Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento Matemática e Estatística
Câmpus de São João del-Rei

Cálculo Diferencial e Integral: aspectos da disciplina na formação do professor de Matemática e propostas de sequências didáticas para alunos de Ensino Médio

Ricardo Vieira Lima

2021

Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento Matemática e Estatística
Câmpus de São João del-Rei

Cálculo Diferencial e Integral: aspectos da disciplina na formação do professor de Matemática e propostas de sequências didáticas para alunos de Ensino Médio

Ricardo Vieira Lima

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei , Câmpus de São João del-Rei.

Orientadora: Prof. Dra. Andréia Malacarne

São João del-Rei
2021

Lima, Ricardo Vieira
Cálculo Diferencial e Integral: aspectos da disciplina na formação do professor de Matemática e propostas de sequências didáticas para alunos de Ensino Médio / Ricardo Vieira Lima- São João del-Rei: [s.n.], 2021.
159 f.: fig., tab.

Orientadora: Andréia Malacarne
Departamento de Matemática e Estatística - UFSJ

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei , Departamento Matemática e Estatística.

1. Cálculo. 2. Formação do Professor de Matemática. 3. Ensino de Matemática. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do DEMAT
Câmpus de São João del-Rei

TERMO DE APROVAÇÃO

Ricardo Vieira Lima

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ASPECTOS DA DISCIPLINA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA E PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA ALUNOS DE ENSINO MÉDIO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei , pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Andréia Malacarne
Departamento de Matemática e Estatística - UFSJ
Orientadora

Profa. Dra. Andréa Cristiane dos Santos Delfino
Departamento de Matemática e Estatística - UFSJ

Prof. Dr. Francis Félix Córdova Puma
Departamento de Matemática - UFSC

São João del-Rei, 21 de julho de 2021

Aos meus pais, Geraldo Antonio Lima e Maria Rosália Vieira Lima.
À minha amada esposa, Letícia Maria de Paiva.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, por estar me abençoando e abençoando minha família em todos os momentos.

Agradeço aos meus pais, Geraldo Antonio Lima e Maria Rosália Vieira Lima, por todo amor e apoio nos momentos de minha vida. Sem o incentivo e a dedicação que tiveram comigo, a conclusão dessa etapa não seria possível. Obrigado por tudo!

Agradeço a minha amada esposa, Letícia Maria de Paiva, pelo amor e companheirismo de sempre. Muito obrigado pela paciência e ajuda nos momentos mais difíceis em minha vida até aqui.

Agradeço a Vainer César de Paiva e Lenicia Maria de Freitas Paiva, que são verdadeiros pais em minha vida e me acolheram com todo amor e carinho.

Gratidão a todos os professores e professoras do PROFMAT-CSA/UFSJ pelas contribuições e ensinamentos durante esse tempo.

Agradeço a técnica administrativa Kátia Milena Mendonça que, de forma atenciosa, sempre auxiliou e orientou eu e meus colegas em nossas demandas.

Um muito obrigado aos colegas de curso, pelo companheirismo e pelos momentos que estivemos juntos durante o mestrado.

Por fim, quero expressar minha eterna e profunda gratidão a professora Andréia Malacarne por todo incentivo, auxílio, empenho e paciência. Com toda dedicação, suas valiosas contribuições foram essenciais em todas as etapas desse trabalho.

Resumo

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina presente em diversos cursos de graduação, não somente das áreas das Ciências Exatas. Conteúdos específicos dessa disciplina são aplicados em diversas áreas do conhecimento, fornecendo relevantes contribuições científicas para a sociedade. Nos cursos de formações de professores de Matemática, essa disciplina é obrigatória. Diante desse fato, buscamos, neste trabalho, analisar o Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática. Para isso, realizamos um estudo dos documentos oficiais que orientam a implementação desses cursos, bem como trabalhos que tratam a respeito do Cálculo em cursos de graduação, em particular, nos cursos de licenciatura em Matemática. O Cálculo e o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) também foi objeto de investigação desse trabalho. Através do banco de dissertações do referido mestrado, selecionamos trabalhos de conclusão que tratam de tópicos dessa disciplina e fizemos um levantamento das principais características desses trabalhos. Por fim, é proposto, nesse trabalho, um material didático e sequências didáticas sobre Limite, Derivada e Integral, que podem subsidiar o professor de Matemática na elaboração de um projeto de ensino para os últimos anos do ensino básico. A ideia é que esse projeto envolva alunos que visam o ingresso em cursos de graduação na área de Ciências Exatas ou outros cursos que contemplem a disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Cálculo, Formação do Professor de Matemática, Ensino de Matemática.

Abstract

Differential and Integral Calculus is a discipline present in several undergraduate courses, not only in the areas of Exact Sciences. Specific contents of this discipline are applied in several areas of knowledge, providing relevant scientific contributions to society. In Mathematics teacher education courses, this subject is mandatory. Given this fact, we intend to analyze in this work the Differential and Integral Calculus in the formation of the Mathematics teacher. For this, we carried out a study of the official documents that guide the implementation of these courses, as well as works that deal with Calculus in undergraduate courses, in particular, in Mathematics licentiate courses. The Calculus and Professional Masters Program in Mathematics in a National Network (PROFMAT) was also the object of investigation in this work. Through the dissertation list, we selected conclusion papers that deal with topics in this discipline and made a survey of the main characteristics of these papers. Finally, this work proposes didactic material and didactic sequences on Limit, Derivative and Integral, which can support the Mathematics teacher in the elaboration of a teaching project for the last years of basic education. The idea is that this project involves students who wants to enroll in undergraduate courses of exact sciences or other courses that include the Differential and Integral Calculus discipline.

Keywords: Calculus, Math Teacher Education, Math Teaching.

Lista de Figuras

3.1 Matriz curricular do PROFMAT 25
3.2 Disciplinas eletivas do PROFMAT 26
3.3 Gráfico sobre os trabalhos que relacionam e os que não relacionam o Cálculo ao Ensino Básico 30
3.4 Gráfico da quantidade de trabalhos pertencentes a categoria A que tratam de cada um dos conteúdos 32
3.5 Análise de similitude das palavras-chave dos trabalhos da Categoria A . 33
3.6 Nuvem de palavras dos resumos dos trabalhos da Categoria A 34
3.7 Nuvem de palavras das conclusões dos trabalhos da Categoria A 34

4.1 Quadro apresentado em Orfali (2017) que exibe parte do conteúdo estudado no 4º ano do Ginásio Nacional em 1885 39
4.2 Quadro apresentado em Orfali (2017) que exibe parte do programa aprovado pela reforma Capanema 39
4.3 Infinity Q60 S Barracuda 45
4.4 Gráfico da função $f(x) = 2x^2 - x + 1$ 46
4.5 Gráfico da função f dada por $f(x) = 5$ para valores de $x < 1$, e $f(x) = x - 1$, se $x \geq 1$ 49
4.6 Gráfico da função f dada por $f(x) = x^2$, se $x > 0$, e $f(x) = x$, se $x < 0$ 50
4.7 Taxa média de variação da função $f(x) = 2x + 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$ 54
4.8 Taxa média de variação da função $f(x) = ax + b$ 55
4.9 Taxa média de variação de uma função qualquer 56
4.10 Inclinação positiva da reta secante 58
4.11 Inclinação negativa da reta secante 58
4.12 Inclinação nula da reta secante 59
4.13 Reta tangente à parábola $y = \frac{1}{10}x^2$ no ponto $(2, 0.4)$ 60
4.14 Retas secantes e reta tangente a parábola $y = \frac{1}{10}x^2$ 61
4.15 Inclinação da reta secante e da reta tangente a parábola $y = \frac{1}{10}x^2$ . . 62
4.16 Taxa de variação instantânea de uma função f no ponto x_0 63
4.17 Inclinação positiva da reta tangente 64
4.18 Inclinação negativa da reta tangente 64
4.19 Inclinação nula da reta tangente 65
4.20 Derivada de uma função em um ponto 66
4.21 Aranha-lobo mordendo um sapo 69
4.22 Velocidade da aranha ao longo do tempo 69
4.23 Região cuja área representa a distância percorrida pela aranha ao longo do tempo 70

4.24 Região determinada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 1$ 70
4.25 Retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$ 71
4.26 Retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$ 72
4.27 Quantidade n retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$ 73
4.28 Quantidade n de retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$ 74
4.29 Gráfico da função positiva f definida no intervalo $[a, b]$ 75
4.30 Região delimitada entre a função f e o eixo x, no intervalo $a \leq x \leq b$ . . 75
4.31 Retângulos em uma região delimitada abaixo do gráfico de f e acima do eixo x, num intervalo $[a, b]$ 76
4.32 Infinity Q60 S Barracuda 83
4.33 Gráfico da função $f(x) = 2x^2 - x + 1$ com os pontos A e B 85
4.34 Gráfico explicitando o limite $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x tende a 1 . . 87
4.35 Gráfico de função f qualquer 88
4.36 Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ com os pontos A e B 89
4.37 Gráfico da função g sendo constante igual a 5, se $x < 0$ e igual a $x - 1$, se $x \geq 1$ 92
4.38 Gráfico de função f 97
4.39 Gráfico da função $Q(t) = 20t$ 102
4.40 Taxa média de variação de uma função qualquer 103
4.41 Gráfico presente no arquivo 3 105
4.42 Inclinação positiva da reta secante 107
4.43 Inclinação negativa da reta secante 107
4.44 Inclinação nula da reta secante 108
4.45 Gráfico presente no arquivo 3 112
4.46 Inclinação positiva da reta tangente 114
4.47 Inclinação negativa da reta tangente 114
4.48 Inclinação nula da reta tangente 115
4.49 Interface do arquivo 5 117
4.50 Área do retângulo azul 122
4.51 Área do região em verde 122
4.52 Aranha-lobo mordendo de um sapo 124
4.53 Velocidade da aranha ao longo do tempo 124
4.54 Região R determinada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 1$ 125
4.55 Retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$ 126
4.56 Retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$ 127
4.57 Interface do arquivo 6 128
4.58 Gráfico da função positiva f definida no intervalo $[a, b]$ 129
4.59 Região R delimitada entre a função f e o eixo x, no intervalo $a \leq x \leq b$ 130
4.60 Retângulos em uma região delimitada abaixo do gráfico de f e acima do eixo x, num intervalo $[a, b]$ 130

4.61 Região delimitada entre a função $f(x) = -x^2 + 4$ no intervalo $[-2, 2]$. 137
4.62 Área demarcada 139
4.63 Gráfico da função velocidade em função do tempo do atleta 140

Lista de Tabelas

3.1 Ano de produção das dissertações do PROFMAT sobre Cálculo 29
3.2 Localização das dissertações analisadas 29
3.3 Distribuição dos conteúdos de Cálculo 32

4.1 Conteúdos e tópicos abordados no material de apoio ao professor 44
4.2 Valores de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda 46
4.3 Valores de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela direita . 46
4.4 Valores de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda 47
4.5 Valores de $f(x)f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela direita 47
4.6 Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda 48
4.7 Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 pela direita 49
4.8 Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela esquerda 50
4.9 Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela direita 50
4.10 Quantidade de água desperdiçada ao longo do tempo 55
4.11 Estrutura das sequências didáticas 81
4.12 Coordenadas do ponto A 86
4.13 Coordenadas do ponto B 86
4.14 Valores de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x se aproxima de -2 pela esquerda 90
4.15 Valores de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x se aproxima de -2 pela direita 90
4.16 Valores de $g(x)$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda 91
4.17 Valores de $g(x)$ quando x se aproxima de 1 pela direita 91
4.18 Quantidade de água desperdiçada pela torneira ao longo do tempo . . . 100
4.19 Valores das TMV's em intervalos de t 101
4.20 Ângulo, tangente, intervalo de x, variação de x e y e TMV 106
4.21 Velocidade média do carro nos intervalos $[2, t]$ 109
4.22 Velocidade média do carro nos intervalos de $[t, 2]$ 109
4.23 Aproximação da taxa instantânea de variação da função $f(x) = 2x^2 - 1$ por meio da taxa média de variação 110
4.24 Aproximação da taxa instantânea de variação da função $f(x) = 2x^2 - 1$ por meio da taxa média de variação 110
4.25 Ângulo e coeficiente angular da reta tangente 113
4.26 Valores $x > 0$ 117
4.27 Valores $x < 0$ 117
4.28 Derivada de funções constantes no ponto $x_0 = -1$ 119
4.29 Derivada de funções afins no ponto $x_0 = 3$ 119
4.30 Quantidade de substância na corrente sanguínea ao longo do tempo . . 121
4.31 Áreas dos retângulos do tipo 1 126
4.32 Áreas dos retângulos do tipo 2 127
4.33 Áreas dos retângulos dos tipos 1 e 2 da região R 129

4.34 Área de cada um dos 4 retângulos traçados região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$ 135
4.35 Área de cada um dos 4 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$ 135
4.36 Área de cada um dos 8 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$ 136
4.37 Área de cada um dos 8 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$ 136
4.38 Área de cada um dos 8 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = -x^2 + 4$ no intervalo $[-2, 2]$ 137
4.39 Área de cada um dos 10 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = -x^2 + x$ no intervalo $[0, 1]$ 140
4.40 Área de cada um dos 10 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = -x^2 + x$ no intervalo $[0, 1]$ 141

Sumário

1 Introdução **13**

2 O Cálculo Diferencial e Integral e os cursos de formação de professores de Matemática **16**

2.1 A formação dos professores de Matemática: o que dizem os documentos oficiais? 16

2.2 Aspectos da disciplina Cálculo nos cursos de licenciatura em Matemática 19

3 Cálculo Diferencial e Integral e o PROFMAT **24**

3.1 O PROFMAT 24

3.2 Análise de dissertações do PROFMAT que tratam de Cálculo 27

3.2.1 Procedimentos metodológicos 27

3.2.2 Características gerais dos trabalhos analisados e discussões . . . 28

3.2.3 Resultados 36

4 Cálculo Diferencial e Integral para alunos do Ensino Médio **38**

4.1 O Cálculo e o Ensino Médio 38

4.2 A proposta 42

4.3 Material de apoio ao professor 44

4.3.1 Limites 45

4.3.2 Derivadas 53

4.3.3 Integrais 69

4.4 Sequências Didáticas 77

4.4.1 Limite 82

4.4.2 Derivada 99

4.4.3 Integral 122

5 Considerações Finais **142**

Referências **144**

A Dissertações pertencentes a categoria A, em ordem de análise **149**

B Dissertações pertencentes a categoria B, em ordem de análise **157**

1 Introdução

Cálculo I, Cálculo Diferencial e Integral ou apenas Cálculo - essas nomenclaturas são popularmente conhecidas em cursos de graduações das áreas de exatas. O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina presente nos cursos das Ciências Exatas, mas que também pode fazer parte do currículo de cursos de outras áreas do conhecimento.

Nos currículos dos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, a disciplina também se faz presente. De acordo com o parecer CNE/CES 1.302/2001, proposto pelo Conselho Nacional de Educação, a disciplina Cálculo, em conjunto com as disciplinas Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica, deve, obrigatoriamente, estar presente nas grades curriculares dos cursos de formação de professores de Matemática.

Diante dessa obrigatoriedade, questionamentos emergem acerca da relevância da disciplina nos currículos dos cursos de licenciatura. Questões como "por que o futuro professor deve estudar conceitos que não são aplicados diretamente no ensino básico?"são levantados pelos discentes. Devido a esse cenário, observamos a necessidade de *analisar o Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática*. Para tal análise, consideramos como objetos de investigação os documentos oficiais que orientam os cursos de formação de professores, concentrando o foco no curso de licenciatura em Matemática, e os aspectos da disciplina de Cálculo nos cursos de licenciatura em Matemática.

Dessa forma, no Capítulo 2, analisamos documentos oficiais que orientam os cursos de formação de professores, como a resolução CNE/CP Nº 2, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação); o parecer CNE/CES 1.302/2001, que propõe as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura e a resolução CNE/CES 3, de 18 de fevereiro de 2003, que outorga tais diretrizes.

Além dos documentos oficiais, analisamos estudos que tratam a respeito da disciplina Cálculo na graduação e na licenciatura. Abordamos aspectos que tratam sobre as possíveis contribuições do conteúdo na formação docente e os relacionamos com as habilidades esperadas na formação do licenciado de Matemática.

As análises e discussões sobre a presença e relevância da disciplina de Cálculo na formação do professor de Matemática nos levou a refletir sobre a presença dessa disciplina no próprio PROFMAT. O Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT é um programa de mestrado em Matemática que tem como público alvo o professor de Matemática da escola básica. Seu principal objetivo é oferecer ao professor de Matemática o aprimoramento da sua formação profissional, com um olhar especial voltado, principalmente, ao domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

Para atingir tal objetivo, o programa oferece, dentre as disciplina obrigatórias, a disciplina MA 22 - Fundamentos de Cálculo, cuja ementa envolve conceitos apresentados nas disciplinas de Cálculo da graduação. Esse fato nos intrigou, tendo em vista que questões, como as apresentadas em cursos de licenciatura em Matemática, também emergem nesse curso: "Por que estudar Fundamentos de Cálculo?"ou "Para que estudar Cálculo se eu não aplico em sala de aula?". Partimos, então, no Capítulo 3, para a análise das dissertações produzidas pelos discentes do PROFMAT que tratam de tópicos do Cálculo, em busca de identificar de que forma esses discentes apresentaram o Cálculo em seus trabalhos e à que o relacionaram.

A análise das dissertações buscou identificar as características gerais dos trabalhos. Esse levantamento nos ofereceu uma visão acerca dos principais temas apresentados nos trabalhos, e um fato nos chamou a atenção: muitos deles traziam propostas de conteúdos ou atividades para serem aplicadas no Ensino Médio. Diante disso, iniciamos uma investigação acerca de *verificar se existe a possibilidade de inserção de tópicos de Cálculo para alunos do Ensino Médio*.

Se existe a possibilidade de ensinar Cálculo para alunos do Ensino Médio, qual a forma de realizar tal ação? É o que tratamos no Capítulo 4 deste trabalho. Neste capítulo, é discutido sobre a relação entre Cálculo e Ensino Médio - termos que, apesar de parecerem tão distantes, já estiveram juntos mais de uma vez.

Feita essa discussão, partimos para a apresentação de uma proposta que possibilite o professor de Matemática ensinar tópicos de Cálculo para alunos do Ensino Médio. Essa proposta contém um material de apoio ao professor, que possibilita-o relembrar os principais conceitos abordados em Cálculo: limite, derivada e integral. A outra parte se refere a um conjunto de sequências didáticas sobre limite, derivada e integral.

As sequências didáticas aqui propostas foram pensadas para serem aplicadas de forma paralela ao currículo do Ensino Médio; não trata-se de uma proposta de inserção direta desses conceitos no currículo de Matemática do Ensino Médio. Acreditamos que qualquer alteração no currículo de Matemática da escola básica é uma questão que envolve diversos fatores e exige um árduo processo de reflexão e pesquisa. Trabalhos científicos e discussões entre professores e pesquisadores da área devem ser realizados antes de qualquer modificação.

Buscamos desenvolver essas sequências visando o ensino dos conceitos de limite, integral e derivada de forma interativa, intuitiva e visual, optando pela experimentação ao rigor matemático, forma que foi defendida por Ávila, em sua entrevista na tese de Reis (2001):

> Então, depois de toda essa minha experiência com ensino, eu acordei para esta realidade de que o ensino rigorizado desde o início não é a melhor coisa. A gente tem de lembrar que o intelecto não é só racional, não é só lógica, mas tem a intuição, a visualização geométrica, que muito ajudam no aprendizado. (Entrevista com Ávila - nov/98, apud Reis, 2001, p. 109)

E complementa:

> O Cálculo deve ser apresentado com um mínimo de formalismo, com apelo à intuição e aos problemas de Física e Geometria que lhe deram origem. (apud Reis, 2001, p. 111)

Cabe destacar aqui que, objetivando favorecer o aprendizado dos alunos a cerca dos conteúdos, os módulos das sequências didáticas propostas, em sua maioria, são compostos por atividades interativas utilizando o *software* GeoGebra, um *software* livre de matemática dinâmica que oferece ferramentas para o estudo de Cálculo, Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica, Álgebra e várias outras áreas da Matemática. Essas atividades foram disponibilizadas no banco de materiais do GeoGebra e podem ser acessadas através dos *links* presentes em cada sequência didática.

Diante do exposto, são objetivos específicos desse trabalho:

- Discutir a respeito da importância do Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática nos cursos de licenciatura.
- Realizar uma análise das dissertações produzidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que abordam conteúdos sobre Cálculo.
- Produzir um material didático que possibilite ao professor trabalhar conceitos de Cálculo no Ensino Médio, caso exista a viabilidade.

2 O Cálculo Diferencial e Integral e os cursos de formação de professores de Matemática

O professor de Matemática, ao longo de sua formação, cursa diversas disciplinas, tanto pedagógicas, quanto específicas da área de Matemática. Nesse sentido, destinamos esse capítulo para tratar sobre uma de suas disciplinas obrigatórias: o Cálculo Diferencial e Integral.

Inicialmente, investigaremos o que dizem os documentos oficiais que norteiam a formação docente na área da Matemática. Em seguida, tratamos sobre os aspectos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática.

2.1 A formação dos professores de Matemática: o que dizem os documentos oficiais?

Um curso de licenciatura, cujo objetivo principal é formar professores para educação básica, tem como princípios norteadores para o desenvolvimento de seu projeto pedagógico do curso[1] (PPC), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Professores para a Educação Básica.

No ano de 2019, foi promulgada a resolução CNE/CP Nº 2, que define essas diretrizes e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Essa nova resolução revoga a resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015.

Nessas novas diretrizes, alguns pontos merecem destaque na formação do professor. O primeiro que destacamos são as competências (gerais e específicas) a serem desenvolvidas na formação docente do licenciando.

Segundo Silva e Felicetti (2014), o conceito de competência, no contexto escolar, está relacionado a aptidão do indivíduo de obter êxito em atividades propostas. Por outro lado, os autores citam que Perrenoud (1999) define competências como

[1]Documento que regulamenta a estrutura do curso garantindo a organização e o planejamento. Nestes devem ser definidos: Concepção do Curso; Estrutura do Curso: Currículo, corpo docente, corpo técnico administrativo e infra-estrutura; Procedimentos de avaliação dos processos de ensino e aprendizagem e do curso; Instrumentos normativos de apoio (composição do colegiado, procedimentos de estágio, TCC, etc.). (Universidade Federal de Minas Gerais, p.1)

> [...]forma eficaz de enfrentar situações análogas, de modo a articular a consciência e recursos cognitivos com saberes, capacidades, atitudes, informações e valores, tudo isso de maneira rápida, criativa e conexa. (SILVA; FELICETTI, 2014, p. 18)

No âmbito das competências gerais, é requerido aos docentes o desenvolvimento das competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as competências gerais docentes. Com relação as competências específicas, é estabelecido:

> Art. 4º As competências específicas se referem a três dimensões fundamentais, as quais, de modo interdependente e sem hierarquia, se integram e se complementam na ação docente. São elas:
> I - conhecimento profissional;
> II - prática profissional; e
> III - engajamento profissional. (BRASIL, 2019, p. 2)

No texto da resolução CNE/CP Nº 2, após o Artigo 4º, são apresentadas as competências específicas.

Na dimensão conhecimento profissional, apresentado no documento, espera-se que a formação inicial proporcione ao futuro professor dominar os objetos de conhecimento e saber como ensiná-los; demonstrar conhecimento sobre os estudantes e como eles aprendem; reconhecer os contextos de vida dos estudantes; e conhecer a estrutura e a governança dos sistemas educacionais. Em relação à prática profissional, almeja-se proporcionar as capacidades de planejar as ações de ensino que resultem em efetivas aprendizagens; criar e saber gerir os ambientes de aprendizagem; avaliar o desenvolvimento do educando, a aprendizagem e o ensino; e conduzir as práticas pedagógicas dos objetos do conhecimento, as competências e as habilidades. Por fim, comprometer-se com o próprio desenvolvimento profissional; comprometer-se com a aprendizagem dos estudantes e colocar em prática o princípio de que todos são capazes de aprender; participar do Projeto Pedagógico da escola e da construção de valores democráticos; e engajar-se, profissionalmente, com as famílias e com a comunidade, visando melhorar o ambiente escolar são as competências desejadas na dimensão conhecimento profissional. (BRASIL, 2019)

Para que as licenciaturas forneçam essas competências aos alunos, alguns fundamentos, presentes no Artigo 5º, são considerados nessas diretrizes.

> Art. 5º A formação dos professores e demais profissionais da Educação, conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), para atender às especificidades do exercício de suas atividades, bem como aos objetivos das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica, tem como fundamentos:
> I - a sólida formação básica, com conhecimento dos fundamentos científicos e sociais de suas competências de trabalho;
> II - a associação entre as teorias e as práticas pedagógicas; e
> III - o aproveitamento da formação e das experiências anteriores, desenvolvidas em instituições de ensino, em outras atividades docentes ou na área da Educação.(BRASIL, 2019, p. 3)

Outros pontos a serem destacados são o currículo e a organização curricular dos cursos de licenciatura.

O currículo é de extrema importância na formação do licenciando, uma vez que ele desenhará o percurso do mesmo dentro da instituição, visando sua formação profissional. Felício (2017) complementa esse argumento dizendo:

> o currículo e a sua organização assumem-se como elementos de destaque, uma vez que eles revelam opções acerca de um determinado modelo de formação profissional, caracterizado pelas articulações que se estabelecem, no seu interior, entre os saberes teóricos e os saberes práticos, necessários à atividade docente e ao desenvolvimento profissional, cuja construção deve ser o objetivo de qualquer programa de formação. (FELÍCIO,2017, p. 151)

Diante dessa importância, a resolução apresenta no Artigo 7º, 14 princípios norteadores para organização curricular que devem ser levados em consideração na criação do PPC do curso.

Nestes princípios norteadores são inclusos questões relativas tanto aos conhecimentos pedagógicos e educacionais, quanto aos conhecimentos específicos da área de atuação do futuro docente:

> II - reconhecimento de que a formação de professores exige um conjunto de conhecimentos, habilidades, valores e atitudes, que estão inerentemente alicerçados na prática, a qual precisa ir muito além do momento de estágio obrigatório, devendo estar presente, desde o início do curso, tanto nos conteúdos educacionais e pedagógicos quanto nos específicos da área do conhecimento a ser ministrado; (BRASIL, 2019, p. 5)
> [...]
> VII - integração entre a teoria e a prática, tanto no que se refere aos conhecimentos pedagógicos e didáticos, quanto aos conhecimentos específicos da área do conhecimento ou do componente curricular a ser ministrado; (BRASIL, 2019, p. 5)

Nesse sentido, essas diretrizes, bem como suas atribuições, são pontos comuns em todos os cursos de licenciatura. Contudo, cada área específica tem suas regulamentações. No caso da Matemática, existem dois documentos que regem os cursos dessa área: o parecer CNE/CES 1.302/2001, que propõe as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura e a resolução CNE/CES 3, de 18 de fevereiro de 2003, que outorga essas diretrizes.

O curso de Licenciatura em Matemática visa preparar o profissional, professor de Matemática, para atuar lecionando na educação básica. De acordo com o parecer CNE/CES 1.302/2001, publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002 (BRASIL, 2002a, p.15), espera-se do Licenciado em Matemática as seguintes características:

> - visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos
> - visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania
> - visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

No documento, é instituído que a estrutura do currículo dos cursos de Matemática deverá seguir as seguintes orientações:

> - partir das representações que os alunos possuem dos conceitos matemáticos e dos processos escolares para organizar o desenvolvimento das abordagens durante o curso;
> - construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno.

Conforme o parágrafo anterior, o primeiro tópico ressalta que, uma vez que os alunos passam pela Educação Básica, esperam-se deles conhecimentos prévios quando chegam a graduação e, a partir desse ponto, o currículo deve permitir que eles construam visões significativas de maior amplitude a respeito dos conteúdos estudados na graduação. Mas quais são os conteúdos que devem ser estudados?

O parecer CNE/CES 1.302/2001 deixa bem claro que os cursos de licenciatura em Matemática devem apresentar disciplinas tanto da área da Matemática quanto da área da Educação Matemática. Cálculo Diferencial e Integral, juntamente com Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica são comuns a todos os cursos de licenciatura dessa área e podem ser dispostos, durante o curso, de acordo com o Projeto Pedagógico proposto pela Instituição de Ensino Superior. Além disso, devem ser inclusos na parte comum: conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. (BRASIL, 2002a)

Note, pelo documento, que a disciplina Cálculo Diferencial, aparece entre as disciplinas obrigatórias nos currículos da licenciatura em Matemática. Nesse sentido, considerando que os professores licenciados em Matemática cursaram a disciplina durante o período acadêmico, refletimos a respeito da relevância que o Cálculo Diferencial e Integral tem na formação do licenciando em Matemática. É o que trataremos na próxima seção.

2.2 Aspectos da disciplina Cálculo nos cursos de licenciatura em Matemática

Como vimos na seção anterior, o Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina específica de Matemática obrigatória nos cursos de formação de professores dessa área. Nela é apresentado aos licenciandos o conceito de função de uma variável real, bem como noção de infinito, limites, derivadas e integrais de uma função desse tipo. Contudo, apenas o conceito de função é ensinado de modo superficial no Ensino Médio, sendo que os outros tópicos não fazem parte do currículo do Ensino Básico.

Diante desse cenário, começamos a refletir acerca da presença e importância desta disciplina nos cursos de formação e percebemos que, nos documentos oficiais, não é apresentada uma justificativa explícita para a tal. Nesse sentido, uma questão vem à tona: por que o futuro professor de Matemática deve estudar conceitos que não são aplicados diretamente no ensino básico?

Alguns autores defendem a importância da disciplina Cálculo nas graduações em geral, não somente na área de Matemática. Um dos argumentos diz respeito à sua aplicabilidade em diversas situações.

Nikolai Lobatchevsky (1792-1856) dizia que "não há ramo da matemática, independentemente do quão abstrato seja, que não poderá ser aplicado em algum momento a algum fenômeno do mundo real" (THIEL, 2016, p. 11). E com o Cálculo não é diferente. Nesse sentido, Orfali (2017) destaca essa aplicabilidade e sintetiza a importância do Cálculo na construção do método científico.

> O espaço ocupado pelo Cálculo na expressão matemática de tantas descobertas científicas e inovações tecnológicas nos últimos três séculos, em diferentes áreas como a Física, a Química e a Economia, mostra seu papel integrador dentro das ciências exatas. Mais do que isso, o Cálculo representa uma parte significativa do próprio desenvolvimento do método científico moderno. (ORFALI, 2017, p. 41)

Alvarenga (2016) também enfatiza a importância de objetos estudados na disciplina, como as funções, derivadas e integrais. Segundo a autora, fenômenos do mundo real podem ser analisados por estes objetos, buscando o avanço tecnológico, como apresentou Orfali (2017). Além disso, ela complementa que o Cálculo tem o papel de agregar no conhecimento humano refletindo na vida e no gerenciamento dos negócios.

> É notória a importância dos conteúdos, principalmente de funções, derivadas e integrais como ferramentas matemáticas para a análise de fenômenos físicos, biológicos, econômicos, administrativos, contábeis, matemáticos, químicos, computacionais, das engenharias e de outras ciências que visam não só um avanço tecnológico, mas, sobretudo, compreender, descobrir e aumentar o conhecimento humano que serve à condução da vida ou ao gerenciamento dos negócios. (ALVARENGA, 2016, p. 47)

As opiniões dos autores, mencionadas acima, podem ser relacionadas à habilidade "Estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento", apresentada nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, como habilidade que o currículo, ao ser elaborado, busca desenvolver nos graduandos em Matemática, tanto no Bacharelado quanto na Licenciatura.

Outra habilidade pode ser relacionada ao argumentos dos autores. No Parecer CES 968/98, é apresentado a definição de campos de saber. De acordo com o documento, esse termo representa um recorte específico de uma área do conhecimento, ou de suas aplicações, ou de uma área técnico-profissional ou, ainda, uma articulação de elementos de uma ou mais destas.

Diante dessa definição, percebemos que, os argumentos aqui apresentados, mostram a possibilidade de utilizar o Cálculo para aplicar em situações específicas de diferentes áreas do conhecimento. Nesse sentido, a partir dessa construção, a habilidade de "trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber"(BRASIL, 2002a, p. 3) pode ser contemplada pelo currículo dos cursos de licenciatura através dessa disciplina.

Para Rezende (2003), o Cálculo é essencial na formação do cidadão. Além disso, o autor aponta que, para o exercício da cidadania em uma sociedade ascendente, algumas habilidades (aplicações) são exigidas com uma maior frequência. Dentre elas estão a resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.).

O argumento do autor reflete a ideia, presente nos documentos oficiais, de que o curso de licenciatura possa promover ao licenciado uma "visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania". (BRASIL, 2002a, p. 3)

Considerando o argumento de Rezende (2003) e Alvarenga (2016), junto com o ponto de vista de Civiero (2016), em que "o conteúdo matemático específico pode ser a base para reflexões em torno das imbricações com questões contemporâneas, como, por exemplo, a ecologia, a equidade social, a economia, entre outras, que vivificam as subjetividades da realidade", faz sentido considerar que o Cálculo Diferencial e Integral proporciona aos estudantes a habilidade do "conhecimento de questões contemporâneas". (BRASIL, 2002a, p. 3)

Além das aplicações em outras áreas do conhecimento, o Cálculo também possui aplicações dentro da própria Matemática. Um caso particular é a Geometria Analítica. Vários livros de Cálculo são produzidos em conjunto com conhecimentos dessa área. Nesse ramo da Matemática, por exemplo, podemos associar conceitos de Cálculo em gráficos, como o estudo de máximos e mínimos ou crescimento e decrescimento de funções.

Nesse sentido, Rezende (2003) defende que a disciplina é relevante dentro da própria Matemática, na construção e organização de conceitos específicos da área, ou seja, ao seu caráter integrador com o próprio conhecimento matemático.

> [...] o Cálculo é imprescindível para o desenvolvimento e organização interna da matemática e suas diversas áreas específicas. Numa linguagem alegórica diríamos que, se a geometria e a aritmética formam a "base" do conhecimento matemático, o Cálculo representa a sua "espinha dorsal", isto é, é o domínio de conhecimento da matemática que dá sustentação e realiza as diversas interfaces entre as outras áreas do próprio conhecimento matemático. (Rezende, 2003, p. 38)

Aléssio (2019) e Reis (2001) destacam a relevância dessa disciplina na formação dos professores. Além disso, os trabalhos apresentam reflexões a partir de entrevistas a professores que ministram a disciplina, a cerca da presença do Cálculo dentro da licenciatura em Matemática.

Aléssio (2019) procurou, através de uma entrevista com professores que ministram a disciplina de Cálculo em uma universidade estadual, respostas para a seguintes questões: "O Cálculo Diferencial e Integral deveria ser uma disciplina obrigatória num curso de Licenciatura em Matemática? Por quê? Quais os conteúdos que deveriam ser trabalhados?".

No trabalho, constatou-se que $94,7\%$ dos docentes consideravam a disciplina obrigatória, enquanto $5,3\%$, representando um professor, indicou que, não necessariamente, a disciplina devesse ser obrigatória. Os argumentos de alguns professores a favor da obrigatoriedade centravam em torno de:

- uma formação sólida do professor;
- importância do rigor e formalismo matemático;
- desenvolvimento do raciocínio lógico;
- é um conteúdo base para outras disciplinas vistas ao longo do curso;
- ampliação do conceito de função e o universo dos números;
- importância das aplicações;
- importância da aquisição de conceitos matemáticos, mesmo que não serão aplicados no ensino básico;
- (re)construção de conceitos matemáticos que serão ensinados diretamente ou indiretamente no Ensino Médio;
- importância na formação de um futuro professor crítico.

Diante desse cenário, relacionando com a opinião de professores na entrevista, a autora afirma que o Cálculo é importante na formação de um professor crítico.

> [...] a disciplina de Cálculo proporciona um estímulo ao raciocínio do aluno-professor, tornando-o um profissional crítico e capaz, preparado para trabalhar em sala de aula com noções elementares vistas na graduação, somado ao conhecimento matemático em um estágio mais elevado em relação aos demais níveis de ensino. (ALÉSSIO, 2019, p. 50)

E, ao fim, defende essa disciplina na graduação com base nos argumentos apresentados pelos professores da pesquisa.

> As respostas apresentadas por 19 docentes que atuam em disciplinas de Cálculo permitiu constatar serem capazes de situar o papel disciplina na formação do futuro professor. Dentre os argumentos, podem ser destacados o fato de que o Cálculo permite uma base teórica sólida; diversidade de aplicações nas áreas do conhecimento; uma maior percepção, ampliação, e compreensão dos conteúdo de funções, taxa de variação, área e volume; noções de limite, derivada e integral para articular problemas e exemplificar situações que irá confrontar na prática escolar, além de relacionar conteúdos que ministrará no ensino básico. Assim, o docente se tornará mais crítico, completo, pronto para atuar na sala de aula.
>
> Evidencia-se, portanto, a compreensão de que o domínio dos conteúdos de Cálculo, e de suas possíveis aplicações na Educação Básica, é instância indispensável na formação do futuro professor, munindo-o de um dos referenciais teóricos necessários para a eficiência do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. (ALÉSSIO, 2019, p. 82)

Perante o exposto, os argumentos apresentados pelos autores reforça que o Cálculo Diferencial e Integral possui relevância na formação dos professores de Matemática. Além disso, podemos observar que esses argumentos convergem para as habilidades norteadoras no desenvolvimento do currículo dos cursos de licenciatura em Matemática.

Entretanto, apesar de argumentos ressaltando o papel do Cálculo nos cursos de licenciatura, existem muitas questões sobre a forma como essa disciplina é tratada na formação do professor de matemática. Nesse sentido, trabalhos como Aléssio (2019) e Reis (2001) ressaltam a necessidade de uma reformulação na forma com que são trabalhados os conteúdos da disciplina.

Na entrevista feita por Aléssio (2019), alguns professores preocupavam com as relações entre a formação Matemática e o conhecimento necessário ao professor para sua prática. Para os entrevistados, são necessárias mudanças e adaptações para o curso de licenciatura.

Na entrevista de Reis (2001), os participantes (professores experientes que ministraram essa disciplina, alguns autores de livros didáticos) alegam que o ensino de Cálculo deve deixar o caráter tradicionalista e ser ensinado em caráter menos formal e mais intuitivo, buscando em aplicações e situações-problema, preferir os conceitos e significados do que as técnicas formais intrínsecas à disciplina, de modo a favorecer uma formação matemática relevante para a prática na escola básica.

Barufi (1999) já discutia essa questão apresentada por Reis (2001). Segundo a autora, foi observado que em alguns cursos de Cálculo eram deixados de lado a ideia, a intuição e a investigação, e predominava uma estrutura sistematizada baseada na teoria lógico-formal dedutiva, centrando em um enfoque rigoroso. Para a autora, abordagens como essa não proporcionariam um aprendizado significativo para o aluno, uma vez que este, normalmente egresso do ensino básico, não estava familiarizado com as técnicas e procedimentos lógicos utilizados nessa estrutura.

O comentário de Rezende (2003) destaca ainda mais a ideia de Barufi (1999).

> O matemático-professor satisfaz seu ego matemático ao reproduzir as demonstrações dos resultados no quadro de giz. Acredita de forma alienada que, com a realização da demonstração, o significado do resultado estará garantido. Faz isso tentando convencer o aluno da verdade de seu enunciado, não percebendo que muitas vezes tal procedimento é tão desnecessário quanto inútil. (Rezende, 2003, p. 12)

Essa forma sistemática de ensinar os conceitos de Cálculo, além de não produzir significado no aprendizado, influencia diretamente a prática do futuro professor de Matemática.

Fiorentini (2005) define essa influência como tradição pedagógica. Na concepção do autor, o futuro professor "não aprende dele apenas uma Matemática, internaliza também um modo de concebê-la e de tratá-la e avaliar sua aprendizagem."E isso é refletido dentro da educação básica. Se a formação do licenciado for baseada do modo sistemático, o mesmo tende a reproduzir esse método dentro da sala de aula. Diante disso, se o ensino de Cálculo possuir o caráter investigativo e construtivista, baseado em experimentações e intuições, e voltado para construção de significados, existirá uma influência pedagógica do professor formador que bem mais se aproxima da realidade da educação básica.

Outras críticas, em referência ao modo como a disciplina é organizada nas Universidades, também são levantadas.

Reis (2001) aponta que, nas aulas de Cálculo, os professores abordam sempre os mesmos conteúdos, com mesma metodologia, mesmos exemplos, mesmas aplicações, seja no curso de Física, quanto Engenharias, Economia e Farmácia. Alvarenga (2016) complementa essa fala, dizendo que o Cálculo Diferencial e Integral, em muitas universidades, possui várias designações ou nomes que as diferem. Contudo, há ocasiões que, apesar da diferença na nomenclatura, os conteúdos presentes na ementa são os mesmos.

Diante de tal problemática, Reis (2001) argumenta que é papel do professor refletir acerca dos conteúdos a serem ensinados objetivando a produção de significado para a profissão do estudante.

> cada um desses cursos profissionalizantes exige do professor uma transposição didática própria, de modo que a produção de significados das idéias do Cálculo esteja em estreita relação com o contexto profissional do curso. (REIS, 2001, p. 24)

Civiero (2016) é mais contundente na crítica. A autora relata a falta de conexão do Cálculo e outras disciplinas de Matemática com as disciplinas da educação básica.

> Disciplinas como Cálculo, Álgebra e Geometria, em geral, são desenvolvidas apenas de forma técnica, automática e sem referência alguma às relações que elas têm com as disciplinas da educação básica, numa demonstração de que as preocupações estão voltadas à racionalidade. (CIVIERO, 2016, p. 73)

Contudo, a autora propõe que, ao invés de discussões acerca do porquê da presença dessas disciplinas, professores formadores procurassem verificar se nessas disciplinas haviam discussões reflexivas unidas ao conhecimento matemático de cada uma delas. Além disso, ela relata que não é necessário uma reformulação na distribuição das disciplinas ou uma renovação curricular, necessita, apenas, ocorrer mudança na forma com que os conteúdos são desenvolvidos.

A partir dessas críticas, percebemos que se faz necessário uma reflexão acerca do ensino de Cálculo no que diz respeito à sua relação com a educação básica, uma reflexão sobre pontos como conceitos a serem ensinados, abordagem e metodologias do professor formador, possibilidades e desafios no ensino da disciplina, além das contribuições da disciplina no ensino básico.

Ademais, assim como diz Fiorentini (2013), é necessário aderir visões mais integradoras do curso, voltadas aos pontos de vista multirrelacional, epistemológico e histórico-cultural, mas sem deixar de aprofundar no conteúdo específico.

3 Cálculo Diferencial e Integral e o PROFMAT

Nesse capítulo, abordaremos sobre o Cálculo Diferencial e Integral e o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Na primeira seção, apresentamos, de forma concisa, esse programa de mestrado da Sociedade Brasileira de Matemática e sua matriz curricular, na qual encontra-se a presença da disciplina obrigatória Fundamentos de Cálculo. Em seguida, apresentamos uma análise das dissertações de alunos do PROFMAT que tratam de conteúdos específicos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral.

3.1 O PROFMAT

O PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, é um programa de mestrado na área de Matemática e ofertado em diversas universidades públicas do país.

Criado através de uma ação induzida da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) junto à comunidade científica da área de Matemática, o programa é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

O primeiro processo de seleção para o ingresso de alunos no programa ocorreu no ano de 2011. Após 2011, em todos os outros anos, foram realizadas as prova de seleção do PROFMAT (Exame Nacional de Acesso - ENA) - exceto o ano de 2020, quando a Coordenação Nacional do PROFMAT decidiu cancelar a seleção do programa

O PROFMAT é ofertado em instituições de ensino superior nas 27 unidades federativas do país. Essas instituições, denominadas Instituições Associadas, garantem a gratuidade do programa e, através das Coordenações Acadêmicas Institucionais, possuem a responsabilidade de coordenar as atividades do mestrado profissional seguindo as determinações do Regimento do PROFMAT e suas normas.

O site oficial do PROFMAT informa que são, no total, 76 Instituições Associadas. Contudo, 73 delas ofertaram o curso no ano de 2021.

Conforme informado no site da CAPES, um programa de mestrado profissional é "uma modalidade de Pós-Graduação stricto sensu voltada para a capacitação de profissionais, nas diversas áreas do conhecimento, mediante o estudo de técnicas, processos, ou temáticas que atendam a alguma demanda do mercado de trabalho"(CAPES, 2019).

De um modo geral, no site CAPES, é informado que o objetivo principal dos mestrados profissionais é favorecer o aumento do nível de competitividade e produtividade em organizações públicas ou privadas. Porém, consultando os Documentos de Área referente a área de Matemática/Probabilidade e Estatística, à qual o PROFMAT está inserido, não estão explicitados os objetivos específicos dos mestrados profissionais dessa área.

Nesse sentido, o que constatamos através do relatório “PROFMAT: uma reflexão e alguns resultados”, da Sociedade Brasileira de Matemática (2017), o programa visa oferecer ao professor de Matemática, o aprimoramento da sua formação profissional, com um olhar especial voltado principalmente ao domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência (Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, 2016).

Buscando alcançar essa meta, a matriz curricular foi construída por disciplinas obrigatórias e eletivas (Figuras 3.1 e 3.2), nas quais a maioria estão relacionadas a Matemática.

Figura 3.1: Matriz curricular do PROFMAT

1º Ano	
1º Período	**2º Período**
MA 11 – Números e Funções Reais	MA 13 – Geometria
MA 12 – Matemática Discreta	MA 14 – Aritmética
2º Ano	
Verão	**1º Período – 2º Período**
MA 21 – Resolução de Problemas	MA 22 – Fundamentos de Cálculo
	MA 23 – Geometria Analítica
	Eletiva I
	Eletiva II
3º Ano	
Período de Verão	
Finalização da Dissertação de Mestrado	

Fonte: https://www.profmat-sbm.org.br/rotina-academica/matriz-curricular/

Observando a matriz curricular, nota-se, na estrutura do programa, a existência de uma disciplina obrigatória denominada MA 22 - Fundamentos de Cálculo. Conforme o catálogo de disciplinas do PROFMAT, a ementa dessa disciplina é estruturada de modo que contemple os seguintes assuntos:

- Sequências de números reais;
- Limite de funções;
- Funções contínuas;
- Derivação;
- Integração.

Figura 3.2: Disciplinas eletivas do PROFMAT

*Eletivas	
MA 31 – Tópicos de História da Matemática	MA 32 – Tópicos de Teoria dos Números
MA 33 – Introdução à Álgebra Linear	MA 34 – Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral
MA 35 – Matemática e Atualidade I	MA 36 – Recursos Computacionais no Ensino de Matemática
MA 37 – Modelagem Matemática	MA 38 – Polinômios e Equações Algébricas
MA 39 – Geometria Espacial	MA 40 – Tópicos de Matemática
MA 41 – Probabilidade e Estatística	MA 42 – Avaliação Educacional
MA 43 – Cálculo Numérico	MA 44 – Matemática e Atualidade II
MA 24 – Trabalho de Conclusão de Curso	

Fonte: https://www.profmat-sbm.org.br/rotina-academica/matriz-curricular/

Diante da lista dos conteúdos presentes no documento, percebe-se a presença de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral na ementa da disciplina obrigatória MA 22 - Fundamentos de Cálculo.

O cenário aqui descrito favorece novos questionamentos acerca do papel que desempenha o Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática, tendo em vista sua existência como uma disciplina obrigatória tanto nos cursos de formação quanto no mestrado profissional da SBM. Perguntas como "Qual o impacto que a disciplina MA 22 - Fundamentos de Cálculo pode agregar na prática do professor na sala de aula?", "Em quais aspectos essa disciplina é relevante na formação do professor?", são alguns exemplos. Além dessas, existem perguntas clássicas dos alunos do programa quando cursam a disciplina como "Por que estudar Fundamentos de Cálculo?"ou "Para que estudar Cálculo se eu não aplico em sala de aula?"

De fato, as perguntas levantadas acima são pertinentes e merecem respostas, ou pelo menos esclarecimentos. Para que isso aconteça, se faz necessário investigações por meio de pesquisas e estudos relativos ao programa, sejam com discentes, egressos e docentes participantes. Pesquisas que buscam investigar a visão dos discentes a respeito da disciplina até aquelas que visam compreender o impacto da MA 22 - Fundamentos de Cálculo para o professor de Matemática da escola básica e suas contribuições na formação deste professor. Somente após esses estudos, acreditamos que seja possível compreender tais questões e, além disso, fornecer resultados para que os organizadores do PROFMAT desenvolvam propósitos para a evolução e aperfeiçoamento do programa.

No entanto, a pergunta "Para que estudar Cálculo se eu não aplico em sala de aula?", normalmente feitas por discentes que cursam Fundamentos de Cálculo, nos chamou a atenção. Para nos aprofundarmos nessa questão, investigamos, na próxima seção, se existe alguma possibilidade de trabalhar os conceitos aprendidos na disciplina MA 22 dentro da sala de aula da escola básica, na visão de alunos do PROFMAT.

Para isso, foi realizada uma análise das dissertações produzidas por alunos do PROFMAT sobre o tema Cálculo. A análise consiste em identificar as características gerais e as possíveis formas de aplicações de conteúdos de Cálculo no ensino básico.

3.2 Análise de dissertações do PROFMAT que tratam de Cálculo

3.2.1 Procedimentos metodológicos

Para a análise de dissertações produzidas por discentes do PROFMAT que tratam de Cálculo, foram selecionados 95 trabalhos presentes no banco de dissertações do PROFMAT (disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/), que tratam de conceitos da disciplina Cálculo.

A busca foi feita através de palavras presentes nos títulos das dissertações. As palavras pesquisadas foram: Cálculo, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Diferencial e Integral, Limite, Derivada e Integral. Essa seleção ocorreu até a data 11/08/2020, onde os trabalhos escolhidos foram produzidos entre 2013 e 2019.

Para o levantamento dos dados, as dissertações consideradas foram analisadas por completo. Consideramos todo o corpo textual, tento em vista que muitas vezes os resumos, palavras-chaves e conclusões não eram suficientes para exibir conclusões a respeito das questões analisadas.

Foram analisados, em cada uma das dissertações selecionadas, os seguintes tópicos:

1) Ano de produção;

2) Região do país onde foi produzido;

3) Forma com que o tema foi apresentado.

No que se refere ao item 3, percebemos, dentro do conjunto dos trabalhos escolhidos, a existência de uma considerável heterogeneidade. Em busca de uma solução viável e relevante para superar essa dificuldade, classificamos os trabalhos em duas categorias:

- **Categoria A:** formada pelos trabalhos que abordam em sua estrutura pelo menos um dos tópicos abaixo:

- Discutem a possibilidade de inserção do Cálculo no ensino básico;

- Apresentam propostas de ensino de Cálculo para o ensino básico;

- Trazem material de apoio relacionado ao Cálculo para o professor da escola básica aplicar nas aulas;

- Relacionam/discutem o conteúdo de Cálculo com conteúdos/currículo da escola básica.

- **Categoria B:** constituída pelo trabalhos que não pertencem à Categoria A.

Feita a classificação, investigamos as duas categorias. Contudo, o foco se concentrou na categoria A, cujos trabalhos apresentam significativos vínculos do Cálculo com o ensino básico e apresentam uma quantidade maior de pontos comuns com nossa pesquisa.

A partir da Categoria A, analisamos os trabalhos de acordo com os seguintes aspectos:

a) **Apresentação de atividades de Cálculo voltadas para o ensino básico:** neste item, procuramos identificar e estudar os trabalhos que, além de propor atividades para o ensino básico, aplicam tais atividades na sala de aula. A partir deles, procuramos identificar o perfil das escolas e as séries escolares nas quais eles são aplicados. Além disso, analisamos as considerações dos autores e, também, para aqueles que apresentaram, o ponto de vista dos alunos a respeito de tais atividades.

b) **Conteúdos apresentados:** consideramos quatro assuntos presentes nas disciplinas de Cálculo (limite, continuidade, derivada e integral) e suas combinações. Analisamos os trabalhos quanto ao assunto abordado, a fim de verificar qual deles se apresenta com maior frequência.

c) **Utilização de *softwares*:** neste item, buscamos identificar os trabalhos que relacionam o Cálculo com o uso de *software*. Analisamos se os trabahos discutem o uso de *software* para o ensino de Cálculo na escola básica, podendo ou não apresentar conteúdos/atividades que necessitem do uso de algum tipo de *software* para serem trabalhados em sala.

Após o levantamento desses dados, utilizamos o recurso nuvens de palavras no resumo e a análise de similitude nas palavras-chave e conclusões presentes nos trabalhos considerados na pesquisa.

Esses recursos nos permitiram visualizar as palavras que mais se repetem nos textos e suas relações com outras palavras, e, assim, perceber o que há em comum nas dissertações.

Para a criação de tais gráficos, utilizamos o *software* IRaMuTeQ (Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires), um *software* livre que possibilita o processamento de dados qualitativos, com variadas maneiras de análises estatísticas de textos, produzidas a partir de entrevistas, documentos, entre outros bancos de dados. (SOUZA et al, 2018, p. 2)

3.2.2 Características gerais dos trabalhos analisados e discussões

Feita a seleção dos trabalhos no banco de dissertações do PROFMAT, foram consideradas algumas características gerais relevantes para a análise.

Ano de produção:

A primeira característica analisada foi o ano de produção dos trabalhos. A Tabela 3.1 mostra os dados obtidos.

Tabela 3.1: Ano de produção das dissertações do PROFMAT sobre Cálculo

Ano	**Trabalhos**	**Porcentagem (%)**
2013	17	17,89
2014	15	15,79
2015	14	14,74
2016	19	20,00
2017	05	05,26
2018	12	12,63
2019	13	13,68
Total	95	100,00

A partir desses dados, observamos que 2016 foi o ano em que ocorreu uma maior produção de trabalhos relacionados ao Cálculo, totalizando 19 trabalhos, o que representa exatamente 20% do total. Contudo, no ano posterior houve uma queda na produção de dissertações sobre o tema. Sabendo que a média geral da produção anual de trabalhos desse tipo foi de 13,57 trabalhos, em 2017 apenas 5 trabalhos ($5,26\%$) foram produzidos.

Localização da instituição:

Outro ponto analisado foi a localização das instituições onde as dissertações foram produzidas. Conforme mostra a Tabela 3.2, as regiões Nordeste e Sudeste mostraram um predomínio nas produções, onde mais de $\frac{1}{3}$ dos trabalhos foram produzidos em cada uma delas. Já na região Sul, apenas 7 trabalhos foram produzidos.

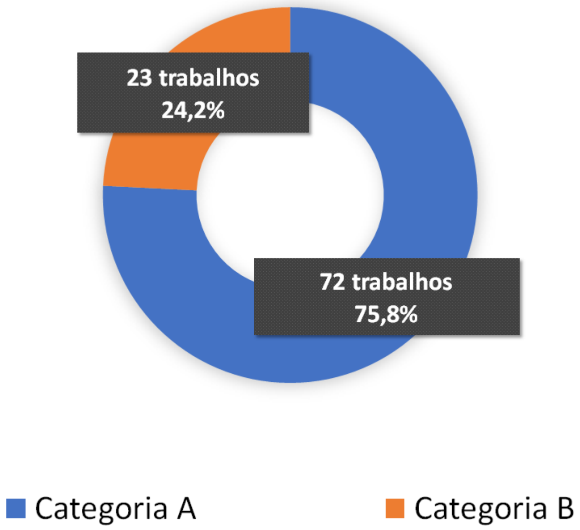
Tabela 3.2: Localização das dissertações analisadas

Região	**Trabalhos**	**Porcentagem (%)**
Centro-Oeste	12	12,63
Nordeste	33	34,74
Norte	11	11,58
Sudeste	32	33,68
Sul	07	07,37
Total	95	100,00

Em relação a forma com que o assunto é abordado nos trabalhos selecionados, consideramos a Categoria A, que é formada pelos trabalhos que contemplam pelo menos um dos tópicos: a) discutem a possibilidade de inserção do Cálculo no Ensino Básico; b) apresentam propostas de ensino para o Ensino Básico; c) trazem material de apoio para o professor aplicar nas aulas; d) relacionam/discutem o conteúdo de Cálculo com conteúdos/currículo da escola básica. E a Categoria B, que é constituída pelo trabalhos que não pertencem à Categoria A.

O gráfico presente na Figura 3.3 mostra o número de trabalhos e o percentual em cada uma dessas categorias.

Figura 3.3: Gráfico sobre os trabalhos que relacionam e os que não relacionam o Cálculo ao Ensino Básico



Fonte: O Autor

Sobre a Categoria B:

Percebe-se, nos trabalhos da Categoria B, que existem dissertações que não especificam à qual nível de ensino refere-se o objeto estudado. Algumas apresentam uma abordagem sistematizada do conteúdo matemático, composta por teoremas, demonstrações e exemplos. Outros trabalhos, além de seguir essa forma sistematizada de expor a teoria, estabelecem propostas didáticas para o ensino básico, contudo não existe uma ligação entre as propostas e o Cálculo. Além disso, 9 dissertações são voltadas para o Ensino Superior, com trabalhos que tratam sobre conceitos de Cálculo, análise de erros nos cursos Cálculo, formas de avaliação, propostas de ensino, utilização de *software* para abordar conteúdos de Cálculo de um modo geral.

Sobre a Categoria A:

De acordo com os dados levantados, a maior parte dos trabalhos relacionam o Cálculo com o Ensino Básico e estão inseridos na Categoria A. São 72 dissertações que integram essa classificação, o equivalente a $75,79\%$ do total. Mas por que o interesse nesse nível de ensino? Uma possível justificativa para essa pergunta se deve justamente ao fato de que o objetivo do programa está relacionado com o próprio ensino básico.

Como dito anteriormente, o PROFMAT busca promover o aperfeiçoamento profissional do discente, principalmente no que diz respeito ao domínio aprofundado de conteúdo importante para a a prática na sala de aula. Além disso, o público alvo desse programa de pós-graduação é o professor de Matemática da educação básica. A partir dessas questões, acreditamos que os números apresentados até o ano de 2019, sobre o tema Cálculo, fazem absolutamente sentido e encontram-se em consonância com os dados apresentados no relatório “PROFMAT: uma reflexão e alguns resultados”, da Sociedade Brasileira de Matemática (2017).

De um modo geral, todas as dissertações que relacionam o Cálculo ao Ensino Básico analisadas nessa pesquisa também fornecem recursos para o professor trabalhar em sua classe ou se aprofundar em conhecimentos que possam auxiliá-lo em sua prática. Apesar de algumas delas apresentarem o conteúdo sem exibir uma forma do professor adaptá-lo para sua turma, fixamos os olhares nas que propuseram algo a ser aplicado dentro de sala de aula.

Ao todo, foram identificadas 49 dissertações que propõem algum tipo de atividade para o Ensino Básico. Percebe-se que a maior parte delas são destinadas ao ensino médio. Possivelmente isso se dá ao fato de que é a partir do 1º ano desse período escolar que o aluno inicia um estudo mais aprofundado sobre o conteúdo funções, que é a base do Cálculo. Além disso, fatores como a interdisciplinariedade com a Física e um possível ingresso dos alunos em cursos superiores cuja matriz curricular contém disciplinas de Cálculo também podem influenciar na opção dos autores em trabalhar com o conteúdo no ensino médio.

Dentre estes trabalhos que apresentam atividades direcionadas para o ensino, constatou-se que 16 deles realizaram a experiência de aplicá-las em grupos de alunos e 1 aplicou parcialmente. A maior parte apontou que as atividades foram desenvolvidas em escolas públicas municipais, estaduais ou federais. Além disso, dois trabalhos foram aplicados em turmas de ensino fundamental, o que possivelmente possa indicar que existe a possibilidade de inserir o ensino de tópicos de Cálculo nesse nível de ensino.

No geral, os autores que aplicaram suas atividades no ensino básico concluíram que as experiências foram exitosas e que atingiram o objetivo esperado, inclusive com bons resultados dos alunos nas avaliações/atividades. Com base nessas experiências, defendem a viabilidade de tratar de assuntos de Cálculo nas aulas de Matemática na escola.

Nota-se que a opinião dos alunos também foi levada em consideração para tal conclusão. Foi relatado, em muitas dissertações, que os alunos se mostraram motivados e desafiados com a experiência de estudar conteúdos de Cálculo. Além disso, os alunos que realizaram atividades utilizando *softwares* avaliaram o uso dessas ferramentas como uma forma facilitadora de aprendizagem.

Além disso, muitos desses trabalhos sugerem uma abordagem intuitiva dos conteúdos de Cálculo para as turmas da escola básica, indo ao oposto da abordagem sistematizada do conteúdo. Para justificar tal abordagem, certos trabalhos argumentam que essa forma favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno e que uma forma sistematizada, sem que o aluno perceba na prática os conceitos, seja de Cálculo ou outro conteúdo, poderá promover o desinteresse pelo aluno em estudar tais conceitos e, com isso, resultados negativos dentro das aulas de Matemática serão mais recorrentes.

Conteúdos de Cálculo abordados:

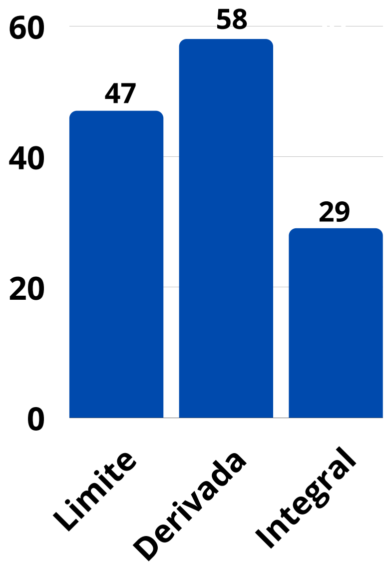
Em relação aos conteúdos de Cálculo presentes nos trabalhos que compõem a Categoria A, elaboramos a Tabela 3.3.

Considerando que um mesmo trabalho pode abordar mais de um conteúdo, a partir dos dados obtidos, percebemos que nestes trabalhos a Derivada (exclusivo ou em conjunto com outros conteúdos) é o que apresenta maior frequência. Ao todo são 58 trabalhos que abordam esse conteúdo, dentre os 72 que pertencem a categoria A. Isso equivale a $80,6\%$. Além disso, os conteúdos limite e integral vem logo em seguida com $65,3\%$ e $40,3\%$ dos trabalhos dessa categoria. O gráfico da Figura 3.4 favorece uma melhor visualização sobre esses dados.

Tabela 3.3: Distribuição dos conteúdos de Cálculo

Conteúdo	**Número de trabalhos**	**Porcentagem (%)**
Limite (exclusivamente)	06	08,3
Limite e continuidade	01	01,4
Limite e derivada	11	15,3
Limite, continuidade e derivada	07	09,7
Limite e integral	02	02,8
Derivada (exclusivamente)	17	23,6
Derivada e continuidade	01	01,4
Derivada e integral	02	02,8
Integral (exclusivamente)	05	06,9
Limite, derivada e integral	15	20,8
Limite, continuidade, derivada e integral	05	06,9
Total	72	100,0

Figura 3.4: Gráfico da quantidade de trabalhos pertencentes a categoria A que tratam de cada um dos conteúdos



Fonte: O Autor

Diante dos dados, percebemos que os 3 principais tópicos vistos nas disciplinas de Cálculo (limite, derivada e integral) aparecem nos trabalhos como possíveis de serem inseridos no Ensino Médio.

Uma provável hipótese para explicar a predominância da derivada em relação aos demais se deve ao fato das inúmeras intersecções desse conteúdo com os conteúdos do ensino básico. Por exemplo, podemos aplicar a teoria de derivada no estudo de geometria analítica como no caso quando os alunos estudam a inclinação da reta. Também existe a possibilidade da inserção desse conteúdo no estudos dos gráficos de funções quadráticas, analisando os intervalos de crescimento e decrescimento das curvas, além de poder determinar os vértices de funções desse tipo. Uma outra aplicação pode ser feita nas aulas de física onde o estudo da cinemática viabiliza essa inclusão.

Utilização de *software*:

Um último ponto observado foi uma ocorrência significativa da utilização de *softwares* voltada para o ensino de Cálculo.

Dos trabalhos cujo tema está relacionado com o ensino básico, 24 deles defendem ou utilizam *softwares* como uma ferramenta auxiliar para o ensino de Cálculo.

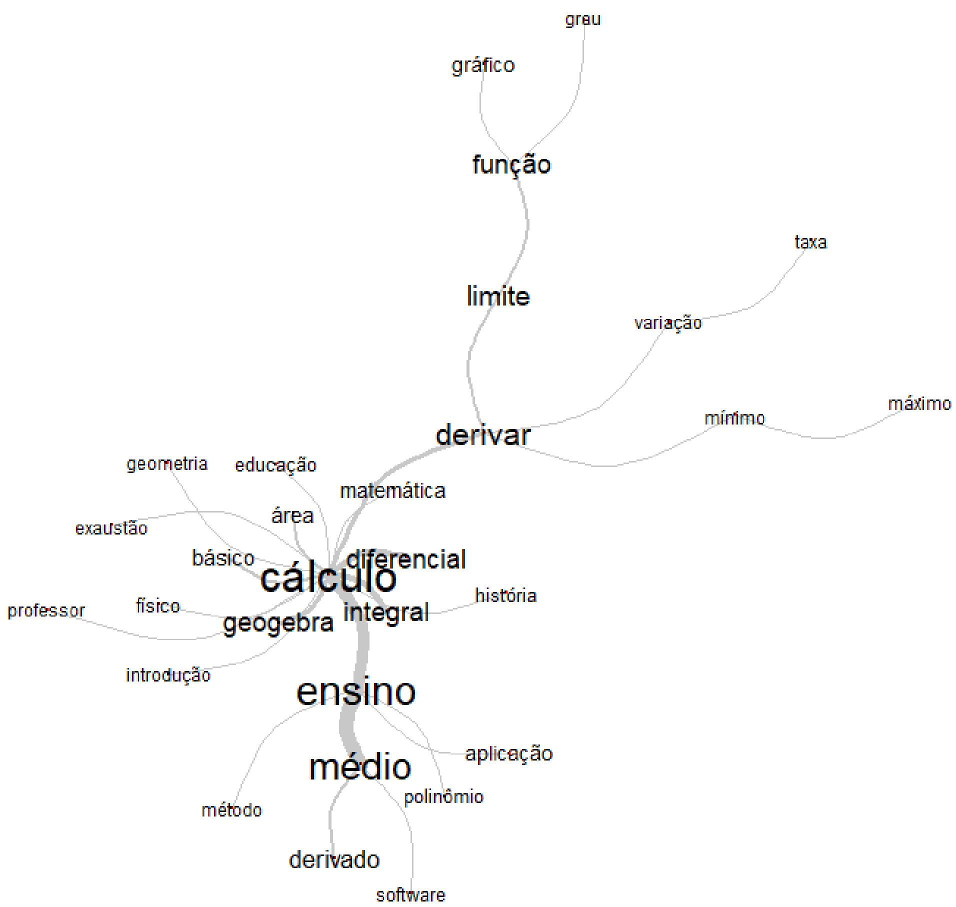
Percebe-se que a maior parte tomam o GeoGebra como principal *software*. No entanto, dois trabalhos sugerem também a utilização do *software* WxMaxima.

Análise de similitude e nuvem de palavras com o *software* IRaMuTeQ:

Após o levantamento das principais características dos trabalhos, utilizando o *software* IRaMuTeQ, investigamos as palavras-chave, resumos e conclusões dos trabalhos da Categoria A, a fim de levantar mais alguns detalhes a respeito destes.

Inicialmente, fizemos uma análise de similitude das palavras-chave, conforme a Figura 3.5. Nesta análise, 5 trabalhos não apresentaram palavras-chave em seu corpo textual.

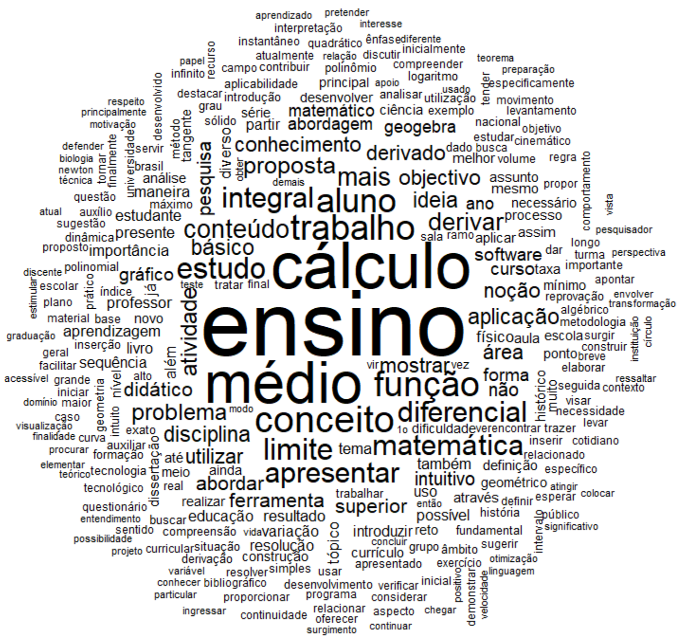
Figura 3.5: Análise de similitude das palavras-chave dos trabalhos da Categoria A



Fonte: O Autor

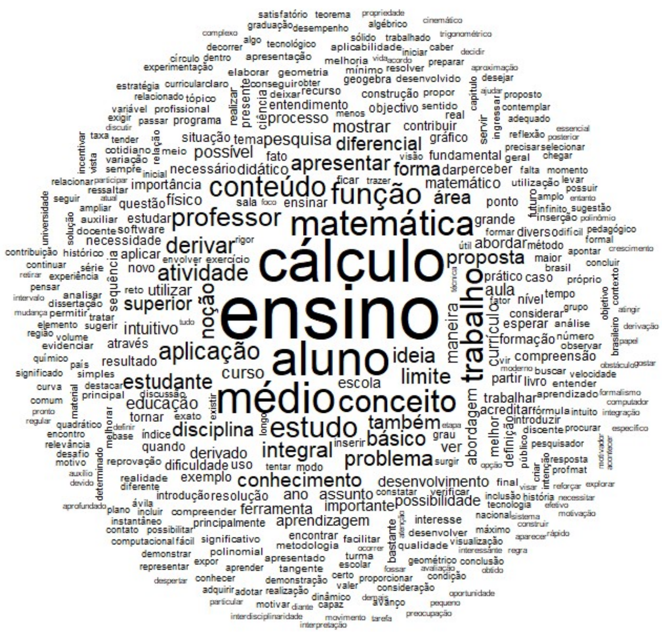
Na sequência, foram criadas nuvens de palavras para os resumos e as conclusões. Todos os trabalhos apresentaram resumo e um deles não apresentou conclusão/considerações finais.

Figura 3.6: Nuvem de palavras dos resumos dos trabalhos da Categoria A



Fonte: O Autor

Figura 3.7: Nuvem de palavras das conclusões dos trabalhos da Categoria A



Fonte: O Autor

Observando as nuvens de palavras apresentadas nas Figuras 3.6 e 3.7, percebemos a repetição de muitos termos, como cálculo, ensino, médio, aluno, trabalho, entre outras.

Nessas nuvens e na análise de similitude, é percebida a predominância das palavras cálculo, ensino e médio em relação as demais. Essa ocorrência faz sentido pois, como já observado anteriormente, a maior parte dos trabalhos analisados na Categoria A buscam, de alguma forma, relacionar o Cálculo com o ensino básico. E nesse caso, a maioria é direcionada para o Ensino Médio. Nesse nível de ensino ocorre uma maior possibilidade de introduzir conceitos de limite, derivada e integral em relação ao ensino fundamental. Os conteúdos presentes no currículo dessa etapa, aliados a preparação dos alunos para vestibulares, concursos e ENEM, são fatores que favorecem tal inserção.

Outras palavras também merecem uma atenção especial. Uma delas é a palavra função. Verificando as figuras acima, nota-se que a palavra função aparece com uma frequência relevante (o que implica a presença considerável desse termo nos textos analisados). Esse fato ocorre, possivelmente, devido a esse conceito ser o principal objeto de estudo em um curso de Cálculo. Além disso, as funções também são ensinadas no Ensino Médio, porém de uma maneira menos aprofundada mas não menos importante. Como os trabalhos presentes na Categoria A buscam relacionar o Cálculo com ensino básico, conforme os pontos citados na descrição da categoria, conteúdos sobre funções são o ponto de partida para conseguir esse objetivo.

A palavra derivar também tem seu destaque. Durante a criação das nuvens de palavras e o gráfico de análise de similitude foi percebido que as palavras derivada e derivadas foram contabilizadas na frequência de derivar. Isso ocorre devido a classificação dessa palavra no dicionário utilizado pelo IRaMuTeQ. Nesse dicionário não existe a classificação de derivada como substantivo. Sendo assim, ela é reconhecida como um verbo e todas as suas conjugações são contabilizadas na frequência desse verbo. No entanto, tal problemática não proporcionou divergência nos dados obtidos pois, de acordo com o analisado, o resultado presente na Figura 3.6 está coerente com o gráfico da Figura 3.4, uma vez que derivada foi o conteúdo com maior presença entre os trabalhos da Categoria A.

Exclusivamente na análise de similitude das palavras-chave, as palavras máximo e mínimo aparecem ligadas com a palavra derivar. No caso, para determinar os pontos de máximos e mínimos de uma função, a derivada se faz presente como uma versátil ferramenta. Nesse sentido, pela Figura 3.5 percebe-se que, dentre os trabalhos que abordam o conceito de derivada, existem aqueles que utilizam tal conceito para determinar os pontos de máximo e mínimo de funções.

A palavra físico também integra essa análise de similitude. Isso acontece devido à Categoria A apresentar alguns trabalhos que abordam a variação de tempo e espaço, velocidade e aceleração, voltados para o ensino básico utilizando conceitos de Cálculo. Assim, tal análise traz à tona a relação que existe entre o Cálculo e a Física, principalmente no que diz respeito a cinemática.

Além disso, as palavras *software* e GeoGebra aparecem em destaque nas Figuras 3.5, 3.6 e 3.7, justificando a presença dos trabalhos que tratam sobre a utilização de *softwares* para o ensino de Cálculo no banco de dados dessa pesquisa.

Já em específico nas nuvens de palavras, é possível identificar o termo intuitivo. Como exposto anteriormente, esse termo foi utilizado em alguns trabalhos para representar a forma com que os conceitos de Cálculo devem ser propostos na sala de aula da escola básica.

Diante dessa discussão, percebe-se que as Figuras 3.5, 3.6 e 3.7 produzidas no *soft-*

ware IRaMuTeQ corroboram com a análise feita em relação aos trabalhos da Categoria A. Uma justificativa para tal afirmação são os vários pontos comuns encontrados entre elas. Além disso, podemos dizer que tanto o gráfico referente à análise de similitude, quanto as nuvens de palavras, complementam o nosso levantamento a fim de exibir, de uma forma visual, as principais palavras presentes nos trabalhos.

3.2.3 Resultados

A partir da análise dos trabalhos de conclusão do PROFMAT que tratam de Cálculo, percebemos que vários autores apresentam a possibilidade de ensino de tópicos de Cálculo já no ensino básico. Isto nos mostra que esses discentes conseguem, de alguma forma, relacionar os conceitos estudados na disciplina Fundamentos de Cálculo com a sala de aula.

Acreditamos que ideias de conteúdos de Cálculo possam já ser discutidas no ensino básico. Contudo, o Ensino Médio é o período escolar que nos fornece maior suporte para tal discussão.

Alguns conteúdos vistos no Ensino Médio favorecem a inserção de tópicos de Cálculo, como por exemplo o estudo de funções. De acordo com a BNCC, a teoria de funções dos tipos afim, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas devem ser abordadas nesse nível de ensino.

Um caso particular é o das funções afim. A partir do estudo das taxas médias e instantâneas de variação, conceitos normalmente aprendidos em uma disciplina de Cálculo, é possível abordar propriedades relacionadas a esse tipo de função como a inclinação, crescimento e decrescimento.

Temos também as funções quadráticas, funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ (1), com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Os conceitos como pontos de máximo ou de mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento, análise de gráficos e concavidade, que geralmente são estudados na escola básica e que possuem diversos resultados e teoremas relacionados a esses tópicos como os testes de crescimento e concavidade, os testes da primeira e segunda derivada, teorema de Weierstrass, abrem um leque de possibilidades de ensinar principalmente a teoria de derivada no ensino básico.

Outro exemplo são as funções logarítmicas e exponenciais. É interessante o estudo da teoria de limite neste tipo de função, principalmente quando associado aos estudo dos gráficos.

Além disso, o estudo de integral em diversas funções possibilita o estudo de áreas de regiões delimitadas no plano.

O conteúdo cinemática, presente na disciplina de Física, no 1º ano do ensino médio, é uma outra possibilidade de inserção dos conceitos de limite, derivada e integral. O estudo do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), por exemplo, pode favorecer tal inserção, tendo em vista que a função que determina a posição de um corpo que se move em regime uniformemente acelerado é justamente do mesmo tipo da equação (1). A partir dessas circunstâncias, o professor de Matemática, em conjunto com o de Física, podem trabalhar em conjunto de forma interdisciplinar.

Essas ideias podem ser introduzidas por meio de projetos extra-classes, como por exemplo através de grupos de estudo, minicursos ou aplicações de sequências didáticas. O próprio professor pode desenvolver tais projetos e dar oportunidade a alunos que tiverem o interesse em participar.

A utilização de *softwares* para o ensino de tais conceitos é uma ferramenta interessante, principalmente quando relacionada ao ensino de Cálculo. Concordamos com a visão apresentada pelos trabalhos analisados e acreditamos que estes podem favorecer a visualização do aluno sobre certos conceitos, colaborando com a aprendizagem do mesmo. Contudo, dentre todos os trabalhos do PROFMAT que associam o ensino de Cálculo a utilização de *softwares*, cabe ressaltar que foram apresentados dois tipos de *softwares* apenas (GeoGebra e WxMaxima). Nesse sentido, nos questionamos: existem outros *softwares* que possam auxiliar no ensino de Cálculo? Como esses podem exercer tal função? Talvez sim. Contudo há necessidade de novos trabalhos para responder essas questões.

Não podemos deixar de mencionar, a existência de produtos educacionais, como sequências didáticas, materiais de ensino, propostas de atividades dentre outros materiais, nos trabalhos aqui analisados. Estes objetos de ensino, produzidos pelos alunos do programa, constituem um vasto repertório que podem ser levados e aplicados dentro de sala de aula.

Sendo assim, consideramos que o PROFMAT é um programa que vai além de apenas aprofundar o conhecimento em Matemática do professor. Ele possibilita a criação de um banco de dados de materiais relevantes e de livre acesso para todos os professores de Matemática, viabilizando a aplicação dos mesmos dentro de suas aulas.

4 Cálculo Diferencial e Integral para alunos do Ensino Médio

Levando em consideração argumentos apresentados por diversos autores, presentes no Capítulo 2, bem como argumentos presentes em dissertações de alunos do PROFMAT, como retratado no Capítulo 3, percebemos a possibilidade de introdução de conteúdos de Cálculo no último nível do ensino básico.

Nesse sentido, apresentamos, neste capítulo, propostas de sequências didáticas que contemplam tópicos de Cálculo Diferencial e Integral voltadas para alunos do Ensino Médio.

A ideia é que essas sequências didáticas (em sua totalidade ou parcialmente) possam ser utilizadas para compor um projeto de ensino, coordenado pelo professor regente que se interessar, de modo a ser desenvolvido em um horário extra-turno ao horário de aula dos alunos.

Cabe ressaltar que, apesar de percebemos a importância do Cálculo e a possibilidade de introdução de tópicos no Ensino Médio, não apresentamos aqui uma proposta de inserção direta desses conteúdos na matriz curricular de Matemática do Ensino Médio, pois qualquer intervenção direta na estrutura curricular da escola básica envolve diversos e complexos fatores e requer cuidadosa análise e discussão de especialistas da área educacional.

Acreditamos que um projeto de ensino composto pelas sequência didáticas aqui propostas pode ser muito interessante se direcionado a alunos do Ensino Médio que possuem interesse em cursar graduação na área de Ciências Exatas ou outro curso que contém a disciplina Cálculo Diferencial e Integral em sua matriz curricular.

4.1 O Cálculo e o Ensino Médio

Cálculo e Ensino Médio - substantivos que representam elementos distintos mas que a relação entre os dois já foi mais próximas do que se imagina.

No passado, conteúdos presentes nas conhecidas disciplinas de Cálculo da graduação já fizeram parte do currículo do Ensino Médio no Brasil em dois momentos.

O primeiro deles aconteceu exclusivamente no Colégio Pedro II. Conforme Carvalho (1996, apud ORFALI, 2017), após a reforma Benjamin Constant ocorrida no ano de 1890, o tema "Noções de Cálculo Diferencial e Integral" foi proposto para o 4º ano do Ginásio Nacional do Colégio Pedro II. Os conteúdos abordados no programa referente ao tema se assemelhavam ao de um curso de Cálculo da graduação.

Figura 4.1: Quadro apresentado em Orfali (2017) que exibe parte do conteúdo estudado no 4º ano do Ginásio Nacional em 1885

Cálculo infinitesimal	
53. Da variável e da função	67. Teoria dos diâmetros nas curvas planas.
54. Dos infinitamente pequenos. Limite. Objeto e divisão do cálculo infinitesimal.	68. Pontos singulares.
55. Derivadas e diferenciais. Interpretação geométrica.	69. Noções sobre contato, osculação e curvatura das linhas planas.
56. Derivadas e diferenciais das funções explícitas.	70. Princípios fundamentais de integração.
57. Derivadas e diferenciais das funções implícitas.	71. Métodos de integração.
58. Derivadas e diferenciais sucessivas.	72. Integração das frações racionais.
59. Desenvolvimento das funções em séries.	73. Integração das funções irracionais.
60. Fórmula de Taylor. Série de MacLaurin; aplicações.	74. Integração de algumas funções circulares.
61. Aplicações das expressões aparentemente indeterminadas.	75. Integração das funções exponenciais e logaritmas.
62. Teoria dos máximos e mínimos.	76. Integração definida.
63. Teoria das tangentes. Normais.	77. Quadratura das curvas planas.
64. Teoria das assíntotas.	78. Retificação das curvas planas.
65. Convexidade e concavidade das curvas.	79. Estudo minucioso de uma ou mais curvas planas, à escolha do professor, aplicando os recursos de análise estudados durante o ano letivo.
66. Teoria dos centros nas curvas planas.	

Fonte: CARVALHO (1996, apud ORFALI, 2017,p. 19)

Essa decisão de abordar tópicos de Cálculo no programa de ensino do Colégio Pedro II vigorou entre os anos de 1891 a 1900. Após o período, apenas no ano de 1931, através da reforma Campos, o Cálculo voltou a ser inserido no currículo escolar, agora como Cálculo Infinitesimal. (SPINA, 2020, p. 61)

Em 1942, ocorreu a reforma Capanema, realizada pelo então ministro Gustavo Capanema. Nessa reforma, o ensino secundário foi dividido em 2 ciclos, denominados ginasial e colegial. O segundo ciclo era subdividido em duas modalidades, o curso clássico e o curso científico. Apesar de ambos visar a preparação para o ensino superior, o curso clássico oferecia maior ênfase na área de humanas, enquanto o curso científico era direcionado para a área das ciências exatas e naturais. É justamente no programa do curso científico que conteúdos de Cálculo se faziam presentes.

Figura 4.2: Quadro apresentado em Orfali (2017) que exibe parte do programa aprovado pela reforma Capanema

Programa de Matemática do Curso Científico	
1ª série	**3ª série**
Álgebra	Álgebra
Unidade IV – Os polinômios (...)	Unidade II – Funções
2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do segundo grau; representação gráfica.	1. Noção de função de variável real.
3. Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.	2. Representação cartesiana.
2ª série	3. Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.
Álgebra	Unidade III – Derivadas
Unidade I – A função exponencial (...)	1. Definição; interpretação geométrica e cinemática.
2. Noção de função exponencial e de sua função inversa.	2. Cálculo das derivadas.
	3. Derivação das funções elementares.
	4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Fonte: CARVALHO (1996, apud ORFALI, 2017, p.19)

Após essa reforma, percebe-se a ocorrência de uma sintetização no currículo de Matemática do ensino secundário. Comparando as Figuras 4.1 e 4.2 tal fato é evidenciado, uma vez que o programa do curso científico é significativamente mais "enxuto" em comparação ao programa proposto pela reforma Campos.

A inserção do Cálculo na reforma Campos, quanto sua prevalência na reforma de Capanema, tem como grande responsável a pessoa de Euclides Roxo. Formado em Engenharia pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Euclides Roxo foi diretor do Colégio Pedro II entre 1925 e 1935 e diretor do Ensino Secundário no Ministério da Educação e Saúde em 1937. De acordo com Orfali (2017), Roxo defendia que o ensino de Matemática deveria se moldar em torno do conceito de função. A partir dessa concepção, o Cálculo garantia um patamar privilegiado nos currículos do ensino secundário.

Durante quase 30 anos consecutivos fazendo parte da Matemática das escolas no país, o Cálculo sai de cena em 1961, ano em que foi estabelecida a Lei de Diretrizes e Bases (LDB). Carvalho (1996) evidencia essa questão em sua fala

> A partir de 1961, o ensino de matemática sofre modificações devidas em parte à descentralização permitida pela Lei de Diretrizes e Bases. Com isso, desaparece o ensino de cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje. (CARVALHO, 1996, p. 78, apud ORFALI, 2017, p. 21)

Ávila (1991) faz uma crítica com relação a tais mudanças, no sentido de que alguns conteúdos considerados importantes pelo autor deram lugar a novos conteúdos acompanhados de um rigor e formalismo desnecessário para o ambiente da sala de aula. O que poderia ser trabalhado de forma intuitiva ficou para trás, como por exemplo conteúdos de Cálculo.

> ... no final dos anos 50 e começo dos anos 60, houve uma mudança significativa no ensino da Matemática no Brasil (em consequência do que então acontecia no exterior, diga-se de passagem). O nome do movimento era Matemática Moderna, pois, como propalavam seus defensores, era preciso modernizar esse ensino. A tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo. (ÁVILA, 1991, p. 1)

Promulgada a LDB, o ensino de conteúdos de Cálculo começou a desaparecer nas escolas gradativamente, iniciando nas públicas e depois nas privadas.

Orfali (2017) esclarece que, após a exclusão do Cálculo do currículo escolar, alguns concursos vestibulares continuaram contemplando tópicos dessa área em suas provas até a década de 1990. Como muitas escolas privadas são pressionadas e buscam incessantemente ensinar conteúdos abordados nos principais vestibulares das instituições de ensino superior, enquanto as públicas buscam seguir os documentos norteadores propostos pelos órgãos públicos, faz sentido a premissa.

Atualmente, existe uma quantidade relevante de trabalhos que discutem o Cálculo no Ensino Médio, inclusive em dissertações de alunos do PROFMAT. Através da análise dos trabalhos de conclusão do programa de mestrado, realizada no Capítulo 3, verificamos que muitas dissertações buscam alternativas para introduzir conteúdos relativos a esse tema na sala de aula da escola básica e constatamos diferentes possibilidades inserção destes tópicos no Ensino Médio.

Contudo, quando se fala somente em inserção de conteúdos no currículo do Ensino Médio, questionamentos e argumentos surgem em sequência relatando que o currículo de Matemática que já é alongado, que não existe tempo hábil para trabalhar mais conteúdos, etc. Agora, quando se fala em inserção de Cálculo no currículo do Ensino Médio, esses argumentos se intensificam. Orfali (2017) relata essa visão.

> Se o conteúdo a ser incluído é o Cálculo, as reações tendem a ser ainda mais fortes, devido à identificação automática que se faz com as últimas experiências ligadas ao ensino de Cálculo nas escolas de Ensino Médio do Brasil. (ORFALI, 2017, p. 60)

As últimas experiências que o autor cita no trecho estão relacionadas, principalmente, à forma como o conteúdo de Cálculo era abordado nos materiais propostos. Muitas vezes, conteúdos como limites, derivadas e integrais se apresentavam de forma desvinculada ao outros conteúdos como funções, sequências e Geometria Analítica, o que reforça que o Cálculo é uma disciplina isolada e que não favorece o entendimento de outros conceitos matemáticos.

Para exemplificar essa visão de Orfali (2017), na tese de Spina (2002) são apresentadas algumas partes do livro Curso de Matemática (1964) de Manuel Jairo Bezerra, exemplar que era opção para o primeiro, segundo e terceiro anos do curso científico. Spina (2002) chama a atenção justamente para a crítica de Orfali (2017). De acordo com a autora, os conteúdos presentes nesse livro se apresentam por meio de uma " abordagem rigorosa, linear e formal dos conteúdos, assim como a total desarticulação destes com os demais conteúdos."

No entanto, mesmo diante desses embates, é necessário refletir sobre as palavras de Ávila (1991):

> Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (Ávila, 1991, p. 1)

Descartar o Cálculo do ensino para alunos do Ensino Médio seria uma atitude equivocada se levarmos em consideração os pontos que o ensino de conteúdos relativos a esse tema podem agregar no aprendizado desses alunos. Tais pontos estão associados ao caráter integrador que os conceitos de Cálculo possuem, como exemplo:

- O Cálculo possibilita a interdisciplinariedade com outras áreas do conhecimento como a Física e Química, conteúdos presentes no currículo escolar;
- Conteúdos matemáticos estudados na educação básica podem ser trabalhados em conjunto com o Cálculo, como o estudo de funções e Geometria Analítica;
- O Cálculo favorece a resolução de problemas e situações do cotidiano que podem ser modeladas e resolvidas por meio dos conceitos aprendidos.

Rezende (2003) já destacava esse caráter integrador do Cálculo. Orfali (2017), por sua vez, destaca parcialmente os pontos citados acima e ainda comenta a importância do estudo de Cálculo na construção do pensamento científico.

> Nesse sentido, voltamos a falar do Cálculo, ressaltando agora o seu caráter integrador, que pode se revelar na interação com outras disciplinas como a Física e a Química ou dentro do próprio programa de Matemática. Ao longo deste trabalho, destacamos o papel histórico do Cálculo na construção do pensamento científico, quando ele se tornou uma linguagem praticamente universal dentro das ciências exatas. Também mostramos como suas raízes estão ligadas a diversas ideias fundamentais da matemática, como aproximação, variação e medida, que permeiam quase todo o currículo da escola básica. (ORFALI, 2017, p. 194)

Há ainda um pensamento de Ávila (1991) sobre as possibilidades do aprendizado de Cálculo para um aluno do Ensino Médio. Ele realça, principalmente, o papel integrador do sujeito à sociedade que esse assunto pode contribuir. Em sua fala, o autor é bem sucinto em sua argumentação em defesa da abordagem do Cálculo para alunos do Ensino Médio.

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2° grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (Ávila, 1991, p. 1)

Relacionando o fato de que o ensino de conteúdos de Cálculo pode contribuir na formação do aluno do Ensino Médio com a viabilidade do ensino desses conceitos nesse nível de ensino, ficamos intrigados em como levar esses conceitos para sala de aula. Após um período refletindo, pensamos em uma proposta voltada para alunos do Ensino Médio e que contempla tais contribuições. É o que apresentaremos a seguir.

4.2 A proposta

Na seção anterior, exibimos algumas das possíveis contribuições que o ensino de tópicos de Cálculo pode oferecer na formação de alunos do Ensino Médio.

Considerando que tais contribuições reforçam o caráter integrador do Cálculo e que podem influenciar na evolução do pensamento científico e crítico do aluno, além de favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, elaboramos uma proposta de ensino de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, destinada a professores que desejam ensinar tais conceitos a alunos do Ensino Médio.

Tal proposta é composta por dois materiais: um material de apoio ao professor e um conjunto de sequências didáticas.

De um modo geral, nosso intuito, em relação a esses materiais, é, também, oferecer ao professor uma oportunidade de favorecer o acesso dos estudantes do Ensino Médio a esses conteúdos, tendo em vista que, em geral, os alunos se formam nesse nível de ensino sem nunca terem ouvido falar sobre limite, derivada e integral. Caso o ensino de tais conceitos ocorram de forma efetiva, acreditamos que a proposta pode colaborar positivamente para o futuro desses jovens, principalmente daqueles que ingressarão em cursos onde tais assuntos estão presentes.

O material de apoio ao professor é composto por conteúdos teóricos, definições e exemplos sobre os conceitos de limite, integral e derivada. Seu principal objetivo é proporcionar ao professor uma fonte de pesquisa sobre esses assuntos e um material suporte ao professor quando estiver aplicando as sequências didáticas.

Já o conjunto de sequências didáticas também se referem aos conteúdos de limite, derivada e integral. Buscamos abordar tais tópicos de maneira intuitiva, priorizando as ideias fundamentais de cada conceito, de modo que os procedimentos e as fórmulas sirvam apenas como suporte para que os alunos possam compreender essas ideias.

Além disso, o rigor e o formalismo matemático dão lugar, em nossa proposta, à experimentação e à visualização. Por se tratar do primeiro contato do aluno com esses assuntos, a cobrança excessiva de rigorosidade e formalização dos conceitos trabalhados pode prejudicar o interesse e entendimento dos alunos acerca dos conteúdos abordados.

Considerando que a tecnologia pode favorecer o aprendizado de conceitos matemáticos, criamos atividades com o uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra na maior parte dos módulos das sequências didáticas. Tais atividades proporcionam ao aluno a experimentação, tendo em vista que o mesmo deverá mover os controles deslizantes ou inserir o valor numérico no campo solicitado, além da visualização, que é promovida pelo movimento dinâmico dos gráficos.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que regulamenta as aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante a Educação Básica, as tecnologias podem ser grandes aliadas ao professor no sentido de favorecer a aprendizagem dos estudantes.

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 536)

Estudos como o de Barufi (1999) e Oliveira (2012) relatam um grande índice de reprovação em Cálculo nos cursos de graduação, que podem derivar de diversos fatores, não se restringindo somente à dificuldade dos alunos com os conceitos aprendidos em Cálculo. Conforme destaca Paulin e Ribeiro (2019), a dificuldade com a Matemática aprendida na Educação Básica pode ser um desses fatores, pois refletem no desempenho dos estudantes.

Diante do cenário apresentado, a proposta representa uma oportunidade de trabalhar implicitamente conceitos básicos de Matemática, como por exemplo a ideia de função e fundamentos de Geometria Analítica, a fim de reforçar o conhecimento dos alunos a cerca desses conceitos. Além disso, esta proposta pode representar uma "ponte"entre a escola e a universidade para os alunos que pretendem cursar graduações onde o Cálculo se faz presente, uma vez que, através dela, os alunos poderão ter um primeiro contato com conceitos intrínsecos à disciplina. Assim sendo, acreditamos que esse primeiro contato com as ideias básicas de limites, derivadas e integrais contribua na aprendizagem de Cálculo no ensino superior.

Para finalizar, destacamos, também, que o objetivo para sugerir tal proposta não está relacionado a uma mudança do currículo atual trabalhado nas escolas. Sabemos que qualquer mudança no currículo do Ensino Médio, principalmente a inserção de conteúdos de Cálculo, exige um árduo processo de reflexão e pesquisa. Trabalhos científicos devem ser produzidos para demonstrar os ônus e bônus sobre tais alterações e, assim, expor as justificativas para inserção ou não do conteúdo no currículo. Entretanto, oferecemos, nesta proposta, alternativas para trabalhar conceitos de Cálculo em paralelo ao currículo do Ensino Médio, ou seja, sem que ocorra alterações no programa de Matemática. Nesse sentido, sugerimos ao professor, que se interesse em utilizar as sequências didáticas aqui presentes, a criação de um projeto de ensino. Tal projeto poderia ser desenvolvido em horário extra-turno, com alunos que tivessem o real interesse em estudar tópicos relacionados ao Cálculo.

4.3 Material de apoio ao professor

Para o ensino dos tópicos de Cálculo aos alunos de Ensino Médio, acreditamos que é relevante o professor usufruir de um material que possibilite-o relembrar os principais conceitos dessa disciplina abordados nas sequências didáticas propostas nesse trabalho. Nesse sentido, essa seção é destinada à apresentação desse material de apoio ao docente.

O objetivo principal desse material é proporcionar ao professor uma fonte de pesquisa sobre os três dos principais conceitos vistos em disciplinas de Cálculo: limites, derivadas e integrais. Procuramos abordar tais conteúdos de forma intuitiva, não aprofundando nas proposições, teoremas e provas, mas buscando aprofundar discussões nos exemplos e generalizações e tornando o material mais acessível.

Os conteúdos e os tópicos abordados nesse material de apoio estão presentes na Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Conteúdos e tópicos abordados no material de apoio ao professor

Conteúdo	**Tópicos abordados**
Limite	Noção de limite Limites laterais Propriedades de limites
Derivada	Inclinação da reta e taxa de média de variação Taxa instatânea de variação e reta tangente A derivada e suas propriedades
Integral	O conceito de integral e o cálculo de áreas

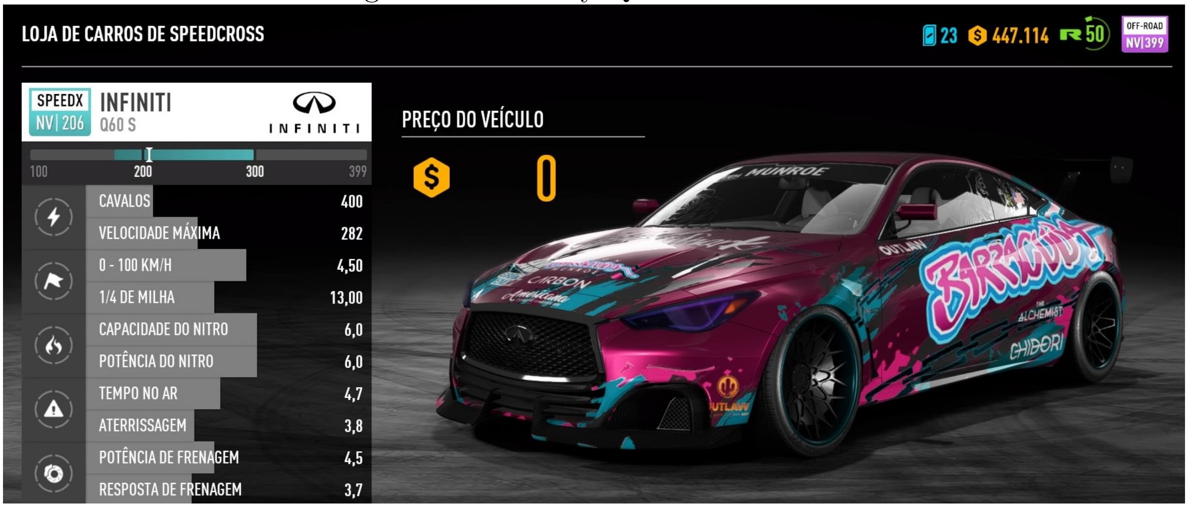
As figuras presentes neste material merecem destaque pois elas dão suporte para um entendimento visual e geométrico destes conceitos. Além disso, todas as funções tratadas neste capítulo são funções reais de uma variável real, ou seja, funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

4.3.1 Limites

Noção de limite

Infinity Q60 S Barracuda é um carro presente no jogo Need for Speed Payback. Observando suas estatísticas percebemos que a velocidade máxima, ou seja, a velocidade limite atingida por esse carro é 282 km/h.

Figura 4.3: Infinity Q60 S Barracuda



Fonte: https://www.sharkiando.com/blog/need-for-speed-payback-pacote-de-expansao-speedcross

A palavra limite, utilizada neste contexto para caracterizar a velocidade máxima, refere-se a ideia da existência de um valor que pode ser alcançado, mas jamais ultrapassado. Há outras situações do cotidiano em que a palavra limite é aplicada, como por exemplo, a idade limite mínima para uma pessoa conseguir a habilitação é 18 anos. Para calibrar um pneu, existe um limite máximo de libras, uma vez que, se ultrapassar essa quantidade, ele pode estourar.

No contexto da Matemática, os limites de funções são de extrema relevância no estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Mas afinal, o que é o limite de uma função? O seguinte exemplo mostra a ideia intuitiva desse conceito.

Exemplo 1: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, em que a lei de formação é $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Considere, também, os seguintes valores de x, próximos de 1:

Menores que 1:

$$-1 \qquad 0 \qquad 0,5 \qquad 0,7 \qquad 0,9 \qquad 0,99 \qquad 0,999$$

Maiores que 1:

$$3 \qquad 2 \qquad 1,5 \qquad 1,3 \qquad 1,1 \qquad 1,01 \qquad 1,001$$

Observe que em ambos os casos considerados, os valores de x se aproximam de 1; nesse caso, dizemos que os valores maiores que 1 se aproximam do 1 pela direita e os valores menores que 1 se aproximam do 1 pela esquerda. Nesse sentido, calculando os respectivos valores de $f(x)$, para cada valor de x dado, temos que:

Tabela 4.2: Valores de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda

x se aproxima de 1 pela esquerda $\longrightarrow$

x	-1	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999
f(x)	4	1	1	1,28	1,72	1,9702	1,997002

Tabela 4.3: Valores de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela direita

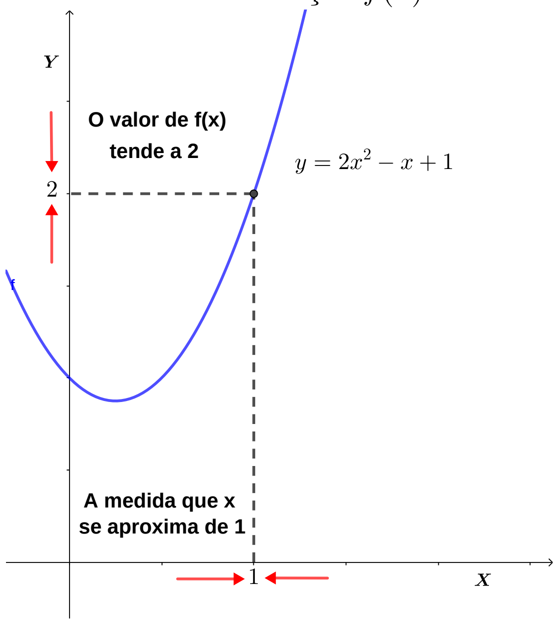
x se aproxima de 1 pela direita $\longleftarrow$

x	1,001	1,01	1,1	1,3	1,5	2	3
f(x)	2,003002	2,0302	2,32	3,08	4	7	16

A partir das Tabelas 4.2 e 4.3, pode ser observado que à medida que x se encontra mais próximo de 1, os valores de $f(x)$ correspondentes tendem a 2.

Tal fato evidenciado nas tabelas também pode ser percebido geometricamente no gráfico da Figura 4.4.

Figura 4.4: Gráfico da função $f(x) = 2x^2 - x + 1$



Fonte: O Autor

O valor da função $f(x)$ se aproxima de 2, quando x se aproxima de 1 tanto pela direita quanto pela esquerda, como indicado nas setas vermelhas. Quando isso ocorre, dizemos que o limite da função $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x tende a 1 é igual a 2 e simbolizamos da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1}(2x^2 - x + 1) = 2.$$

De uma forma geral, o limite de uma função é definido da seguinte forma:

Definição 4.3.1. (Stewart, 2013, p. 81) Suponha que $y = f(x)$ é uma função definida para x próximo ao número a (isso significa que f está definida em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Limites laterais

Voltemos ao Exemplo 1, onde concluímos que:

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - x + 1) = 2.$$

Para obter tal conclusão, inicialmente consideramos valores de x se aproximando de 1 pela esquerda, ou seja, por valores menores do que 1. Nesse sentido, construímos e completamos a tabela abaixo:

Tabela 4.4: Valores de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda

x se aproxima de 1 pela esquerda $\longrightarrow$

x	-1	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999
f(x)	4	1	1	1,28	1,72	1,9702	1,997002

A partir da Tabela 4.4, é possível observar que, a medida que x se aproxima de 1 por valores menores que 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2. Podemos expressar a ideia abordada acima com símbolos matemáticos da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2.$$

Nesse caso, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda é igual a 2.

No referido exemplo, também consideramos os valores de x se aproximando de 1 pela direita, obtendo a seguinte tabela:

Tabela 4.5: Valores de $f(x)f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x se aproxima de 1 pela direita

x se aproxima de 1 pela direita $\longleftarrow$

x	1,001	1,01	1,1	1,3	1,5	2	3
f(x)	2,003002	2,0302	2,32	3,08	4	7	16

De modo análogo, percebemos através da Tabela 4.5 que os valores de $f(x)$ aproximam de 2 a medida que x fica mais próximo de 1 pela direita. Nessa situação, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 pela direita é igual a 2. Denotamos esse limite da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

De uma forma geral, considere a um número real e f uma função. Definimos como limite lateral de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda, o número real (representado por L) para o qual os valores da função $f(x)$ se aproximam à medida que x tende a, por valores menores que a e denotamos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

De forma análoga, definimos como limite lateral de $f(x)$ quando x tende a a pela direita, o número real (representado por L) para o qual os valores da função $f(x)$ se aproximam à medida x tende a a, por valores maiores que a e denotamos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Observe que, no Exemplo 1, os limites laterais são iguais e coincidem com o valor do limite da função. Essa é uma condição de existência do limite de funções. Para que o limite de uma função exista, os limites laterais devem ser iguais. Além disso, se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Caso contrário, dizemos que o limite da função não existe.

Exemplo 2: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geq 1 \\ 5, \text{ se } x < 1 \end{cases} .$$

Vamos analisar o que acontece com $f(x)$ quando consideramos valores de x cada vez mais próximos de 1.

Vamos considerar alguns valores de x se aproximando do 1 pela esquerda e calcular os valores de $f(x)$.

Tabela 4.6: Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda

x se aproxima de 1 por valores menores que 1 $\longrightarrow$

x	-1	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999
f(x)	5	5	5	5	5	5	5

Note que, nesse caso, a medida que x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam 5, pois a função é constante igual a 5 no intervalo $]-\infty, 1[$. Utilizando o conceito de limites laterais podemos expressar essa ideia com símbolos matemáticos da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5.$$

Por outro lado, podemos calcular o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 por valores maiores que 1.

Tabela 4.7: Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 pela direita

x se aproxima de 1 por valores maiores que 1 $\longleftarrow$

x	1,001	1,01	1,1	1,3	1,5	2	3
f(x)	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5	1	2

Temos aqui que $f(x)$ tende a 0, quando x fica próximo de 1 pela direita. Sendo assim,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0.$$

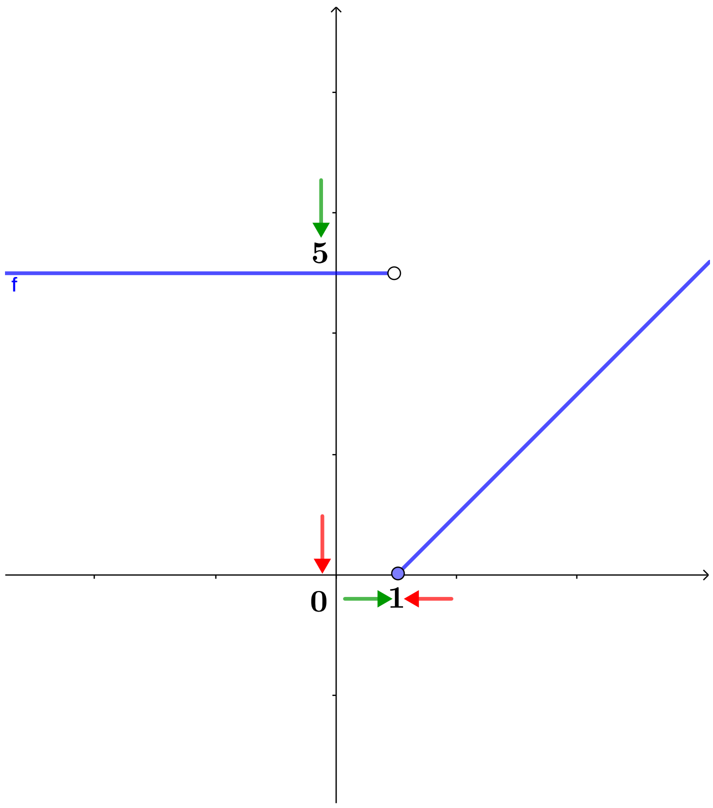
Contudo,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Logo, podemos concluir que não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Podemos observar esse fato geometricamente conforme a Figura 4.5. Através do gráfico, percebe-se a existência de um salto no gráfico da função exatamente no ponto $x = 1$.

Figura 4.5: Gráfico da função f dada por $f(x) = 5$ para valores de $x < 1$, e $f(x) = x - 1$, se $x \geq 1$



Fonte: O Autor

Exemplo 3: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x > 0 \\ x, \text{ se } x < 0 \end{cases} .$$

Vamos analisar o que acontece com $f(x)$ quando consideramos valores de x cada vez mais próximos de 1.

Inicialmente, consideremos valores de x que se aproximam de 0 e são menores que 0. Vamos calcular os valores de $f(x)$ para cada valor de x considerado.

Tabela 4.8: Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela esquerda

x se aproxima de 0 pela esquerda $\longrightarrow$

x	-2	-1	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
f(x)	-2	-1	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001

A partir da Tabela 4.8 percebe-se que a medida que x se aproxima de 0 pela esquerda, os valores de $f(x)$ também se aproximam de 0. Nesse sentido temos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

Por outro lado, considerando valores de x que se aproximam de 0 e são maiores que 0, temos que:

Tabela 4.9: Valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela direita

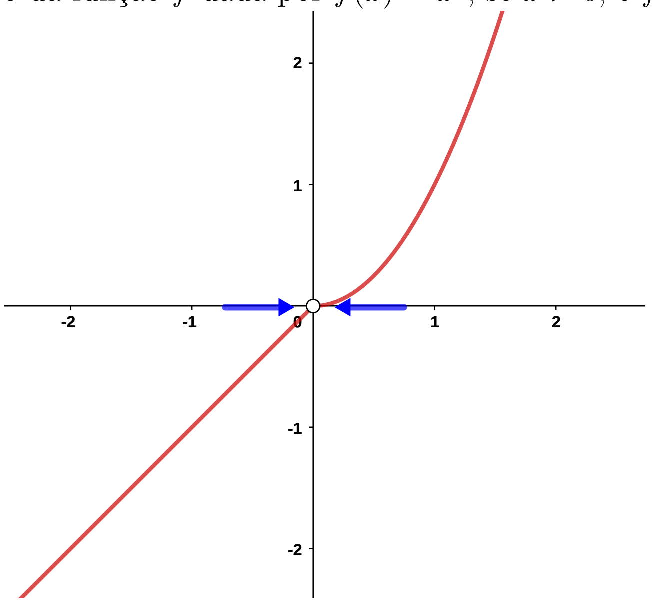
x se aproxima de 1 pela direita $\longleftarrow$

x	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	1	2
f(x)	0,00000001	0,000001	0,0001	0,01	0,25	1	4

Observando a Tabela 4.9, percebe-se que a medida que x se aproxima de 0 pela direita, os valores de $f(x)$ tendem a 0. Nesse caso $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Figura 4.6: Gráfico da função f dada por $f(x) = x^2$, se $x > 0$, e $f(x) = x$, se $x < 0$



Fonte: O Autor

Propriedades dos limites

Consideremos c e a constantes reais e as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cujos limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existam. Então, valem as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$
3. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$, sendo n um inteiro positivo qualquer.

Exemplo 4: Sabendo que $\lim_{x\to 3} x = 3$, determine os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to 3}(x^3)$;

(b) $\lim_{x\to 3}(3x - 5)$;

(c) $\lim_{x\to 3}(7x^2 - 6x + 11)$;

(d) $\lim_{x\to 3}(x + 4)(x - 1)$;

(e) $\lim_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2}{x^3}\right)$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3}(x^3) &= (\lim_{x\to 3}(x))^3 && \text{(Propriedade 7)} \\ &= 3^3 \\ &= 27. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3}(3x - 5) &= \lim_{x\to 3}(3x) - \lim_{x\to 3} 5 && \text{(Propriedade 4)} \\ &= \lim_{x\to 3} 3x - 5 && \text{(Propriedade 1)} \\ &= 3 \lim_{x\to 3} x - 5 && \text{(Propriedade 2)} \\ &= 3 \cdot 3 - 5 \\ &= 4. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(7x^2-6x+11) &= \lim_{x\to 3}(7x^2)-\lim_{x\to 3}(6x)+\lim_{x\to 3}11 && \text{(Propriedades 3 e 4)}\\
&= 7\lim_{x\to 3}(x^2)-6\lim_{x\to 3}(x)+11 && \text{(Propriedades 1 e 2)}\\
&= 7(\lim_{x\to 3}(x))^2-6\cdot 3+11 && \text{(Propriedade 7)}\\
&= 7\cdot 3^2-18+11\\
&= 56.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(x+4)(x-1) &= \lim_{x\to 3}(x+4)\cdot\lim_{x\to 3}(x-1) && \text{(Propriedade 5)}\\
&= (\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}4)\cdot(\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}1) && \text{(Propriedades 3, 4 e 1)}\\
&= (3+4)(3-1)\\
&= 14.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2}{x^3}\right) &= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2)}{\lim_{x\to 3}(x^3)} && \text{(Propriedade 6)}\\
&= \frac{(\lim_{x\to 3}(x))^2}{(\lim_{x\to 3}(x))^3} && \text{(Propriedade 7)}\\
&= \frac{3^2}{3^3}\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

O próximo exemplo ressalta uma propriedade muito útil no cálculo de limites em funções polinomiais.

Exemplo 5: Considere $f(x) = 7x^2 - 6x + 11$. No item (c) do Exemplo 3, vimos que $\lim_{x\to 3}(7x^2 - 6x + 11) = 56$. Note que $f(3) = 7(3)^2 - 6(3) + 11 = 56$. Logo $\lim_{x\to 3}(7x^2 - 6x + 11) = f(3) = 56$. Isso decorre devido a propriedade de substituição direta.

Propriedade 1 (Propriedade da substituição direta)**.** Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Funções que satisfazem a propriedade da substituição direta são chamadas funções contínuas. Nesse sentido, temos a seguinte definição:

Definição 4.3.2. Uma função f é contínua em um número real a se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo 6: Calcule
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x+1}{x-4}.$$

Solução:

Note que o domínio da função $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-4}$ é $\mathbb{R} - \{4\}$. Logo -1 pertence ao domínio de f. Assim, utilizando a propriedade da substituição direta, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \left(\frac{x^2-2x+1}{x-4}\right) &= \frac{(-1)^2-2(-1)+4}{(-1)+4} \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que a função $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-4}$ é contínua em $x = -1$.

Já no Exemplo 2, temos uma função que não é contínua no ponto $x = 1$, uma vez que o limite da função quando x tende a 1 não existe. Nesse caso, dizemos que a função é descontínua no ponto $x = 1$.

4.3.2 Derivadas

Taxa de média de variação e a inclinação da reta secante

Consideremos a função afim $f(x) = 2x + 1$, cujo gráfico é uma reta.

Se substituirmos os valores $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$ na função, é possível determinarmos dois pares ordenados, de modo que conseguimos traçar o gráfico dessa função no plano.

Desse modo, fazendo a substituição, temos que $f(x_0) = f(1) = 2(1) + 1 = 3$ e $f(x_1) = f(3) = 2(3) + 1 = 7$, obtendo os pares $(-2, -3)$ e $(5, 11)$.

A variação de x (representada por Δx) entre esses pontos do plano é dada por $\Delta x = x_1 - x_0 = 3 - (1) = 2$.

Por outro lado, a variação de y (representada por Δy) dos pares ordenados obtidos é $\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = 7 - (3) = 4$.

Denominamos como taxa média de variação (TMV) da função $f(x)$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$, e denotamos por $TMV[1,3]$, a razão entre os valores obtidos de Δy e Δx:

$$TMV[1,3] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{7-(3)}{3-(1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

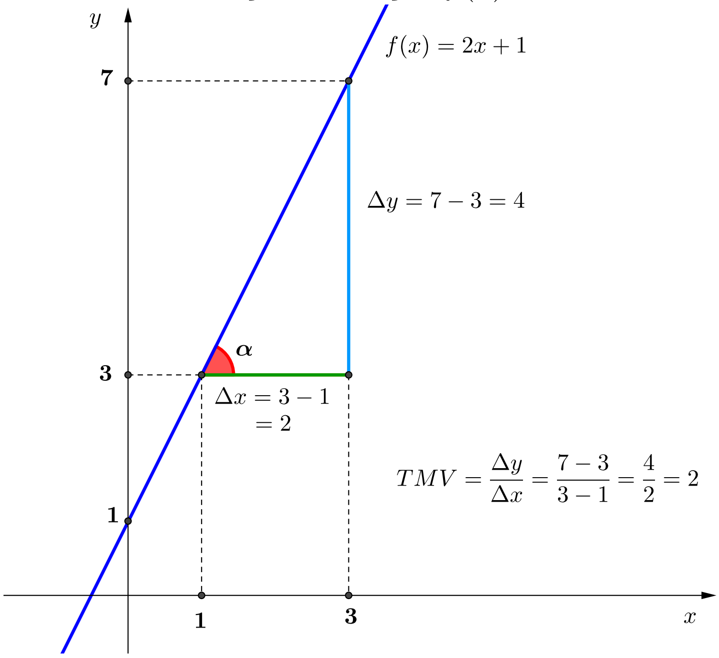
Além disso, observando a Figura 4.7, vemos que os segmentos de retas utilizados para representar as variações Δx (cor verde) e Δy (cor azul), formam com gráfico da função um triângulo retângulo. A partir das relações trigonométricas nesse tipo de triângulo, temos que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha$, em que α é o ângulo de inclinação da reta $y = 2x+1$.

Diante desse fato, podemos expressar a taxa média de variação de $f(x)$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$ da seguinte forma:

$$tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2 = TMV[1,3].$$

Como $tg\ \alpha = 2$, o ângulo de inclinação da reta $y = 2x + 1$ mede aproximadamente $63,43°$.

Figura 4.7: Taxa média de variação da função $f(x) = 2x + 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$



Fonte: O Autor

De uma maneira geral, considere a função $f(x) = ax + b$, onde a, b são números reais. Considere também dois pontos x_0 e x_1 distintos.

A taxa média de variação da função $f(x) = ax + b$ em $x_0 \leq x \leq x_1$ é denotada por $TMV[x_0, x_1]$ e expressa por

$$TMV[x_0, x_1] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a.$$

Notamos que, nesse tipo de função, a TMV é constante para todo x_0, x_1 considerados. Além disso, seu valor é igual ao coeficiente angular a da função.

No mais, se observarmos a Figura 4.8, é possível obter um triângulo retângulo formado pelos catetos de medidas $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$ e cujo ângulo oposto a Δy é α. Como a tangente de um ângulo pode ser expressa como a razão entre a medida do cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo, segue que:

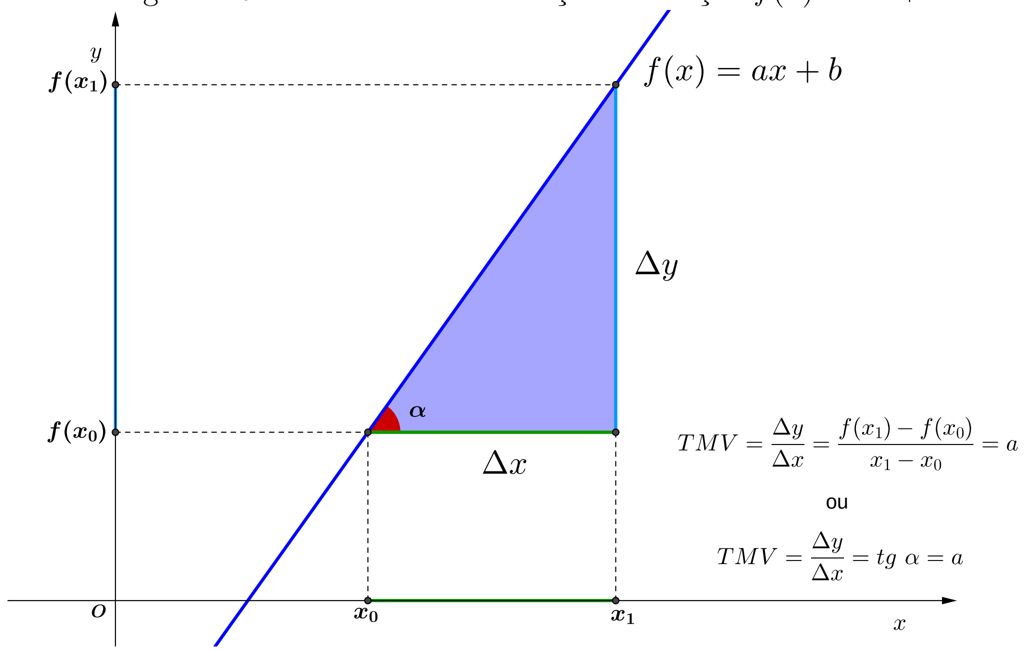
$$TMV[x_0, x_1] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha.$$

O ângulo oposto ao cateto de medida $|\Delta y|$ é justamente o ângulo de inclinação da reta. Nesse sentido, através da taxa média de variação de uma função afim é possível obter a tangente desse ângulo.

Vejamos um exemplo do cálculo da TMV em uma função afim:

Exemplo 7: Uma determinada torneira de um tanque goteja proporcionando um grande desperdício. A cada 24h, 20 litros de água são desperdiçados. Encontre uma expressão que representa o desperdício de água ao longo do tempo (em dias) e determine a taxa média de variação da quantidade desperdiçada de água ao longo do tempo.

Figura 4.8: Taxa média de variação da função $f(x) = ax + b$



Fonte: O Autor

Sabemos que a cada 24h, ou seja, a cada dia, 20 litros de água são desperdiçados. Assim, a Tabela 4.10 mostra a quantidade de água malgasta ao longo do tempo.

Tabela 4.10: Quantidade de água desperdiçada ao longo do tempo

Tempo (dias)	1	2	3	4	...	100	...
Quantidade de água desperdiçada (litros)	20	40	60	80	...	2000	...

Observando a Tabela 4.10, nota-se que para a variação do tempo de 1 dia, a variação da quantidade de água por dia não utilizada é constante, pois a diferença entre essa quantidade em dois dias consecutivos quaisquer é 20.

Nesse caso, a função que melhor modela o problema é a função afim.

Sendo assim, considere x sendo o tempo, em dias, e $f(x) = ax + b$ a quantidade de água desperdiçada até o dia x, em litros.

Para determinar a taxa de variação (TMV) da função $f(x)$ ao longo do tempo, basta considerar dois dias quaisquer e suas respectivas quantidades de água que não foram utilizadas e , em seguida, calcular a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nesse sentido, considerando os pares $(x_0, y_0 = f(x_0)) = (1, 20)$ e $(x_1, y_1 = f(x_1)) = (2, 40)$, temos

$$TMV[1,2] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{40 - 20}{2 - 1} = \frac{20}{1} = 20.$$

Como $TMV[1, 2]$ é igual ao coeficiente angular da função, temos que $a = TMV[1, 2] = 20$. Assim, temos que $f(x) = 20x + b$

Para determinar o coeficiente linear b da função f, observemos que, para $x = 1$ dias, devemos ter $f(x = 1) = 20$ litros de água disperdiçada. Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} f(1) = 20(1) + b \quad &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad b = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão que representa a quantidade de água desperdiçada ao longo do tempo é $f(x) = 20x$.

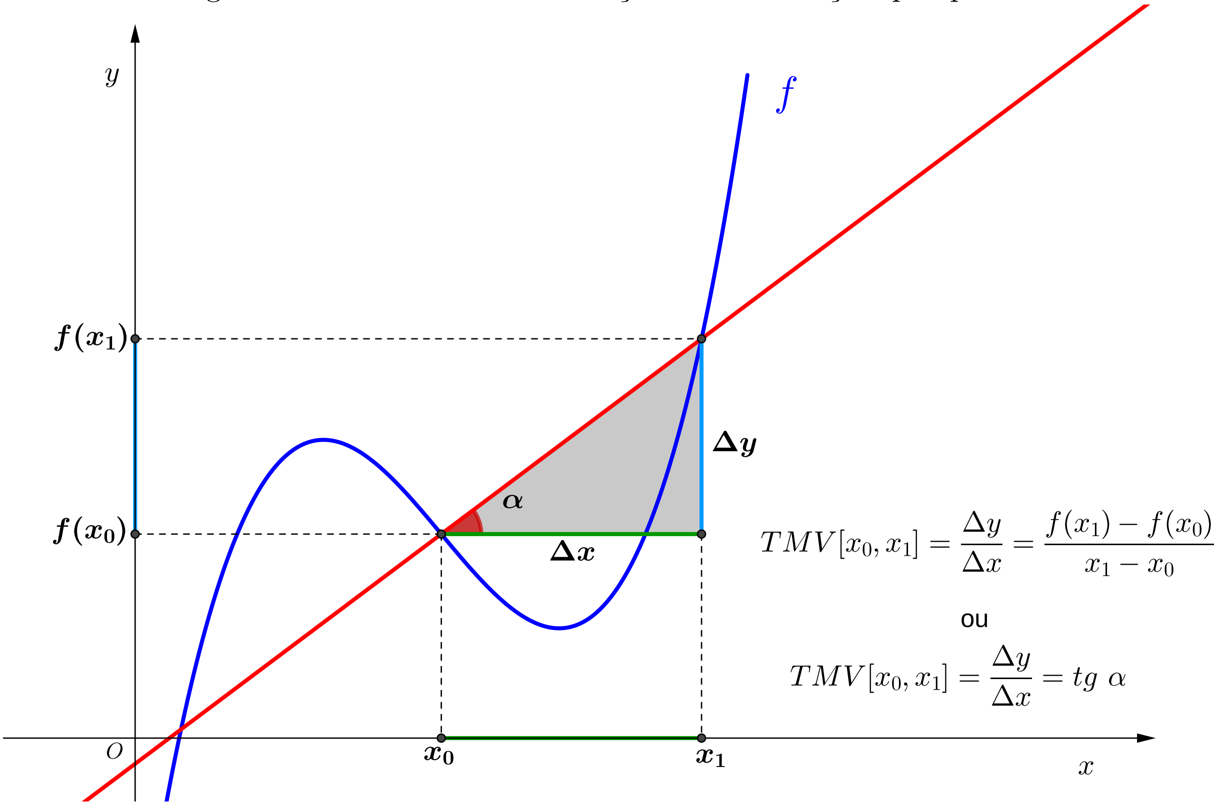
Podemos definir a taxa média de variação para funções em geral.

Definição 4.3.3. [Taxa Média de Variação] A taxa média de variação de uma função $f = f(x)$ qualquer, em um intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ contido no domínio da função, dada por:

$$TMV[x_0, x_1] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Pela definição, temos que $TMV[x_0, x_1]$ da função f pode ser compreendida como o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, ou seja, é igual a tangente do ângulo de inclinação da reta secante que passa por estes pontos, conforme indicado na Figura 4.9.

Figura 4.9: Taxa média de variação de uma função qualquer



Fonte: O Autor

O próximo exemplo mostra o cálculo da TMV para uma função quadrática.

Exemplo 8: Um país é atingido por uma epidemia causada por uma bactéria. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela doença causada pelo micro-organismo (em milhões de habitantes) depois de um tempo t (medido em anos a partir do primeiro dia da epidemia) é dado, aproximadamente, por

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t.$$

Determine a taxa média de variação de pessoas contaminadas nos extremos dos intervalos de tempo:

a) $[0, 10]$:

$$TMV\,[0,10] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{50 - 0}{10 - 0} = 5.$$

b) $[1, 20]$:

$$TMV\,[1,20] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(20) - f(1)}{20 - 1} = \frac{-400 - 9,5}{19} \simeq -21,55.$$

c) $[10, 12]$:

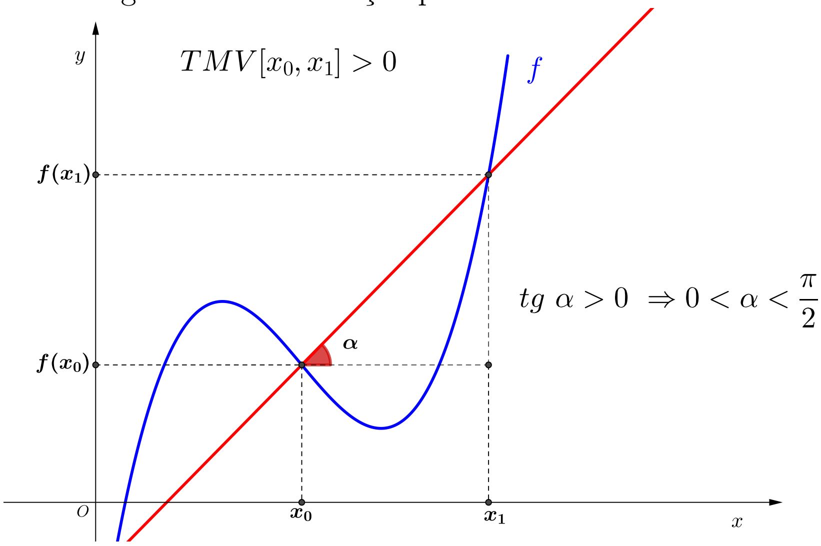
$$TMV\,[10,12] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(10)}{12 - 10} = \frac{48 - 50}{12 - 10} = -1.$$

Observe que, no Exemplo 8, a TMV calculada no item (a) é positiva, enquanto que nos outros itens ela é negativa. Mas o que isso significa nesse contexto? No caso, no item (a) significa que número de casos de pessoas contaminadas aumentou no intervalo de 0 a 10 anos. Já nos itens (b) e (c), significa que houve uma queda no número de pessoas contaminadas nos intervalos de tempo considerados. Esse fato está relacionado com a inclinação da reta secante que passa pelos pontos utilizados no cálculo da TMV.

Como vimos anteriormente, a taxa média de variação de uma função no intervalo $[x_0, x_1]$ é igual a $tg\ \alpha$, onde α é o ângulo de inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Nesse sentido, a partir do cálculo da TMV, podemos saber a respeito da inclinação dessa reta. São três possibilidades de inclinação:

1. Inclinação Positiva: ocorre quando $TMV > 0$.

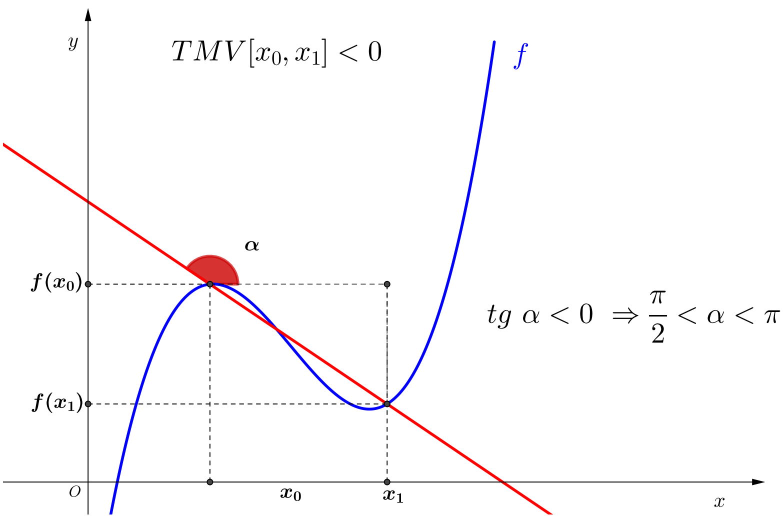
Figura 4.10: Inclinação positiva da reta secante



Fonte: O Autor

2. Inclinação Negativa: ocorre quando $TMV < 0$.

Figura 4.11: Inclinação negativa da reta secante



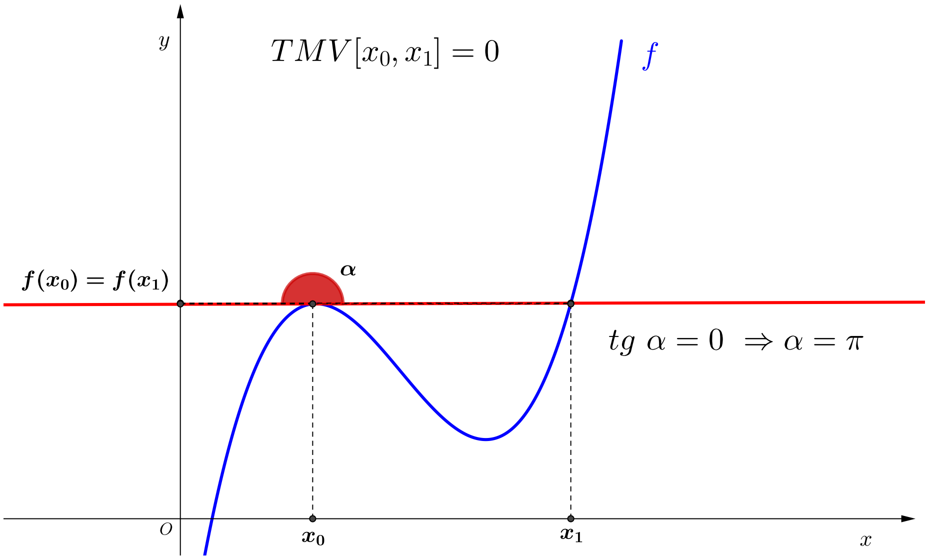
Fonte: O Autor

3. Inclinação Nula: ocorre quando $TMV = 0$.

Taxa de variação instantânea e a inclinação da reta tangente

Neste tópico vamos introduzir o conceito de taxa de variação instantânea utilizando a ideia de taxa média de variação, buscando detalhar geometricamente tal conceito. Nesse sentido, buscamos exibir sua relação com um objeto bem conhecido na Geometria Analítica, a reta tangente.

Figura 4.12: Inclinação nula da reta secante



Fonte: O Autor

Para isso, consideremos f a função quadrática cuja lei de formação é dada por $f(x) = \dfrac{1}{10}x^2$.

Tomando o valor $x_0 = 2$ e substituindo na função, chegamos a $f(2) = 0.4$. Dessa maneira, obtemos o par ordenado $(2, 0.4)$ que pertence ao gráfico da função f.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(2, 0.4)$, conforme a Figura 4.13.

Vamos analisar o comportamento de casos particulares de TMV's de f em alguns intervalos de x.

Consideremos intervalos fechados com extremos em 2 e x (intervalos da forma $[2, x]$ ou $[x, 2]$). Em particular, tome os intervalos $x \in [2, 10]$, $x \in [2, 6]$ e $x \in [2, 4]$. Calculando a TMV de f em cada um deles, obtemos:

$$TMV\,[2, 10] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} = \frac{10 - 0,4}{10 - 2} = 1,2;$$

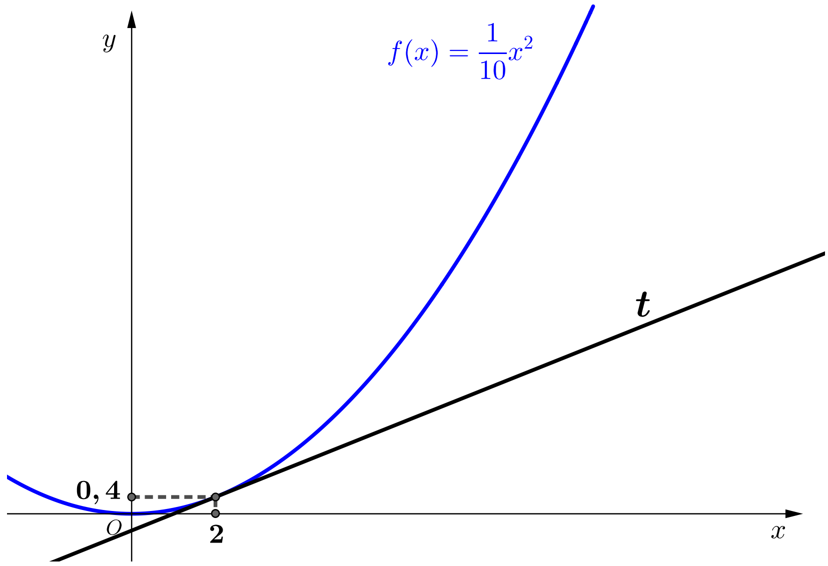
$$TMV\,[2, 6] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{3,6 - 0,4}{6 - 2} = 0,8;$$

$$TMV\,[2, 4] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1,6 - 0,4}{2} = 0,6.$$

Conforme já apresentado na seção anterior, a TMV de uma função em um intervalo de valores de x determina a inclinação da reta secante que intersecta o gráfico da função nos extremos desse intervalo e o valor numérico é o coeficiente angular dessa reta secante.

Nesse sentido, através dos cálculos acima, consideremos as secantes q, r, s cujos coeficientes angulares são dados por $TMV\,[2, 10]$, $TMV\,[2, 6]$ e $TMV\,[2, 4]$, respectivamente, conforme a Figura 4.14.

Figura 4.13: Reta tangente à parábola $y = \dfrac{1}{10}x^2$ no ponto $(2, 0.4)$



Fonte: O Autor

As retas secantes q, r, s passam pelo ponto $(2, f(2))$, que é comum a todas e por $(10, f(10))$, $6, f(6))$ e $(4, f(4))$, respectivamente.

A medida que consideramos valores de x se aproximando de 2 pela direita, percebemos que o ângulo de inclinação das retas secantes tendem a inclinação da reta tangente. Isso implica que o valor do coeficiente angular das retas secantes se aproximam do valor do coeficiente angular da reta tangente que passa por $(2, 0.4)$.

Essa situação também ocorre se consideramos intervalos da forma $[x, 2]$, com x se aproximando de 2 pela esquerda.

De um modo geral, quando realizamos o cálculo da TMV, com valores de x cada vez mais próximos de 2, as retas secantes que passam por $(2, 0.4)$ e $\left(x, \dfrac{1}{10}x^2\right)$ se aproximam da reta tangente à parábola $y = \dfrac{1}{10}x^2$ no ponto $(2, 0.4)$.

Com isso, os coeficientes angulares das retas secantes (as TMVs), dados pela expressão

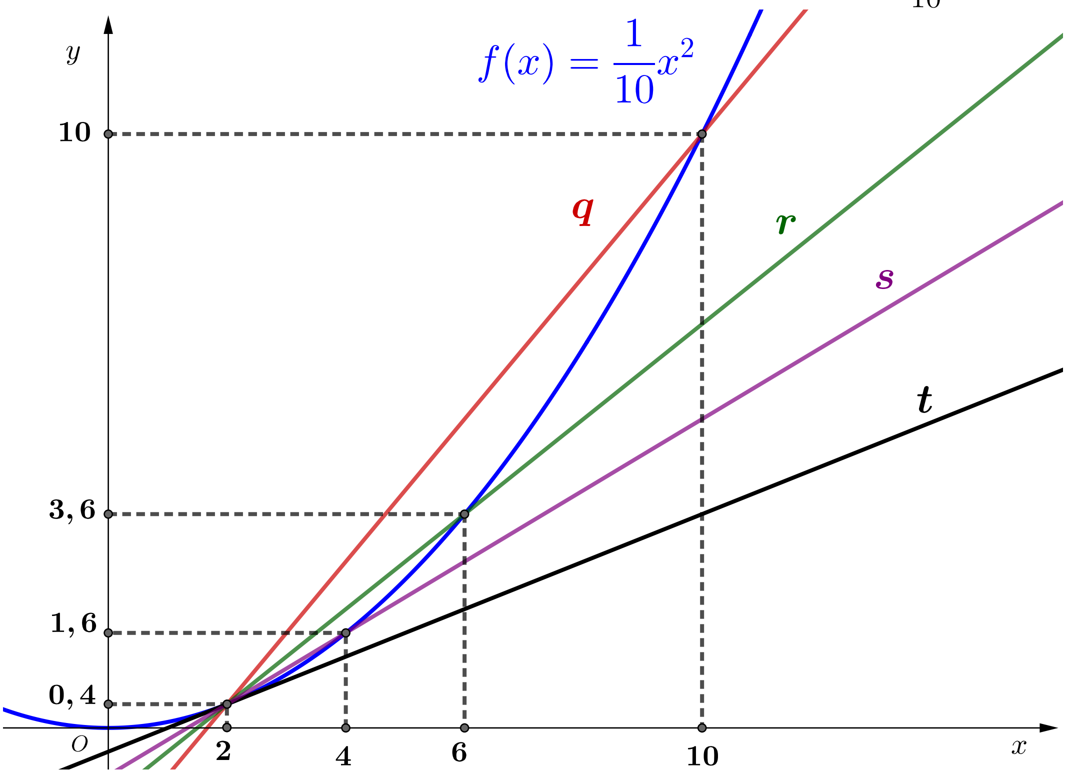
$$\frac{\frac{1}{10}x^2 - 0.4}{x - 2},$$

ficarão mais próximos do coeficiente angular da reta tangente à parábola em tal ponto.

Isso significa que o valor do ângulo α de uma reta secante s, que passa pelos pontos $(2, f(2))$, $(x, f(x))$, se aproxima do ângulo β da tangente ao gráfico da parábola no ponto $(2, f(2))$, a medida que x fica mais próximo de 2. A Figura 4.15 evidencia esse fato para o caso dos intervalos da forma $[2, x]$.

Para determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = \dfrac{1}{10}x^2$ no

Figura 4.14: Retas secantes e reta tangente a parábola $y = \dfrac{1}{10}x^2$



Fonte: O Autor

ponto $x = 2$, devemos calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{10}x^2 - 0.4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{0.1x^2 - 0.4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{0.1(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 0.1(x+2) = 0.4.$$

O valor calculado acima é chamado de taxa de variação instantânea (TVI), ou taxa pontual de variação, da função $f(x) = \dfrac{1}{10}x^2$ no ponto $x = 2$ e é representado por $TVI[2] = 0.4$.

Além disso, $TVI[2] = tg\ \beta$, em que β é o ângulo da reta tangente ao gráfico função no ponto $(2, 0.4)$.

Agora, vamos estender a noção de taxa de variação instantânea para funções em geral.

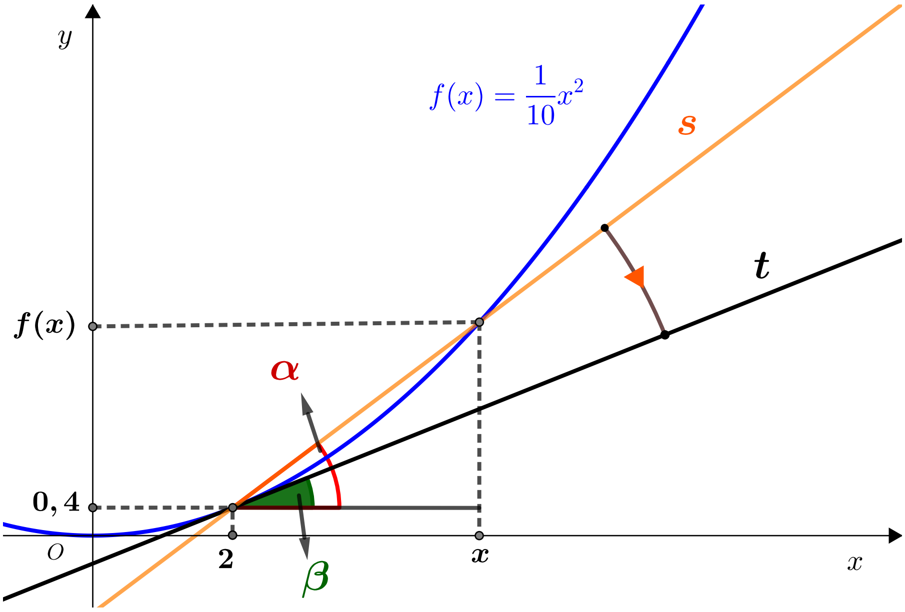
Definição 4.3.4. [Taxa de Variação Instantânea] A taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto x_0, denotada por $TVI[x_0]$, é dada por

$$TVI[x_0] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existir.

Pela definição, taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto x_0 pode ser interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Figura 4.15: Inclinação da reta secante e da reta tangente a parábola $y = \frac{1}{10}x^2$



Fonte: O Autor

Além disso, $TVI[x_0] = tg\ \beta$, onde β é o ângulo da reta tangente.

Exemplo 9 (PAIVA, 2010, p. 376): Uma barra de ferro foi aquecida durante determinado período, de modo que sua temperatura $C(t)$, em graus Celsius, aumentou em função do tempo t, em minutos, de acordo com a função $C(t) = t^3$.

a) Calcule a taxa média de variação da temperatura C em relação ao tempo t, para $5 \leq t \leq 6$.
Neste caso, temos que

$$TMV\,[5,6] = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{C(6) - C(5)}{6-5} = \frac{6^3 - 5^5}{6-1} = \frac{216 - 125}{1} = 91.$$

Logo, a taxa média de variação da temperatura no intervalo $5 \leq t \leq 6$ é $91^oC/min$.

b) Calcule a taxa pontual (taxa instantânea) de variação da temperatura em relação ao tempo para $t = 5$.
Temos que

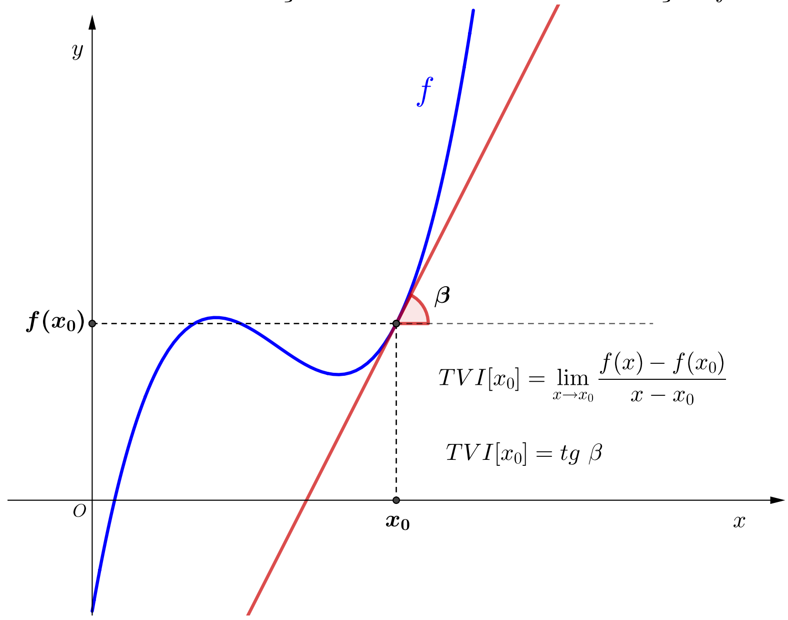
$$TVI\,[5] = \lim_{x\to 5} \frac{t^3 - 5^3}{t-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(t-5)(t^2+5t+25)}{t-5} = \lim_{x\to 5}(t^2 + 5t + 25) = 75.$$

Portanto, a taxa de variação instantânea da temperatura no tempo 5 foi de $75^oC/min$.

Exemplo 10: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x^2 + 2$.

a) Calcule a TVI da função f no ponto $x = -1$.

Figura 4.16: Taxa de variação instantânea de uma função f no ponto x_0



Fonte: O Autor

Neste caso, temos que

$$
\begin{aligned}
TVI[-1] &= \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\
&= \lim_{x \to -1} \frac{-2x^2 + 2 - (-2(-1)^2 + 2)}{x - (-1)} \\
&= \lim_{x \to -1} \frac{-2x^2 + 2}{x + 1} \\
&= \lim_{x \to -1} -2\frac{x^2 - 1}{x + 1} \\
&= -2 \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\
&= -2 \lim_{x \to -1} (x - 1) \\
&= -2(-1 - 1) \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

b) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $x = -1$. Observe que $f(-1) = -2(-1)^2 + 2 = 0$. Sabendo que a reta tangente ao gráfico de f passa pelo ponto $(-1, 0)$ e, pelo item (a), seu coeficiente angular é 4, temos que

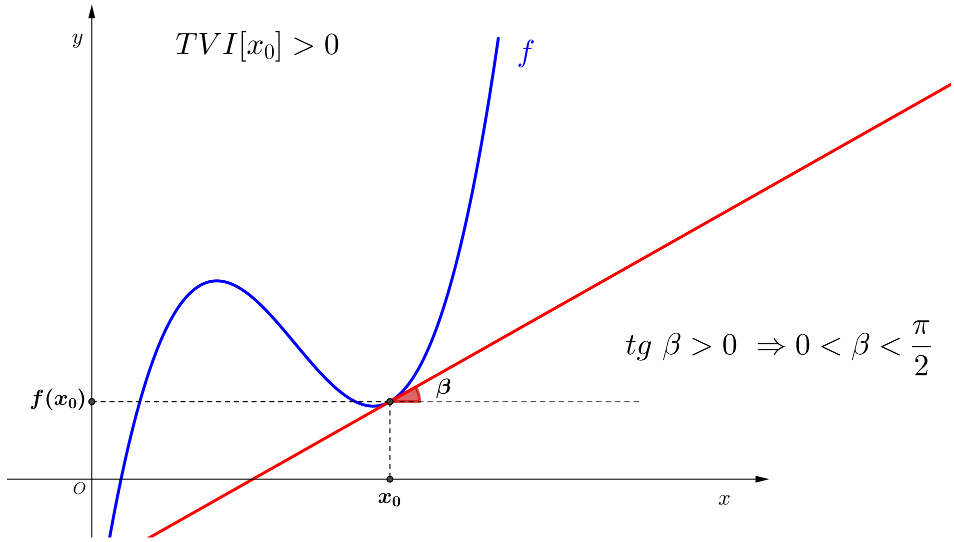
$$y - 0 = 4(x - (-1)).$$

Logo, a equação procurada é $y = 4x + 4$.

Da mesma forma que fizemos para reta secante, podemos analisar a inclinação da reta tangente. Nesse caso, há três possibilidades para a inclinação desse tipo de reta:

1. Inclinação Positiva: ocorre quando $TIV > 0$.

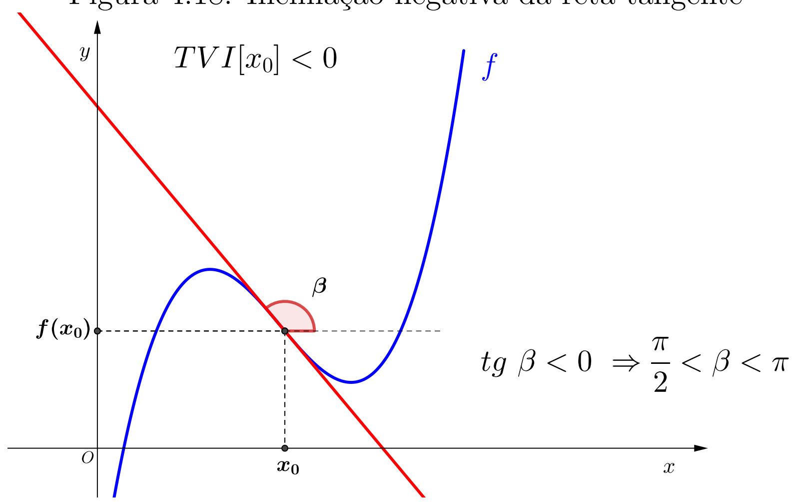
Figura 4.17: Inclinação positiva da reta tangente



Fonte: O Autor

2. Inclinação Negativa: ocorre quando $TIV < 0$.

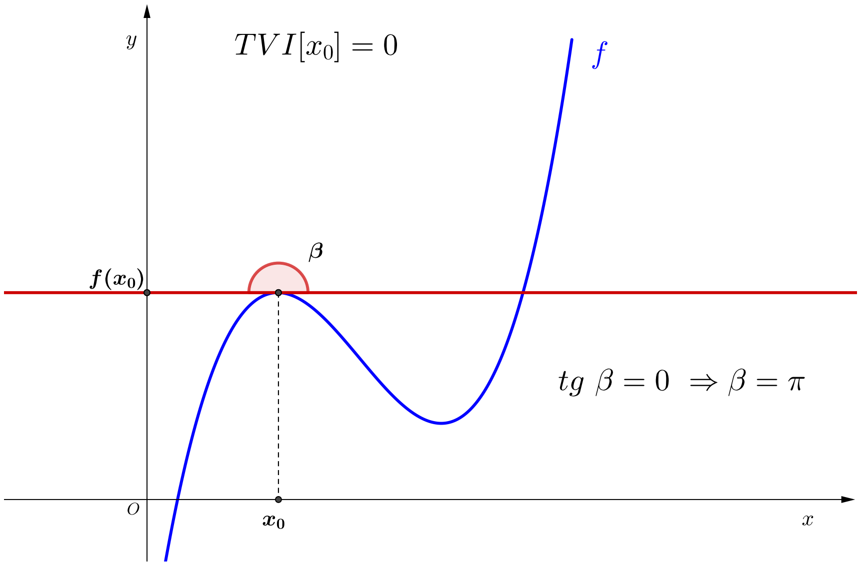
Figura 4.18: Inclinação negativa da reta tangente



Fonte: O Autor

3. Inclinação Nula: ocorre quando $TIV = 0$.

Figura 4.19: Inclinação nula da reta tangente



Fonte: O Autor

A derivada e suas propriedades

O conceito de derivada têm considerável relevância não só dentro das Ciências Exatas, mas também em várias outras áreas, como as Ciências Físicas e Biológicas, as Ciências Econômicas e Espaciais. Isso decorre diante das várias aplicações desse conceito em cada área.

Mas afinal, o que é derivada?

A derivada de uma função em um ponto é justamente a taxa instantânea de variação dessa função naquele ponto. Nesse sentido segue a seguinte definição:

Definição 4.3.5. **[Derivada]** Seja f uma função e x_0 um número real pertencente ao domínio dessa função. A derivada de f no ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$ ou $\dfrac{d}{dx}f(x_0)$, é dada por

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0) = TVI[x_0] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso o limite exista.

Fazendo na definição $x = x_0 + h$, obtemos que a derivada de uma função f em um número real x_0 é

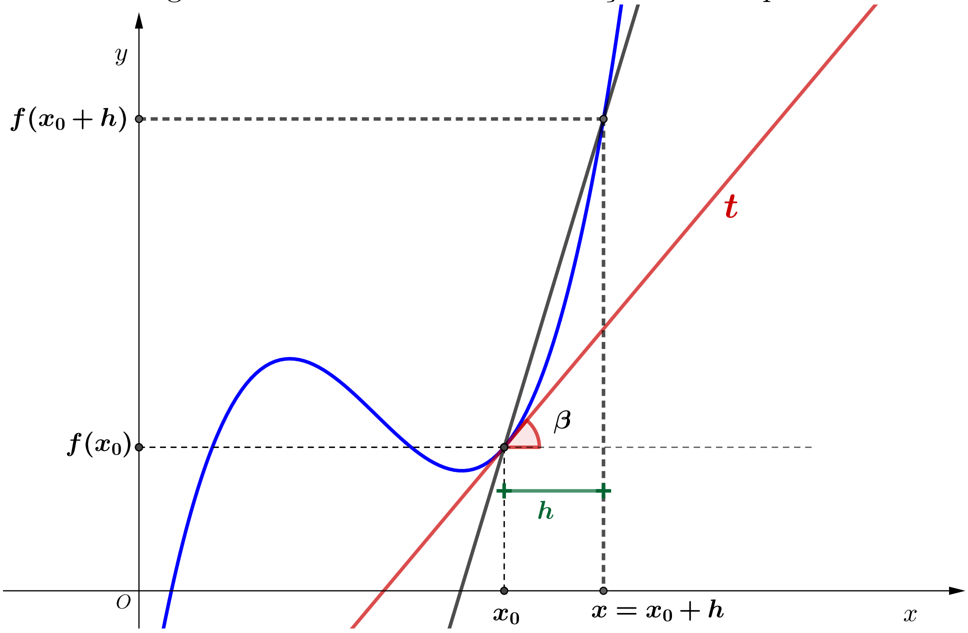
$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se o limite existir.

Geometricamente, a derivada de uma função em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto. Na Figura 4.20, a reta t é tangente ao gráfico da função f no ponto x_0 e a reta s é secante ao gráfico, passando pelos pontos x_0, $x_0 + h$.

À medida que fazemos x se aproximar de x_0 (ou h se aproximar de 0), o ângulo de inclinação de s se aproxima do ângulo β de inclinação de t . Ao passo que calculamos

Figura 4.20: Derivada de uma função em um ponto



Fonte: O Autor

o limite, encontramos a derivada de f, que é o coeficiente angular de t (que também é igual a tangente de β):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ou

$$f'(x_0) = tg\beta.$$

Exemplo 11: A derivada de uma função constante em qualquer valor de x do seu domínio é igual a 0.

De fato, considere $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Exemplo 12: A derivada de uma função afim, em qualquer ponto de seu domínio, é igual ao coeficiente angular de seu gráfico (que é uma reta). Por exemplo, considere a função $f(x) = -2x + 3$ e o ponto $x = 1$. Calculando a derivada de f nesse ponto, obtemos que $f'(1) = -2$. De fato,

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-2x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-2(x - 1)}{x - 1} = -2.$$

Exemplo 12: Vamos, agora, considerar a função quadrática $f(x) = x^2$. Calcule:

a) a derivada de f no ponto $x = 2$:

Para determinar $f'(2)$, fazemos:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-((2)^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2^2+2\cdot 2\cdot h+h^2-2^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 4+h \\
&= 4.
\end{aligned}$$

b) a derivada de f no ponto x_0 qualquer:

Para calcular $f'(x_0)$, fazemos:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0^2+2x_0h+h^2)-(x_0)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0)^2+2x_0h+h^2-(x_0)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x_0+h \\
&= 2x_0.
\end{aligned}$$

Observe que no item (b), o valor numérico da derivada da função $f(x) = x^2$ em um ponto x_0 qualquer é igual ao dobro de x_0. Esse resultado é extremamente útil no cálculo de derivadas no ponto de funções quadráticas.

Até aqui, utilizamos a definição por meio de limites para o cálculo de derivadas de funções em um ponto. No entanto, utilizando essa definição é possível obtermos propriedades que nos auxiliam nesse cálculo. São elas:

1) Derivada da função multiplicada por constante:

$$[k\cdot f]'(x_0) = k\cdot f'(x_0), k\in\mathbb{R}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}[k\cdot f]'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x_0+h)-k\cdot f(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{k\cdot(f(x_0+h)-f(x_0))}{h}\\ &= k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))}{h}\\ &= k\cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

Exemplo 12: $[7\cdot f]'(x_0)=7\cdot f'(x_0)$.

2) Derivada da soma de funções:

$$[f+g]'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}[f+g]'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\ &= f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

Exemplo 13: Seja $f(x)=x^2+2$. Para determinar a derivada de $f(x)$ no ponto x_0, consideremos $f(x)=g(x)+h(x)$, em que $g(x)=x^2$ e $h(x)=2$. Aplicando a propriedade 2, temos que $f'(x_0)=g'(x_0)+h'(x_0)$. Como $g'(x_0)=2x_0$ e $h'(x)=0$, segue que $f'(x)=2x_0+0=2x_0$.

Como consequência da propriedade 2, a derivada da diferença entre funções pode ser expressa por $[f-g]'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$. De fato,

$$\begin{aligned}[f-g]'(x_0) &= [f+(-g)]'(x_0)\\ &= f'(x_0)+(-g)'(x_0)\\ &= f'(x_0)+(-g'(x_0))\\ &= f'(x_0)-g'(x_0).\end{aligned}$$

Exemplo 14: Aplicando as propriedades acima, calcule a derivada da função $f(x)=3x^2-2x+1$ no ponto x_0.

Considere $f(x)$ como a soma $f(x)=p(x)-q(x)+r(x)$, onde $p(x)=3x^2$, $q(x)=2x$ e $r(x)=1$.

Aplicando as propriedades, temos que $f'(x_0)=p'(x_0)-q'(x_0)+r'(x_0)$.

Precisamos, agora, determinar $p'(x_0)$, $q'(x_0)$ e $r'(x_0)$.

- $p'(x_0)$: Observe que $p(x)=3h(x)$, com $h(x)=x^2$. Como, pela propriedade 1, $p'(x_0)=3h'(x_0)$ e $h'(x_0)=2x_0$, segue que $p'(x_0)=3\cdot 2x_0=6x_0$.

- $q'(x_0)$: De modo análogo ao item anterior, $q(x)=2k(x)$, com $k(x)=x$. Então, $q'(x_0)=2k'(x_0)$. Como $k'(x_0)=1$, segue que $q'(x_0)=2\cdot 1=2$.

- $r'(x_0)$: Como a derivada de uma constante é igual a 0, $r'(x_0) = 0$.

Portanto, $f'(x_0) = p'(x_0) - q'(x_0) + r'(x_0) = 6x_0 - 2 + 0 = 6x_0 - 2$.

4.3.3 Integrais

O conceito de integral definida de funções contínuas e o cálculo de áreas

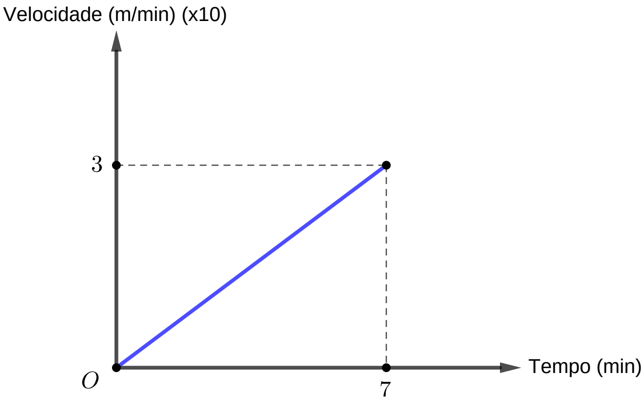
As aranhas são animais de 8 patas e que uma quantidade considerável de espécies tecem teias. A maior parte se alimenta de pequenos insetos, contudo existem espécies que se alimentam de pequenos répteis e mamíferos.

Figura 4.21: Aranha-lobo mordendo um sapo

Fonte: https://www.bbc.com/portuguese/vert-earth-39345846

Suponha que o gráfico apresentado na Figura 4.22 representa a velocidade de uma determinada espécie de aranha.

Figura 4.22: Velocidade da aranha ao longo do tempo

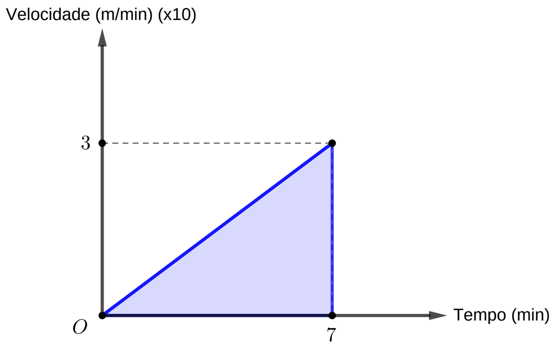


Fonte: O Autor

Para determinar a distância percorrida pelo bicho, basta determinar a área A do triângulo demarcado na Figura 4.23, no intervalo de tempo entre 0 e 7:

$$A = \frac{7 \times 30}{2} = 105.$$

Figura 4.23: Região cuja área representa a distância percorrida pela aranha ao longo do tempo



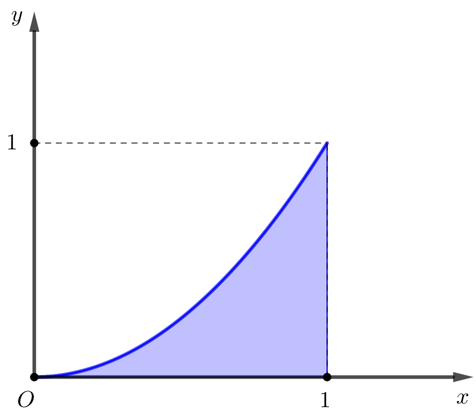
Fonte: O Autor

Dessa forma, concluímos que a distância percorrida por esse animal foi de 105 metros em 7 minutos.

Observe que utilizamos a conhecida expressão que determina a área do triângulo para determinar a distância. No entanto, existem situações em que não é tão simples determinar a área.

Considere um segundo exemplo. A Figura 4.24 representa o gráfico da função $f(x) = x^2$. Queremos determinar a área A da região destacada.

Figura 4.24: Região determinada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 1$

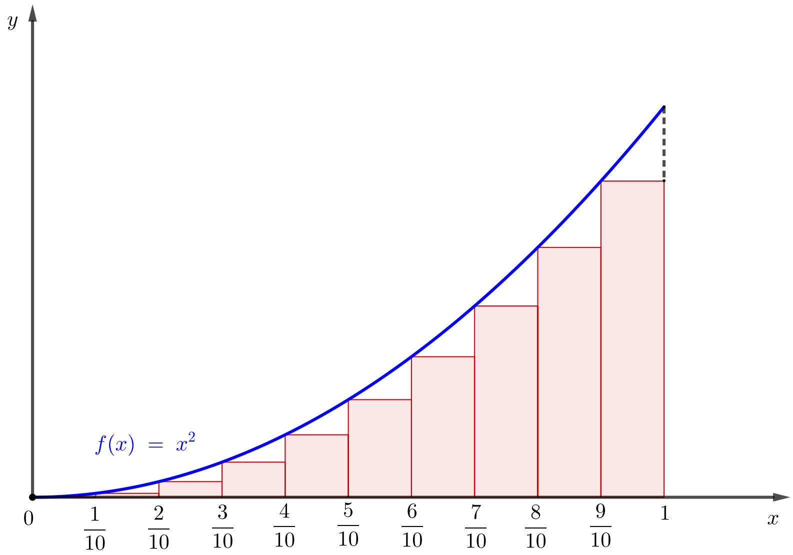


Fonte: O Autor

O cálculo da área A da região demarcada não é tão simples quanto nos polígonos. No entanto, uma estratégia para estimar essa área é dividir a região em faixas e aproximar cada faixa por um retângulo.

Inicialmente, repartimos o intervalo $[0, 1]$ em 10 subintervalos, onde a amplitude de cada um deles é a medida das bases dos retângulos. Em seguida, construímos retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função, conforme a Figura 4.25.

Figura 4.25: Retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: O Autor

Calculando a área A_1 ocupada pelos retângulos da Figura 4.25, obtemos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{5}{10}\right)^2 + \\
&+ \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2 \\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{100} + \frac{4}{100} + \frac{9}{100} + \frac{16}{100} + \frac{25}{100} + \frac{36}{100} + \frac{49}{100} + \frac{64}{100} + \frac{81}{100}\right) \\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{285}{100}\right) \\
&= 0,285.
\end{aligned}$$

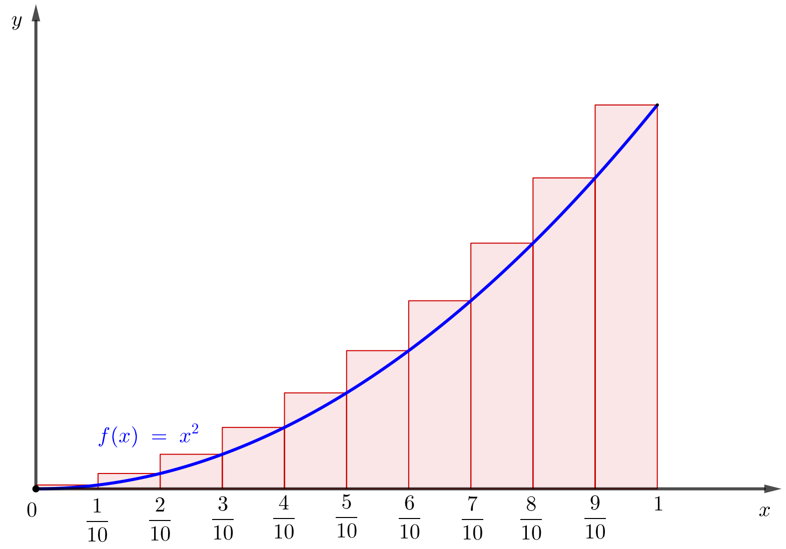
Note que o espaço demarcado na Figura 4.24 é maior que o espaço ocupado pelos retângulos da Figura 4.25. Nesse sentido temos que $A_1 < A$, ou seja,

$$A > 0,285$$

Por outro lado, podemos fazer a aproximação considerando retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função.

Calculando a área A_2 ocupada pelos retângulos da Figura 4.26, obtemos:

Figura 4.26: Retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: O Autor

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{5}{10}\right)^2+\\
&+ \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\cdot(1)^2\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{4}{100}+\frac{9}{100}+\frac{16}{100}+\frac{25}{100}+\frac{36}{100}+\frac{49}{100}+\frac{64}{100}+\frac{81}{100}+1\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{385}{100}\right)\\
&= 0,385.
\end{aligned}
$$

Comparando a Figura 4.26 com a Figura 4.24, nota-se que a área dos retângulos é maior que a área entre o gráfico de f e eixo x no intervalo $[0, 1]$. Portanto, $A_2 > A$, ou seja,

$$A < 0,385.$$

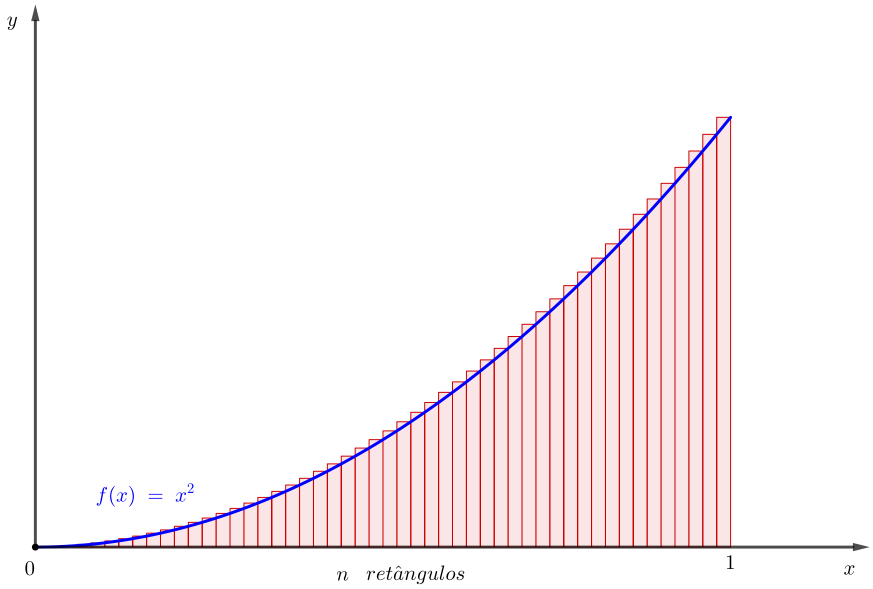
Nesse sentido, podemos estabelecer, por meio das aproximações, que:

$$0,285 < A < 0,385.$$

Observemos que, quanto maior o número de partições criadas no intervalo $[0, 1]$, isto é, quanto mais retângulos considerarmos, mais próximas as áreas A_1 e A_2 ficarão da área A.

De um modo geral, consideremos que o intervalo $[0, 1]$ foi repartido em n subintervalos de mesmo comprimento. Seja A_n a soma das áreas dos retângulos criados cujas bases são esses subintervalos e cujo vértice superior direito pertence ao gráfico de f.

Figura 4.27: Quantidade n retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: O Autor

Todos esses retângulos têm base de medida $\dfrac{1}{n}$ e as alturas são os valores de $f(x) = x^2$ nos pontos $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}$. Assim,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2). \end{aligned}$$

Note que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ representa a soma dos quadrados de n primeiros termos consecutivos positivos, que pode ser representada por:

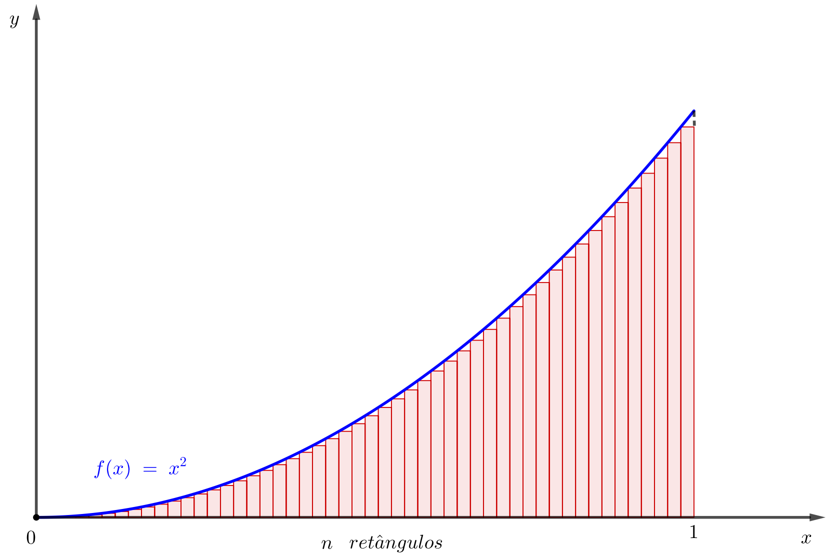
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Substituindo essa expressão em A_n, obtemos:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Observe que, à medida que n cresce infinitamente, $\dfrac{1}{n}$ fica cada vez mais próximos de 0. Dessa forma, a área A_n fica cada vez mais próxima de $\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Figura 4.28: Quantidade n de retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: O Autor

Analogamente, consideremos B_n a soma das áreas dos retângulos cuja base são os subintervalos de $[0, 1]$ e cujos vértices superiores esquerdos pertencem ao gráfico de f.

Assim:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2n-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

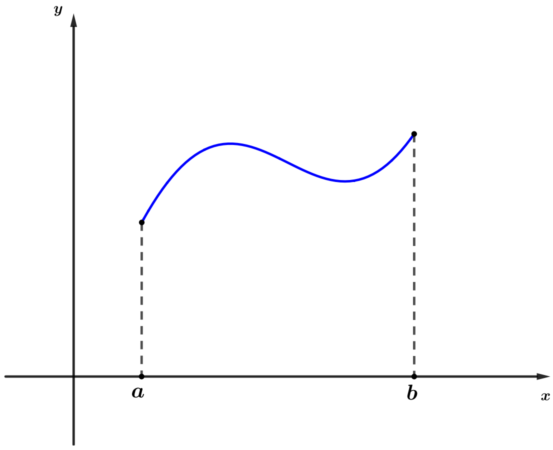
E, novamente, à medida que n cresce infinitamente, $\dfrac{1}{n}$ fica cada vez mais próximos de 0 e a área B_n se aproxima de $\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Observe que tanto A_n quanto B_n se aproximam do mesmo número, o $\frac{1}{3}$, à medida que n cresce. Esse número é o valor exato da área A sob a curva $f(x) = x^2$ e acima do eixo x, compreendida no intervalo $[0, 1]$. Esse valor também pode ser chamado de integral definida da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ e denotada por:

$$A = \int_0^1 x^2 dx.$$

Agora, vamos generalizar um pouco mais essas ideias. Consideremos, agora, uma função contínua f positiva em um intervalo $[a, b]$ do eixo x, onde $b > a$.

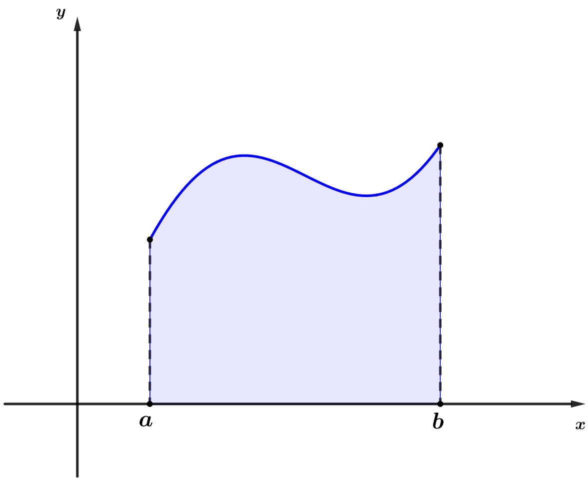
Figura 4.29: Gráfico da função positiva f definida no intervalo $[a, b]$



Fonte: O Autor

A Figura 4.30 mostra a região R delimitada entre a função f e o eixo x, no intervalo $a \leq x \leq b$.

Figura 4.30: Região delimitada entre a função f e o eixo x, no intervalo $a \leq x \leq b$



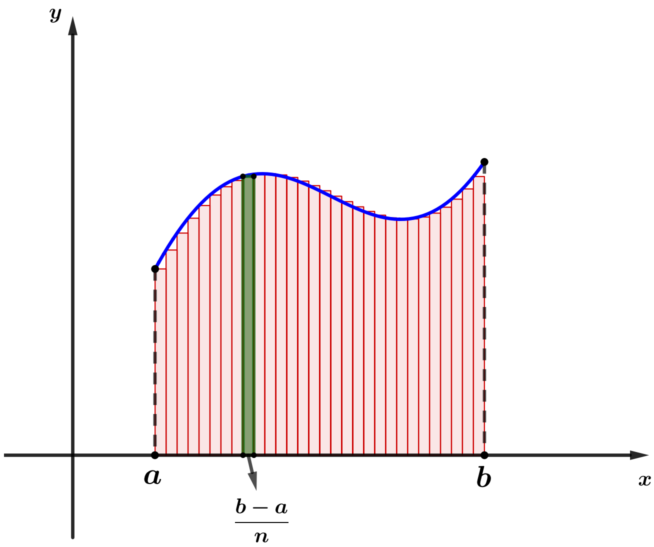
Fonte: O Autor

Para determinar a área S da região R acima, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n

subintervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, b]$, de mesmo comprimento $\Delta_n = \dfrac{b-a}{n}$.

Em seguida, construímos n retângulos cujas bases são esses subintervalos e de forma que cada ponto $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_{n-1}))$ é um vértice de um retângulo.

Figura 4.31: Retângulos em uma região delimitada abaixo do gráfico de f e acima do eixo x, num intervalo $[a, b]$



Fonte: O Autor

Consideraremos o caso em que os vértices superiores esquerdos dos retângulos pertencem ao gráfico de f, contudo, procedemos de forma análoga para os retângulos cujo os vértices superiores direitos pertencem ao gráfico da função.

Dessa forma, a área aproximada da região R pode ser expressa pela soma das áreas dos retângulos:

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{b-a}{n}f(a) + \frac{b-a}{n}f(x_1) + \frac{b-a}{n}f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n}f(x_{n-2}) + \frac{b-a}{n}f(x_{n-1}) \\ &\approx \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) \\ &\approx \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) \end{aligned}$$

Observe que essa aproximação aparenta ficar melhor à medida que o valor de n aumenta, ou, equivalentemente, à medida que o valor de Δ_n se aproxima de 0. Nesse sentido, temos a seguinte definição:

Definição 4.3.6. A área S de uma região R definida sob o gráfico de uma função contínua f positiva em um intervalo $[a, b]$ e acima do eixo x é definida por

$$S = \lim_{\Delta_n \to 0} \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})). \tag{4.1}$$

Acontece que o limite em apresentado em (4.1) é uma expressão muito importante, que aparece em uma grande variedade de problemas e situações, até quando a função

f não é positiva e, por isso, recebe nomenclatura especial: integral definida da função contínua f no intervalo $[a, b]$.

Definição 4.3.7. Seja f uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$, com $a < b$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, b]$, de mesmo comprimento $\Delta_n = \dfrac{b-a}{n}$. Definimos a integral definida de f em um intervalo $[a, b]$, como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta_n \to 0} \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})).$$

4.4 Sequências Didáticas

A expressão "Sequência Didática"teve sua origem no ano de 1996, na França, quando pesquisadores franceses buscavam uma forma de romper a compartimentalização dos conhecimentos no ensino de línguas (GONÇALVES, FERRAZ; 2016).

Introduzida no ensino-aprendizagem da língua materna, Dols et al (2004) define uma sequência didática como "um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito" (DOLS et al, 2004, p. 95). De acordo com os autores, a estrutura de uma sequência didática é delineada por 4 etapas distintas: apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final.

1ª etapa (apresentação da situação de ensino): descrição do que será desenvolvido na turma.

2ª etapa (a produção inicial): refere-se ao primeiro produto entregue pelos alunos. Este pode servir como um diagnóstico para o professor saber as dificuldades da turma como também auxiliar o professor nas futuras adaptações de seu projeto para que consiga atingir os objetivos de aprendizagem.

3ª etapa (módulos): "constituídos por várias atividades ou exercícios, dão-lhe os instrumentos necessários para este domínio, pois os problemas colocados pelo gênero são trabalhados de maneira sistemática e aprofundada." (Dolz et al, 2004)

4ª etapa (produção final): gera um produto final em que o aluno testa seus conhecimentos adquiridos após a realização dos módulos e o professor pode avaliar o progresso alcançado.

Enquanto a definição Dols et al (2004) está direcionada ao estudo de gêneros textuais, Zabala (1998) define esse termo de uma forma que contempla não somente o ensino de línguas, mas que também adéqua ao ensino de outras áreas do conhecimento.

> Se realizamos uma análise destas sequências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. (ZABALA, 1998, p. 18)

De acordo com o autor, é possível identificar em uma sequência didática a importância de cada uma das atividades nela inseridas para o processo ensino-aprendizagem.

Além disso, a sequência permite avaliar a presença ou não de cada atividade, indica a necessidade de inserção de outros tipos de atividade e o destaque que o professor deve dar a cada uma delas.

Com relação a estrutura das sequências didáticas, Zabala (1998) destaca que o conhecimento da forma de produção das aprendizagens proporciona a criação de perguntas em torno de diferentes sequências didáticas. Estas perguntas favorecem admitir sua validade, como também identificar detalhes sobre as atividades no que tange a reforçar as presentes ou incluir outras. São elas:

> Na sequência didática existem atividades:
>
> a) que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
>
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meninos e as meninas?
>
> c) possamos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno?
>
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir?
>
> e) que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
>
> f) que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
>
> g) que estimulem a auto-estima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
>
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?
>
> (ZABALA, 1998, p. 64)

Tendo em vista a necessidade de adaptações para outras áreas do conhecimento, Cabral (2017) apresenta um modelo que auxilia no processo de produção de sequências didáticas voltadas para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Para essa finalidade, o autor propõe um tipo de gênero textual denominado por ele como Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC). Criado no Laboratório de Educação Matemática da Universidade da Amazônia (LEMA-UNAMA) em associação com a disciplina Estágio Supervisionado III, a partir de um processo de reflexão entre discentes sobre o conteúdo matemático trabalhado nos níveis Fundamental e Médio, Cabral (2017) define esse conceito como

> "um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas."(CABRAL, 2017, p. 12)

Uma UARC é alicerçada em 6 categorias que corporificam uma sequencia didática, denominadas por Cabral (2017) como "categorias estruturantes"ou "intervenções estruturantes". São elas: Intervenção Inicial (II), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (IE), Intervenção Formalizante (IF), Intervenção Avaliativa Restritiva (IAR) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAA).

- Intervenção Inicial (II): se refere a interlocução professor-aluno, de modo que o professor, através de uma forma empírico-intuitiva, leve ao aluno a "ideia"do conceito estudado. Para Cabral (2017), essa categoria pode estimular aos estudantes "à percepção de alguma verdade do pensamento matemático"e que, juntamente com outras percepções do aluno articuladas pelo professor, pode ser um instrumento facilitador na construção de conhecimento do conceito estudado.

- Intervenção Reflexiva (Ir): Concretiza através um questionamento relativo ao objeto de estudo. Nesta categoria é proporcionado ao aluno a investigação. Levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências fazem parte dessa categoria.

- Intervenção Exploratória (IE): Seu principal objetivo é proporcionar ao aluno um momento para que ele possa pensar a respeito das respostas obtidas a partir da das Intervenções Reflexiva. Nesta categoria os alunos podem fazer simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.

- Intervenção Formalizante (IF): Nesse momento ocorre a formalização dos conceitos apreendidos. "Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática." (CABRAL, 2017, p. 42)

- Intervenção Avaliativa Restritiva (IAR): refere-se a primeira forma de avaliação do aluno. Nesse tipo de intervenção, ocorre uma investigação pelo professor para com os alunos a respeito do conceito estudado. Dois aspectos do saber matemático são considerados: "O que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, além disso, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações)."(CABRAL, 2017, p. 43)

- Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAA): o principal objetivo dessa intervenção é resolução de problemas pelo aluno aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino. Nela, o aluno deve-se utilizar das "noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes "para resolver tais tarefas.

Além dessas intervenções, o autor propõe também as Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO), um tipo oculto de intervenções subsidiada pelo discurso do professor durante o processo de ensino-aprendizagem de determinado conteúdo, possibilitando a ele realizar modificações que surgem ao longo desse processo. A I-OMO auxilia também no que diz respeito a aproximação ou distanciamento do aluno em relação aos objetivos de aprendizagem traçados da sequência didática. Cabral (2017) destaca sua importância em seu texto:

> Essas intervenções são importantes, sobretudo por dois aspectos. Por um lado, permitem as modulações do professor no sentido de estimular o aluno em direção aos objetivos estabelecidos pela Sequência Didática e, por outro lado, em possibilitar futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem. (CABRAL, 2017, p. 46)

A estruturação de uma sequência didática para o ensino de Matemática proposta por Cabral (2017) não representa uma forma engessada para a criação de sequências desse tipo. Pelo contrário, o autor relata que essa estrutura, em uma sequência didática, pode ocorrer de forma integral ou parcial. Isso implica que uma sequência didática utilizando os conceitos de UARC's em sua estruturação pode ser adaptada, de modo que o professor tenha a autonomia para refletir se nela deva ser totalmente ou apenas alguma fração baseada com os elementos desse método.

> Assim, não importa a nomenclatura usada para designar as atividades da sequência didática, o que se deve observar, é a natureza das atividades sugeridas, pois a estrutura concebida pela UARC poderá ser identifica integralmente ou em parte. (CABRAL, 2017, p. 85)

Considerando essa fala do autor e guiando-se pelas definições de sequências didáticas propostas por Dols et al (2004), Zabala (1998) e Cabral (2017), apresentamos, nesta última seção deste capítulo, três sequências didáticas relativas ao ensino de Cálculo, que podem ser aplicadas no Ensino Médio. Essas sequências contemplam tópicos de limites, derivadas e integrais.

Tanto na estrutura de sequência didática definida por Dols et al (2004) quanto na de Zabala (1998), a atividade diagnóstica se faz presente. Em concordância com os autores, iniciamos cada sequência didática com uma atividade diagnóstica.

Consideramos pertinente propomos essa atividade, visto que ela possibilita realizar um levantamento a respeito dos conhecimentos prévios que cada aluno possui. Dessa forma, ela viabiliza ao professor identificar as dificuldades e realizar na turma um nivelamento, a fim de que possa dar continuidade a aplicação da sequência didática.

Para o desenvolvimentos dos módulos, buscamos utilizar parcialmente o conceito e os elementos de UARC's, modelo proposto por Cabral (2017).

De modo geral, em cada um dos módulos aqui apresentados, propusemos situações empírico-intuitivas acompanhadas de questionamentos que correlacionam com as seguintes intervenções das UARC's: Intervenção Inicial (II), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (IE), Intervenção Avaliativa Restritiva (IAR). Além disso, partes dos módulos são dedicadas a formalização dos conceitos, assemelhando-se a Intervenção Formalizante (IF).

Vale ressaltar que apenas o Módulo 4: Propriedades dos limites, da sequência didática referente ao conteúdo de limites, não seguiu em sua totalidade essa estrutura. Na elaboração desse módulo, optamos como situação inicial a apresentação das propriedades e exemplos para, logo em seguida, os alunos aplicarem nos exercícios. Optamos por essa forma visto que, caso optássemos por trabalhar propriedade por propriedade de forma intuitiva, a sequência se tornaria extensa e massante para os estudantes.

Dols et al (2004) destaca, na estrutura de sequência didática, o produto final. Já Cabral (2017), propõe a existência de uma intervenção avaliativa aplicativa. Ambos os termos estão relacionados a atividades realizadas pelos alunos que possibilitam ao professor investigar individualmente os conhecimentos adquiridos por eles. Seguindo essa direção, ao final de cada sequência didática, são propostas atividades avaliativas relativas ao conteúdo abordado. Estas atividades possibilitarão ao professor uma visão a respeito de quais conceitos foram aprendidos e quais ainda são necessários um reforço.

Em resumo, as sequências didáticas propostas são estruturadas e apresentadas na ordem conforme a Tabela 4.11.

Ao final de cada módulo, apresentamos um tópico chamado Propostas de atividades. Esse tópico é composto por atividades sobre os conteúdos abordados no módulo, que podem ser sugeridas (totalmente ou parcialmente) pelo professor aos alunos, com a finalidade de reforçar o aprendizado sobre os conceitos ensinados.

Tabela 4.11: Estrutura das sequências didáticas

Conteúdo	**Estrutura da sequência**
Limite	Atividade diagnóstica 1 Módulo 1: Introdução a ideia de limite Módulo 2: Ideia intuitiva de limite Módulo 3: Limites laterais Módulo 4: Propriedades dos limites Atividades avaliativas referentes ao conceito de limite
Derivada	Atividade diagnóstica 2 Módulo 1: Taxa média de variação e inclinação da reta Módulo 2: A TMV de uma função e a inclinação da reta secante Módulo 3: Taxa instantânea de variação de uma função em um ponto Módulo 4: A TIV de uma função em um ponto e a inclinação da reta tangente Módulo 5: A derivada Atividades avaliativas referentes ao conceito de derivada
Integral	Atividade diagnóstica 3 Módulo: Noção intuitiva de integral Atividades avaliativas referentes ao conceito de integral

As três sequências didáticas aqui propostas podem ser implementadas em sala de aula em conjunto, respeitando a ordem, ou podem ser implementadas parcialmente, caso o professor não queira trabalhar todos os conteúdos, em uma das seguintes opções: Limite; Limite e Derivada; Limite e Integral. Além disso, cabe ressaltar que a realização das atividades não deve ser algo rígido e engessado; o professor, no decorrer da aplicação, poderá fazer as devidas alterações, caso seja necessário.

4.4.1 Limite

Atividade diagnóstica

Tempo previsto: 1h40min

Objetivo 1: Analisar o conhecimento prévio dos alunos com relação ao conteúdo de funções.

Objetivo 2: Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conteúdo de funções abordado nessas atividades.

1. Considere a função $f(x) = -2x + 1$.
   (a) Calcule $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
   (b) Esboce o gráfico da função no plano cartesiano.
   (c) Qual o valor do coeficiente angular da reta que é o gráfico dessa função? E o valor do coeficiente linear?
   (d) A reta que representa o gráfico da função é crescente ou decrescente? Justifique.

2. Considere a função $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
   (a) Calcule $f(-2), f(1), f(3), f(5)$.
   (b) Determine as coordenadas do vértice (x_v, y_v) do gráfico da função f.
   (c) Determine as raízes da função.
   (d) Faça um esboço do gráfico da função.

3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ -x+1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$.
   (a) Determine $f(-2)$ e $f(3)$.
   (b) Qual o valor de $f(1)$?
   (c) Faça um esboço do gráfico de f.

4. Determine o domínio das funções:
   (a) $f(x) = \sqrt{-3x+1}$.
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Módulo 1: Introdução à ideia de limite

Tempo previsto: 20 minutos.

Objetivo 1: Discutir sobre o Cálculo Diferencial e Integral e o significado da palavra limite.

Material Utilizado: Computador e projetor.

Procedimentos:

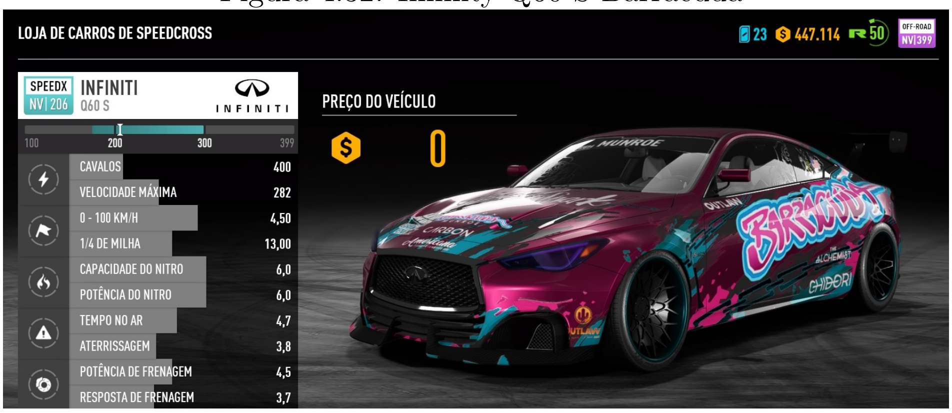
1- Proponha inicialmente uma discussão a respeito da disciplina Cálculo. Questione os alunos se já ouviram alguma vez o termo Cálculo Diferencial e Integral e o que sabem a respeito desse termo.

2- Explique o que é o Cálculo Diferencial e Integral.

"O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina da área de Matemática presente em muitos cursos superiores como as Engenharias, Ciências Exatas e Naturais, como também nas Ciências Administrativas, Contábeis e Econômicas. Os conceitos matemáticos ensinados nessa disciplina podem a resolver muitos problemas de cada uma dessas áreas. A palavra Cálculo Diferencial está relacionada principalmente ao ensino de limite e derivada, dois conceitos matemáticos relevantes no estudo dessa disciplina. Já o Cálculo Integral está relacionado ao tópico de integral, um outro conceito matemático que será visto se alguém optar por cursar algumas dessas áreas. Estudaremos aqui inicialmente o conceito de limite."

3- Pergunte a turma se eles sabem o que é limite. Após as respostas e com o projetor ligado, exemplifique apresentando o Infinity Q60 S Barracuda, que é um dos carros presentes no jogo Need for Speed Payback. Chame a atenção para sua velocidade máxima, ou seja, a velocidade limite atingida por esse carro, que é 282 km/h.

Figura 4.32: Infinity Q60 S Barracuda



Fonte: https://www.sharkiando.com/blog/need-for-speed-payback-pacote-de-expansao-speedcross

4- Após, explique que a palavra limite foi utilizada neste contexto para caracterizar a velocidade máxima, referindo-se a ideia da existência de um valor que pode ser alcançado, mas jamais ultrapassado. Além disso, existem outras situações do cotidiano ela também é aplicada, como por exemplo, a idade limite mínima para uma pessoa conseguir a habilitação é 18 anos. Para calibrar um pneu existe um limite máximo de libras, uma vez que, se ultrapassar essa quantidade, ele pode estourar.

5- Por fim, levante a seguinte questão: "Mas em Matemática, o que é limite?"

Módulo 2: Ideia intuitiva de limite

Tempo previsto: 50 minutos.

Objetivo 1: Compreender a ideia intuitiva de limite de uma função de uma variável real utilizando o *software* GeoGebra.

Objetivo 2: Explorar a ideia intuitiva de limite através do cálculo de limites de funções constantes, afins e quadráticas.

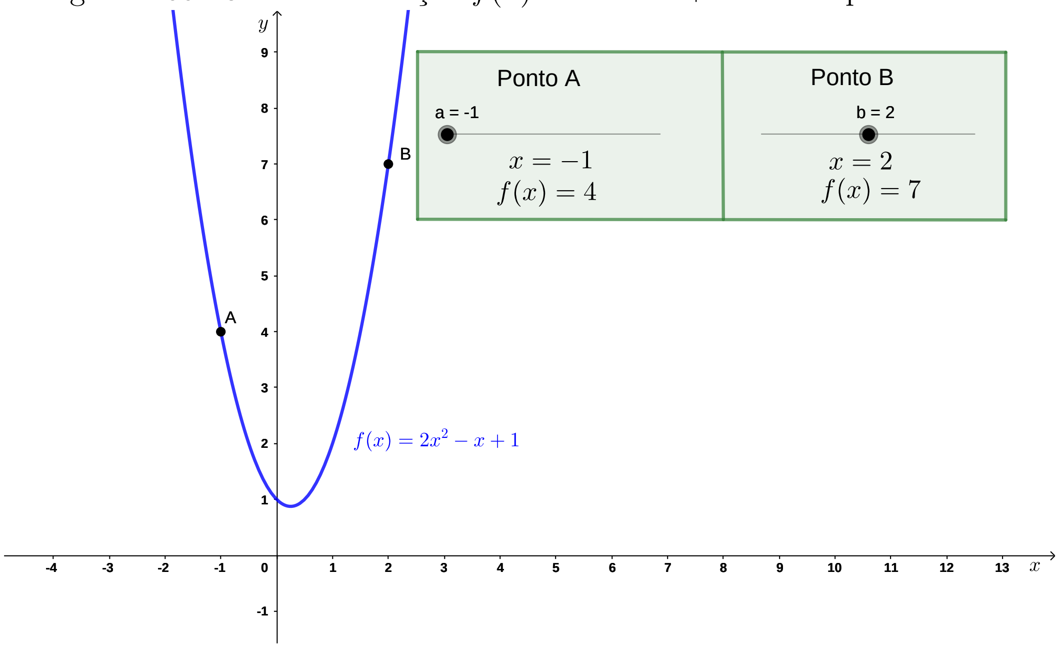
Material Utilizado: Computadores para o professor e para os alunos com o *software* GeoGebra instalado, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Observação: Os alunos irão abrir o arquivo 1 disponibilizado pelo professor para o desenvolvimento da aula.

Procedimentos:

1- Projete o arquivo 1 (https://www.geogebra.org/m/a2jhyvse). Peça aos alunos que abram esse arquivo em seus computadores e observem o gráfico presente nele.

Figura 4.33: Gráfico da função $f(x) = 2x^2 - x + 1$ com os pontos A e B



Fonte: O Autor

2- Solicite que movam o controle deslizante a e questione a turma sobre o que acontece com o ponto A. Faça o mesmo com o controle deslizante b.

3- Explique que à medida que alteramos os valores do controle deslizante a, alteramos as coordenadas do ponto A, presente no gráfico acima. Da mesma forma, quando movemos o controle deslizante b, ocorre mudança nas coordenadas do ponto B. Os valores de a e b representam os valores das abcissas dos pontos A e B, respectivamente.

4- Movendo o controle deslizante a, peça aos alunos que descubram as coordenadas do ponto A completando a Tabela 4.12 com os valores de $f(x)$, para cada x dado:

Tabela 4.12: Coordenadas do ponto A

x	-1	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999
$f(x)$							

5- Mostre que os valores de x considerados na Tabela 4.12 se aproximam do número 1 por valores menores que 1. Explique que isso significa que x se aproxima de 1 pela esquerda.

6- Questione: "O que percebe-se em relação ao valor $f(x)$, à medida que x se aproxima de 1 pela esquerda?"

7- Explique que a medida que x se aproxima de 1 pela esquerda, ou seja, por valores menores que 1, o valor de $f(x)$ tende a 2.

8- Peça aos alunos para moverem o controle deslizante b, descobrirem as coordenadas do ponto B e completarem Tabela 4.13 com os valores de $f(x)$, para cada x dado:

Tabela 4.13: Coordenadas do ponto B

x	1,001	1,01	1,1	1,3	1,5	2	3
$f(x)$							

9- Ressalte que os valores de x considerados na Tabela 4.13 se aproximam do ponto 1 por valores maiores que 1. Nesse caso, dizemos que x se aproxima de 1 pela direita.

10- Questione: "O que é possível perceber em relação ao valor $f(x)$, à medida que x se aproxima de 1 pela direita?"

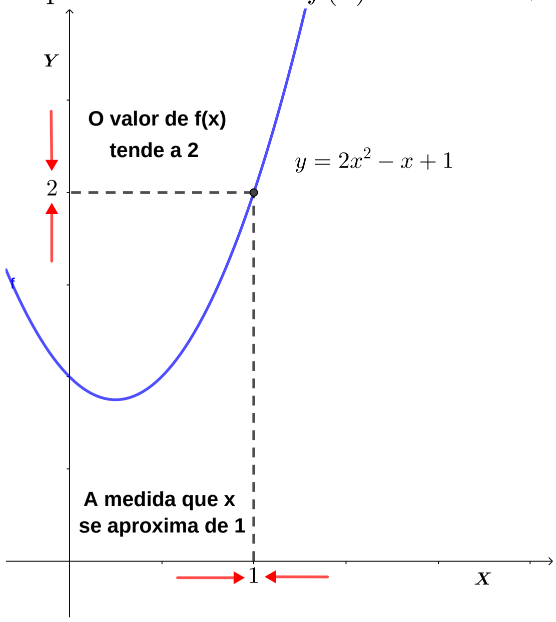
11- Explique que à medida que x se aproxima de 1 pela direita, ou seja, por valores maiores que 1, o valor de $f(x)$ também tende a 2.

12- Conclua aos alunos que, pelo fato de $f(x)$ se aproximar de 2, ao passo que x se aproxima de 1 tanto pela esquerda quanto pela direita, dizemos que o limite da função $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x tende a 1 é igual a 2 e denotamos:

$$\lim_{x \to 1}(2x^2 - x + 1) = 2.$$

Apresente a eles o gráfico da Figura 4.34, que mostra como esse limite pode ser representado geometricamente.

Figura 4.34: Gráfico explicitando o limite $f(x) = 2x^2 - x + 1$ quando x tende a 1



Fonte: O Autor

Propostas de atividades:

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -5x + 3$.

   (a) Calcule os valores de $f(x)$ e complete as tabelas:

x	-5	-4,2	-4,01	-4,0001
f(x)				

x	-3,9999	-3,99	-3,5	-3
f(x)				

   (b) Os valores de x se aproximam de um determinado número inteiro. Qual número é esse?

   (c) O que podemos dizer a respeito do limite de $f(x)$ quando x se aproxima do número inteiro que você descobriu na letra b?

2. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, sendo c um número real positivo qualquer, é denominada função constante.

   (a) Construa os gráficos das funções $f_1(x) = 100$, $f_2(x) = 5$, $f_3(x) = -4$, $f_4(x) = 0$.

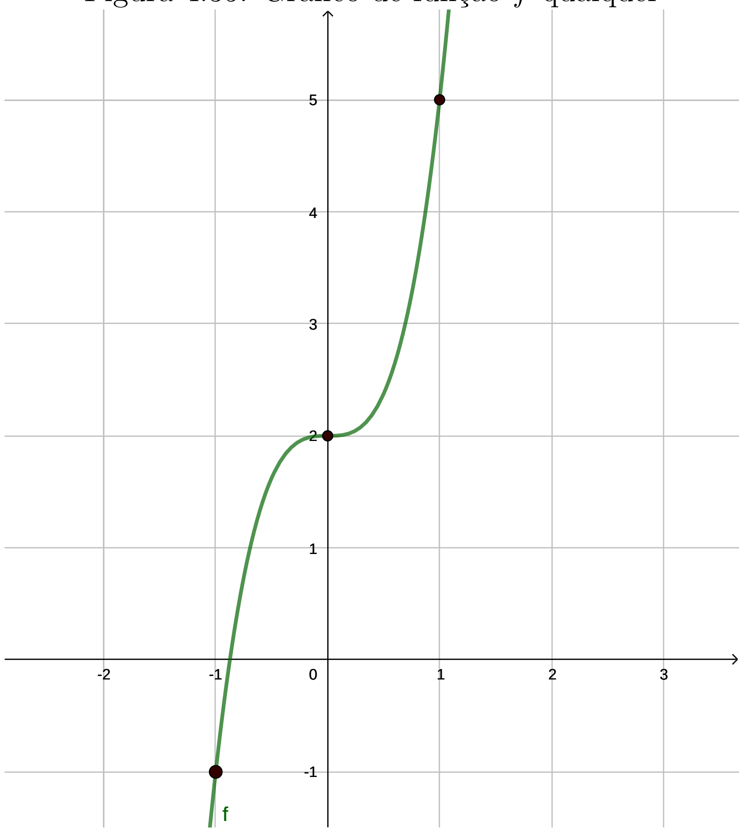
   (b) Através dos gráficos, determine os limites de f_1, f_2, f_3 e f_4, com x tendendo a 8.

(c) Agora, determine os limites de f_1, f_2, f_3 e f_4, com x tendendo a -1.

(d) Observe os resultados obtidos no item b e c. O que pode-se perceber em relação ao limite de uma função constante?

3. Analise o gráfico da Figura 4.35 e determine:

Figura 4.35: Gráfico de função f qualquer



Fonte: O Autor

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) =$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

(c) $\lim_{x\to -1} f(x) =$

4. Determine os limites:

(a) $\lim_{x\to -2}(x^3) =$

(b) $\lim_{x\to 5}(4x-6) =$

(c) $\lim_{x\to 1}(-2x^2+6x-11) =$

(d) $\lim_{x\to 0}(-5) =$

(e) $\lim_{x\to -1}(2x^4-3) =$

Módulo 3: Limites laterais

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender o conceito de limites laterais de uma função de uma variável real.

Objetivo 2: Explorar o conceito de existência e inexistência de limites.

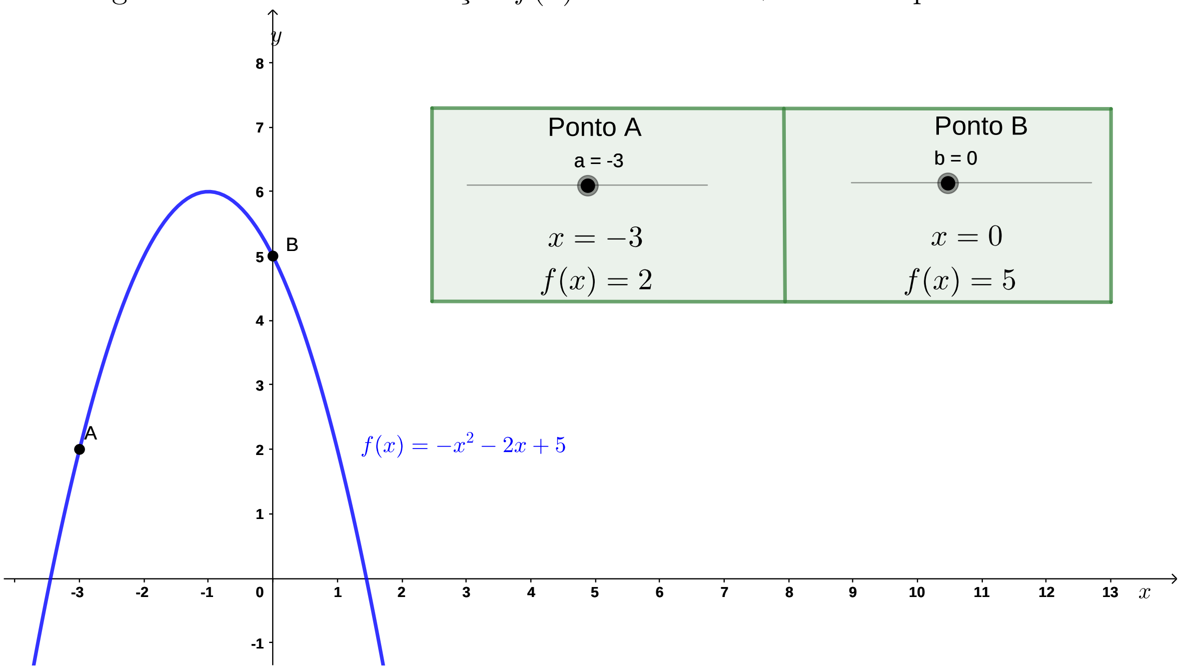
Material Utilizado: Computadores para o professor e para os alunos com o *software* GeoGebra instalado, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Observação: Os alunos irão abrir o arquivo 2 disponibilizado pelo professor para o desenvolvimento da aula.

Procedimentos:

1- Projete o arquivo 2 (https://www.geogebra.org/m/vx8ytczr). Peça aos alunos que abram esse arquivo em seus computadores e observem o gráfico presente nele.

Figura 4.36: Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ com os pontos A e B



Fonte: O Autor

2- Solicite a turma que determine o limite da função real de uma variável real $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x tende a -2. Inicialmente, utilizando a calculadora, eles devem completar a Tabela 4.14 com valores de $f(x)$ para cada x que se aproxima de -2 pela esquerda.

Tabela 4.14: Valores de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x se aproxima de -2 pela esquerda

x se aproxima de -2 pela esquerda $\longrightarrow$

x	-4	-3	-2,5	-2,3	-2,1	-2,01	-2,001
$f(x)$							

Após o cálculo, solicite a eles que desloquem o controle deslizante a do arquivo 2 para conferir os resultados.

3- Conclua que quando x se aproxima de -2 pela esquerda, ou seja, por valores menores que -2, os valores da função $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ se aproximam de 5. Isso significa dizer que o limite lateral de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x tende a -2 pela esquerda é igual a 5. Esse fato pode ser simbolizado da seguinte forma:

$$\lim_{x \to -2^-} (-x^2 - 2x + 5) = 5.$$

4- Peça aos alunos que completem a Tabela 4.15 e, de forma análoga ao passo 3, explique o que significa o limite lateral da função $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x tende a -2 pela direita.

Tabela 4.15: Valores de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x se aproxima de -2 pela direita

x se aproxima de -2 pela direita $\longleftarrow$

x	-1,999	-1,99	-1,9	-1,5	-1	0	1
$f(x)$							

Após o cálculo, solicite a eles que desloquem o controle deslizante b do arquivo 2 para conferir os resultados.

5- Conclua que quando x se aproxima de -2 pela direita, ou seja, por valores maiores que -2, os valores da função $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ se aproximam de 5. Isso significa dizer que o limite lateral de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x tende a -2 pela direita é igual a 5. Simbolizamos esse limite lateral por:

$$\lim_{x \to -2^+} (-x^2 - 2x + 5) = 5.$$

6- Nesse momento sugira aos alunos para determinarem os limites laterais da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geq 1 \\ 5, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Tabela 4.16: Valores de $g(x)$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda

x se aproxima de 1 por valores menores que 1 $\longrightarrow$

x	-1	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999
g(x)							

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) =$$

Tabela 4.17: Valores de $g(x)$ quando x se aproxima de 1 pela direita

x se aproxima de 1 por valores maiores que 1 $\longleftarrow$

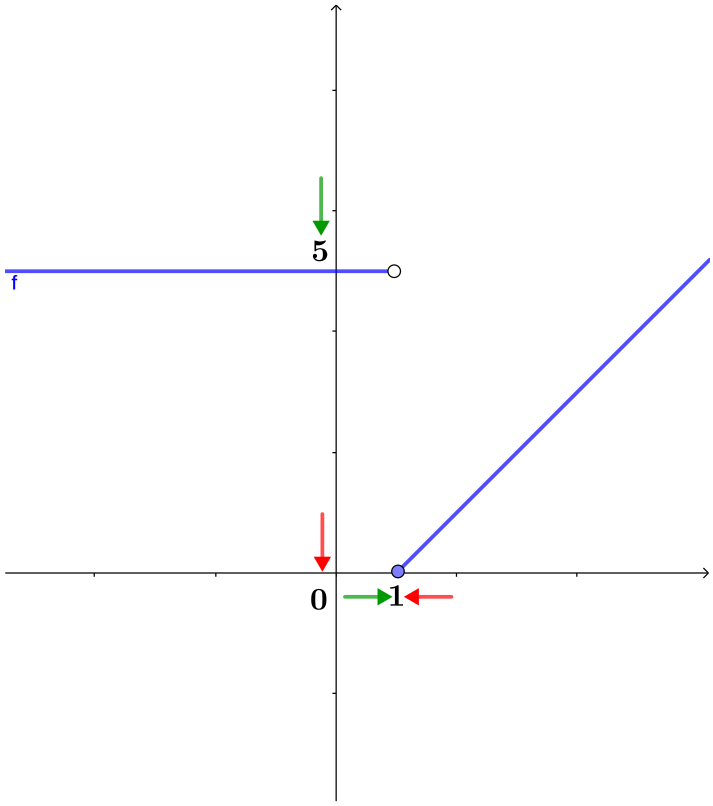
x	1,001	1,01	1,1	1,3	1,5	2	3
g(x)							

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) =$$

7- Questione aos alunos sobre o que se pode afirmar sobre os limites laterais de $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x tende a -2. Após, pergunte a eles sobre o que observaram com relação aos limites laterais da função $g(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geq 1 \\ 5, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ quando x tende a 1.

8- Conclua que o limite da função $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ quando x tende a -2 existe, e este é igual a 5, pois $\lim_{x \to -2^-}(-x^2 - 2x + 5) = \lim_{x \to -2^+}(-x^2 - 2x + 5) = 5$. Contudo, não existe o limite de $g(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geq 1 \\ 5, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ quando x tende a 1, pois $\lim_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim_{x \to 1^+} g(x)$. Após, mostre o gráfico da Figura 4.37 aos alunos e explique o significado geométrico da não existência do limite da função $g(x)$.

Figura 4.37: Gráfico da função g sendo constante igual a 5, se $x < 0$ e igual a $x - 1$, se $x \geq 1$



Fonte: O Autor

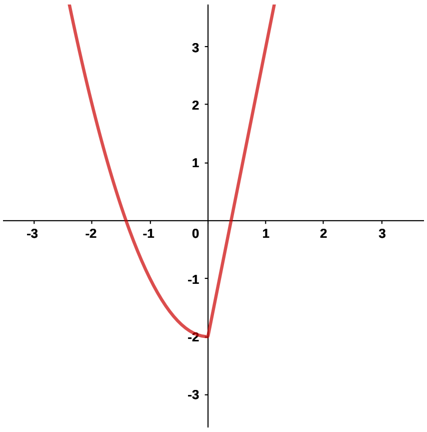
9-Enuncie a condição de existência do limite de uma função:

" Seja a um número real e f uma função. Para que o limite de f exista, os limites laterais devem ser iguais. Além disso, se $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Caso contrário, dizemos que o limite da função não existe. "

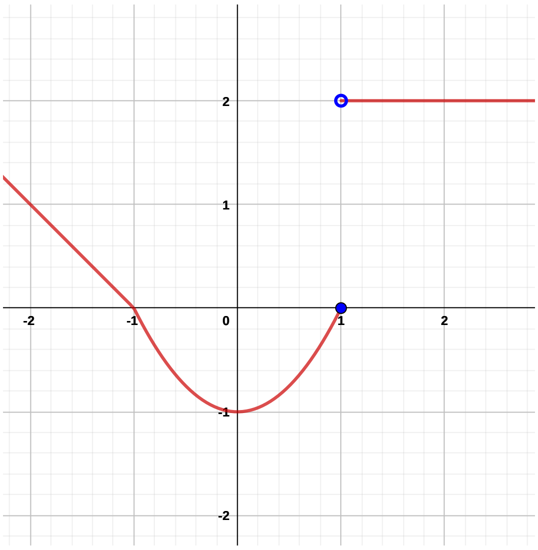
Propostas de atividades:

1. Calcule os limites laterais:
   (a) $\lim_{x\to -3^+}(4x - 1)$
   (b) $\lim_{x\to 2^-}(3x^2 - 2x - 7)$
   (c) $\lim_{x\to -5^-}(-6x + 2)$
   (d) $\lim_{x\to 1^+}(-4x^3)$
2. Analisando os gráficos, determine os limites das funções, caso existam. Caso não existam, justifique o motivo.

   (a) $\lim_{x\to -2} f(x) =$



(b) $\lim_{x\to 1} g(x) =$



3. Verifique se os limites existem. Se existir, determine-o. Caso contrário, explique o motivo de não existir.

   (a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2} f(x) =$

   (b) $g(x) = \begin{cases} 3x-2, \text{ se } x > 1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \\ 4x+1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} g(x) =$

   (c) $h(x) = \begin{cases} x-1, \text{ se } x \leq 3 \\ 3x-7, \text{ se } x > 3 \end{cases}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3} h(x) =$

Módulo 4: Propriedades dos limites

Tempo previsto: 50 minutos.

Objetivo 1: Compreender as propriedades dos limites.

Objetivo 2: Identificar e aplicar as propriedades necessárias para resolver cada situação-problema.

Material Utilizado: Quadro, pincel/giz, lápis ou caneta, borracha.

Procedimentos:

1- Apresente as propriedades dos limites e dê exemplos:

Sejam c e a constantes reais. Considerem as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cujos limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem. Então, valem as seguintes propriedades:

1. ***Propriedade da constante -*** *O limite de uma função constante é a própria constante:*

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

Exemplo: $\lim_{x\to 1}(-3) = -3.$

2. ***Propriedade da multiplicação por uma constante -*** *O limite de uma função multiplicada por uma constante é o limite da função multiplicado pela constante (desde que o limite da função exista):*

$$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Exemplo: $\lim_{x\to -1} 5 \cdot x = 5 \cdot \lim_{x\to -1} x.$

3. ***Propriedade da soma -*** *O limite de uma soma é a soma dos limites (desde que o limite de cada parcela exista):*

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemplo: $\lim_{x\to 0}[3x + 4] = \lim_{x\to 0} 3x + \lim_{x\to 0} 4.$

4. ***Propriedade da diferença -*** *O limite de uma diferença é a diferença dos limites (desde que o limite do minuendo e subtraendo exista):*

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemplo: $\lim_{x\to 2}[x^2 - 1] = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1.$

5. ***Propriedade do produto -*** *O limite de um produto é o produto dos limites (desde que o limite de cada fator exista):*

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemplo: $\lim_{x\to 1}[x\cdot(3x+1)] = \lim_{x\to 1} x\cdot \lim_{x\to 1}(3x+1)$.

6. ***Propriedade do quociente -*** *O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do numerador e denominador exista, e o limite do denominador seja diferente de 0):*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},\ \textit{se}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Exemplo: $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2x+1} = \dfrac{\lim_{x\to 0} 3x^2}{\lim_{x\to 0} 2x+1}$.

7. ***Propriedade da potência -*** *O limite de uma função potência $h(x) = [f(x)]^n$, em que n é um inteiro positivo, é igual ao limite de $f(x)$ elevado ao expoente n (desde que exista o limite de $f(x)$):*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n,\ \textit{sendo } n \textit{ um inteiro positivo qualquer.}$$

Exemplo: $\lim_{x\to 1}[x^2+2x+1]^6 = [\lim_{x\to 1}(x^2+2x+1)]^6$.

2- Solicite aos alunos que resolvam a seguinte situação:

Sabendo que $\lim_{x\to 3} x = 3$ e $f(x) = 7x^2 - 6x + 11$, e aplicando as propriedades de limites, calcule $\lim_{x\to 3} f(x)$.

3- Na sequência, peça à turma para determinar o valor de $f(3)$, considerando $f(x) = 7x^2 - 6x + 11$. Em seguida, pergunte o que podem observar em relação ao resultado do limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ e o valor de $f(3)$.

4- Conclua que esse fato acontece devido a propriedade da substituição direta. Explique-a e a enuncie.

Propriedade da substituição direta: *Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Propostas de atividades:

1. Considerando as funções f e g tais que $\lim_{x\to 5} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 7$, calcule:

   (a) $\lim_{x\to 5}[f(x) + g(x)] =$

(b) $\lim_{x\to 5}[f(x) - g(x)] =$

(c) $\lim_{x\to 5}[f(x) \cdot g(x)] =$

(d) $\lim_{x\to 5}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] =$

(e) $\lim_{x\to 5}[f(x) + f(x) + f(x)] =$

(f) $\lim_{x\to 5}[f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)] =$

(g) $\lim_{x\to 5}[f(x)]^5 =$

2. Utilizando as propriedades estudadas e os conceitos abordados sobre limites, calcule os limites abaixo, caso existam:

(a) $f(x) = 3x - 4; \lim_{x\to 3} f(x)$.

(b) $f(x) = -x^2 + x; \lim_{x\to -4} f(x)$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x < 1 \\ x + 3 \text{ se } x \geq 1 \text{ ; } \lim_{x\to 1} f(x) \end{cases}$.

(d) $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + 5x + 3); \lim_{x\to -1} f(x)$.

(e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}; \lim_{x\to -2} f(x)$.

(f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 5}\right)^2; \lim_{x\to 2} f(x)$.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{2} + 4 \text{ se } x > 2 \end{cases}$.

(a) Construa o gráfico de f.

(b) Calcule $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Atividades avaliativas referentes ao conceito de limite

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Avaliar o aprendizado dos alunos em relação aos conceitos aprendidos nos módulos da sequência didática sobre limite.

Objetivo 2: Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conteúdo de limite.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2$.

   (a) Calcule os valores de $f(x)$ e complete as tabelas:

x	-1,1	-1,01	-1,001	-1,0001
f(x)				

x	-0,9999	-0,999	-0,99	-0,9
f(x)				

   (b) Analisando as tabelas acima, é possível perceber que os valores de x se aproximam de um determinado número inteiro. Qual número é esse?

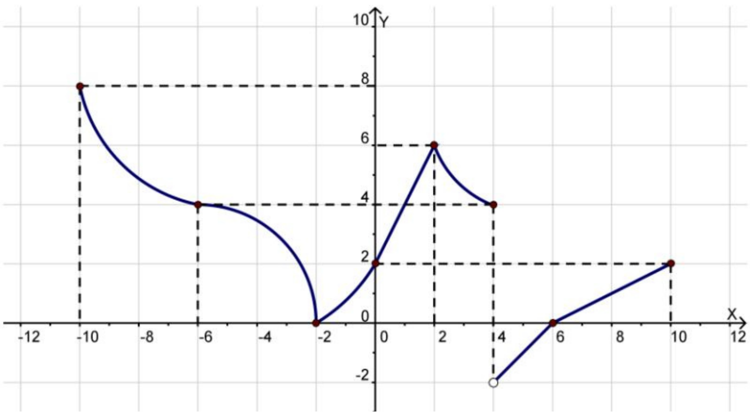
   (c) Considerando que o limite exite, determine

$$\lim_{x \to -1} -x^2.$$

   .

2. Observe o gráfico de uma função $f(x)$ presente na Figura 4.38.

Figura 4.38: Gráfico de função f



Fonte:
http://www.mat.ufpb.br/sergio/provas/calculo_i/Apostila_CDI_Limite_P_Elias.pdf

Classifique cada afirmação a seguir em VERDADEIRA ou FALSA. Justifique as alternativas falsas.

(a) ( ) $\lim_{x\to -10^+} f(x) = \lim_{x\to 10^-} f(x)$.

(b) ( ) $\lim_{x\to 2} f(x) = 6$.

(c) ( ) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$.

(d) ( ) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 4$.

(e) ( ) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 10} f(x)$.

(f) ( ) O limite $\lim_{x\to 4} f(x)$ não existe pois

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) \neq \lim_{x\to 4^-} f(x).$$

Justificativas:

3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & \text{se } x > 0 \\ -\dfrac{x+1}{2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique sua resposta.

4. Utilizando as propriedades estudadas, calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to 5} 10^6$.

(b) $\lim_{x\to -1} -x$.

(c) $\lim_{x\to -4} 3x^2 + 8x - 10$.

(d) $\lim_{x\to 3}(2x-1)x^2$.

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{-3x+1}{x-2}$.

4.4.2 Derivada

Atividade diagnóstica

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Analisar o conhecimento prévio dos alunos com relação ao conteúdo de funções e limites de uma função.

Objetivo 2: Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conteúdo de limites de uma função.

1. Classifique os limites abaixo em verdadeiro ou falso. Para as alternativas, falsas escreva a forma correta.
   (a) (   ) $\lim_{x\to 0} 3x = 3$.
   (b) (   ) $\lim_{x\to 0} 2x = 2\lim_{x\to 0} x$.
   (c) (   ) $\lim_{x\to -1} x^2 = -1$.
   (d) (   ) $\lim_{x\to 2} (5x-1) = 9$.
   (e) (   ) $\lim_{x\to 4} 2x^2 = 2^5$.
   (f) (   ) $\lim_{x\to 2} 3 = 6$.
   (g) (   ) $\lim_{x\to -1} 2x = -2x$.
2. Marque as alternativas corretas:
   (a) $\lim_{x\to 1^+} 2x^2 = 4$.
   (b) $\lim_{x\to -1^-} [x(-2x+3)] = -5$.
   (c) $\lim_{x\to 2^-} -5x^2 = \lim_{x\to 2^+} -5x^2$.
   (d) $\lim_{x\to -1^+} -x = \lim_{x\to 1^-} x$.
   (e) $\lim_{x\to 3^+} (x^2-6x+2) = \lim_{x\to -3^-} (x^2-6x+2)$.
   (f) $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{x^2-4}{x} = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{x^2-4}{x} = 3$.
3. Considere a função $f(x) = x^2 - 8x + 7$.
   (a) Calcule $f(-1), f(3), f(10)$.
   (b) Determine as coordenadas do vértice (x_v, y_v) do gráfico da função f.
   (c) Calcule as raízes da função f.
   (d) Faça um esboço do gráfico de f.
4. Considere os pontos $(1,2)$, $(4,8)$.
   (a) Determine o valor do coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos.
   (b) Determine a equação da reta que passa por esses dois pontos.
   (c) Faça um esboço do gráfico da reta cuja equação foi encontrada no item anterior.
   (d) A reta tem inclinação positiva ou negativa? Justifique.

Módulo 1: Taxa média de variação

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender o conceito de taxa média de variação de uma função em um intervalo.

Objetivo 2: Explorar o conceito de taxa média de variação de uma função em um intervalo relacionando-o com a inclinação de uma reta secante.

Material Utilizado: Computadores para o professor, calculadora, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Procedimentos:

Função afim

1- Inicie a aula com a seguinte situação:

Situação 1: *Em uma casa, a torneira do tanque da lavanderia apresentou defeito. Devido ao problema, a mesma está gerando um grande desperdício de água. O dono da casa, curioso, resolveu investigar qual era o real desperdício. Para isso, instalou uma mangueira na torneira e levou até um tambor vazio. Após 24h, o dono da casa concluiu que eram desperdiçados 20 litros de água.*

2- Solicite a turma que determine a quantidade de água desperdiçada pela torneira ao longo do tempo. Para isso, peça-os que completem a Tabela 4.18.

Complete a tabela abaixo com o volume de água desperdiçado ao longo do tempo pela torneira defeituosa.

Tabela 4.18: Quantidade de água desperdiçada pela torneira ao longo do tempo

Tempo (dias)	1	2	3	4	...	100	...
Quantidade de água desperdiçada (litros)					...		...

3- Solicite a turma para determinar uma expressão que representa o volume de água desperdiçado ao longo do tempo.

Seja Q a quantidade de água desperdiçada e t o tempo em dias. Determine uma função que representa o volume do desperdício ao longo do tempo.

4- Na sequência, explique e questione:

Chamamos de variação do tempo, e denotamos por Δt, a diferença entre o tempo inicial e o tempo final do intervalo de tempo considerado. Considerando o intervalo de tempo entre o dia 1 e o dia 4, qual é a variação de tempo desse intervalo?

5- Após a resposta, faça os devidos comentários e represente a conta no quadro. Em seguida, questione aos alunos sobre o que seria a variação da quantidade de água desperdiçada entre os dias 1 e 4. Em seguida, explique e pergunte:

Chamamos de variação da quantidade de água desperdiçada e denotamos por ΔQ, a diferença entre o volume inicial e o volume final desperdiçado no respectivo intervalo de tempo considerado. Considerando o intervalo de tempo entre o dia 1 e o dia 4, qual é a variação do volume de água desperdiçada nesse intervalo?

6- Faça os devidos comentários e represente a conta no quadro. Na sequência peça aos alunos para calcularem a razão entre a variação quantidade de água desperdiçada no intervalo entre o 1º e o 4º dia e a variação do tempo, ou seja:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = ?$$

7- Explique aos alunos que a razão $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ calculada é chamada de taxa média da variação (TMV) da função $Q(t)$ no intervalo de tempo $1 \leq t \leq 4$ e é simbolizada por

$$TMV[1,4] = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{80-20}{4-1} = \frac{60}{3} = 20.$$

8- Peça aos alunos para calcularem as $TMV's$ presentes na Tabela 4.19. Na sequência corrija, as respostas.

Tabela 4.19: Valores das TMV's em intervalos de t

Intervalo de t	**TMV**
$[1,4]$	20
$[2,3]$	
$[1,2]$	
$[2,4]$	
$[1,3]$	
$[3,4]$	

9- Questione aos alunos o que eles observam em relação aos valores encontrados nas $TMV's$ da função $Q(t)$. (Espera-se que eles identifiquem que os valores são iguais.)

10- Questione a turma o que eles observam a respeito dos valores das $TMV's$ em qualquer intervalo de tempo e a expressão que representa a função $Q(t)$ encontrada no item 3. (Espera-se que os alunos identifiquem que o coeficiente angular da função $Q(t)$ possui o mesmo valor que as $TMV's$.)

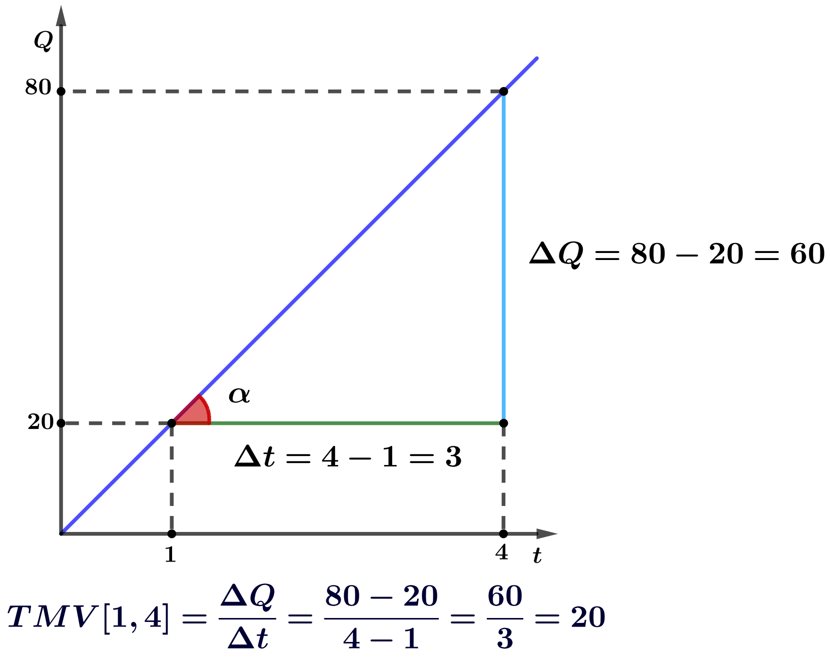
11- Conclua que:

"Nas funções afins, as $TMV's$ em qualquer intervalo de x possuem os mesmos valores, ou seja, o resultado é uma constante. Além disso, essa constante é o coeficiente angular da função:"

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow TMV = a.$$

12- Apresente aos alunos o gráfico presente na Figura 4.39, que auxilia na interpretação geométrica da TMV no intervalo $[1, 4]$ da função $Q(t) = 20t$.

Figura 4.39: Gráfico da função $Q(t) = 20t$



Fonte: O Autor

Questione aos alunos qual elemento geométrico está destacado nesse gráfico. (Espera-se que eles identifiquem o triângulo retângulo formado pelos catetos Δt e ΔQ.)

13- Lembre aos alunos da seguinte relação trigonométrica dos triângulos retângulos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{Cateto adjacente a } \alpha}.$$

13- Solicite aos alunos para determinarem o valor da $\operatorname{tg} \alpha$ presente no gráfico Figura 4.39.

14- Após os cálculos, explique a eles:

Observe que os segmentos Δt e ΔQ formam com a função um triângulo retângulo, no qual obtemos a relação trigonométrica

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = TMV[1, 4] = 20.$$

" Em uma função afim, a TMV em um intervalo qualquer é igual a tangente do ângulo de inclinação da reta que representa o gráfico dessa função."

15- Peça aos alunos para que, utilizando a calculadora, determine o ângulo α da Figura 4.39. Após o cálculo, apresente o valor exato do ângulo.

Generalização: Taxa média de variação de uma função em um intervalo

16- Defina aos alunos o conceito de taxa média de variação de uma função em um intervalo:

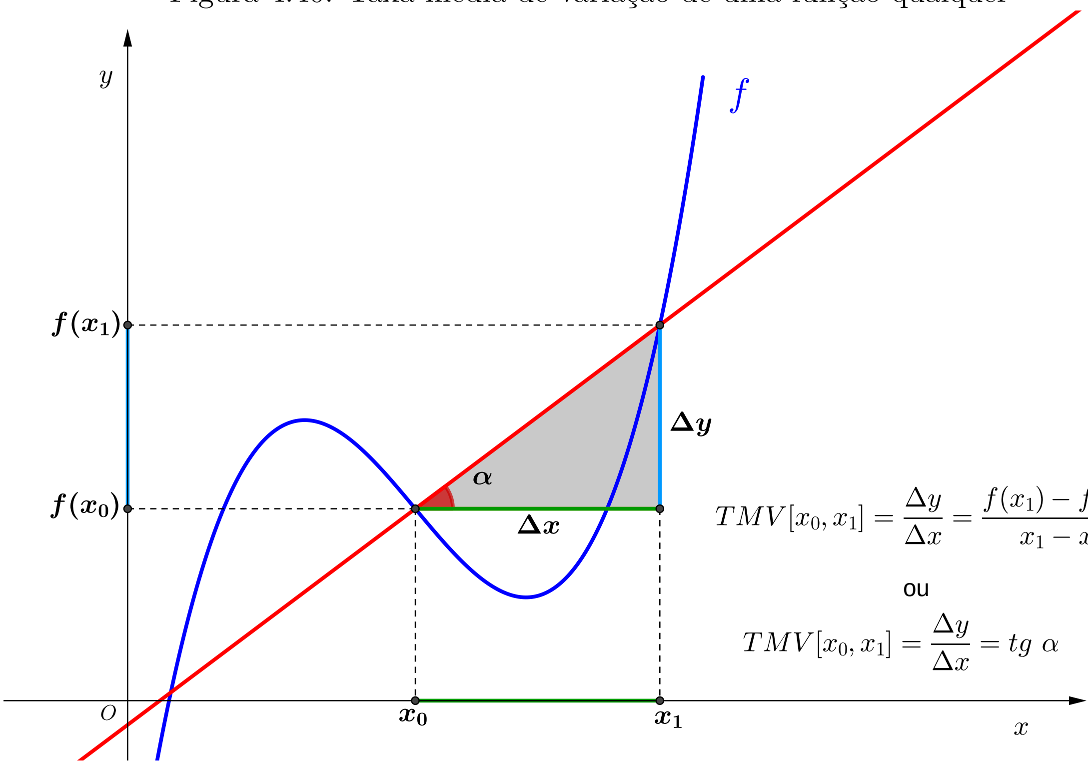
A taxa média de variação de uma função f qualquer, em um intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ contido no domínio da função, é definida por:

$$TMV[x_0, x_1] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

17- Explique aos alunos a interpretação geométrica das $TMV's$ de funções:

A taxa média de variação de uma função coincide com o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, ou seja, é igual à tangente do ângulo de inclinação da reta secante que passa por estes pontos, conforme indicado na Figura 4.40.

Figura 4.40: Taxa média de variação de uma função qualquer



Fonte: O Autor

Propostas de atividades:

1. Considere a função e o intervalo dados nos itens abaixo. Calcule a TMV da função no respectivo intervalo:
   (a) $f(x) = -3x + 4$; $[-1, 9]$.
   (b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $[0, 4]$.
   (c) $f(x) = -x^3 - 2x - 1$; $[-6, -1]$.

2. Os estudantes de uma escola resolveram fazer um passeio a um parque aquático. O valor que cada estudante deve desembolsar para realizar o passeio é $R\$80,00$ fixos, referente a passagem do ônibus, e $R\$70,00$ a diária nesse parque aquático.
   (a) Determine o valor a ser pago pelo estudante, se ele ficar hospedado no parque em:
      - 3 dias
      - 4 dias
      - 5 dias
      - 6 dias

   (b) Expresse em símbolos matemáticos uma função $C(x)$, que representa o custo total a ser desembolsado pelo aluno, se ele ficar hospedado x dias neste parque.
   (c) Determine a TMV do custo do passeio, se o aluno ficar hospedado entre 3 e 6 dias no parque.

3. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. A taxa média de variação da temperatura durante a primeira hora é maior ou menor que a taxa de variação entre 4 e 5 horas dentro da geladeira?

Módulo 2: A TMV de uma função e a inclinação da reta secante

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender a relação existente entre o sinal da taxa média de variação de uma função em um intervalo e a inclinação da reta secante que passa sobre os extremos desse intervalo.

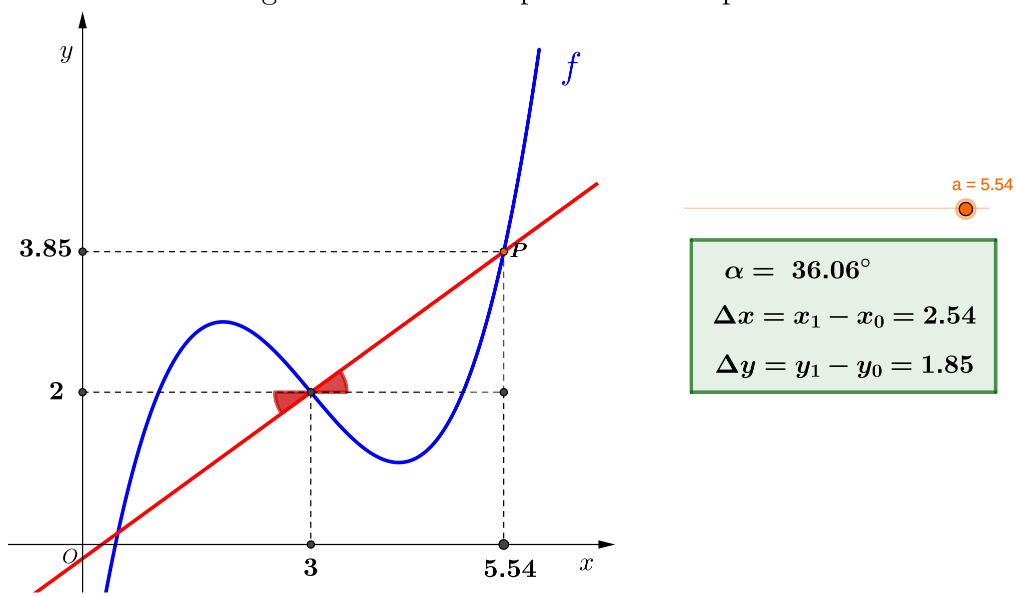
Material Utilizado: Computadores para o professor e para os alunos com o *software* GeoGebra instalado, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Observação: Os alunos irão abrir o arquivo 3 disponibilizado pelo professor para o desenvolvimento da aula.

Procedimentos:

1- Projete o arquivo 3 (https://www.geogebra.org/m/nyufv27d). Peça aos alunos que abram esse arquivo em seus computadores e observem o gráfico presente nele.

Figura 4.41: Gráfico presente no arquivo 3



Fonte: O Autor

2- Relembre que Δx e Δy são as variações de x e y, respectivamente, e α é o ângulo de inclinação da reta secante ao gráfico da função f.

3- Solicite que os alunos desloquem o controle deslizante a e observem o comportamento do gráfico.

4- Peça aos alunos que movimentem o ponto P ou posicionem o controle deslizante de forma que α seja igual a 45° e que a abscissa de P seja maior que 3. Questione: No que diz respeito a classificação de ângulos, o que eles podem afirmar sobre o ângulo de inclinação dessa reta nesse momento?

5- Solicite a turma que calculem a taxa média de variação da função f no intervalo de extremos pertencentes a reta secante cujo ângulo de inclinação é 45°.

6- Após todos registrarem as respostas, questione aos alunos quanto é a tangente de 45°. Conclua que a taxa média de variação de uma função em um intervalo é igual a tangente do ângulo de inclinação da reta secante que passa pelos extremos desse intervalo.

7- Peça agora os alunos para movimentarem o ponto P ou posicionarem o controle deslizante de forma que α seja igual a 150° e que a abscissa de P seja menor que 3. Questione:

No que diz respeito a classificação de ângulos, o que eles podem afirmar sobre o ângulo de inclinação dessa reta nesse outro momento?

8- Solicite a turma que calculem a taxa média de variação da função f no intervalo de extremos pertencentes a reta secante cujo ângulo de inclinação é 150º.

9- Após todos registrarem as respostas, questione aos alunos quanto é a tangente de 150º. Conclua que a taxa média de variação de uma função em um intervalo é igual a tangente do ângulo de inclinação da reta secante que passa pelos extremos desse intervalo.

10- Instruam os alunos escolher 3 ângulos agudos e 3 ângulos obtusos no arquivo 3. Na sequência, peça que preencham a Tabela 4.20.

Tabela 4.20: Ângulo, tangente, intervalo de x, variação de x e y e TMV

Ângulo $\alpha < 90^{o}$	$\operatorname{tg}\alpha$	Intervalo de x	Δx	Δy	$TMV[x_0, x_1]$
Ângulo $\alpha > 90^{o}$	$\operatorname{tg}\alpha$	Intervalo de x	Δx	Δy	$TMV[x_0, x_1]$

11- Questione a eles o que observam com relação ao sinal da TMV das funções quando o ângulo é agudo.

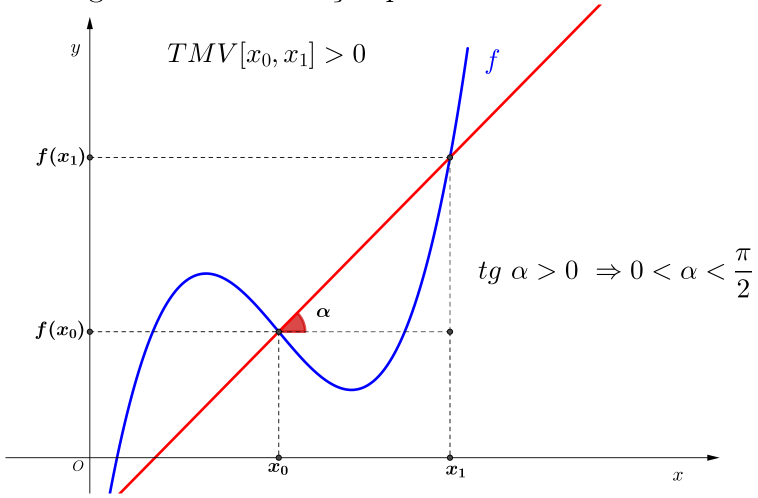
12- Em seguida, pergunte o que observam com relação ao sinal da TMV das funções quando o ângulo é obtuso.

13- Por fim, apresente as possibilidades de inclinação da reta secante à função conforme o sinal da TMV.

Como vimos anteriormente, a taxa média de variação de uma função f no intervalo $[x_0, x_1]$ é igual a $tg\ \alpha$, onde α é o ângulo de inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Nesse sentido, a partir do cálculo da TMV, podemos saber a respeito da inclinação dessa reta. São três possibilidades de inclinação:

1. Inclinação Positiva: ocorre quando $TMV > 0$.

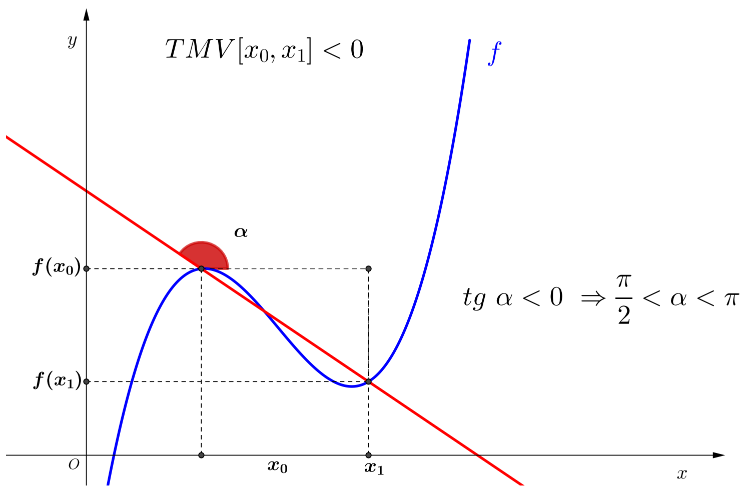
Figura 4.42: Inclinação positiva da reta secante



Fonte: O Autor

2. Inclinação Negativa: ocorre quando $TMV < 0$.

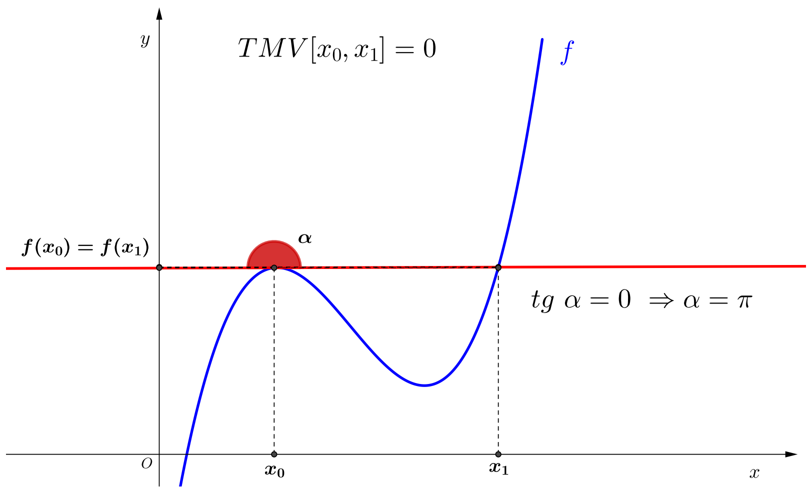
Figura 4.43: Inclinação negativa da reta secante



Fonte: O Autor

3. Inclinação Nula: ocorre quando $TMV = 0$.

Figura 4.44: Inclinação nula da reta secante



Fonte: O Autor

Propostas de atividades:

1. A velocidade média de um objeto em certo intervalo de tempo é obtida por meio da taxa média de variação do deslocamento do objeto em tal intervalo, ou seja,

$$\text{Velocidade Média} \ = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

em que Δs é a variação do deslocamento e Δt a variação do tempo. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta cujo deslocamento (em metros) é dado pela equação $s = t^2 - 6t + 10$, onde t é medido em segundos.

   (a) Encontre as velocidades médias (TMV) nos seguintes intervalos de tempo:
   - $[0, 2]$
   - $[4, 5]$
   - $[0, 10]$
   - $[-1, -6]$

   (b) Faça um esboço do gráfico de s em função de t e construa as retas secantes dos intervalos do item (a).

   (c) Em quais intervalos as retas secantes ao gráfico da função s têm inclinação positiva? Em quais intervalos as retas secantes possuem inclinação negativa?

Módulo 3: Taxa instantânea de variação de uma função em um ponto

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender o conceito de taxa instantânea de variação de uma função em um ponto.

Objetivo 2: Aplicar o conceito de taxa instantânea de variação de uma função em um ponto em situações-problema.

Material Utilizado: Computador com projetor para o professor, lousa, pincel, apagador, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Procedimentos:

1- Inicie a aula com a seguinte situação-problema: Um carro parte da cidade A em direção a cidade C, que está localizada a $360km$ de A. A função a seguir representa a distância percorrida s, medida em km, em função do tempo t, dado em horas: $s(t) = 10t^2 + 50t$.

2- Solicite aos alunos que calculem as velocidades médias nos intervalos de tempo dados nas Tabelas 4.21 e 4.22.

Tabela 4.21: Velocidade média do carro nos intervalos $[2, t]$

Intervalo de t (h)	**Velocidade média (km/h)**
$[2; 2.1]$	
$[2; 2.01]$	
$[2; 2.001]$	
$[2; 2.0001]$	
$[2; 2.00001]$	
$[2; 2.00000001]$	

Tabela 4.22: Velocidade média do carro nos intervalos de $[t, 2]$

Intervalo de t (h)	**Velocidade média (km/h)**
$[1.9; 2]$	
$[1.99; 2]$	
$[1.999; 2]$	
$[1.9999; 2]$	
$[1.99999; 2]$	
$[1.999999999; 2]$	

3- Questione aos alunos o que eles observam em relação a velocidade média a medida que a amplitude do intervalo é reduzida.

4- Explique aos alunos: A medida que consideramos intervalos de amplitude cada vez menor, a velocidade média se aproxima da velocidade naquele instante de tempo, conhecida também como velocidade instantânea. No caso da situação-problema dessa aula, consideramos intervalos cada vez menores de forma que se aproximava do instante 2. Dessa forma, quanto menor o tamanho do intervalo, mais próxima velocidade média fica da velocidade instantânea no tempo 2.

5- Conclua que: No exercício anterior, para o cálculo da velocidade média do carro em determinado intervalo de tempo, foi calculado a taxa média de variação da função que determina distância percorrida do carro em um intervalo de tempo. A medida que esse intervalo se torna cada vez menor, essa taxa média de variação fica cada vez mais próxima de uma taxa chamada "taxa de instantânea de variação"e simbolizada por TIV, que no contexto é justamente a velocidade instantânea.

6- Solicite aos alunos que resolvam o seguinte problema: Utilizando as Tabelas 4.23 e 4.24, estime a taxa instantânea de variação da função $f(x) = 2x^2 - 1$ quando $x_0 = 1$.

Tabela 4.23: Aproximação da taxa instantânea de variação da função $f(x) = 2x^2 - 1$ por meio da taxa média de variação

Intervalo $[x_0; x]$	$TMV_f[x_0; x]$
$[1; 1.1]$	
$[1; 1.01]$	
$[1; 1.001]$	
$[1; 1.0001]$	
$[1; 1.00001]$	
$[1; 1.000000001]$	

Tabela 4.24: Aproximação da taxa instantânea de variação da função $f(x) = 2x^2 - 1$ por meio da taxa média de variação

Intervalo $[x; x_0]$	$TMV_f[x; x_0]$
$[0.9; 1]$	
$[0.99; 1]$	
$[0.999; 1]$	
$[0.9999; 1]$	
$[0.99999; 1]$	
$[0.000000009; 1]$	

7- Após as respostas, explique que, para determinar a estimativa da taxa de variação instantânea da função f para $x_0 = 1$, eles calcularam tanto a $TMV_f[1, x]$ quanto a $TMV_f[x, 1]$, de modo que quanto maior a proximidade de 1 e x, mais precisa é a estimativa. Nesse caso, podemos expressar que

$$TIV_f[1] = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

8- Defina taxa média de variação:

A taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto x_0, denotada por $TIV_f[x_0]$, é dada por

$$TIV_f[x_0] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se o limite existir.

9- Solicite aos alunos para determinarem, utilizando a definição, a taxa instantânea de variação da função $f(x) = 2x^2 - 1$ quando $x_0 = 1$.

Propostas de atividades:

1. Determine a taxa instantânea de variação das seguintes funções nos pontos indicados:
   (a) $f(x) = 4x - 3$, em $x = 2$.
   (b) $f(x) = x^2 + 3x - 5$, em $x = 0$.
   (c) $f(x) = x^3 + 2x - 1$, em $x = 1$.
   (d) $f(x) = 10x^2 + 5x$, em $x = -1$.
   (e) $f(x) = 5x^2 - 4x$, em $x = 2$.
   (f) $f(x) = 4 - 2x$, em $x = 1$.
2. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 6t + 10$, onde t é medido em segundos. Qual é a velocidade instantânea no tempo $t = 10$?
3. Uma colônia de um determinado tipo de bactéria possui inicialmente uma população de 100000 bactérias. Depois de t horas, a colônia terá uma população $P(t)$, dada pela fórmula:

   $$P(t) = 10000 + 6500t + 10000t^2.$$

   Responda:

   (a) Determine o número de bactérias presentes depois de 12 horas.
   (b) Encontre a lei que dá a taxa de variação da população P em relação ao tempo t.
   (c) Determine a taxa de variação [instantânea] da população quando t = 12 horas.

Módulo 4: A TIV de uma função em um ponto e a inclinação da reta tangente

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender a relação entre a TIV de uma função em um ponto e a inclinação da reta tangente.

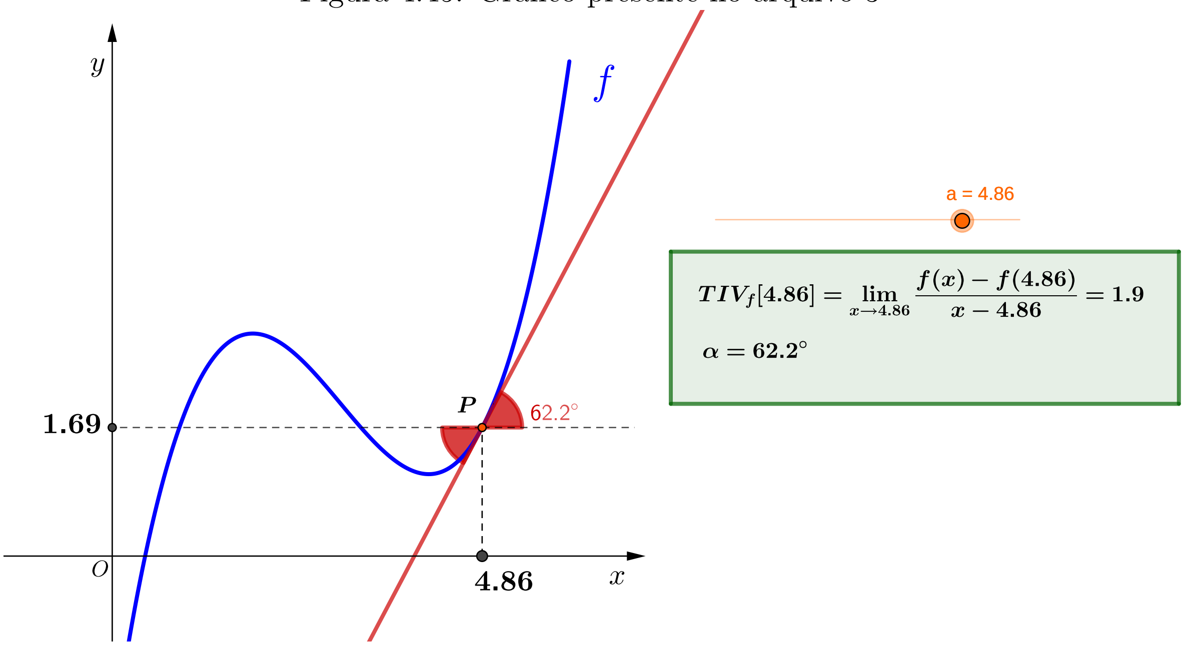
Material Utilizado: Computadores para o professor e para os alunos com o *software* GeoGebra instalado, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Observação: Os alunos irão abrir o arquivo 4 disponibilizado pelo professor para o desenvolvimento da aula.

Procedimentos:

1- Projete o arquivo 4 (https://www.geogebra.org/m/svaeb4dd). Peça aos alunos que abram esse arquivo em seus computadores e observem o gráfico presente nele.

Figura 4.45: Gráfico presente no arquivo 3



Fonte: O Autor

2- Instrua os alunos a moverem o ponto P ou o controle deslizante a para descobrirem o valor do ângulo α de inclinação da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto x_0, as taxas instantâneas de variação nesses pontos e o coeficiente angular da reta tangente. Para isso, solicite que preencham a Tabela 4.25.

Tabela 4.25: Ângulo e coeficiente angular da reta tangente

x_0	Ângulo α	$TIV_f[x_0]$	Coeficiente angular da tangente
6.00			
5.50			
5.20			
4.70			
4.30			
4.15			
3.80			
3.30			
2.80			
2.30			
1.85			
1.40			
1.00			

3- Peça aos alunos para que respondam as perguntas:

a) Qual relação existe entre a taxa instantânea de variação de uma função em um ponto e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto correspondente?

b) Quando os ângulos de inclinação da tangente são agudos, ou seja, ângulos menores que 90° e maiores que 0°, o que podemos afirmar a respeito da TIV?

c) Quando os ângulos da de inclinação da tangente são obtusos, ou seja, ângulos maiores que 90° e menores que 180°, o que podemos afirmar a respeito da TIV?

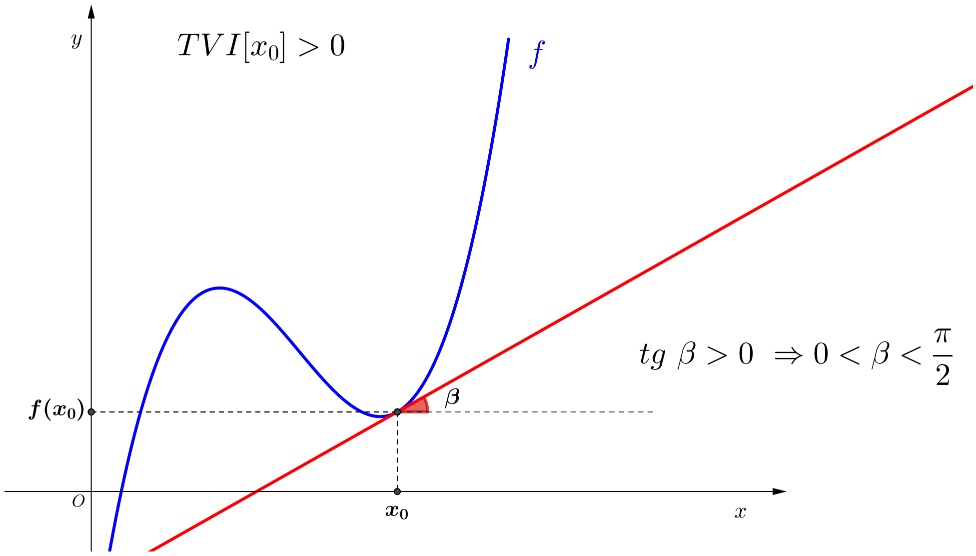
d) E quando o ângulo de inclinação é 180° ou nulo, o que acontece com a TIV?

4- Comente as respostas das questões acima. Em seguida, apresente aos alunos a seguinte conclusão:

A partir da taxa instantânea de variação de uma função em um ponto, é possível determinar a inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto, pois o resultado desta taxa é, justamente, o coeficiente angular dessa reta. Nesse sentido, observando o valor da TIV de uma função em um ponto, existem três possibilidades de inclinação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, que são:

1. Inclinação Positiva: ocorre quando $TIV > 0$.

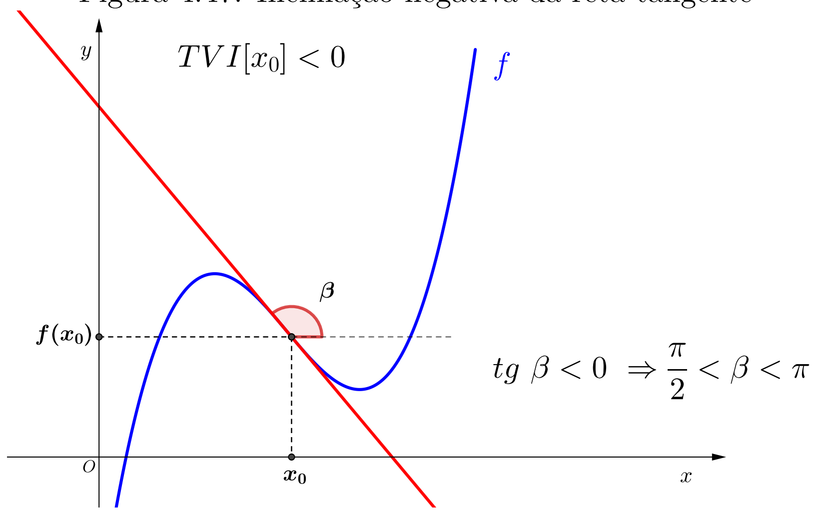
Figura 4.46: Inclinação positiva da reta tangente



Fonte: O Autor

2. Inclinação Negativa: ocorre quando $TIV < 0$.

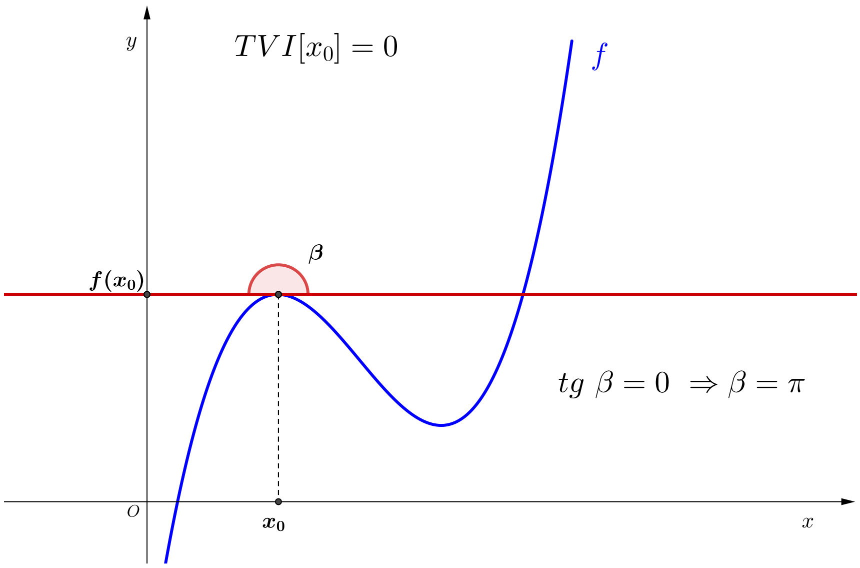
Figura 4.47: Inclinação negativa da reta tangente



Fonte: O Autor

3. Inclinação Nula: ocorre quando $TIV = 0$.

Figura 4.48: Inclinação nula da reta tangente



Fonte: O Autor

5- Após explicar o tópico anterior, finalize o módulo com a seguinte atividade:

Determine a equação da reta tangente de $f(x) = x^2 - 3x - 2$ no ponto $(-1, 0)$. Essa reta tem inclinação positiva, negativa ou nula?

Propostas de atividades:

1. Determine a equação da reta tangente de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(0, 1)$. Essa reta tem inclinação positiva, negativa ou nula?

2. O preço de um determinado carro 0km é R$ 60.000,00. Após 4 anos de uso seu valor de mercado é de R$ 40.000,00. Admitindo que ele sofra depreciação linear com o tempo, encontre:

   (a) A função que relaciona o preço $P(t)$ do carro após t anos de funcionamento.

   (b) A taxa de variação instantânea no 6º ano após a compra.

Módulo 5: A derivada

Tempo previsto: 1hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender o conceito geométrico e algébrico de derivada de uma função em um ponto.

Material Utilizado: Computadores para o professor e para os alunos com o *software* GeoGebra instalado, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Observação: Os alunos irão abrir o arquivo 5 disponibilizado pelo professor para o desenvolvimento da aula.

Procedimentos:

1- Inicie a aula discutindo e explicando aos alunos o texto abaixo:

Neste tópico estudaremos o conceito de derivada. Esse é um dos principais conceitos de Cálculo. Além disso, a derivada tem considerável relevância, não só dentro das Ciências Exatas, mas também em várias outras áreas como as Ciências Físicas e Biológicas, as Ciências Econômicas e Espaciais. Isso decorre das várias aplicações desse conceito em cada área.

Mas afinal, o que é derivada? A derivada de uma função em um ponto é justamente a taxa instantânea de variação dessa função naquele ponto.

Denotada por $f'(x_0)$, a derivada de uma função f em um número real x_0 é definida algebricamente por

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso o limite exista.

Considerando $x = x_0 + h$, podemos reescrever a expressão da definição como

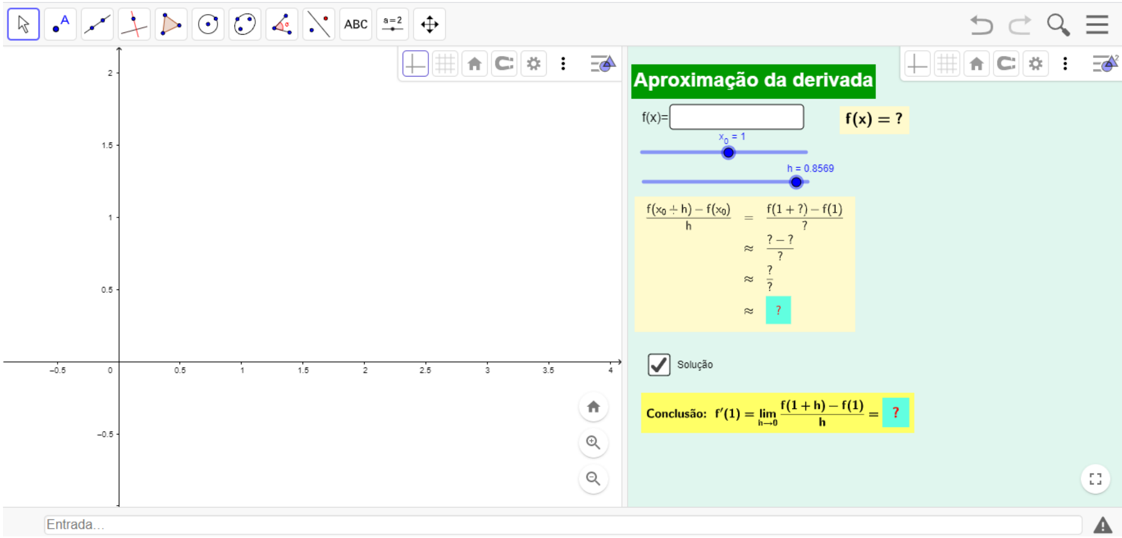
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se o limite existir.

Mas qual significado dessas expressões? É o que veremos a seguir.

2- Projete o arquivo 5 (https://www.geogebra.org/m/rrmsxxyt). Peça aos alunos que abram esse arquivo em seus computadores.

Figura 4.49: Interface do arquivo 5



Fonte: O Autor

3- Solicite aos alunos resolvam a seguinte atividade: Digite no campo $f(x)$, presente no arquivo 5, a expressão x^2 e posicione o controle deslizante de x_0 no número 1.

a) Preencha as Tabelas 4.26 e 4.27, com valores da expressão $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Tabela 4.26: Valores $x > 0$

$f(x) = x^2$; $x_0 = 1$	
h	$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$
0.5	
0.4	
0.3	
0.2	
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	

Tabela 4.27: Valores $x < 0$

$f(x) = x^2$; $x_0 = 1$	
h	$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$
-0.5	
-0.4	
- 0.3	
-0.2	
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	

Para isso, mova o controle deslizante h para a posição indicada, determinando os valores da expressão $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Caso seja necessário, clique no ponto h e utilize as setas esquerda/direita do teclado para mover este ponto para o valor desejado.

b) O que você observa em relação aos valores de h? Eles se aproximam de algum número? Se sim, qual?

c) A medida que h se aproxima do número dito na letra b, o que acontece com o valor de $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$?

d) Aplicando o limite com $h \to 0$ na expressão $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$, encontramos a derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$. Clique no ícone solução na interface do arquivo 5. Qual é a derivada da função f no ponto $x_0 = 1$?

e) A reta tracejada verde representa a reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(1+h, f(1+h))$, enquanto que a reta de cor vermelha representa a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$. À medida que fazemos h se aproximar de 0 por valores maiores que 0, o que você observa em relação às duas retas?

f) E quando h se aproxima de 0 por valores menores que 0, o que você observa em relação às duas retas?

g) Observe o gráfico da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x_0 = 1$. Qual relação existe entre a derivada de f e a reta tangente?

4- Após as respostas, corrija as questões e explique aos alunos que:

A derivada de uma função em um ponto nada mais é que do que a taxa instantânea de variação da função naquele ponto. Além disso, o valor numérico da derivada em um ponto representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto calculado.

Do ponto de vista geométrico, a interpretação é a mesma vista na taxa instantânea de variação. Quando h se aproxima de 0, é observado que o ângulo de inclinação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(1+h, f(1+h))$ (reta tracejada verde) tende ao ângulo de inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$. Isso implica que o coeficiente angular da reta secante se aproxima do coeficiente angular da reta tangente à medida que $h \to 0$.

5- Solicite aos alunos que pensem e resolvam a situação abaixo:

Determine a derivada de $f(x) = x^2$ em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer.

6- Após a solução, explique aos alunos que o valor numérico da derivada da função $f(x) = x^2$ em um ponto x_0 qualquer é igual ao dobro de x_0. Esse resultado é extremamente útil no cálculo de derivadas no ponto de funções quadráticas.

7- Inicie a seguinte situação:

Uma função real de uma variável real é dita constante quando sua lei de formação é $f(x) = c$, em que c é um número real qualquer.

a) Utilizando o arquivo 5, determine o valor das derivadas no ponto $x_0 = -1$ das funções constantes, preenchendo a Tabela 4.28:

b) O que você observa a respeito da derivada de funções constantes?

Tabela 4.28: Derivada de funções constantes no ponto $x_0 = -1$

$f(x)$	$f'(x_0)$
0	
-5	
$\frac{3}{4}$	
1000000	
-0,00001	
25	
$\sqrt{13}$	
3^{10}	

c) Utilizando a definição de derivada, determine a derivada da função constante $f(x) = c$ em um ponto x_0 qualquer.

8- Discuta com a turma as questões. Questione as respostas obtidas e explique aos alunos que a derivada de uma função constante em ponto qualquer do domínio é igual a 0.

9- Inicie outra situação:

Uma função real de uma variável real é dita função afim quando sua lei de formação é $f(x) = ax + b$, em que a, b são números reais e $a \neq 0$.

a) Utilizando o arquivo 5, determine o valor das derivadas no ponto $x_0 = 3$ das funções afins, preenchendo a Tabela 4.29:

Tabela 4.29: Derivada de funções afins no ponto $x_0 = 3$

$f(x)$	$f'(x_0)$
$3x$	
$x + 2$	
$10x + 1$	
$-0,75x - 1$	
$\frac{2}{3}x - 2$	
$-1000x + \sqrt{3}$	

b) O que você observa a respeito da derivada de funções afins?

c) Utilizando a definição de derivada, determine a derivada da função afim $f(x) = ax + b$ em um ponto x_0 qualquer.

9- Discuta com a turma as questões. Questione as respostas obtidas e explique que nas funções afins, a derivada em um ponto é sempre igual ao coeficiente angular (que também coincide com a TMV em qualquer intervalo do domínio e com a TVI em um valor qualquer de x no domínio).

10- Finalize a sequência, solicitando que os alunos resolvam o seguinte exercício:

Considere a função $f(x) = x^2 - 4$. A derivada dessa função em um ponto é a diferença das derivadas das funções $g(x) = x^2$ e $h(x) = 4$ nesse mesmo ponto.

a) Construa um esboço do gráfico dessa função.

b) Determine o coeficiente angular da reta tangente à f no ponto $x_0 = 3$.

c) Determine a equação da reta tangente à f no ponto $x_0 = 3$.

d) Faça um esboço do gráfico de f juntamente com a reta tangente ao ponto $x_0 = 3$.

Propostas de atividades:

1. Determine a derivada das seguintes funções no ponto indicado utilizando a definição:

   (a) $f(x) = 6$; $x_0 = 3$.

   (b) $f(x) = -4x + 5$; $x_0 = 2$.

   (c) $f(x) = 8x$; $x_0 = -1$.

   (d) $f(x) = -x^2$; $x_0 = 1$.

2. Considere a função $f(x) = -x^2 + 1$. A derivada dessa função em um ponto é a diferença das derivadas das funções $g(x) = -x^2$ e $h(x) = 1$ nesse mesmo ponto.

   a) Construa um esboço do gráfico dessa função.

   b) Determine o coeficiente angular da reta tangente à f no ponto $x_0 = -1$.

   c) Determine a equação da reta tangente à f no ponto $x_0 = -1$.

   d) Faça um esboço do gráfico de f juntamente com a reta tangente ao ponto $x_0 = -1$.

Atividades avaliativas referentes ao conceito de derivada

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Avaliar o aprendizado dos alunos em relação aos conceitos aprendidos nos módulos da sequência didática sobre derivadas.

Objetivo 2: Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conteúdo sobre derivadas.

1. A concentração C (em miligramas por mililitro) de uma substância na corrente sanguínea de um paciente é monitorada a intervalos de 10 minutos durante 2 horas, com t dado em minutos, conforme a tabela abaixo.

Tabela 4.30: Quantidade de substância na corrente sanguínea ao longo do tempo

t (min)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
C (mg/ml)	0	3	16	38	54	75	90	108	111	115	115	108	65

Determine:

(a) Taxa média de variação no intervalo de tempo $[0, 10]$.

(b) Taxa média de variação no intervalo de tempo $[0, 20]$.

(c) Taxa média de variação no intervalo de tempo $[60, 110]$.

2. Um míssil é lançado ao espaço de forma que sua distância (em km) do solo ao longo do tempo(em $horas$) é dada pela fórmula $s(t) = -5t^2 + 100t$. Determine:

(a) A velocidade instantânea do míssil no tempo $t = 10$.

(b) A equação da reta tangente ao gráfico da função que determina a distância no ponto $(10, f(10))$.

(c) O esboço do gráfico da distância percorrida pelo míssil desde que saiu do solo até o momento que retornou ao solo e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(10, f(10))$.

3. Considere a função $f(x) = -x^2 + 1$. Responda:

(a) Qual derivada de $f(x)$ no ponto $x_0 = 3$?

(b) Qual a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x_0 = 3$?

(c) Seja α o ângulo da reta tangente referenciada na letra (b). Qual o valor da $\operatorname{tg} \alpha$?

4.4.3 Integral

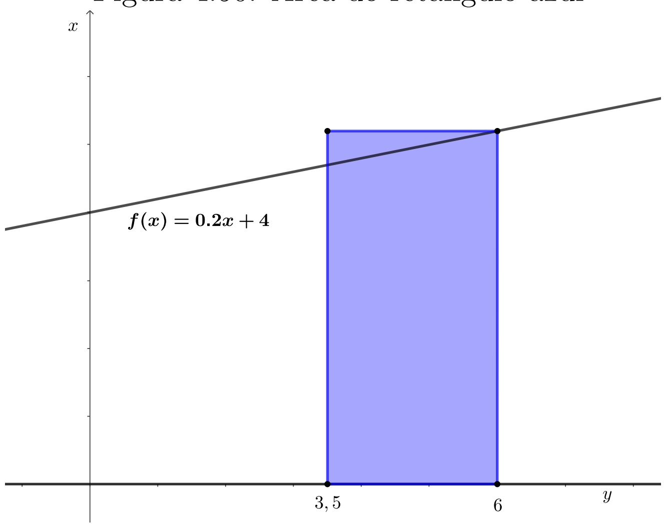
Atividade diagnóstica

Tempo previsto: 50 minutos.

Objetivo 1: Analisar o conhecimento prévio dos alunos e possíveis dificuldades com relação ao conteúdo de áreas de figuras planas, funções e limites de funções.

1. Determine a área do retângulo da Figura 4.50:

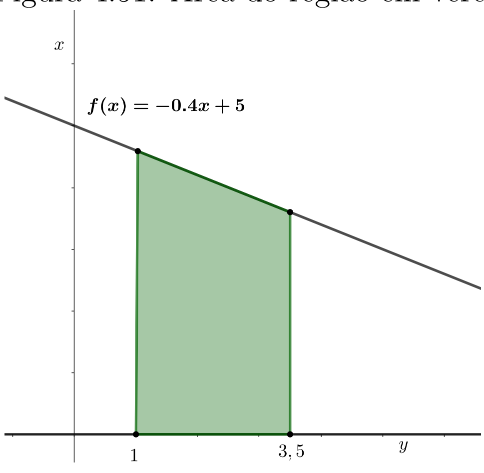
Figura 4.50: Área do retângulo azul



Fonte: O Autor

2. Determine a área da região demarcada presente na Figura 4.51.

Figura 4.51: Área do região em verde



Fonte: O Autor

3. Considere a função $f(x) = x^2/2$.

   (a) Calcule os valores de $f(x)$ e complete as tabelas:

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
f(x)				

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)				

   (b) Os valores de x se aproximam de um determinado número inteiro. Qual número é esse?

   (c) O que podemos dizer a respeito do limite de $f(x)$ quando x se aproxima do número inteiro que você descobriu na letra (b)?

Módulo: Noção intuitiva de integral

Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Compreender a ideia intuitiva de integral.

Objetivo 2: Aplicar o conceito de integral em situações problemas.

Material Utilizado: Computadores para o professor e para os alunos com o *software* GeoGebra instalado, projetor, lápis ou caneta, borracha, calculadora.

Observação: Os alunos irão abrir o arquivo 6 disponibilizado pelo professor para o desenvolvimento da aula.

Procedimentos:

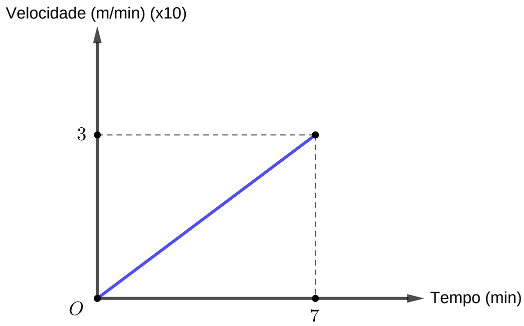
1- Inicie a aula com a seguinte situação problema: As aranhas são animais de 8 patas e que uma quantidade considerável de espécies tecem teias. A maior parte se alimenta de pequenos insetos, contudo existem espécies que se alimentam de pequenos répteis e mamíferos.

Figura 4.52: Aranha-lobo mordendo de um sapo

Fonte: https://www.bbc.com/portuguese/vert-earth-39345846

Suponha que o gráfico da Figura 4.53 representa a velocidade de uma determinada espécie de aranha.

Figura 4.53: Velocidade da aranha ao longo do tempo



Fonte: O Autor

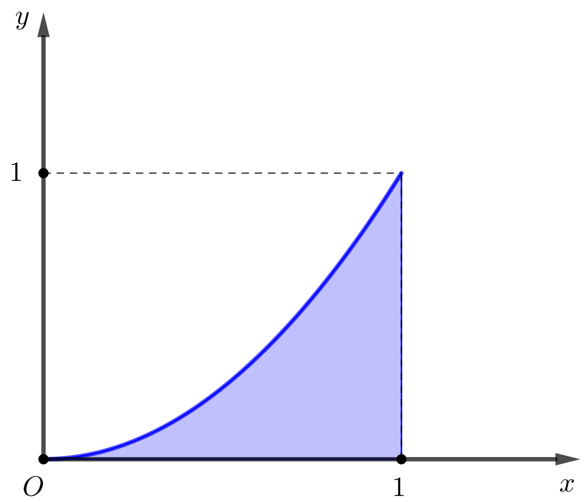
Sabendo que a distância percorrida pela aranha pode ser determinada pela área do triângulo com vértives em (0,0), (7,0) e (7,3), determine essa distância.

2- Discuta com os alunos a questão. Comente que, para determinar a distância que a aranha percorreu, foi utilizada a conhecida expressão que determina a área do triângulo. No entanto, existem situações em que não é tão simples determinar a área.

3- Proponha outra situação-problema para os alunos e questione possibilidades para determinar uma solução.

A Figura 4.54 representa o gráfico da função $f(x) = x^2$. Determine uma estimativa para área da região R destacada.

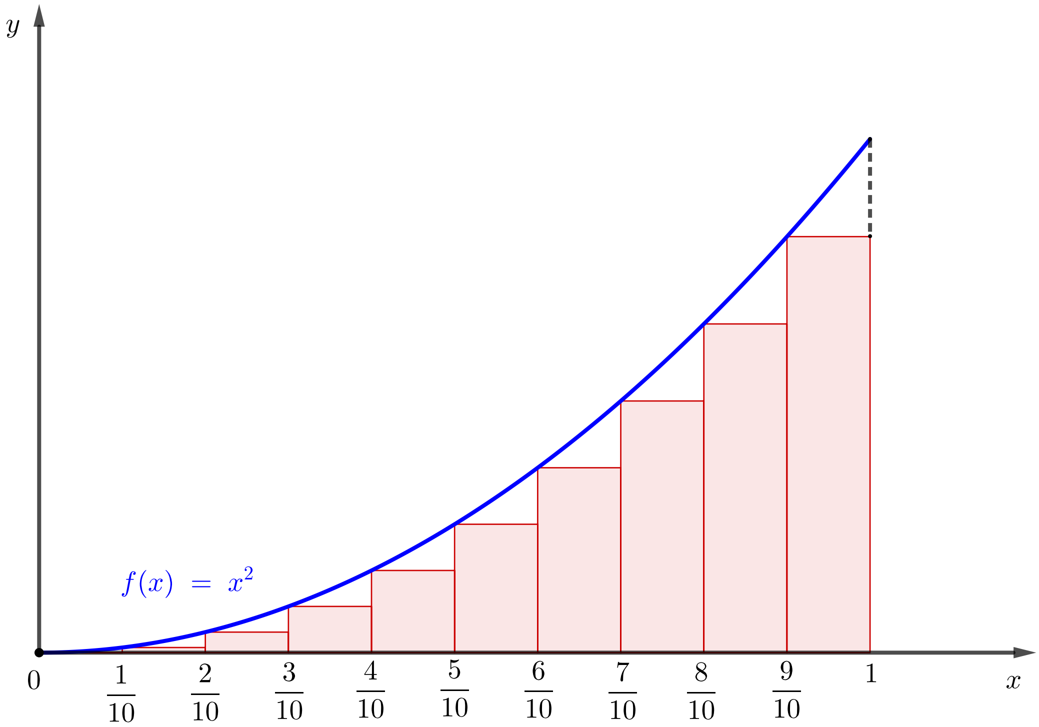
Figura 4.54: Região R determinada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$ e o eixo x no intervalo $0 \leq x \leq 1$



Fonte: O Autor

4- Sugira aos alunos que dividam o intervalo $[0, 1]$ do eixo x em 10 partes e construam retângulos de 2 tipos, cuja medidas das bases são as amplitudes dos subintervalos de $[0, 1]$. Os retângulos do tipo 1 são aqueles cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função (Figura 4.55), enquanto que os retângulos do tipo 2 são aqueles cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função (Figura 4.56). Em seguida, solicite aos alunos que completem cada tabela e determinem a área total ocupada pelos retângulos de cada uma das figuras.

Figura 4.55: Retângulos cujo vértice superior esquerdo pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$



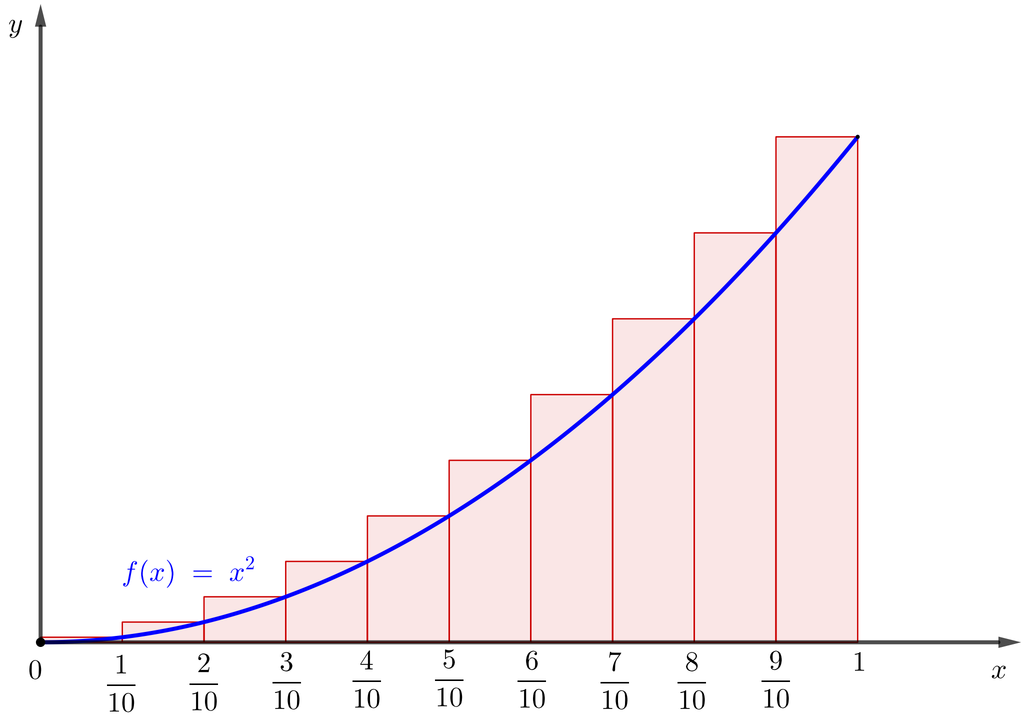
Fonte: O Autor

Tabela 4.31: Áreas dos retângulos do tipo 1

Intervalo	Altura	Área

A soma das áreas dos retângulos do tipo 1 é ____________________

Figura 4.56: Retângulos cujo vértice superior direito pertence ao gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: O Autor

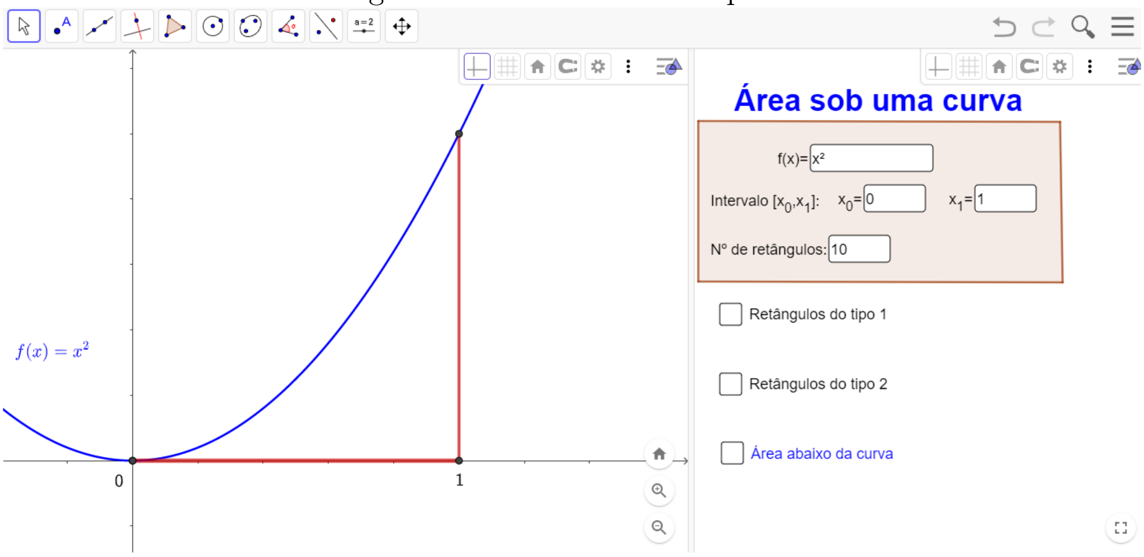
Tabela 4.32: Áreas dos retângulos do tipo 2

Intervalo	Altura	Área

A soma das áreas dos retângulos do tipo 2 é ______________________________

6- Solicite aos alunos que abram o arquivo 6 (https://www.geogebra.org/m/ur4zwfnz) no computador e preencham os campos com os dados dos itens 3 e 4, ou seja, preencham o campo $f(x)$ com a função $f(x) = x^2$, os valores $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ representando o intervalo $[0, 1]$ e considerando 10 o número de retângulos desenhados a partir da subdivisão desse intervalo, conforme a Figura 4.57.

Figura 4.57: Interface do arquivo 6



Fonte: O Autor

7- Solicite que cliquem no ícone retângulos do tipo 1 e confira o resultado da soma das áreas desse tipo de retângulo que encontraram no item 5. Peça-os que façam o mesmo com os retângulos do tipo 2. Após a correção, indique que cliquem no ícone "Área abaixo da curva"e observem o valor real dessa área.

8- Questione:

1) O que observam em relação a área da região R e a área total dos retângulos do tipo 1? Qual a diferença entre elas?

2) E em relação a área da região R e a área total dos retângulos do tipo 2? Qual a diferença entre elas?

9- Conclua aos alunos que a área real é maior que a soma das áreas dos retângulos do tipo 1 e menor que a soma das áreas dos retângulos do tipo 2. Nesse sentido, uma possível estimativa para área real da região R abaixo da curva $f(x) = x^2$ e acima do eixo x, compreendida no intervalo $[0, 1]$ é

$$0,285 < \text{área real} < 0,385.$$

10- Novamente, peça aos alunos que, através do arquivo 6, considerando o campo $f(x)$ com a função $f(x) = x^2$, os valores $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ representando o intervalo $[0, 1]$, completem a Tabela 4.33 com a soma das áreas dos retângulos do tipo 1 e 2, dado o número de retângulos.

Tabela 4.33: Áreas dos retângulos dos tipos 1 e 2 da região R

Número de retângulos	Soma das áreas dos retângulos do tipo 1	Soma das áreas dos retângulos do tipo 2
20		
30		
40		
50		
60		
70		
80		
90		
100		

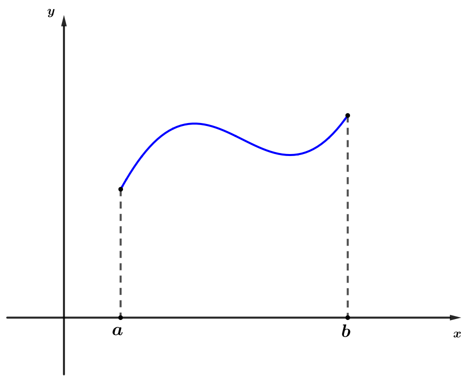
11- Levante a seguinte questão à turma: Comparada com a área real da região considerada, o que é possível afirmar com relação às áreas estimadas pelas somas retângulos do tipo 1 e 2, à medida que o número de retângulos aumenta?

12- Conclua aos alunos que: Quanto maior o número de retângulos considerados, mais próxima a soma das áreas desses retângulos será da área da região R. Esse processo de aproximação por meio de retângulos está relacionado com o conceito de integral.

13- Apresente a ideia do conceito de integral de uma função contínua qualquer positiva em um intervalo $[a, b]$ e a definição desse conceito por meio de área.

Considere uma função contínua f, positiva e um intervalo qualquer $[a, b]$ do eixo x, onde $b > a$.

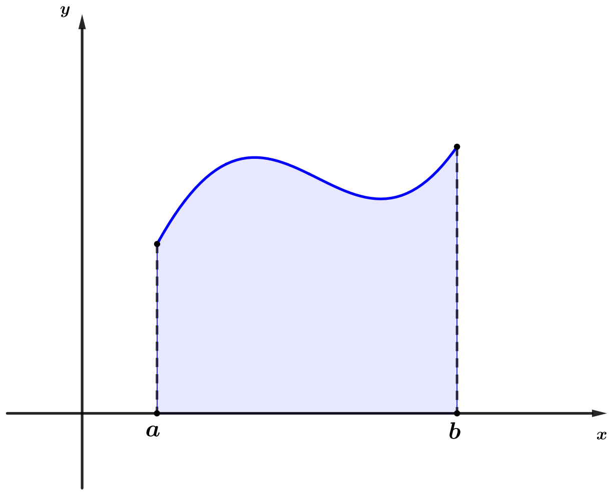
Figura 4.58: Gráfico da função positiva f definida no intervalo $[a, b]$



Fonte: O Autor

A Figura 4.59 mostra a região R delimitada entre a função f e o eixo x, no intervalo $a \leq x \leq b$.

Figura 4.59: Região R delimitada entre a função f e o eixo x, no intervalo $a \leq x \leq b$

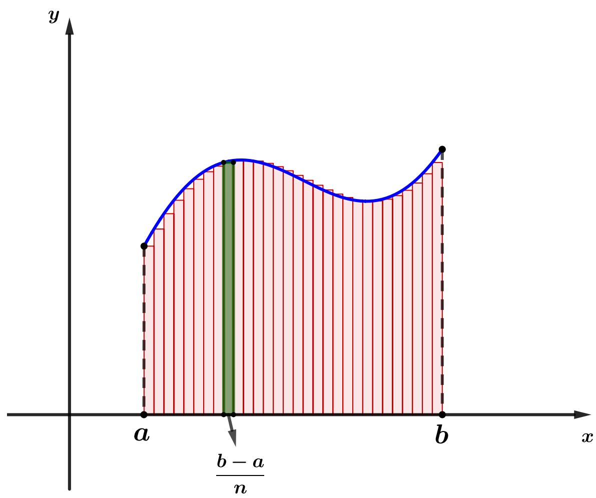


Fonte: O Autor

Para determinar a área S da região R acima, divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, b]$, de mesmo comprimento $\dfrac{b-a}{n}$.

Construa retângulos cujas bases são os subintervalos e de forma que cada ponto $(a, f(a)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_{n-1}))$ é um vértice superior esquerdo (retângulos do tipo 1). Vamos considerar apenas esse tipo de retângulo, uma vez que procedemos de forma análoga para os retângulos do tipo 2.

Figura 4.60: Retângulos em uma região delimitada abaixo do gráfico de f e acima do eixo x, num intervalo $[a, b]$



Fonte: O Autor

A área aproximada da região R pode ser expressa pela soma das áreas dos retângulos do tipo 1 construídos:

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{b-a}{n}f(a) + \frac{b-a}{n}f(x_1) + \frac{b-a}{n}f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n}f(x_{n-2}) + \frac{b-a}{n}f(x_{n-1}) = \\ &= \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})). \end{aligned}$$

Denotando $\Delta_n = \dfrac{b-a}{n}$, podemos reescrever a expressão acima como

$$S \approx \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})).$$

À medida que o valor de n aumenta, o valor de Δ_n ficará mais próximo de 0 e melhor ficará a aproximação. Nesse sentido, quando fazemos Δ_n tender a 0, conseguimos determinar a área S da região R.

Definição 4.4.1. A área S de uma região R definida sob o gráfico de uma função f positiva em um intervalo $[a, b]$ e acima do eixo x é definida por

$$S = \lim_{\Delta_n \to 0} \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})),$$

se o limite existir.

14- Explique aos alunos que a expressão

$$\lim_{\Delta_n \to 0} \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})),$$

que apareceu nessa situação, ocorre em diversos outros problemas/situações (mesmo quando a função não é necessariamente positiva) e, por isso, recebe um nome e uma notação especiais: é chamada de integral definida da função f no intervalo $[a, b]$, denotada

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

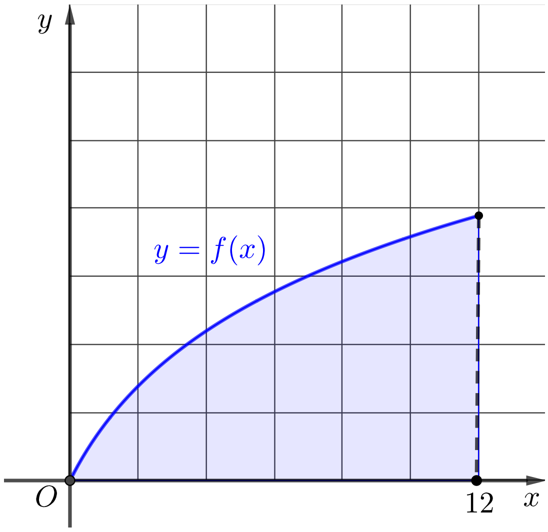
Conhecendo essa notação, podemos escrever que a área S da região R é

$$S = \lim_{\Delta_n \to 0} \Delta_n(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) = \int_a^b f(x)\ dx,$$

caso o limite exista.

15- Finalize propondo a seguinte atividade à turma:

Considerando a malha quadriculada composta por quadrados de área 1 $u.m.$, dê uma estimativa para a área da região destacada abaixo. Explique como chegou a esse resultado e escreva a integral que representa essa área.

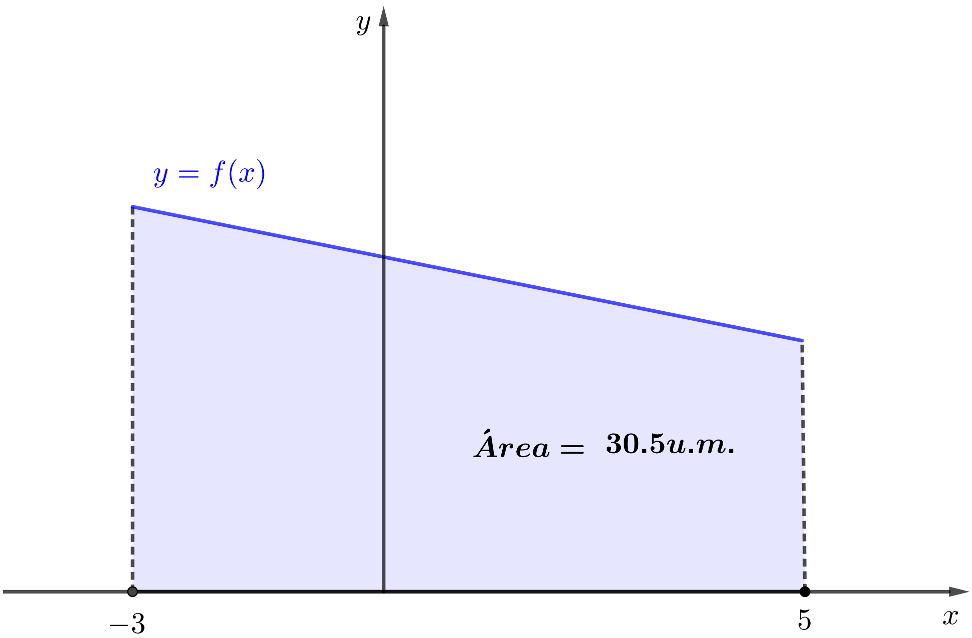


Fonte: O Autor

Propostas de atividades:

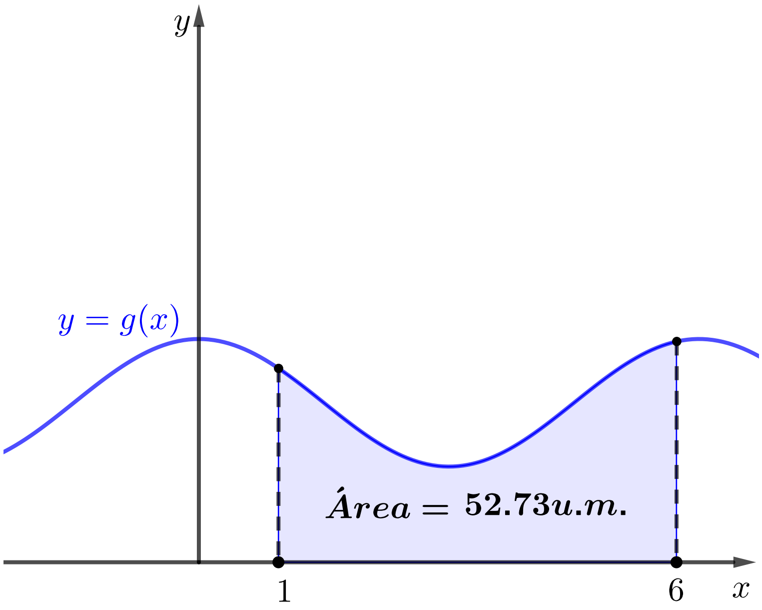
1. Dada a área, determine o valor das integrais abaixo:

   (a) $\int_{-3}^{5} f(x)dx =$



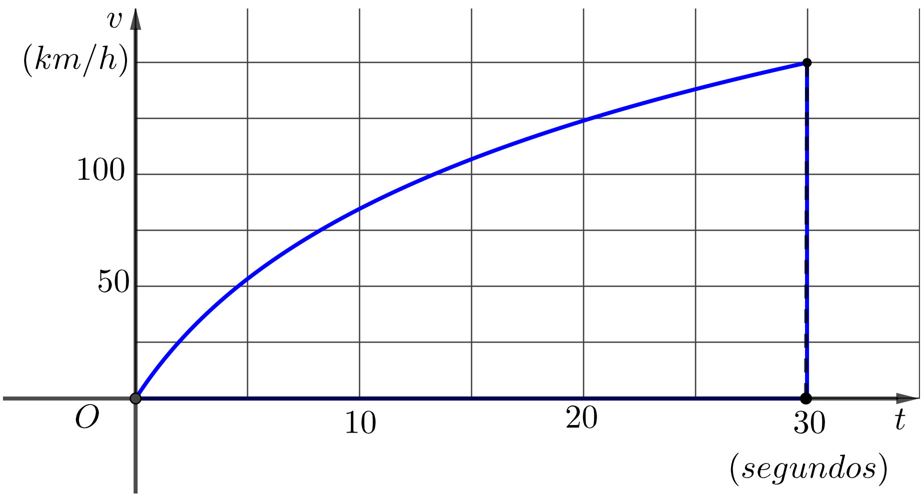
Fonte: O Autor

(b) $\int_1^6 g(x)dx =$



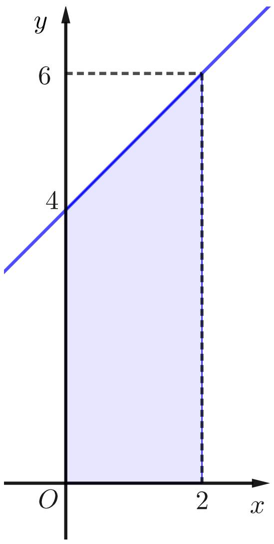
Fonte: O Autor

2. Uma motocicleta parte do repouso e após 30 segundos atinge a velocidade de 150km/h. O gráfico abaixo representa a velocidade em função do tempo após o veículo entrar em movimento. Determine uma estimativa para a distância percorrida pela motocicleta durante esse período de tempo.



Fonte: O Autor

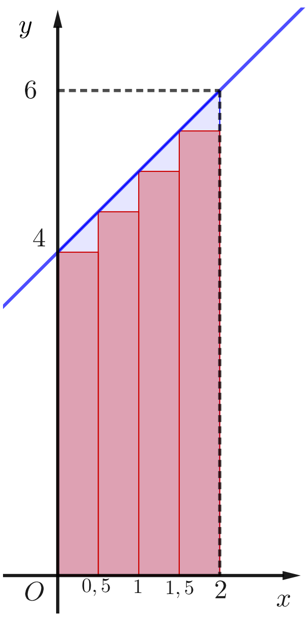
3. A figura abaixo representa a região sob o gráfico função dada por $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$ situada no primeiro quadrante, cujas fronteiras são os eixos x e y.



Fonte: O Autor

(a) Calcule a área da região utilizando as expressões de áreas de polígonos conhecidas.

(b) Dividindo intervalo $[0, 2]$ em quatro subintervalos de mesma amplitude e traçando retângulos cujos vértices superiores esquerdos pertencem ao gráfico da função, obtemos



Fonte: O Autor

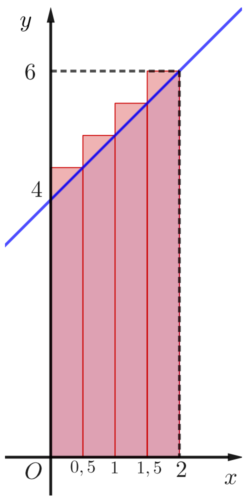
A partir da figura acima, complete a Tabela 4.34, determinando a altura e a área de cada retângulo. Logo após, determine a soma das áreas dos retângulos.

Tabela 4.34: Área de cada um dos 4 retângulos traçados região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo
0-0.5			
0.5-1			
1-1.5			
1.5-2			

Soma das áreas dos retângulos =

(c) Por outro lado, se dividirmos novamente intervalo $[0, 2]$ em quatro subintervalos de mesma amplitude e traçarmos retângulos cujos vértices superiores direitos pertencem ao gráfico da função, obtemos



Fonte: O Autor

A partir da figura acima, complete a Tabela 4.35 determinando a altura e a área de cada retângulo. Logo após, determine a soma das áreas dos retângulos.

Tabela 4.35: Área de cada um dos 4 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo
0-0.5			
0.5-1			
1-1.5			
1.5-2			

Soma das áreas dos retângulos =

(d) Imagine que o intervalo $[0, 2]$ fosse dividido em 8 partes iguais e construídos retângulos de características como na letra (b). Estime a área da região, através do cálculo da área de cada um dos retângulos e diga qual é a área total ocupada pelos retângulos.

Tabela 4.36: Área de cada um dos 8 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo

Soma das áreas dos retângulos =

(e) Imagine que o intervalo $[0, 2]$ fosse dividido em 8 partes iguais e construídos retângulos de características como na letra (c). Estime a área da região através do cálculo da área de cada um dos retângulos e diga qual é a área total ocupada pelos retângulos.

Tabela 4.37: Área de cada um dos 8 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = x + 4$ no intervalo $[0, 2]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo

Soma das áreas dos retângulos =

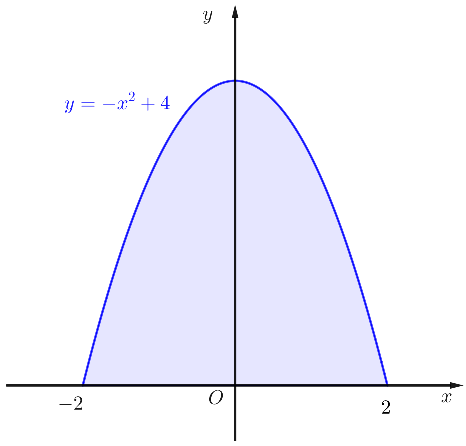
(f) A partir das respostas obtidas nas questões (b) e (d) responda: à medida que dividimos o intervalo em mais partes e consideramos um maior número de retângulos, o que você observa em relação a área ocupada por esses retângulos?

(g) A partir das respostas obtidas nas questões (c) e (e) responda: à medida que dividimos o intervalo em mais partes e consideramos um maior número de retângulos, o que você observa em relação a área ocupada por esses retângulos?

(h) Comparando com a área calculada no item (a), o que podemos observar em relação a área total dos retângulos, à medida que dividimos o intervalo em mais subintervalos e consideramos um número maior de retângulos?

4. Considere a função $f(x) = -x^2 + 4$ no intervalo $[-2, 2]$ e a região abaixo do gráfico da função e acima do eixo x, conforme a figura abaixo:

Figura 4.61: Região delimitada entre a função $f(x) = -x^2 + 4$ no intervalo $[-2, 2]$



Fonte: O Autor

(a) Divida o intervalo $[-2, 2]$ em 8 subintervalos e construa retângulos com base em cada um desses subintervalos e vértice superior pertencendo ao gráfico da função. Faça o desenho.

(b) Com base nos retângulos desenhados no item (a), preencha a Tabela 4.38:

Tabela 4.38: Área de cada um dos 8 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = -x^2 + 4$ no intervalo $[-2, 2]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo

(c) O que se pode afirmar a respeito da área da região demarcada?

(d) Represente a área da região demarcada por meio de uma integral.

Atividades avaliativas referentes ao conceito de integral

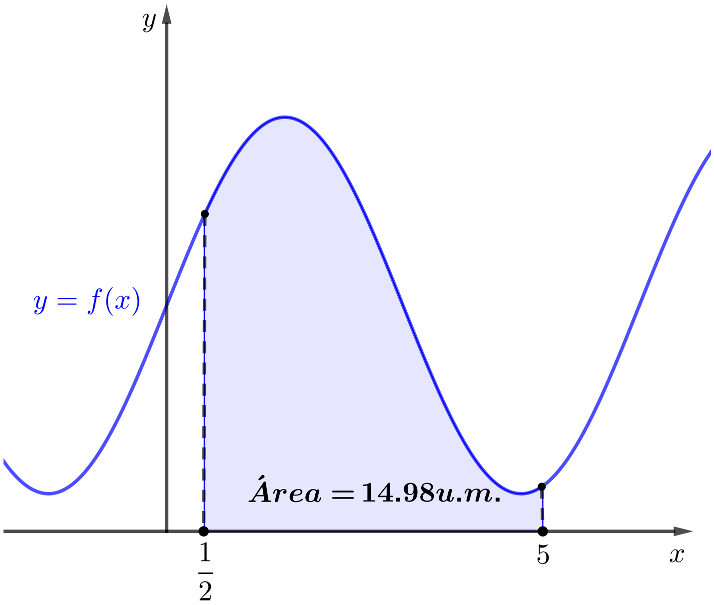
Tempo previsto: 1 hora e 40 minutos.

Objetivo 1: Avaliar o aprendizado dos alunos em relação aos conceitos aprendidos nos módulos da sequência didática sobre integral.

Objetivo 2: Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conteúdo sobre integral.

1. Escreva a integral que representa a área demarcada na figura a seguir e dê o seu valor numérico.

Figura 4.62: Área demarcada



Fonte: O Autor

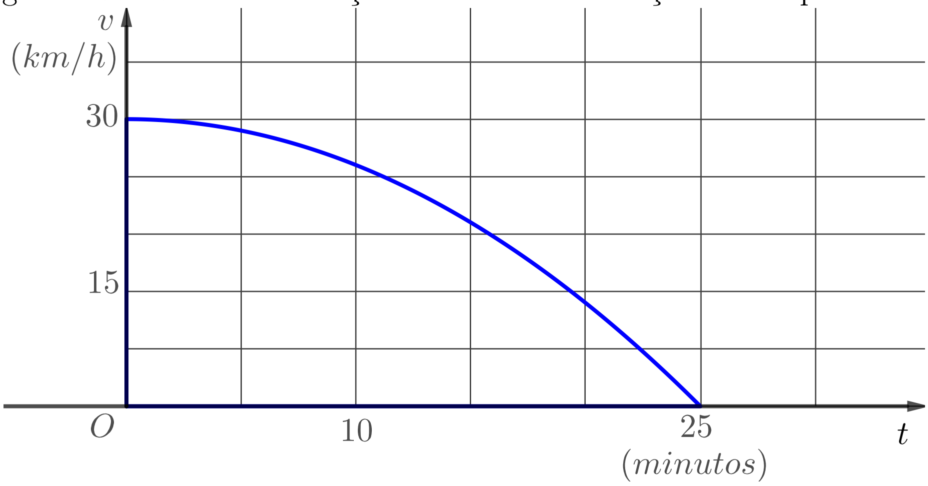
2. Em um determinado ponto de uma corrida, foi constatado que um maratonista corria a 30 km/h. Após atingir essa marca, sua velocidade foi caindo até chegar ao final, quando após 25 minutos da medição ele passa a marca de chegada. O gráfico apresentado na Figura 4.63 representa a velocidade em função do tempo desse atleta.

   Determine:

   (a) Dê uma estimativa para área da região abaixo do gráfico da curva e acima do eixo x. Explique o método utilizado para chegar em tal resposta.

   (b) Qual relação existente entre a distância percorrida pelo maratonista e a integral definida no intervalo $[0, 25]$ da função que determina a velocidade do maratonista ao longo do tempo?

Figura 4.63: Gráfico da função velocidade em função do tempo do atleta



Fonte: O Autor

3. Considere R a região delimitada abaixo do gráfico da função $f(x) = -x^2 + x$ no intervalo $[0, 1]$ e acima do eixo x.

   (a) Esboce o gráfico da função f e marque a região R.

   (b) Divida o intervalo $[0, 1]$ em 10 subintervalos e construa retângulos dcom base en cada um dos subintervalos e vértices superiores esquerdos pertencendo ao gráfico da função. Em seguida, complete a Tabela 4.39 abaixo:

Tabela 4.39: Área de cada um dos 10 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = -x^2 + x$ no intervalo $[0, 1]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo

   (c) Qual a soma das áreas dos retângulos feitos na letra (b)?

   (d) Agora, divida novamente o intervalo $[0, 1]$ em 10 subintervalos e construa retângulos de base sendo cada um dos subintervalos e vértices superiores direitos pertencendo ao gráfico da função. Complete a Tabela 4.40:

Tabela 4.40: Área de cada um dos 10 retângulos traçados na região delimitada pelo eixo x e a reta $f(x) = -x^2 + x$ no intervalo $[0, 1]$

Intervalo	Base	Altura	Área do retângulo

(e) Qual a soma das áreas dos retângulos feitos na letra (d)?

(f) Observe a integral

$$\int_0^1 (x^2 + x)dx.$$

Assinale a(s) alternativa(s) correta(s):

( ) O resultado dessa integral é um número negativo.

( ) O valor da integral acima é o mesmo da área da região compreendida abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2+x$ entre o intervalo $[0, 1]$ e acima do eixo x.

( ) O valor da integral acima é o mesmo da área da região compreendida abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2+x$ entre o intervalo $[0, 1]$ e abaixo do eixo x.

( ) A integral não possui solução.

( ) O resultado dessa integral é maior que 0.74 e menor que 0.93.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, investigamos a presença e importância da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na formação do professor de Matemática e da possibilidade de inserção de tópicos dessa disciplina no Ensino Médio.

Após análise de documentos oficiais que norteiam o desenvolvimento do projeto pedagógico dos cursos de licenciatura em Matemática, não encontramos nestes documentos justificativas explícitas para tal conteúdo compor a matriz curricular obrigatória destes cursos. Entretanto, diversos autores corroboram sobre a importância da disciplina na formação do indivíduo, com os argumentos de que o aprendizado de conceitos de Cálculo favorecem o entendimento de situações do mundo real, a construção do método científico e o exercício da cidadania. Por outro lado, autores criticam a forma como o Cálculo é ensinado na licenciatura, destacando que a disciplina é discutida a partir de uma estrutura sistematizada baseada na teoria lógico-formal dedutiva, na qual o rigor matemático se faz presente em excesso. Além disso, é comum a mesma abordagem para cursos de diferentes áreas, contribuindo com a falta de conexão dos conceitos aprendidos em Cálculo com as disciplinas da educação básica.

Ao refletir sobre a presença de tópicos dessa disciplina no PROFMAT e visão dos alunos do programa sobre a relação existente entre os conceitos estudados e a educação básica, fizemos uma análise das dissertações produzidas pelos alunos do programa ao final do mestrado. Nessa análise, percebemos que grande parte dos trabalhos que tratam desse assunto o relacionam com o ensino básico e consideram viável o ensino de conceitos de Cálculo nesse nível de ensino. Inclusive, apresentam materiais para aplicação em sala de aula, dos quais a maioria são direcionados ao Ensino Médio. Alguns desses trabalhos ressaltam a viabilidade de tratar desse assunto através da utilização de *softwares*. Nesse sentido, o PROFMAT se apresenta não só como um programa com objetivo de aprofundar o conhecimento em Matemática do professor, mas também fornece de livre acesso, um banco de materiais aos professores com um vasto repertório de atividades que podem ser aplicadas nas aulas de Matemática.

Diante do exposto no trabalho, acreditamos que a disciplina de Cálculo contempla conceitos matemáticos importantíssimos para o desenvolvimento de diversas áreas e que deve compor o currículo da formação do professor de Matemática, pois, devido ao seu caráter integrador, os conceitos estudados nessa disciplina proporcionam o entendimento de diversas situações do mundo real. Além disso, a disciplina proporciona ao futuro professor de Matemática um conhecimento mais amplo e aprimorado das funções, que podem ser consideradas a base e o ponto de ligação entre a matemática escolar e o ensino de Cálculo na graduação.

No entanto, é importante refletir acerca da abordagem do Cálculo nas licenciaturas, discutir quais conceitos e como estes devem ser estudados, para, assim, contribuir com uma aproximação entre o currículo da escola básica e da educação superior e favorecer a formação profissional do professor de Matemática, de modo que a Matemática a ser ensinada na escola não seja tão distante da Matemática aprendida na graduação.

Além disso, percebemos que os conceitos de Cálculo relacionam-se a conceitos estudados no escola básica, como por exemplo a ideia de função ou fundamentos de Geometria Analítica. Dessa forma, o ensino de limites, derivadas e integrais no Ensino Médio pode agregar na formação do estudante, principalmente no que diz respeito ao entendimento de conteúdos matemáticos já presentes no currículo, bem como na evolução do pensamento científico e crítico desse aluno, além de favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

No mais, o estudo das ideias fundamentais do Cálculo ainda na educação básica pode possibilitar, aos alunos que pretendem cursar graduações em que a disciplina se faz presente, uma melhor aprendizagem e, consequentemente, contribuir para uma diminuição nos números de reprovações dessa disciplina no ensino superior.

Entretanto, antes de uma inserção direta no currículo se faz necessário o processo de reflexão e pesquisa, além da produção de trabalhos científicos analisando as possíveis justificativas para a inclusão ou não desses conteúdos no Ensino Médio.

Nesse sentido, apresentamos uma proposta de ensino de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, destinada a professores que desejam ensinar tais conceitos a alunos do Ensino Médio, com o objetivo de democratizar o conhecimento, no sentido de favorecer o acesso dos estudantes do Ensino Médio a esses conteúdos, tendo em vista que muitas das vezes o aluno se forma sem sequer ouvir falar sobre limite, derivada ou integral.

Além disso, é, também, objetivo da proposta de ensino fornecer ferramentas para o professor trabalhar, mesmo que implicitamente, conceitos básicos de Matemática já presentes no currículo da última fase do ensino regular.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir para novas discussões sobre a presença da disciplina Cálculo nos cursos de licenciatura em Matemática, abordagem e metodologias do professor formador, possibilidades e desafios no ensino da disciplina e contribuições da disciplina no ensino básico, bem como servir de referência para aqueles professores que desejarem aplicar a proposta apresentada a seus alunos do Ensino Médio.

Referências

[1] ALVARENGA, Karly Barbosa; DORR, Raquel Carneiro; VIEIRA, Vanda Domingos. O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. Revista Brasileira de Ensino Superior, Passo Fundo, v. 2, n. 4, p. 46-57, mar. 2017. ISSN 2447-3944. Disponível em: <https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1518>. Acesso em: 20 jun. 2020.

[2] BARNETT, Adrian. As aranhas e centopéias gigantes que se alimentam de grandes animais. BBC Brasil. São Paulo, 09 abr. 2017. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/vert-earth-39345846>. Acesso em: 02 de fev. de 2021

[3] BARUFI, Maria Cristina Bonomi. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. 1999. Tese (Doutorado em Didática). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/publico/Tese.pdf> Acesso em:03 mar. 2021

[4] BRASIL, Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. Diário Oficial da União, Brasília, 05 mar. 2002a, Seção 1, p. 15. Disponível em:<http://portal. mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf > Acesso em: 20 ago. 2020

[5] BRASIL, Resolução CNE/CP 2/2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Diário Oficial da União, Brasília, 15 de abril de 2019, Seção 1, pp. 46-49. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file>. Acesso em: 20 ago. 2020

[6] Catálogo das Disciplinas. Sociedade Brasileira de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. 2021. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2021/04/PROFMAT_Catalogo_das_Disciplinas_ver_2021.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2021

[7] CIVIERO, Paula Andrea Grawieski. Educação matemática crítica e as implicações sociais da ciência e da tecnologia no processo civilizatório contemporâneo: embates para formação de professores de matemática. 2016. 346 p. Tese (Doutorado).

Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/175795/345684.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 09 set. 2020

[8] Documento de Área. Área 01: Matemática/ Probabilidade e Estatística. . Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/mape-pdf>. Acesso em: 23 mar. 2021

[9] Euclides Roxo e o movimento de reformado ensino de Matemática na década de 30. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos. Brasília. v.81, n.199, p.415-424, set/dez. 2000. Disponível em:<http://rbep.inep.gov.br/ojs3/index.php/rbep/article/view/1333/1072>. Acesso em: 15 abr. 2021

[10] FARIAS, Maria Margarete do Rosário. Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das tic: implicações para prática do professor que ensina matemática. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - 2015. Rio Claro - SP. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/132207/000853690.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 11 dez. 2020

[11] FELÍCIO, Helena Maria dos Santos; SILVA, Carlos Manuel Ribeiro da Silva. Currículo e Formação de Professores: uma visão integrada da construção do conhecimento profissional. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 17, n. 51, p. 147-166, jan./mar. 2017. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/2818/2740%3E.> Acesso em: 03 jun. 2020

[12] FIORENTINI, Dario. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. Revista de Educação PUC-Campinas, [S.l.], n. 18, jul. 2012. ISSN 2318-0870. Disponível em: <http://periodicos.puc-campinas.edu.br/seer/index.php/reveducacao/article/view/266>. Acesso em: 25 maio 2020.

[13] FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de Carvalho Correa de. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?. Bolema: Boletim de Educação Matemática. 2013, v. 27, n. 47, pp. 917-938. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400011>. Acesso em: 25 maio 2020

[14] Fundamentos de Cálculo. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em:<https://www.profmat-sbm.org.br/ma22/>. Acesso em: 25 mar. 2021

[15] GONÇALVES, Adair Vieira; FERRAZ, Mariolinda Rosa Romera. Sequências Didáticas como instrumento potencial da formação docente reflexiva. DELTA, São Paulo , v. 32, n. 1, p. 119-141, abr. 2016 . Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-44502016000100119&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 15 mar. 2021.

[16] Instituições Associadas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/instituicoes-associadas/> Acesso em: 24 mar. 2021

[17] Instituições Associadas 2021. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2021/05/Instituicoes-Associadas-2021.pdf> Acesso em: 24 mar. 2021

[18] MENDES, Marcele Tavares; TREVISAN, André Luiz. O relatório escrito em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: a carta para a tia. BoEM, Joinville, v. 6, n. 12, p. 110-127, dez 2018. Disponível em: <https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/10145/9659>. Acesso em: 18 nov. 2020

[19] Mestrado Profissional: o que é?. Brasil. Ministério da Educação. 01 abr. 2014. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/avaliacao/sobre-a-avaliacao/avaliacao-o-que-e/sobre-a-avaliacao-conceitos-processos-e-normas/mestrado-profissional-o-que-e>. Acesso em: 24 mar. 2021

[20] MOREIRA, Plinio Cavalcanti. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. 2012, v. 26, n. 44, pp. 1137-1150. Disponível em:<https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003>. Acesso em: 18 nov. 2020

[21] OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; RAAD, Marcos Ribeiro. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de cálculo. Boletim GEPEM, v.1, p.125-137, 2012. Jul/Dez.2012. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/09/Produto-educacional-Marcos-Raad.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2021

[22] ORFALI, Fabio. A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da Educação Básica: o raciocínio covariacional. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2017. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05112018-161520/publico/FABIO_ORFALI.pdf> Acesso em: 23 mar. 2021

[23] PAULIN, Juliana França Viol; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.21, n.2, pp. 239-263, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/39090> Acesso em: 12 nov. 2020

[24] PROFMAT: uma reflexão e alguns resultados. Sociedade Brasileira de Matemática. 2017. Disponível em: < https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/06/PROFMAT_relatorio_DIGITAL.pdf> Acesso em: 16 mar. 2020

[25] Projeto Pedagógico de Curso. 6p. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <https://www.ufmg.br/prograd/arquivos/destaque/ppc.pdf> Acesso em: 03 ago. 2020

[26] Projeto Pedagógico de Curso. Matemática Bacharelado Presencial Campus Santo Antônio. 2019. 74p. Universidade Federal de São João del-Rei-MG. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/comat/PPC_Bacharelado_Versao_16-04-2019.pdf> Acesso em: 03 ago. 2020

[27] Projeto Pedagógico de Curso. Matemática Licenciatura Presencial Campus Santo Antônio. Resolução Nº 009, de 15 mai. 2019. 124p. Universidade Federal de São João del-Rei-MG. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/comat/Res009Conep2019_PPCMatematica_Licenciatura%20Versao%20oficial.pdf> Acesso em: 03 ago. 2020

[28] REIS, Frederico da Silva. A tensão entre rigor e intuição no ensino de calculo e analise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didaticos. 2001. 302p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: ¡http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253451¿. Acesso em: 28 jul. 2020.

[29] REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/publico/WANDERLEY_REZENDE.pdf> Acesso em: 13 jun. 2020.

[30] SBM: Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT - 2016. Disponível em <https://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Regimento_2017.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2020

[31] SILVA ,Gabriele Bonotto , FELICETTI, Vera Lucia. Habilidades e competências na prática docente: perspectivas a partir de situações problema. Educação por escrito, v. 5, n. 1,p. 17-29, 2014. Disponível em: <https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/14919/11497>. Acesso em: 03 set. 2020

[32] SOUZA, Marli Aparecida Rocha de et al . O uso do software IRAMUTEQ na análise de dados em pesquisas qualitativas. Rev. esc. enferm. USP, São Paulo , v. 52, e03353, 2018 . Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0080-62342018000100444&lng=pt&nrm=iso>.. Acesso em 15 set. 2020

[33] SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio. 2002. 162 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2002. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91141>.

[34] STEWART, J. Cálculo–Volume I. Tradução da 7ª Edição Norte-Americana. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda, 2013.

[35] THIEL, Afrânio Austregésilo; MODESTI, Matheus dos Santos. O cálculo e a matemática superior: algumas aplicações. Blumenau : Instituto Federal Catarinense, 2016. 120 p. Disponível em: <https://editora.ifc.edu.br/wp-content/uploads/sites/33/2017/03/Livro-C%c3%a1lculo-e-Matem%c3%a1tica-Superior-Online-2016.pdf> Acesso em: 20 set. 2020

[36] VIEIRA, Aldo Freitas. Ensino de cálculo diferencial e integral: das técnicas ao humans-with-media. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo - 2013. São Paulo -SP. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-06062013-102222/publico/ALDO_FREITAS_VIEIRA_rev.pdf>. Acesso em: 03 set. 2020

A Dissertações pertencentes a categoria A, em ordem de análise

CRUZ, Lucas Cavalcanti. Algumas Aplicações de Física do Ensino Médio a partir do Cálculo Diferencial e Integral. 85 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa- PB, 2013.

OLIVEIRA, Gleidson José Dumont. A Utilização do Cálculo Diferencial e Integral para Estender os Cálculos de Áreas de Figuras Planas e Comprimentos de Curvas no Plano. 96 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013.

LEMOS FILHO, Aldenor Lopes. Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. 56 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, Teresina-PI, 2013.

BRITO, Janilson Claydson Silva. O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio. 53 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, Teresina-Pi, 2013.

MELLO FILHO, Eduardo Jorge Barros de Deus e. O Cálculo Diferencial e Integral como Ferramenta Indispensável ao Estudo de Modelos de Física Mecânica e as Leis do Movimento Planetário. 95 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013.

PASCOAL, José Ueslei Marques. Um Breve Estudo Sobre a Utilização do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica de Jaguaruana-Ce. 55 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2014.

ARAUJO, Everton Alves de. Proposta de Ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via Geogebra. 141 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2015.

SANTOS, Ariosvaldo Andrade. Uma Proposta para Inserção de Conceitos Básicos

de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. 65 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora- MG, 2015.

FERREIRA, Antônio de Jesus de Sousa. Cálculo Diferencial e Integral:: Uma Proposta para o Ensino Médio. 112 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, São Luíz- MA, 2016.

DIAS, Antonio Alberto de Sousa. Calculo Diferencial e Integral e Geogebra: Ferramentas para o Ensino da Física na Educação Básica. 92 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Triangulo Mineiro, Uberaba-Mg, 2016.

COSTA, Jésu Márcio Azevedo a. Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral como Ferramenta para Cálculos de Áreas das Figuras Planas no Ensino Médio. 70 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Amapá, Macapá- AP, 2016.

LUCCA JUNIOR, Horacio Emidio de. Logaritmos: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio utilizando a História, o Contexto com as demais Ciências e o Cálculo Diferencial e Integral. 93 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federa do ABC, Santo André - SP, 2017.

ALÉSSIO, Amanda. A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a Formação do Professor de Matemática da Educação Básica. 90 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista "júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente- SP, 2019.

SILVA, Jálio Araújo da. Cálculo Diferencial e Integral: Uma Abordagem no Ensino Médio. 46 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís - MA, 2019.

LUÍS, Fábio. Cálculo no Ensino Médio: área sob o gráfico de uma curva. 59 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

VIANNA, Bruno. Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre o Infinito. 139 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

MOLON, Jaqueline. Cálculo no Ensino Médio: uma Abordagem Possível e Necessária com Auxílio do Software Geogebra. 2013. 198 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Santa Maria - RS, 2013.

MELO, André Luiz Ferreira. A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: Um Estudo com Alunos do 4º Ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânica do IFPI Campus Floriano. 58 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, Teresina-PI, 2013.

MARIA, Otoniel Soares de. Cálculo Diferencial no Ensino Médio: Noções de Limites, Derivadas e Aplicações. 63 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2013.

RIBEIRO, Carlos Augusto. Noções de Cálculo Diferencial: Uma proposta para o Ensino Médio. 47 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora- MG, 2013.

FLORET, Rejane Teixeira de Souza. Uma Proposta para Introdução de Noções de Cálculo no Ensino Médio. 69 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro- RJ, 2014.

SANTOS, Silvan Avelino dos. Funções Afim e Quadrática sob a Perspectiva do Cálculo Diferencial. 42 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, 2014.

FERREIRA, Alexandre Maia. Resgate da Inserção das Noções Elementares do Cálculo (Em Particular, das Noções de Limite) Durante o Ensino Médio. 126 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória- ES, 2014.

GODINHO, Leandro Machado. Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Ensino de Derivada na Primeira Série. 90 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro- RJ, 2014.

DIAS, Tiago de Oliveira. Cálculo No Ensino Médio: Uma Proposta Alternativa para o atual Currículo da Educação Básica no Brasil. 78 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa- MG, 2014.

SOUSA, Kélia Rodrigues de Queiroz. Cálculo: Uma Proposta Possível para o Ensino Médio. 98 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças - MT, 2014.

LADISLAU, Carlos Cley Evangelista. Noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. 90 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2014.

DIAS, Marco Antônio Alves. Aplicações do Estudo do Cálculo Integral no Nível Básico de Ensino Associado à Resolução do Cálculo de Áreas de Figuras Planas. 115 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade de Brasília, Brasília- DF, 2015.

COIMBRA, Jayro Mendes. O Ensino de Cálculo na Educação Básica. 47 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro- RJ, 2015.

SILVA, Cleber Valadares da. Modelagem, Cálculo e Geogebra: Uma Nova Proposta de Ensino para as Funções Quadráticas. 66 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Tocantins, Palmas-TO, 2015.

MATTOS, William Febronio de. Uma Contribuição para o Ensino de Cálculo no Ensino Médio, utilizando a Classe das Cônicas. 110 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade de São Paulo, São Carlos- SP, 2016.

ARAUJO, Davi Pereira Fortes. Volumes de Sólidos de Revolução no Ensino Médio: Uma Abordagem Dinâmica e Intuitiva a partir das Ideias do Cálculo. 200 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Fluminense, Niterói- RJ, 2015.

JUNIOR, Jaime Alves de Oliveira. Um Estudo sobre a Implementação do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. 135 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2015.

RIBEIRO, Denylson da Silva Prado. Cálculo Diferencial de Funções Polinomiais no Ensino Médio com o uso do Geogebra: Fundamentação Teórica e suas Aplicações. 64 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2016.

SENA, Rogério. Noções de Cálculo I no Ensino Médio: Aplicabilidade em Diversas Áreas do Conhecimento. 76 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2016.

MACHADO, Flávio Martins. Noções de Cálculo I no Ensino Médio: Uma Proposta de Intervenção Curricular. 89 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2016.

NETO, José Gomes Taveira. A Importância do Estudo do Cálculo Diferencial na Educação Básica. 49 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Tocantins, Palmas - TO, 2016.

RIBEIRO, Helena Corrêa. Cálculo: Uso de Recursos Computacionais para inserir Conceitos de Limites, Derivadas e Integrais no Ensino Médio. 98 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba-PR, 2018.

OLIVEIRA, Cristiano José Rocha Ferreira de. Cálculo Diferencial: Uma Abordagem Histórico-Social e Possibilidades de Introdução no Ensino Médio.120 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO, 2018.

BATISTA, Amanda Oliveira Dias. A Importância das Sequências Numéricas para Estudo do Cálculo Diferencial no Ensino Médio. 101 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Triangulo Mineiro, Uberaba-MG, 2018.

ROCHA, Joice Stella de Melo. O Ensino de Cálculo no Ensino Médio. 64 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de São João Del- Rei, São João Del-Rei- MG, 2018.

SOUZA, Jonas Ferreira de. Cálculo Diferencial: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio. 114 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana-SE, 2019.

NETO, Alyrio Alves Cordeiro. Cálculo Integral para o Ensino Médio. 63 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2019.

MACHADO, Ari Júnior dos Santos. Limites e Derivadas para o Ensino Médio. 58 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2013.

LEVITA, Roberto Silva. Introdução à Teoria do Limite e da Derivada para o Ensino Médio. 73 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, 2014.

SILVA, Jonh Cleidson da. Limite e Continuidade: Um Enfoque Acessível ao Ensino Médio com o Auxílio do Geogebra. 94 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande - PB, 2014.

PAULA, Davidson Mendes Ferreira de. Limite: Uma Conexão entre o Ensino Básico e o Ensino Superior. 109 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora- MG, 2016.

PAIVA, Christhian Karlo Lemos de. Uma Proposta para o Cálculo de Volumes Introduzindo a Noção de Limite. 77 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba-MG, 2014.

ASSIS, Eliane Maria do Nascimento. Limites: História e Aplicações. 80 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa- MG, 2017.

ALVES, Anderson Rafael. Limites e Derivadas: Uma abordagem para o Ensino Médio. 143 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru- SP, 2018.

SILVA, José Carlos. Limites de Funções Reais de Variável Real no Ensino Médio: Um Estudo Visando os Concursos da Efomm e da Escola Naval. 127 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro- RJ, 2018.

ALVES, Leopoldo José. Estudo do Conceito de Limites de Funções Reais no Ensino Médio: Uma Proposta de Atividades utilizando o Software WxMAXINA. 121 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO, 2018.

GUIMARÃES, Maria Elisa de Castro. Introduzindo os Conceitos de Limite, Derivada e Integral no Ensino Médio. 106 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza-CE, 2019.

MACHADO, Fernando Gomes. Aplicações da Derivada de uma Função Real sobre uma Perspectiva Histórica. 70 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, Teresina-PI, 2013.

FILHO, Geraldo Caetano de Souza. Uma Proposta para o Ensino de Derivadas de Funções Polinomiais no Ensino Médio. 84 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2013. MOTA, Janaina Oliveira. Derivadas no Ensino Médio: Reflexões e Propostas. 43 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão- SE, 2014.

LIMA, Isaias José de. Derivada e suas Aplicações em Resolução de Problemas do Ensino Médio. 31 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Ceara, Juazeiro do Norte- CE, 2014.

BIANO, Adão de Aguiar. O Esboço de Gráficos de Polinômios de 2º e 3º Graus usando Derivadas. 72 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças - MT, 2015.

PAIVA, Maryna de Oliveira. Aplicações do Estudo da Derivada no Nível Básico de Ensino Associado à Resolução de Questões de Máximos e Mínimos. 91 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade de Brasília, Brasília- DF, 2015.

GAGLIOLI, Marina Aparecida. Derivada como Taxa de Variação: Uma Abordagem com base no Currículo do Ensino Médio. 142 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2015.

ARAÚJO, Silvia Xavier Saraiva. Uma Introdução ao Estudo de Derivadas no Ensino Médio. 75 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2016.

FERREIRA, Arnaldo Alves. Proposta de Ensino das Funções Afim e Quadrática e suas Derivadas com o Auxílio do Geogebra. 84 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2016.

QUEIROZ, Luiz Fernando Barbosa de. Construções Gráficas Polinomiais Fazendo Uso de Derivadas. 75 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora- MG, 2016.

SILVA, Eliseu do Nascimento. Uma Introdução ao Estudo das Derivadas no Ensino Médio. 59 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2016.

GALENO, Francisco de Assis Lima. Derivada e Aplicações. 53 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, Parnaiba, 2016. NEVES, Paulo de Tarso Smith. Introdução Ensino do Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio. 74 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT Universidade Federal do Amapá, Macapá- AP, 2016.

COSTA, Paulo César. Aplicações de Derivada no Ensino Médio: Uma Abordagem de Forma Intuitiva. 114 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista - BA, 2018.

MOREIRA, Fabrício Borges. Uma Sequência Didática para o Estudo de Derivadas no Ensino Médio. 70 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade de São Paulo, São Carlos- SP, 2018.

PEREIRA, Luís Henrique. A Derivada segundo Silvanus Thompson. 69 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba-PR, 2018.

SILVA, Gabriel Felipe da. A Didática de Resolução de Problemas para Conceituar Intuitivamente a Derivada no Ensino Médio utilizando Equações da Reta. 160 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville - SC, 2019.

ALMEIDA, Francisco Wescley Cunha de. Integral Definida: Uma Abordagem para o Ensino Médio com o Auxílio do Software Geogebra. 41 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte- CE, 2014.

SILVA, Daniel Ferreira da. Uma Introdução à Integral de Riemann Contextualizada ao Ensino Médio. 60 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto- SP, 2019.

B Dissertações pertencentes a categoria B, em ordem de análise

RAVAGNANI, Fábio Araújo. Cálculo Diferencial e Integral no Movimento dos Planetas. 78 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto- SP, 2014.

KUROKAWA, Cecilia Yumi. Áreas e volumes De Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o Cálculo Diferencial e Integral. 136 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2015.

SOARES, Franciele Pondian Bento. Conceitos e Ideias do Cálculo Diferencial e Integral. 119 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, 2015.

MONÇÃO, Fabrício Figueredo. Uma Leitura dos Erros Cometidos por Estudantes na Resolução de Questões do Cálculo Diferencial e Integral. 76 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista – BA, 2015.

GOMES, Fabio Henrique. Uma Proposta de Exame de Proficiência em Cálculo Diferencial e Integral. 79 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade de Brasília, Brasília- DF, 2016.

FLEXA, Jorge Messias do Nascimento. Cálculo Diferencial e Integral: Determinação de Áreas e Volumes e Outras Aplicações. 49 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Amapá, Macapá-AP, 2017.

FREITAS, Claudimiro Neves de. Problemas de Cálculo Diferencial e Integral Aplicados a Realidade da Região Amazônica. 50 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop-MT, 2018.

FARIA, Thiago Lopes de. Proposta de Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. 59 f. Dissertação Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop-MT, 2019.

BARROS, Luiz Eduardo Wanderley Buarque de. Cálculo: um Estudo de suas Aplicações às Áreas Financeira e Econômica. 103 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013.

SANTOS, Felipe de Oliveira Lamberg Henriques dos. Fundamentos do Cálculo Diferencial. 89 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 2014.

FONSECA, Daniel Ribeiro da. Noções de Cálculo Diferencial e Aplicações. 35 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, Teresina-PI, 2015.

CARVALHO, Heloisa de Andrade. A Análise dos Erros dos Alunos em Cálculo I como Estratégia de Ensino. 75 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro- RJ, 2016.

TEIXEIRA, Sheila Cristina. Possibilidades para Melhorar o Desempenho dos Acadêmicos na Disciplina de Cálculo. 87 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, Catalão-GO, 2019.

SOUZA, Jones Paulino de. Análise de Erros em Cálculo: Metodologia de Investigação Aplicada com Alunos da UFOPA. 88 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém-PA, 2019.

GONÇALO, Rildo Cariri. Limites, Continuidade, Derivabilidade e Aplicações. 75 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013

NETO, Gustavo Alves Caetano. Uma Ideia sobre o Conceito de Limite ao Longo da História da Matemática. 121 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba - MG, 2016.

TETILA, Juliana Queiroz da Silva. O Limite no Estudo de Indefinições e Indeterminações Matemáticas. 52 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados-MS, 2016.

MIRANDA, Warlisson Inácio de. Uma Proposta de Ensino Diferente do Conceito de Limite. 95 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Triangulo Mineiro, Uberaba - MG, 2017.

SILVA, João Paulo Neves e. Geogebra: Explorando possibilidades de Abordagem interativa dos Conteúdos de Função Quadrática, Limites e Derivada. 123 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá- MT, 2019.

ROCHA, Frédson Valois Coutinho da. A utilização do Geogebra no Estudo dos Conceitos de Limite, Derivada e Integral Definida. 96 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2019.

PONTES, Ronaldo da Silva. Equações Polinomiais: Soluções Algébricas, Geométricas e com o Auxílio de Derivadas. 89 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013.

SOUZA, Bruno Serafim de. Aplicações da Derivada: Uma Abordagem para Participantes das Olimpíadas de Matemática. 78 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte- CE, 2017.

SANTOS, Wagner Luiz Moreira dos. A Integral de Riemann Generalizada. 71 f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, 2019.