30 & 15 \\ 0 & -20 & 10 \end{bmatrix}.$$

Fórmula para obtenção da matriz inversa:

Teorema 4: *Se M é uma matriz quadrada de ordem n e $\det(M) \neq 0$, então a inversa de M é: $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}(\overline{M})$.*

O Teorema 4 foi extraído de (IEZZI, 2004) e uma demonstração pode ser encontrada em (COLOMBO e KOILLER, 2017).

O Teorema 4 nos mostra que uma condição suficiente para que uma matriz quadrada M seja invertível é que seu determinante seja não nulo ($\det(M) \neq 0$).

Como aplicação do Teorema 4, calcularemos agora as matrizes inversa das matrizes M e N consideradas nos exemplos 39 e 40, e lembrando que as respectivas matrizes adjuntas já foram construídas:

Calculando $\det(M)$, temos:

$\det(M) = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4)1 - 2(3) = -10.$

Calculando $\det(N)$, pelo Teorema de Laplace, temos:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 10 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

Pela 1ª linha:

Como já calculado nos itens anteriores, temos que:

$D_{11} = -20. \quad D_{12} = -25. \quad D_{13} = 0.$

Também já são conhecidos os seus cofatores:

$A_{11} = -20. \quad A_{12} = 25. \quad A_{13} = 0.$

Daí, temos que o determinante de N é:

$$\det(N) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det(N) = 0(-20) + (-2)25 + 3(0) = 0 + (-50) + 0 = -50$$

De posse das matrizes adjuntas e dos valores dos determinantes, finalmente estamos em condições de calcular a inversa de cada uma das matrizes M e N.

De acordo com o Teorema 4, vem a inversa da matriz M:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}(\overline{M})$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(\frac{1}{-10}) & -3(\frac{1}{-10}) \\ -2(\frac{1}{-10}) & -4(\frac{1}{-10}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo da inversa da matriz N, temos:

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)}(\overline{N})$$

$$N^{-1} = \frac{1}{-50}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 10 & 8 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(\frac{1}{-50}) & -2(\frac{1}{-50}) & 3(\frac{1}{-50}) \\ 5(\frac{1}{-50}) & 4(\frac{1}{-50}) & -1(\frac{1}{-50}) \\ 10(\frac{1}{-50}) & 8(\frac{1}{-50}) & -7(\frac{1}{-50}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{25} & -\frac{3}{50} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} & \frac{7}{50} \end{bmatrix}.$$

Um comentário interessante a ser feito com relação à fórmula apresentada no Teorema 4, é que uma simples análise do denominador já nos remete à condição suficiente para a existência da inversa de uma matriz quadrada: seu determinante deve ser diferente de zero.

Para matrizes de ordem maior, uma possível desvantagem para o cálculo da matriz inversa, pelo Teorema 4, pode ser o cálculo do determinante. Por isso é necessário que tenhamos conhecimento de uma outra técnica para realizar esse cálculo. Dessa forma, no próximo capítulo apresenta-se outra técnica de cálculo da matriz inversa por escalonamento.

1.2 - Teorema de Existência e Unicidade de Soluções:

Equações Lineares:

Definição 18: Denomina-se como equação linear nas incógnitas, x_1, x_2, x_3, ..., x_n; toda equação que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$.

Nesta equação, a_1, a_2, a_3, ..., a_n e b são números reais chamados de coeficientes, sendo b o termo independente e os demais são coeficientes das incógnitas.

Com base nesta definição, são exemplos de equações lineares:
$4x - 3y = 8$, equação linear nas incógnitas x e y.
$-x + 2y - 3z = 5$, equação linear nas incógnitas x, y e z.
$\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y + \frac{2}{7}z - t = 0$, equação linear nas incógnitas x, y , z e t.

Há um caso particular de equações lineares importante a ser ressaltado. Trata-se das chamadas equações lineares homogêneas, conforme (GIOVANNI, 2000).

Definição 19: *Quando o termo independente de b for igual a zero, a equação linear denomina-se "Equação Linear Homogênea".*

Assim por exemplo, equações lineares como: $-3x + 2y = 0$ e $4x - y + 5z = 0$, são homogêneas.

Retornando a ideia de linearidade de equações, uma equação é não linear, quando ela não é linear, ou seja, não está dada conforme enunciada na Definição 18. A seguir exemplificamos algumas equações não lineares:

- Quando há incógnita no denominador;

Por exemplo a equação $\frac{3}{5x-1}+\frac{1}{2}=-8$, não é linear devido a presença da expressão algébrica “$5x-1$” (expressão essa que contém a incógnita x) no denominador da primeira fração.

- Incógnita com expoente diferente de 1;

Assim equações como, $x^2+5y^3=7$ e $3x^4-2y+8z^3=0$, não são lineares, uma vez que apresentam pelo menos um termo contendo incógnita com expoente que não seja 1.

- Produto entre duas ou mais incógnitas;

Analisando a equação $-2ab+5c=\frac{1}{4}$ percebemos que nela há a multiplicação entre as incógnitas a e b, o que caracteriza a não-linearidade.

- Incógnita figurando em um radicando;

A equação $\sqrt{3x+4y}-2x=7y+1$, por apresentar em um radicando pelo menos uma incógnita (no caso aqui duas, que são x e y) não é linear.

Doravante, limitar-nos-emos à apenas aos casos lineares.

Quanto a solução de uma equação linear; seja por exemplo a equação $2x+3y=12$, o par ordenado $(3{,}2)$ é uma solução, pois: $2.3+3.2=6+6=12$. Também é solução o par ordenado $(0{,}4)$, já que: $2.0+3.4=0+12=12$.

Seja ainda a equação linear $x-2y+3z=18$, podemos verificar que a tripla ordenada $(3{,}0{,}5)$, constituí uma de suas soluções, pois: $3-2.0+3.5=3-0+15=18$.

Definição 20: D*ada a equação linear:*

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=b$$

Dizemos que uma ênupla de números reais $(\propto_1, \propto_2, \propto_3, \dots, \propto_n)$ *é solução da equação se, e somente se:* $a_1 \propto_1 + a_2 \propto_2 + a_3 \propto_3 + \cdots + a_n \propto_n = b$.

Em particular quando se tem uma equação linear homogênea com n incógnitas, seguramente a ênupla $(0,0,0, \dots, 0)$ constitui uma solução. Solução está que, diga se de passagem, costuma ser denominada solução nula ou trivial ou ainda solução imprópria.

Sistema Linear $\boldsymbol{m}$ x $\boldsymbol{n}$:

Definição 21: Denomina-se como Sistema Linear m x n um conjunto de m equações lineares, com n incógnitas. Uma maneira genérica de se apresentar um sistema linear m x n é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em particular nos casos em que todos os termos independentes $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ são nulos temos o que se denomina: sistema linear homogêneo. Em outros termos, um sistema linear homogêneo é constituído apenas por equações lineares homogêneas.

De modo similar a definição de solução de uma equação linear, diz-se que a ênupla $(\propto_1, \propto_2, \propto_3, \dots, \propto_n)$ é solução de um sistema linear, se e somente se, constitui solução de todas as equações que formam a sistema linear considerado.

Matrizes associadas a um sistema linear:

Dado um sistema linear genérico como anteriormente, costuma-se associar as seguintes matrizes:

- **Matriz Incompleta** (ou matriz dos coeficientes das incógnitas)**:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz Completa:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- **Matriz das Incógnitas:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- **Matriz dos Termos Independentes:**

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Tendo em vista essas matrizes, pode-se representar um sistema linear na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sendo assim, o produto da matriz incompleta pela matriz das incógnitas corresponde a matriz dos termos independentes.

Exemplo 41: As matrizes associadas ao sistema linear, tomemos primeiramente o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

No caso deste sistema as referidas matrizes são:

- Matriz Incompleta: $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Matriz Completa: $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- Matriz das Incógnitas:$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
- Matriz dos Termos Independentes: $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ademais, poderíamos representar o sistema linear em questão em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 42: Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ -x + 5y - 2z = 8 \end{cases}$$

Podemos associar a este sistema linear as seguintes matrizes:

- Matriz Incompleta: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.
- Matriz Completa: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & 5 & -2 & 8 \end{bmatrix}$.
- Matriz das Incógnitas: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.
- Matriz dos Termos Independentes: $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Com base nestas matrizes a representação deste último sistema linear fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Teorema da Existência e Unicidade de Solução de Sistemas Lineares:

Teorema 5: Dado um sistema linear de ordem n, ou seja (nxn), sendo n um número natural, com $n \geq 2$,seja D o determinante da matriz incompleta do sistema. Se $D \neq 0$, então o sistema admite única solução. Por outro lado, se $D = 0$, então ou o sistema terá infinitas soluções ou nenhuma solução.

Os detalhes da demonstração do Teorema 5 pode ser encontrado em (COLOMBO e KOILLER, 2017).

Vejamos na sequência vários exemplos para reforçar a compreensão do Teorema 5.

Exemplo 43: Consideremos o sistema apresentado matricialmente em (CAMPOS, Filho; 2014).

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -20 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace, já apresentada neste capítulo, calculemos o determinante D da matriz incompleta do Sistema.

Pela 1ª Linha, temos:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 8(3) - 5(-1) = 29.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -20 & 3 \end{vmatrix} = (-2)3 - (-20)(-1) = -26.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -20 & 5 \end{vmatrix} = (-2)5 - (-20)8 = 150.$

Calculando agora os cofatores, vem:

$A_{11} = (-1)^{1+1}(29) = 29.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(-26) = 26.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(150) = 150.$

Daí temos que o determinante é:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$D = 1(29) + (-3)(26) + 2(150) = 29 - 78 + 300 = 251 \neq 0.$$

Como o determinante da matriz incompleta é um número não nulo, pelo Teorema 5 temos que o sistema dado tem uma única solução.

Neste caso portanto, existe uma única tripla ordenada que satisfaz simultaneamente as três equações lineares implicitas no sistema matricial considerado no exemplo.

Vejamos agora um exemplo em que se deseja obter o conjunto dos valores reais que um dado paramêtro pode assumir de forma a garantir que um dado sistema linear de ordem 3 nas incógnitas x, y e z tenha única solução.

Exemplo 44: Seja o sistema adaptado de (DANTE, 2018), a seguir:

$$\begin{cases} kx + y - z = 4 \\ x + ky + z = 0 \\ \quad x - z = 2 \end{cases}$$

Calculando o determinante D, em função de k, também pelo Teorema de Laplace:

Pela 1ª Linha, temos:

$D_{11} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = k(-1) - 0(1) = -k.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(1) = -2.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - 1(k) = -k.$

Calculando agora os cofatores, vem:

$A_{11} = (-1)^{1+1}(-k) = -k.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(-2) = 2.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(-k) = -k.$

Daí temos que o determinante é:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$D = k(-k) + 1(2) + (-1)(-k) = -k^2 2 + k = -k^2 + k + 2.$$

Impondo a condição $D \neq 0$, que garante a unicidade da solução do sistema, ficamos diante da seguinte inequação quadrática: $-k^2 + k + 2 \neq 0$.

Basta, portanto, resolver a equação $-k^2 + k + 2 = 0$, cuja soluções seram os valores de k que fazem com que o sistema dado não tenha solução única. Ao final de tudo, o conjunto procurado será todo o conjunto dos números reais, excetuando-se as raízes da equação em questão.

Valendo-se da fórmula Geral para resolução de equação quadrática, temos que:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.(-1).2}}{2.(-1)}$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$k = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$k' = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \ e \ \ k'' = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Logo, o conjunto dos valores de k que garantem a existência e unicidade da solução do sistema linear apresentado, conforme o Teorema 5, é $\mathbb{R} - \{-1,2\}$. Isto é, o parâmetro k pode assumir qualquer valor real com exceção de -1 e 2.

Exemplo 45: Seja o seguinte exercício proposto em (GIOVANNI, 2000). *Qual é o valor de p para que o sistema:*

$$\begin{cases} px + y - z = 4 \\ x + py + z = 0, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

admita uma solução única?

Novamente, recorrendo ao Teorema 1, vamos ao cálculo do determinante D, em função de p:

A matriz incompleta deste sistema é:

$$\begin{bmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pela 3ª linha:

$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - p(-1) = 1 + p.$

$D_{32} = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p(1) - 1(-1) = p + 1.$

$D_{33} = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p(p) - 1(1) = p^2 - 1.$

Calculando os cofatores:

$A_{31} = (-1)^{3+1}(1 + p) = 1 + p.$

$A_{32} = (-1)^{3+2}(p + 1) = -p - 1.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}(p^2 - 1) = p^2 - 1.$

$$\mathrm{D} = 1(1 + p) + (-1)(-p - 1) + 0(p^2 - 1) = 1 + p + p + 1 + 0 = 2p + 2$$

Lembrando que, pelo Teorema 5, para que um sistema linear tenha solução única é necessário e suficiente que o determinante D seja não nulo, impondo a condição $D \neq 0$ temos para o caso em questão:

$$2p + 2 \neq 0 \Rightarrow 2p \neq -2 \Rightarrow p \neq -1$$

Portanto, o conjunto dos valores que o parâmetro p pode assumir, de forma a atender a condição imposta no problema é dado por: $\{p \in \mathbb{R}/p \neq -1\}$, ou ainda de modo equivalente $\mathbb{R} - \{-1\}$. Em outras palavras, o parâmetro p pode assumir qualquer valor real com exceção do -1. Em contrapartida se p assumir o valor -1 a única afirmação que pode ser feita, com base no Teorema 5, é que o sistema linear deste exemplo não admite solução única. O mesmo Teorema por si só não nos possibilita determinar qual dessas situações é a verdadeira: ausência de solução ou infinidade de soluções.

Vale ressaltar que o Teorema 5 nos garante, sob as hipóteses dadas, a existência e unicidade da solução de um sistema linear quadrático, contudo não nos mostra como obter uma solução, quando ela existe. Há diversos métodos para se obter a solução do sistema linear, alguns dos quais trataremos no próximo capítulo deste trabalho. Nos casos em que se deseja verificar a existência e a unicidade de soluções para sistemas lineares não quadráticos recorre-se do sistema escalonado e verifica-se sua classificação, caso que estudaremos melhor no capítulo 2.

Sistemas Lineares não quadráticos, com $(m < n)$:

Nos casos em que o número de equações é menor que o número de incógnitas, a(s) equação(ões) que “falta(m)” para tornar quadrático o sistema linear, deve(m) ser vista(s) como tendo todos os coeficientes nulos.

Exemplo 46: Seja o sistema 2x3.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ -x + 4y - 2z = 5 \end{cases}$$

Que equivale a:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ -x + 4y - 2z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Percebe-se que, quando $m < n$ o determinante da matriz incompleta, terá pelo menos uma linha constituída somente por elementos zeros.

No sistema exemplificado, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ou seja, a terceira é toda nula e de acordo com as propriedades dos determinantes se uma fila tem todos os elementos nulos o valor da determinante é zero. Portanto, nos casos em que $m < n$, teremos sempre $D = 0$, implicando que todo o sistema não admite solução única. Nestes casos então, ou o sistema terá um número infinito de soluções ou seu conjunto solução será vazio.

Por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y + z = 7 \end{cases},$$

nitidamente não tem solução, uma vez que é impossível existir uma tripla de números cuja soma seja 5 e 7 ao mesmo tempo. Poder-se-ia citar vários outros sistemas trazendo alguma incompatibilidade entre suas equações (em alguns casos a incompatibilidade é clara, porém em outros a inconsistência só pode ser detectada durante o processo de resolução), todos eles tendo o conjunto vazio como solução.

Por outro lado, nos casos em que as equações não são incompatíveis o sistema terá uma infinidade de soluções.

É o que acontece no sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ \quad\; y + z = 9 \end{cases},$$

percebe-se facilmente que há várias triplas ordenadas como solução, dentre as quais estão: $(1,4,5)$, $(1,2,7)$ e $(1,3,6)$ ao lado de infinitas outras.

Algo curioso acontece num sistema linear homogêneo em que o número de incógnitas é maior que o número de equações. Tomemos como referência o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}.$$

É fácil notar que sistemas como esse tem pelo menos uma equação "ausente" que possui nulos todos os coeficientes das incógnitas e o termo independente (no sistema em questão a equação "ausente" seria: $0x + 0y + 0z = 0$). É imediato então que o determinante da matriz dos coeficientes necessariamente será igual a zero, visto que tal matriz possui pelo menos uma linha de zeros. Hora, se o sistema linear é homogêneo e o determinante da matriz incompleta é nulo podemos concluir que sistemas deste tipo seguramente tem infinitas soluções (além da ênupla $(0,0,\dots,0)$ já garantida pela homogeneidade do sistema, certamente haverá infinitas outras ênuplas constituindo soluções para tais sistemas).

CAPÍTULO 2: SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE SISTEMAS LINEARES

Nesse capítulo nosso objetivo é enunciar e analisar os métodos de resolução de sistemas lineares de equações mais importantes e que outrora não são difundidos para alunos do ensino médio no Brasil, com exceção da Eliminação Gaussiana que já é bastante utilizada no ensino de resolução de sistemas lineares no Ensino Médio.

Nossa abordagem será feita em duas etapas: A primeira delas, consiste na apresentação dos métodos diretos, em que serão estudados seus conceitos e a aplicação de suas técnicas através de exemplos. Já na segunda etapa, trataremos dos métodos interativos para a resolução de sistemas lineares.

Os Sistemas de Equações Lineares, os quais iremos resolver com os métodos citados, serão do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

mais precisamente em sua forma matricial

$$Ax = b,$$

sendo A a matriz dos coeficientes, x a matriz das incógnitas e b a matriz dos termos independentes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Classificação de Sistemas Lineares:

No que diz respeito à quantidade de soluções que um sistema linear apresenta existem exatamente três casos a saber: O sistema possuí uma única solução (neste caso há apenas uma ênupla ordenada que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema); o sistema tem uma infinidade de soluções (existem infinitas enuplas ordenadas distintas que verificam todas as equações do sistema); o sistema não admite solução (não há nenhuma enupla ordenada que atenda ao mesmo tempo todas as equações do sistema).

Considerando os três casos supracitados, os sistemas lineares podem ser classificados, respetivamente em: **Sistema Possível e Determinado** (SPD), **Sistema Possível e Indeterminado** (SPI) e **Sistema Impossível** (SI). Diga-se de passagem, tanto o SPD, quanto o SPI são genericamente tidos como possíveis ou ainda **compatíveis** (pelo fato de admitirem solução). Por seu turno os sistemas que não possuem solução são também denominados sistemas **incompatíveis**.

Um fato curioso a ser enfatizado é que, qualquer que seja o sistema linear possível (independente da quantidade de equações e incógnitas) ou ele terá solução única ou terá infinitas soluções. Portanto, se por acaso forem identificadas pelo menos duas soluções distintas para um dado sistema linear este certamente terá na verdade infinitas soluções, isto é, seguramente será classificado como SPI.

Para resumir estes critérios de classificação dos sistemas lineares, o esquema organizado por (GIOVANNI, 2015) sintetiza as três possibilidades:

" Seja o sistema linear de m equações e n incógitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esse sistema pode admitir uma ou mais soluções ou não admitir solução alguma. Podemos sintetizar essa classificação pelo esquema:

$$Sistema\ Linear \begin{cases} Possível\ (admite\ solução) \begin{cases} Determinado\ (SPD)(tem\ uma\ única\ solução) \\ Indeterminado (SPI)(tem\ infinitas\ soluções)" \end{cases} \\ \qquad\qquad Impossível\ (SI)(não\ admite\ solução) \end{cases}$$

Vejamos a seguir um exemplo de cada um desses três tipos de Sistemas Lineares:

Exemplo 47: Resolver,

$$\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - \mathrm{z} = 2 \\ -\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 4\mathrm{z} = -7 \\ 7\mathrm{x} + 12\mathrm{y} + \mathrm{z} = 16 \end{cases}$$

Este sistema linear é possível e determinado (SPD). Alias isso pode ser provado, valendo-se do Teorema 5. Dessa forma, calculando pelo Teorema de Laplace o determinante da matriz incompleta $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 \end{bmatrix}$ associada a este sistema, vem:

Pela 1ª linha, temos:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 12(-4) = 3 + 48 = 51.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 7(-4) = -1 + 28 = 27.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 12 \end{vmatrix} = 12(-1) - 7(3) = -12 - 21 = -33.$

Calculando os cofatores, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1}(51) = 51.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(27) = -27.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(-33) = -33.$

Daí temos que o determinante é:

$$det = 1(51) + 2(-27) + (-1)(-33) = 51 - 54 + 33 = 30.$$

Como o valor deste determinante é não nulo, temos a garantia de que se trata de um sistema com solução única. Diga-se de passagem tal, solução é a tripla ordenada (4, -1, 0). De fato, fazendo $x = 4$, $y = -1$ e $z = 0$ podemos constatar que todas as equações do sistema linear são satisfeitas.

1ª equação: $x + 24 - z = 2 \Rightarrow\ 4 + 2(-1) - 0 = 2.$

2ª equação: $-x + 3y - 4z = 7 \Rightarrow -4 + 3(-1) - 4(0) = -7.$

3ª equação: $7x + 12y + z = 16 \Rightarrow\ 7(4) + 12(-1) + 0 = 16.$

No entanto vale ressaltar que a referida tripla ordenada pode ser obtida mediante a utilização de alguns métodos resolutivos de sistemas lineares, os quais abordaremos ainda neste capítulo.

Exemplo 48: Resolver,

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 5 \\ 2\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 10 \end{cases}$$

É fácil perceber que este sistema é possível e indeterminado (SPI). Afinal as duas equações que o constituem são equivalentes entre si (a 2ª equação corresponde a multiplicação da 1ª por um número real não nulo, no caso o 2). Dessa forma o sistema se resume a uma equação apenas, ou seja, $x + y = 5$, na qual facilmente se nota que há infinitos pares ordenados constituindo soluções. Alguns deles são: $(3,2)$, $(2,3)$, $(5,0)$, $(0,5)$, $(-1,6)$, $(6,-1)$, $(\frac{1}{2},\frac{9}{2})$.

Em tempo, vale salientar que por se tratar de um sistema que apresenta uma infinidade de soluções, é comum a obtenção do que se denomina a solução geral, a qual costuma ser dada por uma ênupla genérica contendo um ou mais parâmetros.

Exemplo 49: Resolver,

$$\begin{cases} 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 4\mathrm{z} = 5 \\ \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 3 \\ 3\mathrm{x} + 6\mathrm{y} - 9\mathrm{z} = 10 \end{cases}$$

Confrontando a 2ª com a 3ª equação desse sistema detectamos a presença de uma incompatibilidade matemática. Dividindo-se por 3 ambos os membros da 3ª equação ficamos com $x + 2y - 3z = \frac{10}{3}$. A partir daí o 1º membro desta última fica idêntico ao 1º membro da 2ª equação, mas os respectivos 2º membros são números reais distintos ($\frac{10}{3} \neq 3$). Ora, é impossível que haja uma tripla ordenada de números reais verificando simultaneamente as equações $\mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 3$ e $x + 2y - 3z = \frac{10}{3}$, donde se concluí que o sistema em questão não admite solução, ou seja, é impossível.

Sistemas lineares escalonados:

Sejam os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = -9 \\ 0x + 2y - 5z = 7 \\ 0x + 0y - 3z = 4 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -x + 6y - 2z + 4t = 0 \\ 0x - y + 10z - 7t = 8 \\ 0x + 0y - 6z + 2t = 10 \\ 0x + 0y + 0z - 7t = 11 \end{cases}$$

Sistemas como esses são ditos escalonados ou ainda dizemos que estão na forma escalonada. Em tempo, o adjetivo escalonado se refere a algo que tem degraus ou que recebeu forma/formato de escada, ou ainda que foi disposto em escalão. Tais noções associadas ao vocábulo escalonado são percebidas nos sistemas exemplificados acima. Neles observamos o seguinte padrão: analisando de cima para baixo vemos que na primeira equação aparecem todas as incógnitas do sistema (obviamente todas elas têm coeficientes não nulo); na segunda equação não aparece a incógnita x (pois o seu coeficiente é nulo); na terceira equação não aparece as incógnitas x e y (já que seus coeficientes são iguais a zero); e assim sucessivamente. Por apresentarem tal padrão é que dizemos que sistemas lineares como esses estão escalonados. Naturalmente um sistema na forma escalonada pode ser escrito de maneira mais simplificada, suprimindo os termos que possuem coeficientes nulos. Assim por exemplo os dois sistemas em questão podem ser expressos da seguinte forma.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = -9 \\ \quad 2y - 5z = 7 \\ \quad\quad -3z = 4 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -x + 6y - 2z + 4t = 0 \\ \quad -y + 10z - 7t = 8 \\ \quad\quad -6z + 2t = 10 \\ \quad\quad\quad -7t = 11 \end{cases}$$

Definição 22: Genericamente, *todo sistema linear $m \, x \, n$ do tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

*é chamado de **Sistema Escalonado.***

Vale ressaltar que, ao contrário dos sistemas lineares exemplificados, é possível nos depararmos com sistemas escalonados cujo número de equações é diferente do número de incógnitas.

Exemplo 50: Seja o sistema:

$$\begin{cases} 5x - y + 4z = 7 \\ \quad 2y - 3z = -5 \end{cases}$$

Vemos que se trata de um sistema linear escalonado de ordem $2\ x\ 3$ (portanto $m \neq n$).

Classificação de Sistema escalonado:

Conforme ressalta (DANTE, 2018): *"para classificar um sistema escalonado, basta observar a última linha dele. Mas é preciso estar atento, pois a última linha em um sistema de n incógnitas é a $n - ésima$ linha, que, se não existir, deve ser considerada totalmente nula ($0x + 0y + 0z + \cdots = 0$, que equivale a $0 = 0$)."*

Há três possibilidades para a última linha de um sistema escalonado, a saber:

- Uma equação com uma incógnita com o coeficiente não nulo (Por exemplo: $3x = 7$; $8y = 0$; $4z = 8$). Neste caso, o sistema é possível e determinado (SPD).

- Uma igualdade numericamente verdadeira (Por exemplo: $3 = 3$; $7 = 7$; $15 = 15$; ou como é mais comum, $0 = 0$). Neste caso, trata-se de um sistema possível e indeterminado (SPI).

- Uma igualdade numericamente é falsa, na qual quase sempre o primeiro membro é zero. (Por exemplo: $0 = 7$; $0 = 20$; $2 = 17$). Neste caso, por haver incompatibilidade matemática, estamos diante de um sistema impossível (SI).

Seguem alguns exemplos de sistemas escalonados com suas respectivas classificações:

Exemplo 51: SPD,

$$\begin{cases} -2\mathrm{x} + \mathrm{y} + 4\mathrm{z} = 13 \\ -3\mathrm{y} + 8\mathrm{z} = -7 \\ 14\mathrm{z} = 14 \end{cases}$$

Na última linha vemos uma equação com uma incógnita cujo coeficiente é diferente de zero, logo, trata-se de um SPD.

Exemplo 52: SPI,

$$\begin{cases} 6x - 5y + 2z = 12 \\ -3y + 4z = 14 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

A 3ª equação deste sistema equivale na realidade à igualdade númerica$0 = 0$, igualdade está que é verdadeira. Daí concluímos, que este sistema é um SPI.

Exemplo 53: SI,

$$\begin{cases} 4x - 7y + \dfrac{13}{6}z = \dfrac{15}{4} \\ 2y - z = 7 \\ 0z = 17 \end{cases}$$

Analisando a 3ª equação desse sistema, vemos que na verdade ela representa uma igualdade numérica falsa $(0 = 17)$, portanto, neste caso podemos classificá-lo como SI.

Resolução de Sistemas Escalonados:

Dado um sistema linear já na forma escalonada, a sua resolução é realizada tomando as equações “de baixo para cima”, ou seja, iniciamos o processo de resolução com a última equação e, caso se trate de um sistema possível, finalizamos sua resolução na primeira equação dele.

Vejamos como exemplo o processo de resolução de um SPD na forma escalonada. Aliás, o faremos tomando o exemplo 52 do tópico anterior:

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 13 & (I) \\ -3y + 8z = -7 & (II) \\ 14z = 14 & (III) \end{cases}$$

Em (III), temos que $z = 1$.

Resolvendo (II) na incógnita y, com $z = 1$, vem:

$$-3y + 8(1) = -7$$
$$y = 5$$

Por fim a resolução desse sistema é concluída em (I) onde se encontrará o valor de x, substituindo y e z por seus respectivos valores já obtidos:

$$-2x + 5 + 4(1) = 13$$
$$x = -2$$

Formalmente a(s) solução(ões) de um sistema linear é(são) dada(s) na notação de conjunto. Estamos nos referindo ao que se denomina conjunto solução de um sistema linear, conjunto este comumente representado pela letra S. No caso do sistema que acabamos de resolver escrevemos $S = \{(-2, 5, 1)\}$.

2.1 - Métodos Diretos

Os métodos diretos de resolução de sistemas lineares fornecem uma solução exata para um sistema linear com número finito de operações para se chegar na solução, caso exista.

Desde logo, é imperioso esclarecer, os métodos diretos aqui tratados serão a Eliminação Gaussiana e a Fatoração LU com pivotamento parcial, embora existam outros métodos diretos. A seguir, iremos descrever cada um dos métodos, apresentando suas definições e exemplos.

Eliminação Gaussiana:

Iniciaremos apresentando o método de Eliminação Gaussiana, que leva esse nome devido a seu criador Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Este método consiste em transformar a matriz dos coeficientes A, numa outra (triangular superior) que seja equivalente, na forma escalonada. Porém, vale ressaltar que este método só é vantajoso, quando o novo sistema linear for mais fácil de resolver do que o anterior.

Para descrever o processo de "triangularização", usaremos a notação de *matriz completa* $A|b$, de ordem $n(n+1)$. Assim, ao efetuarmos uma operação numa linha de A, automaticamente alteraremos a linha correspondente em b.

$$[A|b] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{array}$$

Essa matriz é a junção das matrizes A (coeficientes da variaveis) e b (termos independentes). O processo será feito em etapas, e consiste em anularmos os termos a_{jk}, sendo que $j \in \{k+1, \dots, n\}$ e $k \in \{1, \dots, n-1\}$, coluna por coluna, ou seja, serão eliminados os coeficientes a_{ij} das incógnitas que estão abaixo da diagonal principal, ou seja $i > j$.

Neste processo, basta substituir a linha L_j (representando a $j-ésima$ linha da matriz) pela combinação $L_j - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} L_k$. Vale resaltar que tais mudanças não alteram nem o determinante da matriz, nem o resultado do sistema.

Quando realizamos a anulação dos termos de uma determinada coluna, podem ocorrer modificações nos termos das colunas posteriores, e podem não ter o mesmo valor que tinham na matriz original. Para representar essas modificações utilizaremos a notação $a_{ij}^{(t)}$ para representar o termo a_{ij} após a eliminação da $t-ésima$ coluna.

Ao decorrer do processo de anulação dos termos desejados, destacamos que o coeficiente a_{kk}, pertencente à diagonal principal da matriz original, é o denominador da fração à qual multiplicamos a linha L_k. Portanto, caso algum termo seja nulo na diagonal principal, não será possível escrever a combinação linear.

Neste caso, para tornar tal situação possível, temos como possibilidade a troca de algumas linhas ou colunas, a fim de fazer com que o termo nulo saia da diagonal principal.

Existe também a possibilidade de que um coeficiente localizado na diagonal principal, que anteriormente não era nulo, tornar-se nulo, ou vice-versa, após ser anulada alguma coluna. Então é certo dizer que tais trocas de linha ou colunas também podem ser feitas durante o processo de escalonamento da matriz ampliada, quando se fizer necessário.

Ao realizarmos o escalonamento, a parte A da matriz expandida torna-se uma matriz triangular superior, como mostramos na matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 \quad \cdots & 0 & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & & a_{n,n-1}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 \quad \cdots & 0 & 0 & & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 54: Vejamos na prática a resolução de seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - z = 13 \end{cases}$$

A matriz completa do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

Nesse primeiro momento, precisamos eliminar os elementos a_{21} e a_{31}, da primeira coluna, fazendo com que os mesmos sejam nulos. Para que isso seja possível, substituiremos L_2 por uma combinação entre L_1 e L_2. Utilizamos para esse processo a seguinte combinação $L_j - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} L_k$, então temos que substituir L_2 por:

$$L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = L_2 - \frac{2}{1} L_1 = L_2 - 2L_1.$$

Então teremos as seguintes situações:

$a_{21} \Rightarrow 2 - 2(1) = 0. \quad a_{22} \Rightarrow 3 - 2(2) = -1.$

$a_{23} \Rightarrow 4 - 2(-3) = 10. \quad a_{24} \Rightarrow 5 - 2(4) = -3.$

E repetimos o processo para L_3. Então fica:

$$L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = L_3 - \frac{4}{1} L_1 = L_3 - 4L_1.$$

Então teremos as seguintes situações:
$a_{31} \Rightarrow 4 - 4(1) = 0.$ $\quad a_{32} \Rightarrow 7 - 4(2) = -1.$

$a_{33} \Rightarrow (-1) - 4(-3) = 11.$ $\quad a_{34} \Rightarrow 13 - 4(4) = -3.$

Substituindo os valores obtidos na matriz completa, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & -1 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$

Após finalizada a 1ª coluna, precisamos fazer o mesmo procedimento com a segunda coluna. Com isso, definimos a nova linha 2 como $L_2^{(1)}$ e a nova linha 3 como $L_3^{(1)}$. E então faremos a combinação agora entre $L_3^{(1)}$ e $L_2^{(1)}$, assim temos que substituir $L_3^{(1)}$ por:

$$L_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2^{(1)} = L_3^{(1)} - \frac{(-1)}{(-1)} L_2^{(1)} = L_3^{(1)} - L_2^{(1)}.$$

Logo, teremos as seguintes situações:
$a_{31}^{(1)} \Rightarrow 0 - 0 = 0.$ $\quad a_{32}^{(1)} \Rightarrow (-1) - (-1) = 0.$

$a_{33}^{(1)} \Rightarrow 11 - 10 = 1.$ $\quad a_{34}^{(1)} \Rightarrow (-3) - (-3) = 0.$

Substituindo os valores na matriz completa da etapa anterior, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & -1 & 11 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com o processo finalizado, pode-se perceber que transformamos a relativa a matriz A da matriz completa em uma matriz triangular superior, logo escalonada. Portanto, nesse momento podemos voltar a matriz expandida para a forma de sistema, porém um sistema diferente, mas equivalente ao sistema inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 & (I') \\ -y + 10z = -3 & (II') \\ z = 0 & (III') \end{cases}.$$

Assim, com métodos já conhecidos, como o da substituição por exemplo, é possível resolver as equações e obter os valores das incógnitas.

Iniciando por (III'), já é imediato o valor para a incógnita z: $(III'): z = 0$.

Agora, substituímos z em (II'), vem:

$$-y + 10(0) = -3$$
$$y = 3$$

E finalmente, substituímos y e z em (I'), e obtemos:

$$x + 2(3) - 3(0) = 4$$
$$x = -2$$

Com isso, conseguimos encontrar como única solução do sistema a tripla ordenada $(-2, 3, 0)$, que deve ser escrita na forma de um conjunto solução. Então, temos: $S = \{(-2,3,0)\}$.

Cálculo da Matriz inversa por escalonamento:

Uma das mais importantes técnicas para o cálculo da matriz inversa para matrizes de ordem maiores ou iguais a $3x3$, é o escalonamento, ou seja, faremos:

$$[A \quad |I] \rightarrow [I| \quad A^{-1}],$$

sendo I a matriz identidade.

Sabendo que a matriz inversa de uma matriz quadrada invertível, como visto na definição 8, tem a seguinte propriedade: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Podemos daí, utilizarmos o escalonamento para se obter a matriz inversa da matriz em questão. Tal procedimento começa pelo escalonamento da matriz dada, colocando tal matriz no lado esquerdo e a matriz identidade de mesma ordem ao lado direito, formando assim uma matriz ampliada.

O processo de escalonamento da matriz ampliada é inicialmente o mesmo processo que realizamos para a Eliminação Gaussiana, fazendo com que após os primeiros passos do processo a matriz A que está localizada a esquerda da matriz ampliada se torne uma matriz triangular superior. Em seguida, realizamos as permutações e/ou combinações necessárias para que a matriz A tenha a diagonal principal formada somente pelo número 1, tornando-se uma matriz identidade, que estará então do lado esquerdo da matriz ampliada. Como as mesmas operações elementares aplicadas a matriz A são aplicadas também a matriz identidade I, no final do processo, esta última será a matriz inversa no lado direito da nova matriz ampliada. A seguir, desenvolvemos este procedimento através do exemplo 55.

Exemplo 55: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha a sua inversa por escalonamento.

De acordo com o processo descrito anteriormente, precisamos escrever a matriz A de forma ampliada, para que possamos passar de $[A \quad |I] \to [I| \quad A^{-1}]$.

Então a matriz ampliada fica:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora precisamos realizar operações entre as linhas da matriz de modo que a esquerda tenhamos a matriz identidade.

Em primeiro momento precisamos fazer com que o elemento a_{21} seja nulo, então iremos permutar as linhas L_2 e L_1. Para que possamos fazer do elemento em questão o número 0 basta fazermos a substituição de L_2 por $L_2 + L_1$, teremos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Analisando ainda as mudanças necessárias para L_2, é necessário que o termo a_{22} seja igual a 1. E para tanto é mais conveniente que se faça a troca de posições entre L_2 e L_3. Daí, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Neste momento, passamos nossa análise para L_3, e podemos verificar que é necessário que o elemento a_{32} seja nulo. Para que isso aconteça, faremos a permutação entre L_3 e L_2, substituindo L_3 por $L_3 - 3L_2$, assim temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Portanto, para que a matriz a esquerda possa ser a matriz identidade é necessário que o elemento a_{33} seja igual a 1, o que não se verifica neste momento. Assim, faz-se necessário que realizemos a substituição de L_3 por ela mesma multiplicada por -1. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Para finalizarmos o processo e alcançarmos nosso objetivo precisamos que os elementos a_{13} e a_{23} sejam ambos iguais a zero. E para que isso aconteça, precisamos substituir L_1 pelo resultado de $L_1 - L_3$ e substituir L_2 pelo resultado de $L_2 - L_3$. Então teremos enfim:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Com isso, nosso objetivo de termos a matriz identidade no lado esquerdo foi atingido, portanto temos que a matriz que se encontra ao lado direito é a matriz inversa da matriz A dada.

Para verificarmos que a matriz encontrada é realmente a matriz inversa da matriz A, a qual denominaremos de A^{-1}, basta aplicar a definição 8, ou seja, basta realizarmos a multiplicação da matriz A pela matriz A^{-1} e observarmos se o resultado é a matriz identidade.

Então, temos:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2) + 0(1) + 1(-1) & 1(1) + 0(1) + 1(-1) & 1(-3) + 0(-2) + 1(3) \\ (-1)2 + 3(1) + 1(-1) & (-1)1 + 3(1) + 1(-1) & (-1)(-3) + 3(-2) + 1(3) \\ 0(2) + 1(1) + 1(-1) & 0(1) + 1(1) + 1(-1) & 0(-3) + 1(-2) + 1(3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos afirmar que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa da matriz A.

Uma aplicação de grande importância sobre matrizes inversas é que sabendo que A^{-1} existe e conhecendo-a podemos no sistema $Ax = b$ multiplicar ambos os lados por A^{-1} e assim teremos:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Ou seja, caso seja conhecida a matriz inversa A^{-1} da matriz A do sistema linear $Ax = b$, temos que a solução do sistema é dado por $x = A^{-1}b$.

Ainda em tempo, recorrendo ao sistema do exemplo 54, para definirmos a matriz inversa da matriz incompleta do sistema e comparando os resultados obtidos através da Eliminação Gaussiana e pela aplicação de matriz inversa, para comprovar que $x = A^{-1}b$.

Seja o sistema: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - z = 13 \end{cases}$, do exemplo 54.

Chamaremos de matriz A, a matriz dos coeficientes do sistema que é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o processo já descrito no exemplo 55, vamos escrever a matriz ampliada, utilizando a esquerda a matriz A e a direita a matriz identidade de mesma ordem.

Então, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como a primeira parte do processo é transformar a matriz A em uma matriz triangular superior e para isso precisamos fazer com que os elementos a_{21} e a_{31} sejam nulos. Para tal é possível que sejam utilizadas as combinações da resolução do sistema no exemplo 54, desde que sejam também estendidas para a matriz identidade a direita da matriz A.

Daí, temos que:

Para $L_2 \Rightarrow L_2 - 2L_1$.

Para $L_3 \Rightarrow \; L_3 - 4L_1$.

Substituindo, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nesse ponto ainda precisamos fazer com que o elemento a_{32} se torne nulo, e ainda podemos utilizar a combinação da resolução do sistema no exemplo 54, para a segunda coluna, lembrando-se sempre de estendê-la para a matriz a direita. E então temos:

Para $L_3 \Rightarrow L_3 - L_2$.

Assim, substituindo os valores na matriz ampliada da etapa anterior, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Para que os elementos da diagonal principal sejam todos iguais a 1, é necessária a seguinte combinação: $L_2 \Rightarrow (-1)L_2$.

Substituindo os valores, teremos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Agora para fazer com que o elemento a_{13} se torne nulo, vamos fazer a seguinte combinação: $L_1 \Rightarrow L_1 + 3L_3$.

Substituindo os valores na matriz ampliada, fica:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -10 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ainda na 3ª coluna é preciso fazer com que o elemento a_{23} também seja nulo, e para tal, faremos a seguinte combinação: $L_2 \Rightarrow L_2 + 10L_3$.

Substituindo novamente os valores encontrados na matriz ampliada, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Para finalizarmos o processo, falta somente fazermos com que o elemento a_{12} também se torne nulo, e para isso usaremos a combinação: $L_1 \Rightarrow L_1 - 2L_2$.

E finalmente, substituindo os valores na matriz ampliada anterior, teremos então:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 31 & 19 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Encontramos assim $A^{-1} = \begin{bmatrix} 31 & 19 & -17 \\ -18 & -11 & 10 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ como a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$. Que pode ser comprovado fazendo $AA^{-1} = I$.

Neste momento, conhecida a matriz inversa A^{-1}, vamos calcular a solução $x = A^{-1}b$, sendo x a matriz das incógnitas e b a matriz dos termos independentes do sistema, daí vem:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 19 & -17 \\ -18 & -11 & 10 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação indicada no 2º membro da equação, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31(4) + 19(5) + (-17)(13) \\ (-18)(4) + (-11)(5) + 10(13) \\ (-2)(4) + (-1)(5) + 1(13) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124 + 95 - 221 \\ -72 - 55 + 130 \\ -8 - 5 + 13 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pela igualdade de matrizes já definida no capítulo 1 deste trabalho, podemos afirmar que a solução deste sistema é dada pela tripla ordenada $(-2,3,0)$ a mesma encontrada na resolução pelo método da Eliminação Gaussiana.

Fatoração LU

Podemos dizer que temos a fatoração de um número real quando conseguimos reescrevê-lo na forma de uma multiplicação de dois ou mais números naturais. Por conseguinte, chamamos esses números de fatores. Em matrizes, para ter a fatoração de uma matriz A é necessário também que se consiga reescrevê-la na forma de uma multiplicação de outras duas matrizes.

Chamamos de Fatoração LU, o processo de transformar a matriz A no produto de duas matrizes L e U, ou seja, $A = LU$, sSendo que L é uma matriz triangular inferior e com diagonal principal unitária, e U é uma matriz triangular superior, como podemos ver a seguir:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ l_{n-1,1} & \cdots & l_{n-1,n-2} & & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \cdots & u_{n1} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots \ \ddots & \vdots \\ 0 \ \cdots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 \ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, temos que:

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow L(Ux) = b \tag{2.1}$$

Tomando a expressão Ux, como y, temos $Ux = y$, então $Ly = b$. Sendo as matrizes L e U escalonadas, fica simples resolver as equações, desde que resolvamos primeiro o sistema $Ly = b$, e assim obtemos a matriz coluna y. Por fim, resolvemos $Ux = y$ e, dessa maneira, teremos resolvido o sistema linear proposto.

Utilizando-se um sistema genérico $3x3$ para exemplificar, temos através da Fatoração LU :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se da regra da multiplicação de matrizes já vista no capítulo anterior, chegamos à:

$u_{11} = a_{11}; u_{12} = a_{12}; u_{13} = a_{13};$

$l_{21}(u_{11}) = a_{21} \Rightarrow l_{21}(a_{11}) = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}};$

$l_{21}(u_{12}) + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{12}) = a_{22}^{(1)};$

$l_{21}(u_{13}) + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{13}) = a_{23}^{(1)};$

$l_{31}(u_{11}) = a_{31} \Rightarrow l_{31}(a_{11}) = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}};$

$l_{31}(u_{12}) + l_{32}(u_{22}) = a_{32} \Rightarrow \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{12}) + l_{32}\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{12})\right) = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{12})}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{12})} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};$

$l_{31}(u_{13}) + l_{32}(u_{23}) + u_{33} = a_{33} \Rightarrow \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{13}) + \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{23}^{(1)}\right) + u_{33} = a_{33} \Rightarrow \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{23}^{(1)}\right) + u_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{13}) \Rightarrow \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{23}^{(1)}\right) + u_{33} = a_{33}^{(1)} \Rightarrow u_{33} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\left(a_{23}^{(1)}\right) = a_{33}^{(2)}.$

Podemos verificar então que os elementos necessários para a construção das matrizes L e U são obtidos por escalonamento da matriz A; onde a matriz U é a matriz A escalonada, e a matriz L é formada pelas razões utilizadas nas combinações calculadas durante o escalonamento.

A grande diferença existente entre a Fatoração LU e a Eliminação Gaussiana é a ausência da matriz b no escalonamento. Assim, a cada combinação linear feita para que um elemento seja anulado, temos uma multiplicação e uma adição a menos a ser efetuada. Por outro lado, ao invés de resolvermos somente um sistema, resolveremos dois sistemas triangulares, após ser feito o escalonamento.

Para entendermos na prática sobre a Fatoração LU.

Exemplo 56: Seja o sistema linear: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

Sabendo que este é um sistema $Ax = b$, e escrevendo na sua forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, temos por objetivo primeiro determinar $A = LU$, ou seja, determinar as matrizes L e U.

Utilizando a Eliminação Gaussiana vista no item anterior, iremos escalonar nossa matriz dos coeficientes, que aqui chamaremos de matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Precisamos inicialmente anular os elementos da 1ª coluna a_{21}e a_{31}. Utilizando a combinação $L_j - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} L_k$, substituiremos L_2 por essa combinação entre L_1 e L_2 e substituiremos L_3 pela mesma combinação, porém entre L_1e L_3.

Assim sendo, temos para L_2:

$$L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \Rightarrow L_2 - \frac{2}{1} L_1 \Rightarrow L_2 - 2L_1.$$

Então:

$a_{21} \Rightarrow 2 - 2(1) = 0. \quad a_{22} \Rightarrow -1 - 2(-2) = 3. \quad a_{23} \Rightarrow 4 - 2(1) = 2.$

Já para L_3 teremos:

$$L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \Rightarrow L_3 - \frac{3}{1} L_1 \Rightarrow L_3 - 3L_1.$$

$a_{31} \Rightarrow 3 - 3(1) = 0. \quad a_{32} \Rightarrow -3 - 3(-2) = 3. \quad a_{33} \Rightarrow 2 - 3(1) = -1.$

Substituindo os valores obtidos na matriz A, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Porém ainda é necessário anular o elemento a_{32} da 2ª coluna. Portanto, chamemos a nova linha 2 de $L_2^{(1)}$ e a nova linha 3 de $L_3^{(1)}$. E realizamos a combinação linear entre elas. Daí, vem:

$$L_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2^{(1)} \Rightarrow L_3^{(1)} - \frac{3}{3} L_2^{(1)} \Rightarrow L_3^{(1)} - L_2^{(1)}.$$

Então fazendo as operações necessárias, teremos:

$a_{31}^{(1)} \Rightarrow 0 - 0 = 0. \quad a_{32}^{(1)} \Rightarrow 3 - 3 = 0. \quad a_{33}^{(1)} \Rightarrow -1 - 2 = -3.$

Substituindo os valores na matriz da etapa anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como chegamos em uma matriz triangular superior, podemos afirmar que ela é a matriz U da fatoração.

Precisamos então determinar a matriz L, e para isso utilizaremos as relações obtidas anteriormente, através da multiplicação das matrizes. Assim sendo, temos que:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, vem:

$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \Rightarrow l_{21} = \frac{2}{1} \Rightarrow l_{21} = 2.$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \Rightarrow l_{31} = \frac{3}{1} \Rightarrow l_{31} = 3.$

$l_{32} = \frac{a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{12})}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{12})} \Rightarrow l_{32} = \frac{-3 - \frac{3}{1}(-2)}{-1 - \frac{2}{1}(-2)} \Rightarrow l_{32} = \frac{-3+6}{-1+4} \Rightarrow l_{32} = \frac{3}{3} = 1.$

Sendo assim, temos a matriz $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Com esse processo concluído, temos então a Fatoração LU da matriz A, ou seja, temos que:

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora, é possível determinarmos a solução do sistema linear, sabendo que o sistema $Ax = b$ equivale a sua fatoração $LUx = b$. Daí, vem a seguinte situação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Porém da fatoração da matriz A, podemos escrever que (2.1), e considerando $Ux = y$, chegamos em $Ly = b$.

Fazendo $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

Teremos como resultado, $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial acima na forma de um sistema de equações, fica:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \ \ (I') \\ 2y_1 + y_2 = 7 \ \ (II') \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 5 \ \ (III') \end{cases}$$

Diferente do que vimos ao resolver um sistema escalonado, onde começamos a resolução da última equação até finalizar com a primeira equação, neste caso é conveniente começarmos da primeira equação devido a facilidade de se encontrar o valor da incógnita y_1 na mesma, e assim continuamos a resolução em ordem crescente das posições das equações até finalizarmos com a última.

Através da equação (I'), já temos definido que $y_1 = 1$. Então, faremos sua substituição na equação (II'):

$$2(1) + y_2 = 7$$
$$y_2 = 5$$

Finalizando, substituímos os valores de y_1e y_2 obtidos anteriormente na equação (III'):

$$3(1) + 5 + y_3 = 5$$
$$y_3 = -3$$

Com isto, concluímos que a matriz y é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para enfim concluir o processo de resolução do sistema linear pela Fatoração LU, basta resolver agora a equação $U(x) = y$, que é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial acima na forma de um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \ \ (I") \\ 3x_2 + 2x_3 = 5 \ \ (II") \\ -3x_3 = -3 \ \ (III") \end{cases}$$

No entanto, o sistema agora encontrado está na forma escalonada, então sua resolução segue os passos já descritos no item correspondente.

Resolvendo então a equação $(III")$, temos:

$$x_3 = 1$$

Substituindo o valor encontrado para x_3 na equação $(II")$ é possível encontrar o valor de x_2, então:

$$3x_2 + 2(1) = 5$$
$$x_2 = 1$$

Depois de encontrados os valores de x_2 e x_3, substituindo-os na equação $(I")$ encontraremos finalmente o valor de x_1:

$$x_1 - 2(1) + 1 = 1$$
$$x_1 = 2$$

A solução do nosso sistema, é, $S = \{(2,1,1)\}$.

Fatoração LU com pivoteamento parcial:

Para se resolver um sistema linear por Fatoração LU é possível e em alguns casos necessário que se utilize a técnica de pivoteamento parcial, que consiste em escolher um coeficiente de maior módulo entre os coeficientes da coluna na qual estamos anulando alguns elementos para que seja um pivô, e utilizar a permutação de linhas do sistema linear para realizar este procedimento.

Associando as duas técnicas, podemos resolver o sistema $Ax = b$ para que possa ser fatorado na forma LU. Tomando um tipo de matriz elementar que é chamada de matriz permutação, que consiste em uma matriz identidade que teve suas linhas com as posições trocadas e indicando-a por P_{ij}, onde i e j indicam as linhas da matriz identidade que tiveram suas posições trocadas entre si.

Uma forma de nos ajudar a visualizar melhor como funciona a estratégia do pivoteamento parcial é escrever tal transformação da seguinte forma:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ e a matriz permutação $P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Lembrando que a matriz P_{13} é a matriz identidade com a primeira e a terceira linha trocadas.

Ao se multiplicar as matrizes A e P_{13}, estamos realizando necessariamente a troca de posição entre as linhas 1 e 3 da matriz A.

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

Tomando o sistema $Ax = b$, ao realizarmos as permutações necessárias das linhas da matriz A, obtemos a matriz $A' = PA$, onde P é o resultado da multiplicação entre as matrizes de permutação utilizadas no processo de escalonamento. Para que tenhamos um sistema linear equivalente ao sistema original é necessário a multiplicação de P em ambos os termos do sistema $Ax = b$, então devemos ter $PAx = Pb$. Com isto, para se aplicar o método da Fatoração LU com o pivoteamento parcial, precisaremos que $A' = LU$, $Ly = Pb$ e $Ux = y$.

Exemplo 57: Tomemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

A primeira coisa que precisamos fazer é escrever esse sistema na sua forma matricial, então:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos a Fatoração LU com pivoteamento parcial na matriz dos coeficientes, ou seja, na matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Para a primeira coluna, vamos escolher como pivô o coeficiente 4, pois é o de maior módulo. Então precisamos realizar a permutação entre as linhas 1 e 3, e ficamos com:

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$, que chamaremos de $A^{(1)}$.

Agora, utilizaremos o 4 como pivô para podermos anularmos os dois termos abaixo dele na primeira coluna, ou seja, os elementos a_{21} e a_{31} da matriz $A^{(1)}$. Utilizando da combinação linear que já usamos em tópicos anteriores que é $L_j - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} L_k$, teremos para a combinação de L_1 e L_2 na matriz $A^{(1)}$:

$$L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \Rightarrow L_2 - \frac{1}{4} L_1.$$

E, para a combinação de L_1 e L_3 na matriz $A^{(1)}$, temos:

$$L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \Rightarrow L_3 - \frac{3}{4} L_1.$$

Sendo assim, para L_2 temos:

$a_{21} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}(4) = 1 - 1 = 0.$

$a_{22} \Rightarrow 2 - \frac{1}{4}(0) = 2 - 0 = 2.$

$a_{23} \Rightarrow 2 - \frac{1}{4}(-3) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}.$

E para L_3 temos:

$a_{31} \Rightarrow 3 - \frac{3}{4}(4) = 3 - 3 = 0.$

$a_{32} \Rightarrow -4 - \frac{3}{4}(0) = -4 - 0 = -4.$

$a_{33} \Rightarrow 1 - \frac{3}{4}(-3) = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}.$

Daí, teremos então:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} \\ 0 & -4 & \frac{13}{4} \end{bmatrix}.$$

Neste momento, ainda se faz necessário que seja anulado um elemento na segunda coluna. Analisando a matriz $A^{(2)}$, dos elementos da segunda coluna o que possui o maior módulo é o -4. Portanto, ele será o nosso novo pivô. Então precisamos realizar a permutação entre as linhas 2 e 3, e assim teremos:

$$P_{23}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} \\ 0 & -4 & \frac{13}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & \frac{13}{4} \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} \end{bmatrix}.$$

Então, temos o que chamaremos de matriz $A^{(3)}$.

Utilizando o -4 como pivô, iremos realizar a combinação linear entre L_2 e L_3 da matriz $A^{(3)}$ com o intuito de anularmos o elemento a_{32} da mesma. Doravante, teremos a seguinte combinação:

$$L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} L_2 \Rightarrow L_3 - \frac{2}{(-4)} L_2 \Rightarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2.$$

Sendo assim, vem:

$\boldsymbol{a_{31} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}(0) = 0 + 0 = 0}.$

$\boldsymbol{a_{32} \Rightarrow 2 + \frac{1}{2}(-4) = 2 - 2 = 0}.$

$\boldsymbol{a_{33} \Rightarrow \frac{11}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{11}{4} + \frac{13}{8} = \frac{35}{8}}.$

Assim, teremos a matriz $\mathbf{A^{(4)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{\frac{13}{4}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{35}{8}} \end{bmatrix}$, que corresponde a matriz $\boldsymbol{U}$ na Fatoração $\boldsymbol{LU}$.

Depois de determinar a matriz $\boldsymbol{U}$, é preciso temabém se determinar a matriz $\boldsymbol{L}$. Porém para que possamos determinar a matriz $\boldsymbol{L}$, precisamos lembrar que estamos fazendo a fatoração da matriz $\boldsymbol{A'}$ após realizadas as permutações necessárias.

Então, depois de encontrarmos a matriz $\boldsymbol{U}$, utilizamos as matrizes de permutação utilizadas no processo para que possamos determinar a matriz $\boldsymbol{P}$, tendo em vista que a matriz $\boldsymbol{P}$ é o resultado da multiplicação entre as matrizes $\boldsymbol{P_{ij}}$ utilizadas em ordem inversa à que aparecem e que a matriz $\boldsymbol{A'}$ a ser fatorada é igual a $\boldsymbol{PA}$.

Entretanto, como utilizamos para a primeira etapa a matriz $\boldsymbol{P_{13}}$ e para a segunda etapa a matriz $\boldsymbol{P_{23}}$ no processo de escalonamento com pivoteamento parcial, e a matriz $\boldsymbol{P}$ é o resultado da multiplicação entre essas matrizes de permutação em ordem inversa, temos que:

$$\boldsymbol{P = P_{23}(P_{13}) \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}.$$

E daí vem que a matriz $\boldsymbol{A'}$ é:

$$\boldsymbol{A' = PA \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}.$$

Portanto, para se encontrar a matriz $\boldsymbol{L}$, é preciso utilizarmos as relações do tópico anterior, porém utilizando agora os elementos da matriz $\boldsymbol{A'}$.

Sendo a matriz $\boldsymbol{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{31} & 1 \end{bmatrix}}$ e a matriz $\boldsymbol{A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$, teremos então:

$\boldsymbol{l_{21} = \frac{a'_{21}}{a'_{11}} \Rightarrow l_{21} = \frac{3}{4}}$.

$\boldsymbol{l_{31} = \frac{a'_{31}}{a'_{11}} \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{4}}$.

$\boldsymbol{l_{32} = \dfrac{a'_{32} - \frac{a'_{31}}{a'_{11}}(a'_{12})}{a'_{22} - \frac{a'_{21}}{a'_{11}}(a'_{12})} \Rightarrow l_{32} = \dfrac{2 - \frac{1}{4}(0)}{(-4) - \frac{1}{4}(0)} \Rightarrow l_{32} = -\frac{1}{2}}$.

Logo, a matriz $\boldsymbol{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}$.

Como já foi dito no início deste tópico, para que tenhamos um sistema equivalente ao original, temos que multiplicar por $\boldsymbol{P}$ ambos os termos do sistema $\boldsymbol{Ax = b}$, então temos:

$$\boldsymbol{PAx = Pb \Rightarrow A'x = Pb \Rightarrow LUx = Pb \Rightarrow \ Ly = Pb \ e \ Ux = y}.$$

Como no sistema original temos que $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, para determinarmos $\boldsymbol{Pb}$, basta multiplicar a matriz $\boldsymbol{P}$ pela matriz $\boldsymbol{b}$, e teremos:

$$\boldsymbol{Pb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Pb} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos as seguintes matrizes:

$$\boldsymbol{Pb} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}; \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix}.$$

Num primeiro momento, vamos resolver $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{Pb}$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial na forma de um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} y_1 = -2 \ \ (I') \\ \frac{3}{4}y_1 + y_2 = 9 \ \ (II') \\ \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 3 \ \ (III') \end{cases}$$

Por ser mais conveniente, neste sistema iniciaremos sua resolução de cima para baixo, ou seja, da primeira para a última equação.

Na equação (I') é imediato o valor de y_1, então temos $y_1 = -2$. De posse deste valor, faremos sua substituição em (II'), assim:

$$\frac{3}{4}(-2) + y_2 = 9$$
$$y_2 = \frac{21}{2}$$

Finalmente, substituindo os valores de y_1 e y_2 na equação (III'), temos:

$$\frac{1}{4}(-2)-\frac{1}{2}\left(\frac{21}{2}\right)+y_3=3$$
$$y_3=\frac{35}{4}$$

Sendo assim, chegamos a matriz $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-2\\ \frac{21}{2}\\ \frac{35}{4}\end{bmatrix}$.

Daí, conseguimos agora resolver o sistema $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$.

Então, temos:

$$\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ 0 & -4 & \frac{13}{4}\\ 0 & 0 & \frac{35}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ \frac{21}{2}\\ \frac{35}{4}\end{bmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial na forma de um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases}4x_1-3x_3=-2 & (I")\\ -4x_2+\frac{13}{4}x_3=\frac{21}{2} & (II")\\ \frac{35}{8}x_3=\frac{35}{4} & (III")\end{cases}$$

Já neste sistema é mais conveniente começarmos sua resolução pela equação $(III")$, daí:

$$x_3=2$$

Substituindo o valor encontrado para x_3 na equação $(II")$, temos:

$$-4x_2+\frac{13}{4}(2)=\frac{21}{2}$$
$$x_2=-1$$

Por fim, fazemos a substituição do valor de x_3 na equação $(I")$, já que o coeficiente de x_2 nesta equação é igual a zero, e assim encontramos o valor da incógnita x_1 que é a que nos falta:

$$\mathbf{4x_1 - 3(2) = -2}$$
$$\mathbf{x_1 = 1}$$

Logo, o sistema em questão tem como solução $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})\}$.

Eliminação Gaussiana x Fatoração LU:

Faz-se necessário neste ponto uma análise sobre as vantagens e desvantagens de cada um dos métodos diretos, e assim temos que:

> *“O método da Eliminação de Gauss é o mais simples para a solução de equações. O método de Gauss possui várias características que o tornam interessantes, mesmo que haja métodos mais eficientes. Uma característica interessante do método é que quando aplicado para resolver um conjunto de equações lineares, a eliminação de Gauss produz tanto a solução das equações (para um ou mais vetores de termos independentes) quanto a inversa da matriz A. Outra característica importante é que o método é tão estável quanto outro método direto, desde que seja empregado o pivoteamento. Por outro, possui algumas deficiências como: se a matriz inversa não for desejada, a eliminação de Gauss é tipicamente 3 (três) vezes mais lenta que a melhor alternativa disponível.*
> *O método de decomposição LU apresenta como vantagem a solução de um sistema triangular trivial. Dessa forma, o sistema é resolvido por substituição para frente e substituição para trás.*
> *O número de operações necessárias para efetuar a decomposição é da ordem de* $\frac{1}{3n}^{3}$, *exatamente o mesmo número de passos necessários para fazer a eliminação de Gauss. Na literatura, frequentemente cita-se uma vantagem da decomposição LU que é o fato de que uma vez tendo-se L e U é trivial obter a solução para um número arbitrário de vetores de termos independentes (ou seja, resolve-se facilmente um conjunto de sistema de equações lineares). Entretanto, o mesmo procedimento pode ser feito de forma igualmente eficiente a partir do procedimento de solução simultânea de várias equações matriciais.*
> *Então, dos métodos diretos pode-se concluir que o método da Eliminação de Gauss e o método da Decomposição LU são igualmente eficientes quando se trata de resolver um sistema de equações lineares, ou um conjunto de sistemas de equações lineares.”* (BENTES,2017)

Como vimos, ambos os métodos diretos que são objeto de estudo no escopo deste trabalho, são igualmente eficientes na resolução de sistemas lineares; porém não é nosso objetivo apontar qual deles é o melhor e sim trazer mais opções de solução de sistemas lineares, para possibilitar que o aluno tenha mais abrangência de conhecimentos deste assunto, para que seu aprendizado seja amplo e significativo.

2.2 - Métodos Iterativos

Vamos abordar aqui os métodos iterativos de Jacobi e o de Gauss-Siedel. Estes métodos são muito utilizados para obter a solução de sistemas com um número muito grande de equações e incógnitas e/ou sistemas esparsos, ou seja, com muitas entradas de zeros na matriz do sistema linear.

Convergência de métodos iterativos

Os métodos iterativos de solução de sistemas lineares, que diferente dos métodos diretos, não encontram a solução diretamente, mas gera uma sequência de vetores que são denotadas por $\{\overrightarrow{x^{(k)}}\}$, através de uma fórmula recursiva, desde que dada uma aproximação inicial $\overrightarrow{x^{(0)}}$, que pode convergir ou não para uma solução, caso essa exista. No caso de convergir, essa sequência tende a uma solução quando $k \rightarrow \infty$.

Os vetores aqui mencionados são elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, os quais são definidos adequadamente, por exemplo, nos livros (ANTON, 2012; STEINBRUCH e WINTERLE, 2013). Nesta dissertação, os vetores serão entendidos como matrizes coluna, conforme a classificação enunciada no Capítulo 1.

É preciso a transformação do sistema $Ax = b$ em uma nova forma matricial, de modo que tenhamos $x = f(x)$, onde f é uma função matricial. Isto é necessário para que exista um processo iterativo. Por exemplo, podemos definir a matriz $B = A + I \Rightarrow A = B - I$, sendo I a matriz identidade. Daí, temos:

$$Ax = b \Rightarrow (B - I)x = b \Rightarrow Bx - x = b \Rightarrow x = Bx - b,$$

Assim, teremos que a fórmula recursiva, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$, pode ser dada por:

$$x^{(k+1)} = B\left(x^{(k)}\right) - b$$

Ainda assim, não existe garantia de que haja convergência para tal sequência de vetores, quando tomada a função matricial $f(x) = Bx - b$.

Como vimos no exemplo anterior, precisamos, portanto, encontrar duas matrizes que aqui chamaremos de C e g, sendo a matriz C de ordem n, e a matriz g de ordem $nx1$, de modo que utilizando a fórmula recursiva teremos:

$$x^{(k+1)} = C\left(x^{(k)}\right) + g,$$

Dessa forma, quando cumprido um critério de convergência, temos garantida a obtenção da solução quando $k \to \infty$.

Mais adiante mostraremos qual deve ser o formato das matrizes C e g.

É necessário que determinemos o vetor $x^{\overrightarrow{(0)}}$, no qual iniciará a sequência, devido a que se trata de uma fórmula recursiva, então o termo seguinte depende do anterior. Também mostraremos mais adiante como será feita essa escolha.

O Teorema 6 estabelece a condição suficiente para a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Definição 23: *Um número real λ é um **autovalor da matriz A** se existir um vetor $\vec{u}$ não nulo tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.*

Para exemplificar a Definição 23, consideramos o Exemplo 58, com a devida observação que a definição se aplica a matrizes de ordem n.

Exemplo 58: *Seja λ um autovalor da matriz A de ordem 2. Um vetor $\vec{u} = (x, y)$ é um **autovetor de A relativo ao autovalor** λ se $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, ou seja,*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - a_{11})x - a_{12}y = 0 \\ -a_{21}x + (\lambda - a_{22})y = 0 \end{cases}.$$

Teorema 6: *Sendo λ_i os autovalores da matriz C. Se $max|\lambda_i| < 1$, então, a sequência de iterações converge, independente de qual foi a escolha feita para $x^{\overrightarrow{(0)}}$.*

O estudo sobre este Teorema pode ser aprofundado em (FRANCO, 2006).

Critérios de parada dos métodos iterativos:

Sabendo que podem ser demorados os processos de convergência à solução, são adotados critérios de parada para as soluções pelos métodos iterativos, porque queremos encontrar uma solução numérica que tenha aproximação em algum momento. Podendo, por exemplo, serem adotados três critérios:

i. **Teste do erro absoluto:** Podemos ir repetindo o processo de interação até o ponto onde o vetor $\overrightarrow{x^{(k)}}$ esteja próximo o suficiente do vetor $\overrightarrow{x^{(k-1)}}$. Para tanto, basta calcularmos a distância entre os respectivos termos de $\overrightarrow{x^{(k)}}$ e $\overrightarrow{x^{(k-1)}}$, determinando $d_i^{(k)} = \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$. Tal distância é dada por:

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n}\left\{d_i^{(k)}\right\}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, o processo é encerrado quando $d^{(k)} < \varepsilon$.

ii. **Teste do erro relativo:** De modo similar ao teste anterior, calculamos $d^{(k)}$. Encerramos as interações no momento em que, dado $\varepsilon > 0$, teremos que a distância relativa, é dada por:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \le i \le n}\left\{\left|x_i^{(k)}\right|\right\}},$$

que é menor que a precisão ε estipulada.

iii. **Número máximo de iterações:** Estipulamos um número máximo de iterações, que são interrompidas quando o número estipulado é atingido. Entretanto, determinar o número máximo de interações como critério de parada não faz com que esteja garantida uma aproximação satisfatória, devido ao fato de que a rapidez em que acontece a convergência varia de um sistema para outro.

No teste do erro relativo, ao dividir o erro absoluto pelo módulo da maior das variáveis da última aproximação encontrada, calculamos este erro como uma percentagem do valor da variável. Dessa forma, podemos perceber o quão incorreto é o valor calculado quando comparado ao valor correto naquele instante.

Portanto, ao realizarmos a resolução de sistemas através dos métodos interativos, será utilizado o **teste do erro relativo** como critério de parada.

Passaremos agora a descrever cada um dos dois métodos que são objetos de estudo deste tópico.

Método de Jacobi

Sendo o Sistema linear nxn representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para encontrarmos a fórmula de recorrência no método de Jacobi, basta isolar a incógnita x_i na $i - ésima$ linha $i \in \{1, \cdots, n\}$, admitindo o termo $a_{ii} \neq 0$. Desta forma, podemos reescrever o sistema linear nxn como a seguir:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - \cdots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n = \dfrac{b_n - a_{1n}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Então, a fórmula de recorrência é dada por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k)} + a_{n-1,n}x_n^{(k)}}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

É possível detectar que, a cada linha, é preciso a divisão pelo termo da diagonal principal correspondente a linha respectiva. Por isso é necessário que nenhum a_{ii} seja nulo. Para garantir essa condição, sabemos que trocas entre linhas ou colunas são permitidas, para colocar a matriz A da forma satisfatória.

Escrevendo na forma matricial $x^{(k+1)} = C\left(x^{(k)}\right) + g$, termos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n-1}} & \cdots & -\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & 0 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Entretanto, utilizaremos um método diferente do citado no Teorema 6 para garantir a convergência pelo método de Jacobi.

Teorema 7: (Critério das linhas) *Seja o sistema linear* $Ax = b$ *e seja* $\alpha_k = \dfrac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\right)}{|a_{kk}|}$. *Se* $\alpha = \max\limits_{1\leq k\leq n}\{\alpha_k\} < 1$, *então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência* $\{x^{(k)}\}$ *convergente para solução do sistema dado independente da escolha da aproximação inicial,* $x^{(0)}$.

Os detalhes da demonstração do Teorema 7 podem ser encontrados em (RUGGIERO, 2010).

Exemplo 59: Seja o sistema linear $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$, temos que a matriz A deste sistema é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Como $\alpha_k = \frac{(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|)}{|a_{kk}|}$, temos então:

$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3 < 1.$

$\alpha_2 = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4 < 1.$

$\alpha_3 = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5 < 1.$

Portanto, como temos $\max_{1\leq k\leq 3}\{\alpha_k\} = 0{,}5 < 1$, pelo Teorema 7, temos garantida a convergência para o método de Jacobi.

É importante lembrar que tal critério de convergência é suficiente para que a sequência de vetores convirja para a solução, porém não é necessário.

Resolvendo o sistema linear utilizado no exemplo acima pelo método de Jacobi, teremos a seguinte situação:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - 2x_2 - x_3}{10} \\ x_2 = \dfrac{-8 - x_1 - x_3}{5} \\ x_3 = \dfrac{6 - 2x_1 - 3x_2}{10} \end{cases}$$

Obtendo, a fórmula de iteração, fica:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{7 - 2x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{10} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{-8 - x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{5} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{6 - 2x_1^{(k-1)} - 3x_2^{(k-1)}}{10} \end{cases}$$

Na forma matricial $x^{(k)} = C\left(x^{(0)}\right) + g$, onde

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{-8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix}.$$

Considerando o erro relativo máximo $\varepsilon = 0{,}05$ e a aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{10} = \dfrac{7 - 2(0) - 0}{10} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7. \\ x_2^{(1)} = \dfrac{-8 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}}{5} = \dfrac{-8 - 0 - 0}{5} = -\dfrac{8}{5} = -1{,}6. \\ x_3^{(1)} = \dfrac{6 - 2x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)}}{10} = \dfrac{6 - 2(0) - 3(0)}{5} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Calculando o erro absoluto de cada elemento de $x^{(1)}$, vem:

$d_1^{(1)} = \left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |0{,}7 - 0| = 0{,}7.$

$d_2^{(1)} = \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |-1{,}6 - 0| = 1{,}6.$

$d_3^{(1)} = \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0{,}6 - 0| = 0{,}6.$

$$d^{(1)} = \max_{1 \le i \le 3}\left\{d_i^{(1)}\right\} = 1{,}6.$$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(1)} = \frac{d^{(1)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3}\left|x_i^{(1)}\right|} \Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{1{,}6}{1{,}6} = 1 > \varepsilon.$$

Como $1 > \varepsilon$, precisamos continuar as iterações até que obtenhamos $d_r^{(k)} < \varepsilon$. Então:

Para $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{7 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{10} = \dfrac{7 - 2(-1{,}6) - 0{,}6}{10} = \dfrac{9{,}6}{10} = 0{,}96. \\ x_2^{(2)} = \dfrac{-8 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}}{5} = \dfrac{-8 - 0{,}7 - 0{,}6}{5} = -\dfrac{9{,}3}{5} = -1{,}86. \\ x_3^{(2)} = \dfrac{6 - 2x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}}{10} = \dfrac{6 - 2(0{,}7) - 3(-1{,}6)}{10} = \dfrac{9{,}4}{10} = 0{,}94. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}.$$

Calculando o erro absoluto, vem:

$d_1^{(2)} = \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0{,}96 - 0{,}7| = 0{,}26.$

$d_2^{(2)} = \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |-1{,}86 - (-1{,}6)| = 0{,}26.$

$d_3^{(2)} = \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0{,}94 - 0{,}6| = 0{,}34.$

$d^{(2)} = \max\limits_{1 \le i \le 3}\left\{d_i^{(2)}\right\} = 0{,}34.$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(2)} = \frac{d^{(2)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3}\left|x_i^{(2)}\right|} \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0{,}34}{1{,}86} = 0{,}182795 \ldots > \varepsilon.$$

Precisamos continuar as interações, pois $d_r^{(2)} > \varepsilon$.

Para $k = 3$:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{7 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}}{10} = \dfrac{7 - 2(-1{,}86) - 0{,}94}{10} = \dfrac{9{,}78}{10} = 0{,}978. \\ x_2^{(3)} = \dfrac{-8 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}}{5} = \dfrac{-8 - 0{,}96 - 0{,}94}{5} = -\dfrac{9{,}9}{5} = -1{,}98. \\ x_3^{(3)} = \dfrac{6 - 2x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}}{10} = \dfrac{6 - 2(0{,}96) - 3(-1{,}86)}{10} = \dfrac{9{,}66}{10} = 0{,}966. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ -1{,}98 \\ 0{,}966 \end{bmatrix}.$$

Calculando o erro absoluto, vem:

$d_1^{(3)} = \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0{,}978 - 0{,}96| = 0{,}018.$

$d_2^{(3)} = \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1{,}98 - (-1{,}86)| = 0{,}12.$

$d_3^{(3)} = \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0{,}966 - 0{,}94| = 0{,}026.$

$d^{(3)} = \max\limits_{1 \le i \le 3}\{d_i^{(3)}\} = 0{,}12.$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(3)} = \frac{d^{(3)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(3)} \right|} \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0{,}12}{1{,}98} = 0{,}060606 \ldots > \varepsilon.$$

Vamos continuar as iterações, pois $d_r^{(3)} > \varepsilon$.

Para $k = 4$:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \dfrac{7 - 2x_2^{(3)} - x_3^{(3)}}{10} = \dfrac{7 - 2(-1{,}98) - 0{,}966}{10} = \dfrac{9{,}994}{10} = 0{,}9994. \\ x_2^{(4)} = \dfrac{-8 - x_1^{(3)} - x_3^{(3)}}{5} = \dfrac{-8 - 0{,}978 - 0{,}966}{5} = -\dfrac{9{,}944}{5} = -1{,}9888. \\ x_3^{(4)} = \dfrac{6 - 2x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)}}{10} = \dfrac{6 - 2(0{,}978) - 3(-1{,}98)}{10} = \dfrac{9{,}984}{10} = 0{,}9984. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}9984 \end{bmatrix}.$$

Calculando o erro absoluto, vem:

$d_1^{(4)} = \left| x_1^{(4)} - x_1^{(3)} \right| = |0{,}9994 - 0{,}978| = 0{,}0214.$

$d_2^{(4)} = \left| x_2^{(4)} - x_2^{(4)} \right| = |-1{,}9888 - (-1{,}98)| = 0{,}0088.$

$d_3^{(4)} = \left| x_3^{(4)} - x_3^{(3)} \right| = |0{,}9984 - 0{,}966| = 0{,}0324.$

$d^{(4)} = \max\limits_{1 \le i \le 3} \{d_i^{(4)}\} = 0{,}0324.$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(4)} = \frac{d^{(4)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(4)} \right|} \Rightarrow d_r^{(4)} = \frac{0{,}0324}{1{,}9888} = 0{,}0162912 \ldots < \varepsilon.$$

Como encontramos $d_r^{(k)} < \varepsilon$, podemos dizer que uma solução aproximada $\overline{x}$ do sistema linear, com erro menor que 0,05, pelo método de Jacobi, é:

$$\overline{x} = x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}9984 \end{bmatrix},$$

que escrito na forma de conjunto solução fica: $S = \{(0{,}9994; -1{,}9888; 0{,}9984)\}$.

É possível observar que essa solução está muito próxima da solução exata do sistema que é $S = \{(1, -2{,}1)\}$.

Método de Gauss-Seidel

Assim como no método de Jacobi, também no método de Gauss-Seidel, temos que o sistema linear $Ax = b$ pode ser escrito na forma $x = Cx + g$.

Ambos os métodos possuem estruturas análogas, porém no método de Gauss-Seidel, ao calcularmos o termos $x_j^{(k+1)}$, levamos em consideração os termos $x_i^{(k+1)}$ já calculados anteriormente.

Assim sua fórmula de recursão é dada por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Também, é possível escrever a fórmula recursiva em seu formato matricial, no entanto para isso é preciso dividir a matriz A do sistema em 3 partes, sendo elas:

- Matriz L: É uma matriz triângular inferior, que possui sua diagonal principal nula, e corresponde aos elementos que vão ser aplicados ao vetor $x^{(k+1)}$;

- Matriz D: É uma matriz diagonal, com os elementos de sua diagonal principal não nulos, e todos os outros elementos nulos;

- Matriz R: É uma matriz triângular superior, que possui diagonal principal nula, e corresponde aos elementos que vão ser aplicados ao vetor $x^{(k)}$.

Assim, podemos afirmar que a matriz $A = L + D + R$.

Exemplo 60: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, considerando o que foi dito acima, temos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Substituindo no sistema, temos:

$$Ax = b \Rightarrow (L + D + R)x = b \Rightarrow Dx = b - Lx - Rx \Rightarrow x = D^{-1}b - D^{-1}(Lx) - D^{-1}(Rx).$$

Sabendo que a matriz L será aplicada ao vetor $x^{(k+1)}$ e que a matriz R será aplicada ao vetor $x^{(k)}$, teremos então:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}\left(Lx^{(k+1)}\right) - D^{-1}\left(Rx^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow (I + D^{-1}L)x^{(k+1)} = -D^{-1}\left(Rx^{(k)}\right) + D^{-1}b$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = -[(I + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}R]x^k + [(I + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b].$$

Chegamos finalmente em:

$$C = -(I + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}R \text{ e } g = (I + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b.$$

Como o método de Gauss-Seidel é um método iterativo, assim como no método de Jacobi, precisamos de uma garantia de convergência. Portanto, além do critério das linhas já visto neste capítulo e que também se aplica a esse método, temos ainda o critério de Sassenfeld que também estabelece condições suficientes de convergência.

Teorema 8: (O Critério de Sassenfeld) – *Sejam,*

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\cdots+|a_{1n}|}{|a_{11}|} \text{ e } \beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1+|a_{j2}|\beta_2+\cdots+|a_{j,j-1}|\beta_{j-1}+|a_{j,j+1}|+\cdots+|a_{jn}|}{|a_{jj}|}.$$

Seja $\beta = \max_{1 \le j \le n}\{\beta_j\}$ *.Se* $\beta < 1$*, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja* $x^{(0)}$*. Além disto, quanto menor for* β*, mais rápida será a convergência.*

Os detalhes da demonstração do Teorema 8 pode ser encontrado em (RUGGIERO, 2010).

Exemplo 61:

Tomando o sistema: $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$, vamos verificar pelo critério de Sassenfeld se o método de Gauss-Seidel é convergente.

Temos:

$\beta_1 = \frac{|1|+|1|}{|5|} = \frac{2}{5} = 0,4.$

$\beta_2 = \frac{|3|(0,4)+|1|}{|4|} = \frac{2,2}{4} = 0,55.$

$\beta_3 = \frac{|3|(0,4)+|3|(0,55)}{|6|} = \frac{2,85}{6} = 0,475.$

Portanto, $\beta = \max_{1 \leq j \leq 3} \{\beta_j\} = 0,55 < 1$, então está garantida a convergência pelo método de Gauss-Seidel.

Neste momento, utilizando o método que intitula este tópico, vamos buscar a solução do sistema acima citado, desde que sua convergência já foi garantida.

Tomemos então $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\varepsilon = 0,05.$

O sistema pode ser escrito:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5 - x_2 - x_3}{5} \\ x_2 = \dfrac{6 - 3x_1 - x_3}{4} \\ x_3 = \dfrac{0 - 3x_1 - 3x_2}{6} \end{cases}$$

Assim, a fórmula iterativa é dada por:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{5 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{5} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)}}{4} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}}{6} \end{cases}$$

Então para $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{5 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{5} = \dfrac{5 - 0 - 0}{5} = \dfrac{5}{5} = 1. \\ x_2^{(1)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{6 - 3(1) - 0}{4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75. \\ x_3^{(1)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}}{6} = \dfrac{0 - 3(1) - 3(0{,}75)}{6} = -\dfrac{5{,}25}{6} = -0{,}875 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}875 \end{bmatrix}.$$

Neste momento, tanto o erro absoluto, quanto o erro relativo são calculados da mesma forma que já fizemos no método de Jacobi. Portanto, temos para o erro absoluto:

$d_1^{(1)} = \left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1 - 0| = 1.$

$d_2^{(1)} = \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0{,}75 - 0| = 0{,}75.$

$d_3^{(1)} = \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-0{,}875 - 0| = 0{,}875.$

$d^{(1)} = \max\limits_{1 \le i \le 3}\left\{d_i^{(1)}\right\} = 1.$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(1)} = \frac{d^{(1)}}{\max\limits_{1 \le i \le 3}\left|x_i^{(1)}\right|} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon.$$

Como $d_r^{(1)} > \varepsilon$ precisamos continuar as iterações.

Para $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{5 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{5} = \dfrac{5 - 0{,}75 - (-0{,}875)}{5} = \dfrac{5{,}125}{5} = 1{,}025. \\ x_2^{(2)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)}}{4} = \dfrac{6 - 3(1{,}025) - (-0{,}875)}{4} = \dfrac{3{,}8}{4} = 0{,}95. \\ x_3^{(2)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}}{6} = \dfrac{0 - 3(1{,}025) - 3(0{,}95)}{6} = -\dfrac{5{,}925}{6} = -0{,}9875 \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{bmatrix}.$$

Para o erro absoluto, vem:

$d_1^{(2)} = \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1{,}025 - 1| = 0{,}025.$

$d_2^{(2)} = \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0{,}95 - 0{,}075| = 0{,}20.$

$d_3^{(2)} = \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-0{,}9875 - (-0{,}875)| = 0{,}1125.$

$d^{(2)} = \max_{1\le i\le 3}\left\{d_i^{(2)}\right\} = 0{,}20.$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(2)} = \frac{d^{(2)}}{\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(2)}\right|} = \frac{0{,}20}{1{,}025} = 0{,}1951 > \varepsilon.$$

Como $d_r^{(2)} > \varepsilon$ precisamos continuar as iterações.

Para $k = 3$:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{5 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}}{5} = \dfrac{5 - 0{,}95 - (-0{,}9875)}{5} = \dfrac{5{,}0375}{5} = 1{,}0075. \\ x_2^{(3)} = \dfrac{6 - 3x_1^{(3)} - x_3^{(2)}}{4} = \dfrac{6 - 3(1{,}0075) - (-0{,}9875)}{4} = \dfrac{3{,}965}{4} = 0{,}9912. \\ x_3^{(3)} = \dfrac{0 - 3x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)}}{6} = \dfrac{0 - 3(1{,}0075) - 3(0{,}9912)}{6} = -\dfrac{5{,}9962}{6} = -0{,}9993. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}.$$

Para o erro absoluto, vem:

$d_1^{(3)} = \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1{,}0075 - 1{,}025| = 0{,}0175.$

$d_2^{(3)} = \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |0{,}9912 - 0{,}95| = 0{,}0472.$

$d_3^{(3)} = \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |-0{,}9912 - (-0{,}9875)| = 0{,}0118.$

$$d^{(3)} = \max_{1\le i\le 3}\left\{d_i^{(3)}\right\} = 0{,}0472.$$

Para o erro relativo, temos:

$$d_r^{(3)} = \frac{d^{(3)}}{\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(3)}\right|} = \frac{0{,}0472}{1{,}0075} = 0{,}0468 < \varepsilon.$$

Como encontramos $d_r^{(1)} < \varepsilon$, podemos dizer que a solução aproximada $\overline{x}$ do sistema linear em questão, com erro menor que 0,05 pelo método de Gauss-Seidel é:

$$\overline{x} = x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}.$$

Que escrito na forma de conjunto solução fica: $S = \{(1{,}0075; 0{,}9912; -0{,}9993)\}$.

É possível observar que essa solução está muito próxima da solução exata do sistema que é $S = \{(1{,}1, -1)\}$.

Jacobi x Gauss-Seidel:

Faz-se necessário neste ponto uma análise sobre as vantagens e desvantagens de cada um dos métodos iterativos, e assim temos que:

> *"A menos que as matrizes possuam zonas apreciáveis com elementos nulos, ambos os métodos iterativos exigem um cálculo total de $2n^2$ operações, por cada iterada, o que implica que, se forem necessárias mais que $\frac{n}{3}$ iterações, exigimos mais operações do que num método direto.*
> *A diferença entre os dois métodos é que, em Jacobi, utilizam-se todos os valores da iteração anterior para calcular o valor da variável da diagonal, e no Seidel, também se utiliza dos valores já calculados na mesma iteração o que permite uma convergência mais rápida."* (BENTES,2017)

É pertinente esclarecer que quando o sistema linear possui um número considerável de equações e incógnitas é conveniente utilizar um programa computacional ou software para encontrar a solução. Embora importante, esta abordagem não será apresentada neste trabalho.

CAPÍTULO 3: PLANO DE AULA PARA O ENSINO MÉDIO SOBRE RESOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Público Alvo: alunos do 2º e/ou 3º anos do Ensino médio.

Recursos Didáticos:

- Slides no formato de Power Point;
- Livro Didático;
- Quadro;
- Material Impresso;
- Material pessoal dos alunos.

Conteúdo: Sistemas de equações lineares.

Conteúdos relacionados:

- Matrizes;
- Determinante de uma matriz quadrada;
- Propriedades do Determinante;
- Equações lineares;
- Matrizes associadas a um sistema linear;
- Teorema da existência e unicidade de soluções;
- Sistemas lineares não quadráticos;
- Soluções numéricas de Sistemas Lineares.

Competência Específica segundo a BNCC: *"Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente."* (BRASIL, 2019, p.537)

Habilidade segundo a BNCC: (EM13MAT301) – "*Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem o apoio de tecnologias digitais."* (BRASIL, 2019, p.538)

Unidade temática: Álgebra.

Tema: Resolução de sistemas de equações lineares.

Duração: 12 aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: 1) Aprofundar o estudo de equações lineares inserindo técnicas básicas de cálculos de determinantes, matrizes inversas e solução de sistemas lineares por escalonamento. 2) Apresentar situações práticas para que os alunos percebam a importância da resolução de sistemas lineares, como parte da Modelagem Matemática, e dessa forma tornar significativa a aprendizagem.

Justificativa: Atualmente no Ensino Médio, os métodos de resolução de sistemas lineares mais utilizados são a “Regra de Cramer” e a “Eliminação Gaussiana” (que também faz parte deste estudo). Já em relação ao cálculo de determinantes, o uso da técnica de Laplace é pouco praticado, apesar de ser uma técnica que pode ser aplicado a matrizes de qualquer ordem.

Entendemos que, com a inserção do escalonamento induzido pelas operações elementares por linha, os estudantes terão uma visão mais ampla sobre a solução de tais sistemas e ainda podem aproveitar essa técnica para calcular a matriz inversa, quando existir.

Por outro lado, tão logo seja apresentado um sistema linear, a primeira pergunta que antecede o cálculo da solução deveria ser: existe solução(ões) para o sistema dado? O que garante isso? A resposta destes questionamentos deverá ser encontrada no Teorema de Existência e Unicidade se Soluções de Sistemas Lineares.

Assim, com o propósito de apresentar uma formação sólida, e que permita a aprendizagem de conhecimento básicos sobre matrizes, determinantes e solução de sistemas lineares, o qual deve contribuir, inclusive, para que assuntos neste tema, abordados e aprofundados no ensino superior, não sejam desconhecidos é que surge a proposta deste plano de aula.

Ao analisarmos alguns livros didáticos utilizados em escolas da rede pública do estado de Minas Gerais, dos quais podemos citar (LINDEN, 2014), (GIOVANNI, 2015), (DANTE, 2018), dentre outros, e pudemos perceber que o conteúdo é muito bem trabalhado, com variedade de exercícios que ajudam os alunos a aprimorarem seus conhecimentos em relação aos métodos usualmente propostos de resolução de sistemas lineares e que atendem parcialmente a habilidade (EM13MAT301) da BNCC no que diz respeito a esse conteúdo. Entretanto, acreditamos que o trabalho sobre esse conteúdo não está esgotado e sim, pode ser aprimorado utilizando-se de problemas mais contextualizados e significativos, e ainda, alguns outros métodos de resolução de sistemas lineares que podem facilitar o aprendizado do aluno e ampliar seus horizontes.

Ao longo dos anos em sala de aula nos deparamos com diversos motivos que levam ao fracasso dos alunos em Matemática, porém um dos mais presentes é a falta de significância da Matemática ensinada em sala de aula e o seu cotidiano, que é o que propõe atualmente a BNCC recentemente homologada.

Com tudo, buscamos através deste plano de aula contribuir para que o aprendizado de sistemas de equações lineares se faça de forma formal, considerando o embasamento matemático, e concreta, como o propósito que os alunos consigam perceber a utilidade de tal conhecimento em suas vidas.

Proposta de Divisão das aulas:

- 1º Momento: 3 aulas de 50 minutos cada para o estudo de matrizes, determinante de uma matriz quadrada e propriedades do determinante.

- 2º Momento: 2 aulas de 50 minutos cada para o estudo de Equações lineares, matrizes associadas a um sistema linear, Teorema da Existência e Unicidade de Soluções de Sistemas Lineares.

- 3º Momento: 3 aulas de 50 minutos cada para estudo de Soluções numéricas de sistemas lineares, utilizando métodos diretos.

- 4º Momento: 4 aulas para resolução de problemas utilizando-se os métodos estudados e também apresentação e resolução de problemas levantados pelos alunos.

Procedimentos:

1º Momento: Neste momento serão utilizadas 3 aulas de 50 minutos cada, para explanação do conteúdo básico que envolvem matrizes e determinantes, onde serão utilizados como recursos didáticos o livro adotado pela escola, apresentação de slides (quando possível) e o uso do quadro.

Para este momento, temos por objetivo que os alunos compreendam os conceitos necessários sobre matrizes e determinantes para tornar mais fácil a compreensão dos métodos de resolução de sistemas lineares que serão posteriormente estudados. Recomenda-se, dar ênfase no cálculo de determinantes pela técnica de Laplace, e fazer escalonamentos de matrizes através de operações elementares por linha.

Além de aulas expositivas, também serão propostos alguns exercícios do livro didático para que sejam realizados pelos alunos em casa, e tais exercícios serão devidamente corrigidos e discutidos para aprofundamento do conteúdo.

2º Momento: Utilizaremos aqui 2 aulas de 50 minutos cada para apresentação e explicação de alguns tópicos relacionados diretamente aos sistemas lineares, porém sem ainda entrarmos na parte de resolução.

Acreditamos que estes conceitos devem ser bem estudados a fim de dar sentido e tornar mais simples a prática de resolução de sistemas lineares.

Os conteúdos que estudamos aqui são:

- Equações lineares;
- Matrizes associadas a um sistema linear;
- Teorema da existência e unicidade de soluções;
- Sistemas lineares não quadráticos.

Para este estudo também serão utilizados os mesmos recursos didáticos do 1º momento e a resolução em casa dos exercícios do livro didático para correção e discussão acerca dos exercícios.

Após as etapas deste momento que são: aula expositiva, resolução de exercícios, correção e discussão dos exercícios, entendemos que os alunos já devem ser capazes de perceber situações em que recaem em um sistema de equações lineares. Para facilitar a interação e troca de conhecimentos, propomos a divisão da turma em duplas ou trios (aquele que for mais conveniente). Para dar significado prático ao tema tratado, sugerimos que seja solicitado aos alunos para procurarem no dia a dia de suas vidas (seja em família, no trabalho, na escola ou na comunidade ao qual estão inseridos) situações que eles acreditem que possam ser descritas e/ou resolvidas através de sistemas lineares. O professor também pode induzir a escolha de problemas que podem ser modelados matematicamente pelos sistemas lineares. Tais situações, devem ser anotadas com riqueza de detalhes e também quantificadas, e apresentadas para as 4 últimas aulas deste plano.

3º Momento: Um dos métodos de resolução de sistemas lineares mais aplicados no ensino médio e que também faz parte do escopo deste trabalho é a "Eliminação Gaussiana", portanto o mesmo faz parte deste plano de aula. Acrescentaremos o cálculo da matriz inversa através da Eliminação Gaussiana. Além dele, avaliamos ser conveniente que outro método também seja abordado para enriquecer o conhecimento sobre este assunto. Propomos o ensino da Fatoração LU, com e sem pivoteamento parcial. Sugerimos que estes temas sejam apresentados aos alunos em 3 aulas de 50 minutos cada.

Para explicar a "Eliminação Gaussiana", avaliamos como conveniente a utilização de slides para complementação do conteúdo, o quadro para explicações formais necessárias, além de aproveitarmos o fácil acesso ao livro didático tanto para conhecimento do conteúdo, como para exemplos que também serão retirados do mesmo.

Já para a Fatoração LU, que não é comumente ensinada no ensino médio, recomenda-se também a utilização de slides e quadro para explicar o conteúdo, além de fornecer aos alunos material impresso com o conteúdo tratado, além de exemplos que devem ser explicados passo a passo. Para fim de reforço dos tópicos estudados, recomenda-se a inclusão de um outro exemplo, além daquele visto em aula, a serem realizados, passo a passo pelos alunos, com auxílio do material impresso e também com a ajuda do professor, o qual fará o papel de tutor da afirmação do conhecimento.

4º Momento: Acredita-se, que este é um dos momentos mais importantes do processo, pois aqui o professor desenvolve uma atividade diferente do que normalmente é feito em sala de aula.

Para esse momento, reservamos 4 aulas de 50 minutos cada, porém sugerimos a divisão: em 2 aulas, pode-se apresentar problemas contextualizados, questões de vestibulares e de ENEM (dos quais alguns exemplos contam no ANEXO I deste trabalho), onde trabalhando em conjunto com os alunos buscaremos dentro da área de Modelagem Matemática, problemas que possam ser modelados na forma de sistemas de equações lineares, em que possam ser aplicadas as técnicas abordadas no 3º Momento. Nas duas últimas aulas, faremos então o levantamento dos problemas trazidos pelos alunos, e trocando os problemas entre as duplas ou trios, eles devem buscar uma forma de reescrever tais problemas na forma de sistemas de equações lineares. Aqui é importante que o professor induza a aprendizagem, através de questões que possibilitem os alunos interagir com o conteúdo abordado. Dessa forma, novamente, desempenhando o rol de tutor, o professor deverá conduzir os alunos a construir as respostas das questões que foram levantadas.

Este processo será continuamente acompanhado e auxiliado pelo professor, e caso, eventualmente, alguns problemas trazidos pelos alunos não possam ser resolvidos com as técnicas ensinadas, mesmos assim, acredita-se os mesmos possibilitarão discussões e interações que muito tem a contribuir com a aprendizagem de professores e alunos sobre o tema tratado.

Avaliação: A avaliação será feita através da participação dos alunos ao longo das 12 aulas, e ao final será realizada uma autoavaliação onde cada aluno poderá relatar sua experiência e como ele julga seu aprendizado sobre os assuntos abordados. Para avaliar corretamente o desempenho de cada estudante, o professor deverá ficar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos enquanto a aplicação da teoria desenvolvida em sala de aula. Sabe-se, que alguns alunos têm dificuldades de aprendizagem desta disciplina. Para estes, especialmente, deverá ser procurada a sua interação no grupo, a atenção individualizada pelo professor e a afirmação de conhecimentos com outros exercícios relacionados com os temas tratados.

Para elucidar nossa proposta de sequência didática, resolveremos o Problema 3 que consta no Anexo I deste trabalho, utilizando alguns tópicos aqui enunciados.

Problema: (LIMA, 2010) Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R$16,00 cada. Quanto cada um possuía no início?

No primeiro momento, iremos retirar as informações importantes do problema para que o mesmo possa ser escrito na forma de um sistema linear e assim aplicarmos os conhecimentos até aqui adquiridos.

Primeiramente, faz-se importante saber que utilizaremos as incógnitas A, B e C respectivamente para os valores em reais que Arnaldo, Beatriz e Carlos possuíam inicialmente.

Sabemos que foram realizadas 3 transferências, e que após a realização de cada uma podemos descrever o resultado da seguinte forma:

Após a 1ª transferência que foi realizada por Arnaldo:

- Arnaldo ficou com: $A - B - C$;
- Beatriz ficou com: $2B$;
- Carlos ficou com: $2C$.

Após a 2ª transferência que foi Beatriz que realizou:

- Arnaldo ficou com: $2A - 2B - 2C$;
- Beatriz ficou com: $2B - (A - B - C) - 2C \Rightarrow 3B - A - C$;
- Carlos ficou com: $4C$.

Após a 3ª transferência realizada por Carlos:

- Arnaldo ficou com: $4A - 4B - 4C$;
- Beatriz ficou com: $6B - 2A - 2C$;
- Carlos ficou com: $4C - (2A - 2B - 2C) - (3B - A - C) \Rightarrow 7C - A - B$.

Realizadas as três transferências, sabemos que cada um ficou com a quantia de $R\$16{,}00$. Com está informação e as equações encontradas após a 3ª transferência, é possível chegarmos ao sistema que nos possibilitará responder à pergunta do problema.

Então, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \\ -2A + 6B - 2C = 16 \\ -A - B + 7C = 16 \end{cases}$$

Agora que conseguimos descrever nosso problema na forma de um sistema linear $3x3$, é possível realizar a verificação da existência de soluções e ainda se ela é única, através do Teorema 5. Para tal, vamos escrever o sistema linear acima na sua forma matricial e através do teorema 1 calcular o determinante da matriz incompleta do sistema que chamaremos de matriz A. Então, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante da matriz A pelo Teorema 1, temos:

Pela 1ª linha:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 6(7) - (-1)(-2) = 42 - 2 = 40.$

$D_{12} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = (-2)7 - (-1)(-2) = -14 - 2 = -16.$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - (-1)6 = 2 + 6 = 8.$

Calculando agora os cofatores, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1}40 = 40.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(-16) = 16.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}8 = 8.$

Temos então que:

$$\det(A) = 4(40) + (-4)16 + (-4)8 = 160 - 64 - 32 = 64.$$

Como o determinante da matriz A é diferente de zero, temos garantidas pelo Teorema 5 a existência de uma única solução.

Com a garantia da existência de uma única solução, e utilizando-se da Eliminação Gaussiana, iremos em seguida resolver o sistema.

Neste momento, é necessário que utilizemos a matriz completa do sistema, a qual chamaremos de matriz $A^{(1)}$, daí vem:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & 6 & -2 & 16 \\ -1 & -1 & 7 & 16 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo consiste em fazer com que os elementos a_{21} e a_{31} da matriz $A^{(1)}$ sejam nulos. Para isso acontecer, iremos fazer as seguintes combinações, $L_1^{(1)}$ com $L_2^{(1)}$ e $L_1^{(1)}$ com $L_3^{(1)}$, e para tal utilizaremos $L_j - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} L_k$.

Então para $L_2^{(1)}$, temos:

$$L_2^{(1)} - \frac{-2}{4} L_1^{(1)} \Rightarrow L_2^{(1)} + \frac{1}{2} L_1^{(1)}$$

Daí, vem:

$a_{21} \Rightarrow -2 + \frac{1}{2}(4) = 0.$ $\quad a_{22} \Rightarrow 6 + \frac{1}{2}(-4) = 4.$

$a_{23} \Rightarrow -2 + \frac{1}{2}(-4) = -4.$ $\quad a_{24} \Rightarrow 16 + \frac{1}{2}(16) = 24.$

Para $L_3^{(1)}$, teremos:

$$L_3^{(1)} - \frac{-1}{4} L_1^{(1)} \Rightarrow L_3^{(1)} + \frac{1}{4} L_1^{(1)}$$

Daí, vem:

$a_{31} \Rightarrow -1 + \frac{1}{4}(4) = 0.$ $\quad a_{32} \Rightarrow -1 + \frac{1}{4}(-4) = -2.$

$a_{33} \Rightarrow 7 + \frac{1}{4}(-4) = 6.$ $\quad a_{34} \Rightarrow 16 + \frac{1}{4}(16) = 20.$

Substituindo os valores obtidos na matriz $A^{(1)}$, obtemos assim a matriz $A^{(2)}$:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 16 \\ 0 & 4 & -4 & 24 \\ 0 & -2 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

Ainda é preciso que tornemos o elemento a_{32} da matriz $A^{(2)}$ nulo. Para isso, faremos uma combinação entre $L_2^{(2)}$ e $L_3^{(2)}$.

Então temos o seguinte:

$$L_3^{(2)} - \frac{-2}{4} L_2^{(2)} \Rightarrow L_3^{(2)} + \frac{1}{2} L_2^{(2)}$$

Daí, vem:

$a_{31} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}(0) = 0.$ $\quad a_{32} \Rightarrow -2 + \frac{1}{2}(4) = 0.$

$a_{33} \Rightarrow 6 + \frac{1}{2}(-4) = 4.$ $\quad a_{34} \Rightarrow 20 + \frac{1}{2}(24) = 32.$

Substituindo os valores encontrados na matriz $A^{(2)}$, obtemos finalmente a matriz escalonada a seguir:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 16 \\ 0 & 4 & -4 & 24 \\ 0 & 0 & 4 & 32 \end{bmatrix}$$

Podemos nesse momento voltar a matriz para a forma de sistema, então:

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \;\; (I) \\ 4B - 4C = 24 \;\; (II) \\ 4C = 32 \;\; (III) \end{cases}$$

Agora o sistema escalonado pode ser resolvido como vimos no capítulo 2 deste trabalho, ou seja, da última para a primeira equação. Então, resolvendo (III), temos:

$$C = 8$$

Conhecendo o valor de C, podemos agora resolver a equação (II), daí:

$$4B - 4(8) = 24$$
$$B = 14$$

E finalmente, conseguimos resolver a equação (I) substituindo os valores de B e C nela, então:

$$4A - 4(14) - 4(8) = 16$$
$$A = 26$$

Com isso, chegamos a resposta do problema sabendo que Arnaldo possuía inicialmente $R\$26{,}00$, já Beatriz possuia $R\$14{,}00$ e Carlos possuia $R\$8{,}00$.

Ainda utilizando a matriz incompleta do sistema retirado do problema em questão vamos calcular sua matriz inversa por escalonamento, para que possamos demonstrar assim mais um tópico do nosso plano de aula.

Primeiramente, vamos escrever a matriz na forma $[\mathrm{A} \quad |\mathrm{I}]$, sendo I a matriz identidade, e para isso, podemos aproveitar as combinações lineares feitas na resolução do sistema pelo método de Eliminação Gaussiana para transformar a matriz A a esquerda em uma matriz triangular superior e depois faremos as outras permutações e combinações necessárias para que a matriz a esquerda se torne a matriz identidade, obtendo assim a direita a matriz inversa desejada. Então:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nosso próximo passo é fazer com que os elementos a_{21} e a_{31}sejam nulos, e como já falado acima podemos aproveitar as combinações lineares feitas durante a resolução do sistema, estendendo-as para a matriz identidade a direita da matriz A. Assim, teremos para $L_2 \Rightarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$ e para $L_3 \Rightarrow L_3 + \frac{1}{4}L_1$.

Daí, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1/4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ainda utilizando-se da combinação feita no processo de resolução do sistema para tornar nulo o elemento a_{32}, temo para $L_3 \Rightarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2$, assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2/4 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Para que os elementos da diagonal principal sejam todos iguais a 1 o qual é um dos nosso objetivos, precisamos dividir todas as linhas da matriz por 4, daí temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/16 & 1/8 & 1/4 \end{array}\right]$$

Fazendo agora $L_1 - L_2$ e substituindo em L_1 para podermos tornar o elemento a_{13} nulo, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/16 & 1/8 & 1/4 \end{array}\right]$$

Para que possamos tornar o elemento a_{23} também nulo, vamos fazer $L_2 + L_3$, assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2/16 & 1/8 & 1/4 \end{array}\right]$$

Para finalizarmos precisamos que o elemento a_{12} também se torne nulo, fazendo assim com que a matriz da esquerda seja a matriz identidade, faremos então a combinação $L_1 + 2L_2$, atingindo assim o nosso objetivo. Daí, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/8 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2/16 & 1/8 & 1/4 \end{array}\right]$$

Finalmente, temos que a matriz inversa da matriz incompleta do sistema é dada por

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 2/16 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$. Fato que pode ser comprovado fazendo $AA^{-1} = I$.

Como visto no capítulo 2 deste trabalho, a solução do sistema pode ser comprovada fazendo $x = A^{-1}b$, desde que conhecida a matriz inversa A^{-1}, onde x é a matriz das incógnitas e b é a matriz dos termos independentes do sistema, assim temos:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 2/16 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação de matrizes indicada no 2º membro da equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8\,(16) + 1/2\,(16) + 1/2\,(16) \\ 1/4\,(16) + 3/8\,(16) + 1/4\,(16) \\ 2/16\,(16) + 1/8\,(16) + 1/4\,(16) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 8 + 8 \\ 4 + 6 + 4 \\ 2 + 2 + 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que pela igualdade de matrizes a solução do sistema é dada pela tripla ordenada $(26,14,8)$ o que comprova a solução encontrada pelo método da Eliminação Gaussiana.

Ampliando ainda mais nossas resoluções, com o intuito de contemplar os métodos propostos no nosso plano de aula, vamos ainda trazer a resolução do problema pelo método de Fatoração LU.

Tomando o sistema extraído do problema, temos: $\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \\ -2A + 6B - 2C = 16 \\ -A - B + 7C = 16 \end{cases}$.

Escrevendo o sistema na sua forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Em seguida, tomando apenas a matriz dos coeficientes iremos buscar a solução do sistema, então é necessário primeiro determinarmos as matrizes L e U. Lembrando que elas são dadas por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

No primeiro momento, precisamos determinar a matriz U, que é obtida através da Eliminação Gaussiana da matriz dos coeficientes. Como o problema já foi resolvido por esse método, iremos aproveitar o que já foi encontrado anteriormente, então temos que:

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Agora é necessário determinar a matriz L, e sabendo que a matriz dos coeficientes é a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, e que podemos determinar os elementos l_{21}, l_{31} e l_{32}, por meio das relações já determinadas no capítulo 2 deste, temos que:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \Rightarrow l_{21} = \frac{-2}{4} \Rightarrow l_{21} = -\frac{1}{2}.$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \Rightarrow l_{31} = -\frac{1}{4}.$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}(a_{12})}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{12})} \Rightarrow l_{32} = \frac{1 - \frac{(-1)}{4}(-4)}{6 - \frac{(-2)}{4}(-4)} \Rightarrow l_{32} = \frac{-2}{4} \Rightarrow l_{32} = -\frac{1}{2}.$$

Sendo assim, temos a matriz $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

Com isso, temos a Fatoração LU da matriz A, ou seja, temos que:

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que o sistema $Ax = b$ equivale a sua fatoração $LUx = b$ e considerando $Ux = y$, chegamos em $Ly = b$, então temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Voltando a equação matricial para a forma de sistema linear, fica:

$$\begin{cases} y_1 = 16 \quad (I) \\ -1/2\, y_1 + y_2 = 16 \quad (II) \\ -1/4\, y_1 - 1/2\, y_2 + y_3 = 16 \quad (III) \end{cases}$$

No sistema acima, é imediato o valor de y_1 na equação (I), então substituindo seu valor na equação (II), podemos determinar y_2, assim:

$$-1/2\,(16) + y_2 = 16$$
$$y_2 = 24$$

Finalizando, substituindo os valores de y_1 e y_2 obtidos anteriormente na equação (III):

$$-1/4\,(16) - 1/2\,(24) + y_3 = 16$$
$$y_3 = 32$$

Com isso, concluímos que a matriz y é dada por: $\begin{bmatrix} 16 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix}$.

Para finalizar o processo, precisamos resolver a equação $Ux = y$, que é dada por:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a equação matricial na forma de um sistema linear, temos:

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \quad (I') \\ 4B - 4C = 24 \quad (II') \\ 4C = 32 \quad (III') \end{cases}$$

Resolvendo a equação (III'), temos:

$$C = 8$$

Substituindo o valor encontrado para C na equação (II') é possível encontrar o valor de B, então:

$$4B - 4(8) = 24$$
$$B = 14$$

Finalizando, tendo conhecidos os valores de B e C e substituindo-os na equação (I'), vamos determinar A, então:

$$4A - 4(14) - 4(8) = 16$$
$$A = 26$$

Portanto, neste momento chegamos novamente a conclusão de que a tripla ordenada $(26,14,8)$ é solução para o problema proposto por (LIMA,2010).

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Este trabalho foi escrito pensando que o público leitor alvo seriam colegas professores e alunos do ensino médio. Assim, buscou-se colocar os conceitos com algum grau de detalhe e a devida fundamentação teórica básica sobre a solução de sistemas lineares; passando por diferentes técnicas diretas e iterativas.

A busca pelo aprofundamento e aprimoramento do conhecimento deve ser constante, uma vez que as metodologias de ensino aprendizagem estão cada vez mais dinâmicas; preconizando também o compromisso didático-pedagógico de subsidiar os alunos com conhecimentos e estratégias de estudo que estejam cada vez mais alinhadas às exigências do ensino superior e também do mercado de trabalho. Dessa forma, neste trabalho, buscamos, por um lado, a rigorosidade do conhecimento matemático, bem como a ampliação de técnicas de resolução de sistemas lineares, que comumente não é ensinado, ou sequer citado no ensino médio. No entanto, é preciso uma motivação constante por parte de nós, professores de Matemática, em aprimorar nossos planejamentos e práticas em sala de aula, apresentando novos e diferentes recursos para o conhecimento dos alunos, fazendo com que as aulas sejam fundamentadas no rigor matemático, porém não perdendo a interatividade que há entre a matemática e a realidade dos alunos, o qual pode ser alcançada através de atividades criativas, interdisciplinares, experimentais e desafiadoras.

O grande distanciamento entre a matemática ensinada nas escolas e a que os alunos experimentam em um ambiente externo a escola é um dos fatores contribuintes para o baixo alcance dos objetivos da educação quanto ao ensino-aprendizagem desse conteúdo. Daí a importância de se adotar no ensino da matemática uma proposta pedagógica que a relacione com a realidade pessoal e/ou social do aluno, de forma que ela não se torne a disciplina temida e impossível, mas sim uma necessidade para que o aluno possa interpretar o seu meio, adaptar-se e interagir com ele, sempre fazendo uso dos recursos disponíveis.

Neste trabalho, foi trazido o fundamento matemático básico para o ensino de sistemas lineares no ensino médio, focando em assuntos que, ao nosso ver, são muito relevantes para a aprendizagem dos alunos e que podem muito contribuir com o sucesso da aprendizagem do conteúdo numa disciplina interdisciplinar, técnica ou mesmo no ensino superior, que trate dos temas.

Em determinantes, particularmente, optou-se por dar ênfase para a técnica de Laplace, por entender que ela é muito utilizada nos cursos de nível superior, por permitir a generalização dos conceitos e “linkar” com outros conteúdos matemáticos.

Em relação ao estudo de sistemas lineares, o estudo foi apresentado em duas partes: a primeira respondendo à questão de Existência e Unicidade de Soluções e a segunda em relação às técnicas de solução. Para esta última, focou-se nos cálculos baseados em escalonamento de matrizes, por acreditar que quanto antes os alunos tenham contato com essa técnica, agregarão mais conhecimento, permitindo, amadurecer e aprimorar a mesma. Por outro lado, pode-se aproveitar o escalonamento de matrizes para o cálculo da matriz inversa, a qual é uma importante ferramenta, porém pouco tratada no ensino médio.

A utilização da Modelagem Matemática, como indutora da matematização de problemas observados pelos alunos no conteúdo de sistemas lineares, podem fazer com que eles se sintam-se parte do processo, e assim, sejam motivados e desafiados a encontrar a solução, estabelecer estratégias de ação e executá-las. Esses problemas têm a finalidade de suscitar nos alunos a curiosidade e a vontade de resolvê-los, pois são inerentes a parte de seu cotidiano.

Em relação às atividades e metodologias propostas neste estudo, acredita-se que as mesmas permitiram uma série de situações favoráveis ao aprendizado, a saber: o trabalho em grupo, a divisão de tarefas, o aparecimento de dúvidas e os desafios trazidos pelo procedimento de busca e descoberta do novo, do prático; além da necessidade de se resgatar conteúdos e instrumentos matemáticos indispensáveis ao dia a dia e aos aprendizados futuros. Entendemos, que a assimilação e apropriação do conhecimento deve acontecer de forma natural, e com questionamentos assertivos em torno dos conteúdos.

Ainda sobre o Plano de Aula, é importante destacar que se trata apenas de uma sugestão de sequência de aulas, sendo, portanto, a mesma sujeita às mudanças que se façam necessárias de acordo com à realidade da escola, da turma, do contexto social, entre outros. Acredita-se que os alunos com grande dificuldade na aprendizagem da Matemática podem surpreender durante o processo, ao encontrarem significado para os problemas, e assim externarem a criatividade, buscarem estratégias, agregarem novas ideias, e alcançarem, enfim, os objetivos pretendidos pelo professor.

Para o desenvolvimento deste trabalho, além das revisões bibliográficas, inicialmente, tínhamos como objetivo a aplicação do plano de aula proposto no Capítulo 3 e uma avaliação de como sua prática contribuiu ou não para um melhor aprendizado dos alunos. Entretanto, devido ao momento de afastamento social e consequente suspensão das aulas presenciais, em função da pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, não foi possível a implementação. Acreditamos que essa proposta de aula, seja apenas uma entre as diversas possíveis; mas também temos a convicção de que, através dela, o objetivo de ensinar os fundamentos matemáticos relacionados aos sistemas lineares, bem como ampliar e tornar mais significativo e concreto o aprendizado dos alunos do ensino médio, possa ser alcançado.

Por fim, concluímos que o ensino de alguns conteúdos matemáticos, antes vistos apenas como tópicos do ensino superior, podem e devem ser inseridos no currículo do ensino médio, desde que trabalhados de forma a trazer sentido no seu aprendizado. Nesse contexto, o papel que o professor vem a exercer é o de incentivador, facilitador e mediador da construção do conhecimento dos alunos, proporcionando durante suas aulas momentos de discussão, em que os alunos sejam incentivados a participar de forma ativa, podendo compartilhar seus resultados, erros e permitindo o questionamento de métodos e procedimentos. Dessa forma, acredita-se ser possível alcançar os objetivos propostos e contribuir com um grão de areia para atender o princípio básico de nosso trabalho profissional, qual seja, ensinar Matemática.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**.São Paulo: Editora: Grupo A, 2007.

ANTON, H; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª ed. Porto alegre: Bookman, 2012.

BENTES, Ana Karina Monteiro. **Sistemas Lineares.** Trabalho Acadêmico (Engenharia Física). Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém,2017.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2019.

CAMPOS, filho, Frederico Ferreira. **Algoritmos numéricos.** 2. ed. Rio de Janeiro: LCT, 2014.

CARLSON, David, JOHNSON, Charles, LAY, David, PORTER, A. Duane. **The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra.** College Mathematics Journal, 24, p. 41-46, 1993.

COLOMBO, Jones; KOILLER, José. **Álgebra Linear (Texto em fase de preparação).** Departamento de Análise Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, 2017.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática contexto & aplicações. Volume único.** 4. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DORIER, Jean L. (Org.). **On the teaching of linear algebra**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

ENEM 2009 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.** Ministério da Educação. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em Março de 2021.

ENEM 2013 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.** Ministério da Educação. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em Março de 2021.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004. FERNANDES, Cláudio. “Independência do Brasil”: História do Mundo.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico.** São Paulo: Pearson, 2006.

GIOVANNI, José Rui [et. al.]. **Matemática: uma nova abordagem, volume 2: versão progressões.** São Paulo: FTD, 2000.

GIOVANNI, José Rui [et. al.]. **360^0 matemática fundamental: uma nova abordagem. Parte 2.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2015.

HAREL, Guershon, TRGALOVÁ, Jana. **Higher Mathematics Education**. In: A. J. bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 675-700, 1996.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática elementar, 4: Sequências, matrizes, determinantes, sistemas.** 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Sobre o ensino de Sistemas Lineares.** Revista do Professor de Matemática, nº 23, 1º Semestre, 1993.

LIMA, Elon Lages [et. al.]. **A matemática do ensino médio – volume 4.** Rio de Janeiro: SBM,2010.

LINDEN, Solano G. **Matemática: 2.** Curitiba: Positivo, 2014.

NEMAN, L. S**. Sistemas de Equações Lineares e Suas Interpretações**. (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) – PROFMAT. Universidade Federal do ABC. Santo André, 2013.

NETO, L.L.S. **Tópicos de pesquisa operacional para o ensino médio.** Pólo Universitário do Sul Fluminense – UFF, 2006.

PANCIERA, M; FERREIRA, M.V. **Modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares.** Artigo (Mestrado em Ensino de Física e de Matemática). Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. Rio Grande do Sul, 2006.

POLONI, Hércules Luiz. **Sistemas Lineares, aplicações e representação gráfica.** (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) – PROFMAT. Universidade Federal de Campinas. Campinas, 2018.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. **Cálculo Numérico:** Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SBEM. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura**: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim SBEM, n. 21, fevereiro, p. 1-42, 2013.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TAVARES, A. H. C; PEREIRA, A. G. C. História da Matemática no Ensino de Sistemas Lineares Determinantes e Matrizes.

UHLIG, Frank. **The Role of Proof** in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra. Educational Studies in Mathematics, 50, p. 335–346, 2002.

VALIENTE, E. S. P**. Aplicações de Sistemas Lineares e determinantes na Engenharia Civil.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) PROFMAT. Programa de Pós-Graduação Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2015.

ANEXO I – Problemas Propostos:

Problema 1: (ENEM – 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos.

b) 360 tijolos.

c) 400 tijolos.

d) 480 tijolos.

e) 600 tijolos.

Problema 2: (ENEM – 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 *pessoas*?

a) R$ 14,00.

b) R$ 17,00.

c) R$ 22,00.

d) R$ 32,00.

e) R$ 57,00.

Problema 3: (LIMA, 2010) Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R$16,00 cada. Quanto cada um possuía no início?

Problema 4: (NETO, 2006) Após anos de economia Paulo resolve comprar um sítio de 90 hectares para plantar milho e feijão. Cada hectare de milho gera lucro de R$400,00 e cada hectare de feijão gera lucro de R$600,00. Para cada hectare de milho são necessários 3 empregados e são utilizadas 2 toneladas de fertilizantes e para um hectare de feijão são necessários 2 empregados e 4 toneladas de fertilizantes. Considerando que Paulo pode contar com 200 empregados e 240 toneladas de fertilizantes, como ele pode maximizar seu lucro?

Problema 5: (POLONI, 2018) Um jovem esportista está fazendo o seu treino e se sente muito cansado. Fala então com a nutricionista do clube que lhe sugere uma dieta com quilocalorias, lipídeos e proteínas suficientes para as atividades esportivas. O atleta precisa consumir diariamente 2072 Kcal (quilocalorias), 220g de proteínas e 19,3g de lipídeos e, para isto, uma nutricionista passou uma dieta a base de arroz, filé de frango grelhado e maça. Na tabela 3 temos a quantidade destas substâncias encontradas em cada alimento.

Fonte: (POLONI, 2018)

100g	Quilocalorias	Proteínas	Maça
Arroz	128	2,5	0,2
Filé de frango	159	32	2,5
Maça	63	0,2	0,2

Tabela 3: Dieta Alimentar

Queremos saber quantas gramas de cada um destes alimentos o atleta deve ingerir diariamente.