2021: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, Campus Alto Paraopeba - CAP
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Números Felizes Generalizados

Thiago Patrocínio Rodrigues[1]
Gilcélia Regiâne de Souza[2]
Marcelo Oliveira Veloso[3]

Resumo: Este trabalho apresenta um breve estudo sobre os números felizes e suas generalizações, em qualquer sistema posicional. Em particular, alguns resultados sobre os 3-números felizes e seus pontos fixos em bases menores que seis. Além disso, propõe o uso de planilhas eletrônicas, como ferramenta didática, para inserir o tema aos alunos do ensino básico.

Abstract: This work presents a brief study on happy numbers and its generalizations, on any positional system. In particular, some results about the 3-happy numbers and its fixed points on bases less than six. In addition, it proposes the use of electronic spreadsheets, as a didactic strategy, to introduce the subject for elementary school students.

Palavras-chave: Números Felizes, Pontos Fixos, Planilha Eletrônica

1 Introdução

A origem dos números felizes é incerta. Todavia, ganhou notoriedade quando Richard K. Guy, um matemático inglês, o apresentou em seu famoso livro: "Unsolved Problems in Number Theory"[5]. Guy cita que Reg Allenby, outro proeminente matemático britânico, foi apresentando aos números felizes por sua filha, que teria aprendido o conceito na escola. No entando, eles podem ter se originado na Rússia [8]. Em seu livro Guy trás diversos questionamentos à respeito dos números felizes: possíveis sequências de números felizes, a relação entre números primos e números felizes, a densidade nos inteiros positivos, felicidade em outras bases, etc. Diferentes autores tem trabalhado com essas e novas questões que surgiram com o avanço dos estudos sobre números felizes.

De modo simples, o entendimento dos números felizes consiste no processo de iteração de somar o quadrado dos dígitos de um número decimal, conforme pode-se observar com o exemplo

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2018
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: thiagopatrocinio@yahoo.com.br
[2]Coorientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: gilcelia@ufsj.edu.br
[3]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: veloso@ufsj.edu.br

$$3 \to 9 \to 81 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 32 \to 13 \to 10 \to 1$$

Diremos que o número de partida é feliz quando este processo terminar em 1, do contrário é fácil verificar que formamos um ciclo e, neste caso, chamaremos o número de triste.

Neste trabalho vamos tratar dos números 3-felizes, isto é, quando a potência utilizada for 3, primeiramente na base decimal e depois obtendo algumas generalizações para qualquer base. Vamos mostrar que o tema números felizes encontra paralelo com diversos assuntos abordados na educação básica, sendo um conceito capaz de motivar os alunos. Vamos obter um algorítmo capaz de dizer se um número arbitrário é feliz ou triste através de uma planilha eletrônica.

2 Conceitos Básicos

2.1 Representação Posicional

Aqui, vamos trazer alguns fatos sobre o sistema de representação posicional dos números, bem como fixaremos a terminologia e notação utilizadas ao longo do texto. Utilizaremos como referência o livro de "Aritmética"da coleção PROFMAT, de Abramo Hefez [6].

O sistema universalmente utilizado pelas pessoas para representar os números inteiros é o sistema decimal posicional. Este sistema foi desenvolvido na China e na Índia e é uma variação do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios 1700 anos antes de Cristo.

Os números decimais acabaram substituindo outros que já foram bastante utilizados ao longo da história, como os Algarismos Romanos. Este, composto por sete letras do alfabeto latino(I, V, X, L, C, D e M), por não ser um sistema posicional, apresenta grande dificuldade para realização de cálculos e operações, como veremos no exemplo abaixo.

Há outros sistemas de numeração em uso, como o binário, que utiliza apenas dois símbolos(0 e 1). No sistema decimal todo número inteiro é representado por uma sequência formada pelos símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chamados de algarismos, acrescidos do símbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismo naquela posição. O sistema é chamado de posicional pois cada algarismo possui um peso, dado por uma potência de 10 (pois temos dez símbolos), de acordo com a posição que ele ocupa. Um dos aspectos importantes da representação decimal é a facilidade em executar operações elementares, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

Exemplo 2.1 *Para efetuar uma soma com números decimais podemos fazer em apenas uma etapa:* $79+134 = 213$*, ao utilizar algarismos romanos precisamos de várias etapas: CXXXIIII + LXXVIIII = CLXXXXXIIIIIIII = CCXIII = IIICXC = XC.*

Vamos utilizar a seguinte notação:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, conjunto dos números inteiros.

Lembre que dado $f : A \to A$, a **função composta**, $f \circ f : A \to A$, é definida por

$$f \circ f(x) = f(f(x)), \text{ para todo } x \in A$$

E por recorrência temos $f^k = f \circ f^{k-1}$, para $n \geq 2$, denotando a k-ésima composição da função f. É usual definir f^0 como a função identidade, isto é, $f^0(x) = x$, para todo $x \in A$.

Vamos agora ilustrar a composição de uma função.

Exemplo 2.2 *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 3x - 1$. Então, $f^3(x) = 27x - 13$. De fato, como*

$$f^2(x) = f(f(x)) = 3.(3x - 1) - 1 = 9x - 3 - 1 = 9x - 4.$$

Assim,

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = 3.(9x - 4) - 1 = 27x - 12 - 1 = 27x - 13.$$

Assim como ocorre na representação decimal, os sistemas de representação posicional se baseiam no Algoritmo da Divisão [6], que é uma aplicação direta do princípio da oa ordenação(PBO) e do lema que apresentaremos abaixo.

Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento [6].

Lema 2.3 (Euclides) *Sejam a e b números inteiros tais que $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Então existem números inteiros q e r, univocamente determinados, tais que*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < b.$$

Demonstração. Se $a < b$ temos que $a = b \cdot 0 + a$. Para $b < a$, considere o conjunto

$$S = \{a - n \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

Observe que $S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ e é não vazio. Como cada termo desta sequência é um número natural, pelo princípio da boa ordenação [6], temos um menor elemento. Seja $r = b - q \cdot a$ este número. Precisamos, então, mostrar que $r < a$. De fato, se $a|b$ então $r = 0$ e, portanto, $r < a$. Se, por outro lado, $a \not|$ b, então $r \neq a$ e, assim, basta mostrar que $r < a$. Suponha por absurdo que $a < r$. Neste, caso existe um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Desta forma, sendo $r = c + a = b - q \cdot a$, teríamos

$$c = b - (q + 1) \cdot a \in S,$$

com $c < r$, contrariando o fato de r ser o menor elemento de S. Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$, provando a existência de q e r. Vamos mostrar agora a unicidade. Note que, dados dois elementos na sequência S, ao tomarmos a diferença do maior pelo menor, tem-se sempre um múltimo de a e, portanto, sempre um valor maior ou igual a a. Logo, se $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geq a$. Assim, teríamos $r' \geq r + a \geq a$, o que é um absurdo. Portanto, $r = r'$. Daí, segue-se que $b - a \cdot q = b - a \cdot q'$, o que implica que $a \cdot q = a \cdot q'$ e, portanto, $q = q'$. $\square$

Teorema 2.4 *Seja $b \geq 2$ um número natural. Então todo número, a, pode ser expresso, de modo único, na forma polinomial*

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0,$$

onde $n \geq 0$, $0 \leq r_i < b$ para $i = 0, \ldots, n$, com $r_n \neq 0$.

Demonstração. Vamos provar utilizando o Princípio da Indução Forte sobre a. Observe que, para a entre 0 e b, isto é, $0 < a < b$, podemos tomar $n = 0$ e $r_0 = a$. Neste caso, $a = r_0 b^0$. Obviamente qualquer outro valor para n ou r_0 altera o resultado acima, garantindo a unicidade da escrita.

Supondo que o resultado acima seja válido para todo número natural k menor do que a, com $a \geq b$(hipótese de indução), temos pelo Lema 2.3 que existem q e r, únicos, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

Como $0 < q < a$, então, também pela hipótese de indução, existem números inteiros $m \geq 0$ e $0 \leq r_1, r_2, \ldots, r_{m+1} < b$, com $r_{m+1} \neq 0$, únicos, tais que $q = r_1 + r_2 b + \cdots + r_{m+1} b^m$.

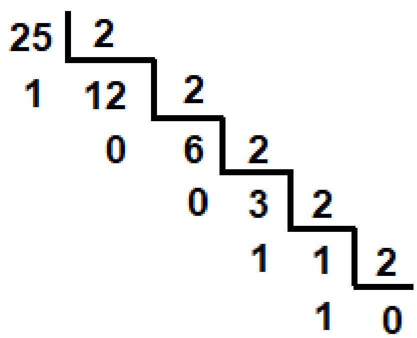
Dessa forma, como $a = bq + r$, então, utilizando a expressão acima para q, obtemos: $a = bq + r = b(r_{m+1} b^m + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0) + r$, no qual podemos colocar $r_0 = r$ e $n = m + 1$. □

Com o resultado acima, podemos obter a chamada **expansão relativa à base b**. Desse modo, temos a expansão decimal, quando $b = 10$, a expansão binária, quando $b = 2$, etc. Observe que, como na expressão obtida pelo teorema apenas os valores $r^{i's}$ variam, podemos sempre definir um número em uma base por estes valores e a posição que ele ocupa na expressão, seguindo daí o fato dessa representação ser posicional.

O Teorema 2.4 também nos permite obter um algoritmo para a representação posicional de um número em qualquer base b. Indicamos a referência [6] caso o leitor entender esse algoritmo com mais detalhes. Aqui deixamos alguns exemplos de como obter a representação em uma base b de um determinado número.

Exemplo 2.5 *Vamos representar o número 25 na base 2.*

Por divisões euclidianas sucessivas,



Assim,

$$\begin{aligned} 25 =& 2 \cdot 12 + 1 \\ =& 2(2 \cdot 6 + 0) + 1 \\ =& 6 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \\ =& (2 \cdot 3 + 0)2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \\ =& 3 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \\ =& (2 \cdot 1 + 1)2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \\ =& 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

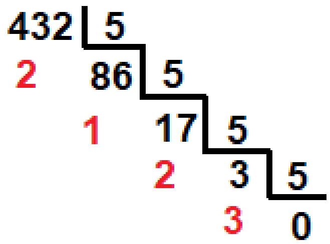
Portanto,

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1,$$

ou seja, $25 = [11001]_2$. ♢

Exemplo 2.6 *Vamos representar o número 432 na base 5.*

Por divisões euclidianas sucessivas,



Assim,
$432 = 5 \cdot 86 + 2$,
$86 = 5 \cdot 17 + 1$,
$17 = 5 \cdot 3 + 2$;
$3 = 5 \cdot 0 + 3$.
Portanto,

$$432 = 2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3,$$

e, consequentemente, $432 = [3212]_5$.

$\diamondsuit$

3 Números n-Felizes na Base Decimal

Nesta seção apresentamos os números n-felizes na base decimal e listamos algumas de suas propriedades. É usal omitir o índice 10, quando se trabalha na base decimal e o contexto é claro. Isto é, denotamos $F_{3,10}(n)$ por $F_3(n)$.

Seja m um número inteiro positivo e $a_r a_{r-1} a_{r-2} \ldots a_1 a_0$ a sua representação na base decimal. A função

$$\begin{array}{rcl} F_n : \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}_+ \\ m & \longmapsto & a_r^n + a_{r-1}^n + \cdots + a_1^n + a_0^n \end{array}$$

é chamada de função n-**feliz**. Em uma notação mais concisa:

$$F_n(m) = F_n\left(\sum_{i=0}^{r} a_i 10^i\right) = \sum_{i=0}^{r} a_i^n.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.1 *Para* $n = 2$*, temos a função 2-feliz (usualmente chamada apenas de função feliz). Aplicando a função* F *para os valores 13 e 145, temos:* $F_2(13) = 1^2 + 3^2 = 10$. $F_2^2(13) = F_2(10) = 1^2+0^2 = 1$. $F_2(145) = 1^2+4^2+5^2 = 42$. $F_2^2(145) = F_2(42) = 4^2+2^2 = 20$. $F_2^3(145) = F_2(20) = 2^2 + 0^2 = 4$. $F_2^4(145) = F_2(4) = 4^2 = 16$.

$\diamondsuit$

Exemplo 3.2 *Para* $n = 3$*, temos a função 3-feliz. Aplicando os mesmos valores acima para* F*, temos:* $F_3(13) = 1^3 + 3^3 = 1 + 27 = 28$. $F_3^2(13) = F_3(28) = 2^3 + 8^3 = 520$. $F_3(145) = 1^3 + 4^3 + 5^3 = 190$.

$\diamondsuit$

Observe que para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ temos a sequência:

$$\left\{m, F_n^1(m), F_n^2(m), \ldots, F_n^k(m), \ldots\right\}$$

formada pelas k-ésimas iterações de F em m, onde $F_n^k(m) = F_n(F_n^{k-1}(m))$.

Exemplo 3.3 *Observe que*

$$\{778, 1198, 1243, 100, 1, 1, 1, \ldots\}$$

é a sequência formada pelos valores $F_3^k(m)$ para $m = 778$ e $k \in \mathbb{N}$.

$\diamondsuit$

Um número inteiro positivo m é chamado de **n-feliz** se existe um número natural $k \geq 1$ tal que $F_n^k(m) = 1$, Caso contrário, m é dito um n-triste.

Exemplo 3.4 *Os números 1, 7, 10, 13, 19, 23 são os 6 primeiros números 2-felizes. Por exemplo para o número 13, temos: $F_2^2(13) = 1$. O número 1285 também é um número 2-feliz. De fato, para $k = 5$, temos: $F_2^5(1285) = 1$.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.5 *Os números 1, 10, 100, 112, 121, 211, 778, 787, 877 e 1000 são os 10 primeiros números 3-felizes. Por exemplo, para 211 e 787 temos $F_3^2(211) = 1$ e $F_3^4(787) = 1$.*

$\diamondsuit$

Observe que as interações de F_2 no número feliz 1285 produz a sequência:

$$\{1285, 94, 97, 130, 10, 1, 1, 1, \ldots\}$$

que se estabiliza no 1.

Exemplo 3.6 *O número 2 é um número 2-triste. De fato, tomando as iterações de F, formamos a sequência*

$$\{2, \mathbf{4}, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, \mathbf{4} \ldots\}.$$

Observe que o 4 é um valor que se repete na sequência acima, isto é, $F^9(4) = 4$.

Assim, a partir de F^9, a sequência é cíclica, repetindo os valores

$$\{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}.$$

Logo não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_2(2) = 1$. Portanto, 2 é um número 2-triste.

$\diamondsuit$

No próximo exemplo vamos observar que a felicidade de um dado número depende da função n-feliz.

Exemplo 3.7 *O número 2-feliz 7 é um número 3-triste. Observe que, ao aplicar a função F_2 ao número 7, temos $F_2^5(7) = 1$. Contudo, ao aplicar as iterações da função F_3 ao número 7, formamos a sequência $\{7, 343, 118, 514, 190, 730, 370, 370, 370, \ldots\}$ que se estabiliza no valor 370, ou seja, 7 não é um número 3-feliz.*

$\diamondsuit$

Lema 3.8 *Dados $s, n, k \in \mathbb{N}$. Suponha que exista um subconjunto C de $\mathbb{N} - \{1\}$ invariante por F_s. Isto é, para todo $n \in C$, tem-se $F_s(n) \in C$. Então*

1. *Se $F_s^k(n) = 1$, então $F_s^i(n)$ é feliz para todo $i \in \mathbb{N}$.*

2. *Se $F_s^k(n) \in C$ para algum $k > 1$, então $F_s^i(n)$ é triste para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração.

1. Para $0 \leq i < k$, seja $m_i = F_s^i(n)$. Agora note que

$$F_s^{k-i}(m_i) = F_s^{k-i}(F_s^i(n)) = F_s^{k-i+i}(n) = F_s^k(n) = 1.$$

Para $i > k$, temos:

$$F_s^i(n) = F_s^{i-k}(F_s^k(n)) = F_s^{i-k}(1) = 1.$$

Assim, $F_s^i(n)$ é feliz para todo $i \in \mathbb{N}$.

2. Suponha que $F_s^k(n) \in C$ para algum $k > 1$. Se $i \geq k$ temos que $F_s^i(n) \in C$ para $i \geq k$, pois C é invariante por F_s. Logo $F_s^i(n)$ é triste, se $i \geq k$. Caso $i < k$, observe que

$$F_s^{k-i}(F_s^i(n)) = F_s^{k-i+i}(n) = F_s^k(n) \in C.$$

Ou seja, $F_s^k(n) \neq 1$ para todo $k \geq 0$.Portanto, n é triste.

$\square$

Observação 3.9 *Note que estamos especialmente interessados no caso em que C é um conjunto finito. Conforme apresentado por Mata e Veloso(2015, p.6), todo número triste, após um certo número de iterações, alcança(e permanece) algum dos valores do conjunto $D_2 = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. Vamos mostrar, adiante, que dada uma função n-feliz, sempre existe um conjunto finito D com tal característica.*

O teorema que vamos apresentar a seguir permite concluir que existem infinitos números n-felizes. Com efeito, não é difícil notar que, se 79 é um número feliz, então 79000 também é feliz. Se 112 é um número 3-feliz, 11200000 também é feliz. Basta notar que ao acrescentar dígitos iguais a zero a dado número o valor da função "felicidade"não se altera.

Teorema 3.10 *Sejam m, $n \in \mathbb{N}$. Se m é um número n-feliz (n-triste), então $m10^s$ é um número n-feliz (n-triste), para todo $s \geq 1$ natural.*

Demonstração. Seja $m = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0 = a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$. Observe que

$$\begin{aligned} m10^s &= (a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + a_1 10 + a_0) 10^s \\ &= a_r 10^{r+s} + a_{r-1} 10^{r+s-1} + \cdots + a_1 10^{s+1} \\ &= a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0\, 00 \cdots 0. \end{aligned}$$

Isso implica que $F_n(m10^s) = F_n(m)$. Verificando a afirmação. $\square$

Corolário 3.11 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, existem infinitos números n-Felizes.*

Demonstração. Basta observar que $F_n(10^s) = 1$ para todo $s \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.12 *Seja $m = a_r a_{r-1} ... a_1 a_0$. Se m é um número n-feliz (n-triste), $n \in \mathbb{N}$, então qualquer número obtido pela permutação dos dígitos de m é n-feliz (n-triste).*

Demonstração. Basta observar que a soma

$$a_r^n + a_{r-1}^n + \cdots + a_1^n + a_0^n$$

não se altera ao permutarmos a ordem da soma de suas parcelas. $\square$

Outra pergunta interessante é: dado um número, n, é posível decidir se n é feliz ou triste? Visto que $F^k(n)$,

Exemplo 3.13 *Observe que, ao obter as iteradas F_2^k para o número inteiro 12, obtemos: $F_2(12) = 1^3 + 2^3 = 9$. $F_2^2(12) = F_2(9) = 9^3 = 729$. $F_2^3(12) = F_2(729) = 7^3 + 2^3 + 9^3 = 1080$. Analogamente, $F_2(1080) = 1^3 + 8^3 = 523$, $F_2(523) = 5^3 + 2^3 + 3^3 = 160$, $F_2(160) = 1^3 + 6^3 = 217$, $F_2(217) = 2^3 + 1^3 + 7^3 = 352$. Observe que 352 é uma permutação dos algarismos do número 523 e, portanto, todo ciclo a partir desse número se repete.*

$\diamondsuit$

Exemplo 3.14 *Observe que, ao obter as iteradas de F_2^k para o número 45, obtemos: $F_2(45) = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. $F_2^2(45) = F_2(41) = 16 + 1 = 17$. Continuando, temos: $F_2(17) = 1 + 49 = 50$, $F_2(50) = 25 + 0 = 25$, $F_2(25) = 4 + 25 = 29$, $F_2(29) = 4 + 81 = 85$, $F_2(85) = 64 + 25 = 89$, $F_2(89) = 64 + 81 = 145$, $F_2(145) = 1 + 16 + 25 = 42$, $F_2(42) = 16 + 4 = 20$, $F_2(20) = 4$, $F_2(4) = 16$, $F_2(16) = 1 + 36 = 37$, $F_2(37) = 9 + 49 = 58$. Observe que, como 58 é uma permutação do número 85, obtemos, a partir daí, o ciclo $\{58, 89, 145, 42, 20, 16, 37, 58\}$*

$\diamondsuit$

O exemplo 3.7 acima ilustra o fato de que um número 3-feliz pode possuir um ciclo. Iremos mostrar que de fato este ciclo existe e é único, isto é, dado um número inteiro n 3-triste, existem um conjunto D_3 e um número k tais que para todo $p \geq k$, $F_3^p \in D_3$.

Exemplo 3.15 *Os números 13 e 85 são 3-tristes. De fato, $F_3(13) = 1^3 + 3^3 = 1 + 27 = 28$, $F_3(28) = 8 + 512 = 520$, $F_3(520) = 125 + 8 = 133$, $F_3(133) = 1 + 27 + 27 = 55$, $F_3(55) = 125 + 125 = 250$, $F_3(250) = 8 + 125 = 133$. Note que $F_3^3(13) = F_3^6(13) = 133$ e obtemos uma sequência cíclica, a partir de F_3^3, onde só ocorrem os valores $\{133, 55, 250\}$. Logo, não existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F_3^k(13) = 1$. Portanto, 13 é um número 3-triste. O mesmo acontece com 85: ao aplicarmos F_3^k obtemos $\{85, 637, 586, 853, 664, 496, 1009, 730, 370, 370, ...\}$. Como encontramos $F_3^8 = F_3^9 = 370$, também formamos o ciclo $\{370\}$ formado por apenas 1 elemento.*

$\diamondsuit$

O conjunto

$$\mathbf{D}_3 = \{55, 133, 136, 153, 160, , 217, 244, 250, 352, 370, 371\}$$

é invariante por F. Isto é, para todo $n \in D_3$ tem-se $F_3(n) \in D_3$. Note que $F_3(55) = 250$, $F_3(250) = 133$, $F_3(133) = 55$, analogamente, $F_3(153) = 153$, $F_3(160) = 217$, $F_3(217) = 352$, $F_3(352) = 160$. Além disso, $F_3(136) = 244$, $F_3(244) = 136$, $F_3(370) = 370$, $F_3(371) = 371$, $F_3(407) = 407$, $F_3(919) = 1459$ e $F_3(1459) = 919$. Assim, $F_3(n) \in D_3$, para todo $n \in D_3$.

Lema 3.16 *Seja n um número 3-triste menor do que 10.000, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_3^m(n) \in D_3$, para todo $m \geq k$.*

Demonstração. Cálculos feitos com ajuda de uma planilha e algoritmo em anexos (ver Figuras 1 a 5 na seção Planilhas). □

Lema 3.17 *Seja n um número inteiro positivo e k um número natural. Tem-se:*

1. *Se $F_3^k(n) = 1$, então $F_3^i(n)$ é feliz para todo $i \in \mathbb{N}$.*
2. *Se $F_3^k(n) \in D_3$, então $F_3^i(n)$ é triste para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Observação: note que o Lema 3.17 é um caso particular do lema 3.8, para $s = 3$.

Demonstração.

1. Para $i < k$, temos:

$$F_3^{k-i}(F_3^i(n)) = F_3^{k-i+i}(n) = F_3^k(n) = 1.$$

Para $i > k$, temos:

$$F_3^i(n) = F_3^{i-k}(F_3^k(n)) = F_3^{i-k}(1) = 1.$$

Assim, $F_3^i(n)$ é 3-feliz para todo $i \in \mathbb{N}$.

2. Observe que, para mostrar que um número n é triste, precisamos mostrar que todas as iteradas de n pela função felicidade(F) são diferentes de 1

Assim, para $i = 0, ..., k-1$, temos:

$$F_3^{k-i}(F_3^i(n)) = F_3^{k-i+i}(n) = F_3^k(n) \in D_3.$$

Para $i > k$, temos: $F_3^i(n) = F_3^{i-k}(F_3^k(n)) \neq 1$, pois, por hipótese, $F_3^k(n) \in D_3$. Como D_3 é invariante por F e $1 \notin D_3$, então $F_3^{i-k}(F_3^k(n)) \neq 1$.

□

Segue do Lema 3.17 que ao obtermos uma sequência de números pelas iterações da função F, todos os números, dessa sequência, serão felizes ou todos serão tristes.

Exemplo 3.18 *Observe que 787 é um número 3-feliz, obtido através das iteradas a seguir: $F_3^1(787) = 1198$, $F_3^2(787) = 1243$, $F_3^3(787) = 100$, $F_3^4(787) = 1$. Assim, 1198, 1243 e 100 são igualmente números 3-felizes.*

◊

Observe que, sendo 787 um número 3-feliz, 7870 e 78700 também serão, basta notar que acrescentar dígitos zero ao número 787 não alteram o valor da função $F_3(787)$.

Teorema 3.19 *Dado $n = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$ um número inteiro positivo, temos que*

$$F_m(n) \leq 9^m(r+1).$$

Demonstração. Observe que $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $0 \leq i \leq r$, e que m possui $n+1$ dígitos. Portanto,

$$F_m(n) = a_r^m + a_{r-1}^m + \cdots + a_1^m + a_0^m \leq 9^m + 9^m + \cdots + 9^m = 9^m(r+1).$$

□

Teorema 3.20 *Seja $n \geq 10.000$, então $F_3(n) < n$.*

Demonstração. Seja $n = a_r a_{r-1} a_{r-2} \ldots a_1 a_0 \geq 10.000$. Então n possui, pelo menos 4 dígitos, isto é, $r \geq 4$ e $a_r \neq 0$. Temos que $F_3(n) = a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3$. Agora considere a diferença entre n e $F_3(n)$:

$$\begin{aligned} n - F_3(n) &= a_r 10^r + a_{r-1}10^{r-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 - (a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3) \\ &= (a_r 10^r - a_r^3) + (a_{r-1}10^{r-1} - a_{r-1}^3) + \cdots + (a_1 10 - a_1^3) + (a_0 - a_0^3) \\ &= a_r(10^r - a_r^2) + a_{r-1}(10^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + a_1(10 - a_1^2) + a_0(1 - a_0^2). \end{aligned}$$

Seja $\alpha = a_r(10^r - a_r^2) + a_{r-1}(10^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + a_2(10^2 - a_2^2)$ e seja $\beta = a_1(10 - a_1^2) + a_0(1 - a_0^2)$. Dessa forma, $n - F_3(n) = \alpha + \beta$. Note que $\alpha > 0$, pois $0 < a_i < 10$ para todo $1 \leq i \leq r-1$ e $a_r \neq 0$. Note também que o menor valor possível para α é 9999 e isto ocorre quando $r = 4, a_4 = 1, a_3 = a_2 = 0$. E o menor valor possível para β ocorre quando $a_1 = 9$ e $a_0 = 9$. Neste caso $\beta = 9.(10 - 81) + 9.(1 - 81) = -1359$. Assim,

$$\begin{aligned} n - F_3(n) &= \alpha + \beta \\ &\geq 9999 - 1359 \\ &= 8640 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $F_3(n) < n$ quando $n > 10.000$. □

Pela planilha apresentada em anexo, notamos que $F_3(n) < n$ para todo $2000 \leq n \leq 10000$.

Corolário 3.21 *Para todo inteiro $m \geq 10.000$ existe k tal que $F^k(n) \leq 10.000$.*

Demonstração. Suponha que $F^k(m) > 10.000$ para todo k. Segue do Teorema 3.20 que

$$m > F_3(m) > F_3^2(m) > F_3^3(m) > \cdots > F_3^i(m) > \cdots > 10.000$$

é uma sequência infinita de números inteiros estritamente decrescente limitada inferiormente, que, pelo Princípio da Boa Ordenação (veja [6]), é um absurdo. Portanto, existe k tal que $F_3^k(n) < 10.000$. □

Teorema 3.22 *É sempre possível verificar se um número, na potência 3, é feliz ou triste na base dez.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.21 dado $m \geq 10.000$ existe k tal que $F_3^k(m) \leq 10000$. Logo, basta verificar a felicidade dos números menores que 10.000. E isto pode ser feito com o auxilio de uma planilha. Veja planilha na Figura 3 Portanto, neste caso, é sempre possível examinar se determinado número é feliz ou triste. □

4 Números 3-Felizes em qualquer base

Nesta seção estudamos a função 3-feliz em qualquer base posicional $b \geq 2$.

Seja m um número inteiro positivo e

$$m = [a_r a_{r-1} a_{r-2} \ldots a_1 a_0]_b = \sum_{i=0}^{r} a_i b^i$$

a sua representação na base $b \geq 2$. A função 3-feliz na base b, $F_{3,b}$, é definida por

$$\begin{array}{rcl} F_{3,b} : \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}_+ \\ m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i^3 \end{array}$$

Ou seja,

$$F_{3,b}(m) = F_{3,b}(\sum_{i=0}^{r} a_i b^i) = \sum_{i=0}^{r} a_i^3$$

Sejam $b \geq 2$ e n números inteiros positivos. Dizemos que n é um **número 3-feliz na base b** se existe $k \geq 1$ tal que $F_{3,b}^k(n) = 1$. Caso contrário, n é dito um número 3-triste na base b.

Quando a base é evidente, em certo contexto, é usual dizer apenas que o número é feliz ou triste.

Exemplo 4.1 *A felicidade em uma base não garante a felicidade em outra. Para ilustrar este fato tomamos como exemplo o número 112. $F_{3,10}^2(112) = 1$, portanto ele é um número feliz na base 10. Contudo, ao analisarmos as iteradas função felicidade na base 5, temos*

$$F_{3,5}(112) = F_{3,5}([422]_5) = 112,$$

Ou seja,

$$F_{3,5}^m(112) = 112$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, 112 não é um número feliz na base 5.

$\diamondsuit$

Exemplo 4.2 *O número 1 é 3-feliz em qualquer base. A sua representação em qualquer base é $[1]_b$. Assim, $F_{3,b}(1) = F_{3,b}([1]_b) = 1^3 = 1$.*

$\diamondsuit$

Teorema 4.3 *Na base 2 todo número é 3-feliz.*

Demonstração. De fato,

$$F_{3,2}(1) = 1^3 = 1, \quad F_{3,2}(2) = F_{3,2}([10]_2) = 1^3 + 0^3 = 1 = [1]_2,$$

e

$$F_{3,2}(3) = F_{3,2}([11]_2) = 1^3 + 1^3 = 2 = [10]_2 \text{ e } F_{3,2}([10]_2) = 1^3 + 0^3 = 1.$$

Agora suponha $m > 3$ e $m = a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0$ a sua representação na base 2. Neste caso, $r \geq 2$, $a_r = 1$ e $a_i \in \{0, 1\}$, para todo $0 \leq i \leq r - 1$. Como $a_i^3 = a_i$, temos:

$$\begin{aligned}F_{3,2}(n) =&a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3\\ =&1 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1 + a_0\\ \leq&1 + r\\ <&2^r\\ \leq&n.\end{aligned}$$

Assim, a sequência,

$$n, F_{3,2}(n), F_{3,2}^2(n), F_{3,2}^3(n), \ldots$$

é decrescente para todo m, por indução. Desse modo, pelo Princípio da Boa Ordenação(PBO) [6], dado $n \in \mathbb{Z}_+$ existe k tal que

$$F_{3,2}^k(n) = 1,$$

isto é, n é um número 3-feliz na base 2. □

Teorema 4.4 *Existem infinitos de números 3-felizes em qualquer base b.*

Demonstração. De fato, conforme mencionamos, 1 é 3-feliz em qualquer base. Podemos adicionar uma quantidade infinita de zeros ao número 1, formando números na base pretendida. Estes zeros não mudam o valor de $F_{3,b}(n)$, assim os inteiros formados com a adição de zeros são numeros 3-felizes. □

Quando todo número inteiro positivo é 3-feliz em determinada base essa base é dita **base 3-feliz**.

O próximo resultado é uma generalização do Teorema 3.19 que vimos anteriormente.

Teorema 4.5 *Seja $n = [a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0]_b$ um número inteiro positivo. Temos*

$$F_{3,b}(n) \leq (r+1) \cdot (b-1)^3.$$

Demonstração. Observe que $a_i \leq b - 1$, para todo $0 \leq i \leq r$. Portanto

$$F_{3,b}(n) \leq (b-1)^3 + (b-1)^3 + \cdots + (b-1)^3 = (r+1) \cdot (b-1)^3.$$

□

Teorema 4.6 *Seja m e $b \geq 2$ números inteiros. Então $F_{3,b}(m) < m$, para todo $m \geq b^4$.*

Demonstração. Seja $m = [a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0]_b$. Visto que $m \geq b^4$ temos que $r \geq 4$ e $a_r \neq 0$. E m possui, pelo menos 5 dígitos. Por definição,

$$F_{3,b}(m) = a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3.$$

Agora considere a diferença entre m e $F_3(m)$:

$$\begin{aligned}m - F_{3,b}(m) &= a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 - (a_r^3 + a_{r-1}^3 + \cdots + a_1^3 + a_0^3)\\ &= (a_r b^r - a_r^3) + (a_{r-1} b^{r-1} - a_{r-1}^3) + \cdots + (a_1 b - a_1^3) + (a_0 - a_0^3)\\ &= a_r(b^r - a_r^2) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + a_1(b - a_1^2) + a_0(1 - a_0^2).\end{aligned}$$

Seja $\alpha = a_r(b^r - a_r^2) + a_{r-1}(b^{r-1} - a_{r-1}^2) + \cdots + a_2(b^2 - a_2^2)$ e seja $\beta = a_1(b - a_1^2) + a_0(1 - a_0^2)$. Dessa forma, $m - F_3(m) = \alpha + \beta$. Note que $\alpha > 0$, pois $0 < a_i < b$ para todo $1 \leq i \leq r-1$ e $a_r \neq 0$. Note que o menor valor possível para α ocorre quando $r = 4$, $a_4 = 1$ e $a_3 = a_2 = 0$. Logo

$$\alpha = b^4 - 1 = (b-1)[b^3 + b^2 + b + 1].$$

E o menor valor possível para β ocorre quando $a_1 = b-1$ e $a_0 = b-1$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\beta &= (b-1).(b - (b-1)^2) + (b-1)(1 - (b-1)^2)\\ &= (b-1)[b + 1 - 2(b-1)^2]\\ &= (b-1)[-2b^2 + 5b - 1]\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}m - F_{3,b}(m) &= \alpha + \beta\\ &= (b-1)[b^3 + b^2 + b + 1] + (b-1)[-2b^2 + 5b - 1]\\ &= (b-1)[b^3 - b^2 + 6b]\\ &> 0.\end{aligned}$$

Portanto, $F_3(m) < m$ se $m > b^4$. □

Observação: note que, se $m \leq b^4$, é sempre possível analisar se m é feliz ou triste através de uma planilha(ver figuras 1 a 5 na seção Planilhas).

Corolário 4.7 *Segue do teorema 4.6 que para todo inteiro $m \geq b^4$ existe k tal que $F_{3,b}^k(m) \leq b^4$.*

Demonstração. Suponha que $F_{3,b}^k(m) > b^4$ para todo k. Segue do Teorema 4.6 que

$$m > F_{3,b}(m) > F_{3,b}^2(m) > F_{3,b}^3(m) > \cdots > F_{3,b}^i(m) > \cdots > b^4.$$

é uma sequência infinita de números inteiros estritamente decrescente limitada inferiormente. Claramente um absurdo. Portanto, existe k tal que $F_{3,b}^k(m) < b^4$. □

Corolário 4.8 *Sejam m e b números naturais com $2 \leq b < 6$. Então $F_{3,b}(m) < m$, para todo $m \geq b^3$.*

Demonstração. A demostração é análoga a demostração do Teorema 4.6. Basta observar, que neste caso,

$$\alpha + \beta = (b-1)[-b^2 + 6b].$$

E assim $m - F_{3,b}(m) > 0$ quando $2 \leq b < 6$. □

Teorema 4.9 *É sempre possível decidir se um número, na potência 3, é feliz ou triste, em qualquer base.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.7 dado um inteiro positivo $m \geq b^4$ existe k tal que $F_{3,b}^k(m) \leq b^4$. Portanto, basta analisar todos os números menores que b^4. □

5 Pontos Fixos

Nesta seção determinar os 3-pontos fixos da função felicidade, $F_{3,b}$, para bases $2 \leq b < 6$. E discutir métodos para determiná-los

Sejam $b > 2$ e $m > 1$ números inteiros. Um número inteiro positivo n é chamado de ponto m-fixo na base b quando $F_{m,b}(n) = n$. É usual, quando o contexto permite, dizer apenas que n é um ponto fixo.

Segue do Teorema 4.6 e da planilha em anexo, Figura 3, que o único número 3-fixo na base decimal é o 1. Por definição, o número 1 é 3-fixo em qualquer base, mas não necessariamente o único.

Exemplo 5.1 *Os números e e 371 são 3-fixos na base 10. De fato,*

$$F_3(1) = 1^3 = 1 \text{ e } F_3(371) = 3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371.$$

$\diamondsuit$

A seguir mostraremos que existem pontos n-fixos em outras bases, bem como podemos encontrá-los.

Teorema 5.2 *Todos os pontos fixos de uma base $b \geq 6$ são da forma*

$$[xyzw]_b = xb^3 + yb^2 + zb + w$$

e satisfazem a equação $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = xb^3 + yb^2 + zb + w$.

Demonstração. Segue do Corolário 4.7 que os pontos fixos da função $F_{3,b}$ se encontram no conjunto $\{1, 2, \ldots, b^4 - 1\}$. Como

$$b^4 - 1 = (b-1)b^3 + (b-1)b^2 + (b-1)b + (b-1),$$

temos que os possíveis candidatos a pontos fixos possuem entre 1 e 4 dígitos. Logo, se m é ponto fixo na base b, então m é da forma

$$m = [xyzw]_b = xb^3 + yb^2 + zb + w,$$

onde $0 \leq x,\ y,\ z\, w \leq b - 1$. Como $F_{3,b}(m) = F_{3,b}([xyzw]_b) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3$ e m é ponto fixo obtemos $F_{3,b}(m) = m = xb^3 + yb^2 + zb + w$, então

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = xb^3 + yb^2 + zb + w. \tag{1}$$

Portanto, os pontos 3-fixos na base b são determinados pela equação 1. $\square$

Exemplo 5.3 *Determinando os pontos fixos na base 13. Seja $\alpha = 10$, $\beta = 11$ e $\theta = 12$. Então os pontos fixos da função $F_{3,13}$*

$$1 = [1]_{13},\ 99 = [420]_{13},\ 190 = [491]_{13},\ 190 = [509]_{13} e\ 251 = [\beta 85]_{13}$$

$\diamondsuit$

Exemplo 5.4 *Determinando os pontos fixos na base 6. A função $F_{3,6}$ tem como pontos fixos*

$$1 = [1]_6,\ 99 = [243]_6,\ 190 = [514]_6 e\ 251 = [1055]_6$$

que são justamente as soluções da equação $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 216x + 36y + 6z + w$.

$\diamondsuit$

Teorema 5.5 *Todos os pontos fixos de uma base* $2 \leq b < 6$ *são da forma*

$$[xyz]_b = xb^2 + yb + z$$

e satisfazem a equação $x^3 + y^3 + z^3 = xb^2 + yb + z$.

Demonstração. Segue do Corolário 4.8 que os pontos fixos da função $F_{3,b}$ se encontram no conjunto $\{1, 2, \ldots, b^3 - 1\}$. Como

$$b^3 - 1 = (b-1)b^2(b-1)b + (b-1),$$

temos que os possíveis candidatos a pontos fixos possuem entre 1 e 3 dígitos. Logo, se m é ponto fixo na base b, então m é da forma

$$m = [xyz]_b = xb^2 + yb + z,$$

onde $0 \leq x,\ y,\ z \leq b - 1$. Como $F_{3,b}(m) = F_{3,b}([xyz]_b) = x^3 + y^3 + z^3$ e m é ponto fixo obtemos $F_{3,b}(m) = m = xb^2 + yb + z$, então segue que

$$x^3 + y^3 + z^3 = xb^2 + yb + z. \tag{2}$$

Portanto, os pontos 3-fixos na base b são determinados pela equação 2. $\square$

Do Exemplo 5.1, temos que 371 é um ponto 3-fixo na base 10, mas será que $371 = [2441]_5$ também é 3-fixo na base 5? Vamos verificar abaixo.

Exemplo 5.6 *Determinando os pontos fixos na base 5. Na base 5 a equação* 2 *do Teorema* 5.5 *pode ser escrita da seguinte maneira:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 25x + 5y + z. \tag{3}$$

onde $0 \leq x,\ y,\ z \leq 4$. *Com o auxílio de uma planinha eletrônica(ver figuras 1 e 2 na seção Planilhas) é fácil verificar que as únicas soluções da equação* 3 *são*

$$1 = [1]_5 \ \ 28 = [103]_5 \ \ e \ 118 = [433]_5.$$

Logo $371 = [2441]_5$ *não é um 3-ponto fixo na base 5.*

$\diamondsuit$

Exemplo 5.7 *Determinando os pontos fixos* $F_{3,4}$. *Observe que, pelo Teorema 5.5, todos os pontos fixos na base 4 satisfazem a equação*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 16x + 4y + z,$$

com $0 \leq x, y, z \leq 3$. *Com o auxílio da planinha eletrônica indicada abaixo é fácil verificar que as únicas soluções da equação são*

$$1 = [1]_4 \ \ 8 = [20]_4 \ \ 9 = [21]_4 \ \ 28 = [130]_4 \ \ 29 = [131]_4 \ \ 35 = [203]_4 \ \ 43 = [223]_4 \ \ 55 = [313]_4 \ \ e \ 62 = [332]_4.$$

Portanto 1, 8, 9, 28, 29, 35, 43, 55 e 62 são os únicos pontos 3-fixos na base 4.

$\diamondsuit$

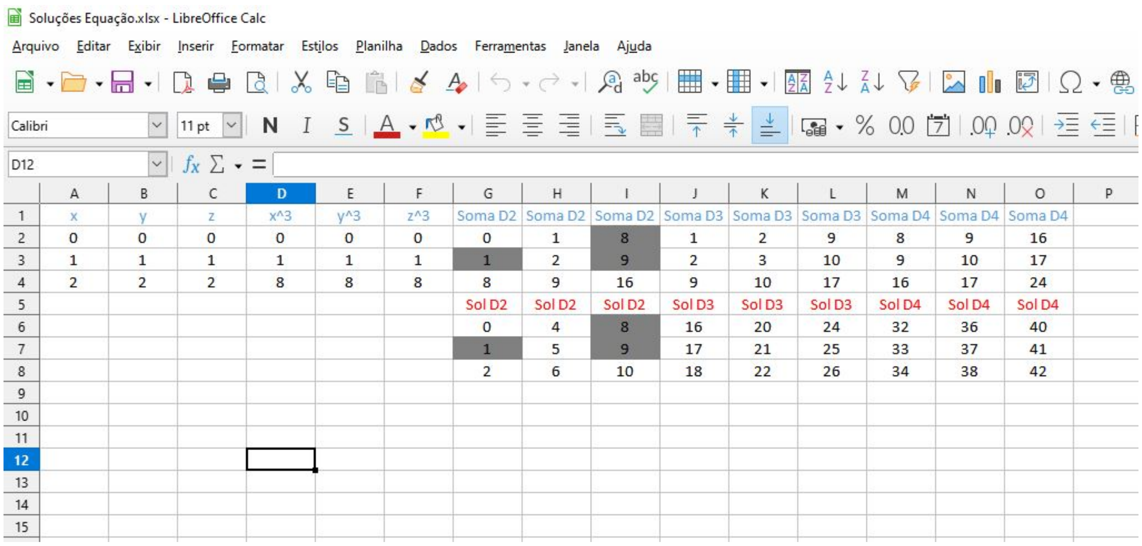
Exemplo 5.8 *Determinando os pontos fixos $F_{3,3}$. Observe que, pelo Teorema 5.5, todos os pontos fixos na base 3 satisfazem a equação*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 9x + 3y + z,$$

com $0 \leq x, y, z \leq 2$. Com o auxílio da planinha eletrônica abaixo é fácil verificar que as únicas soluções da equação são

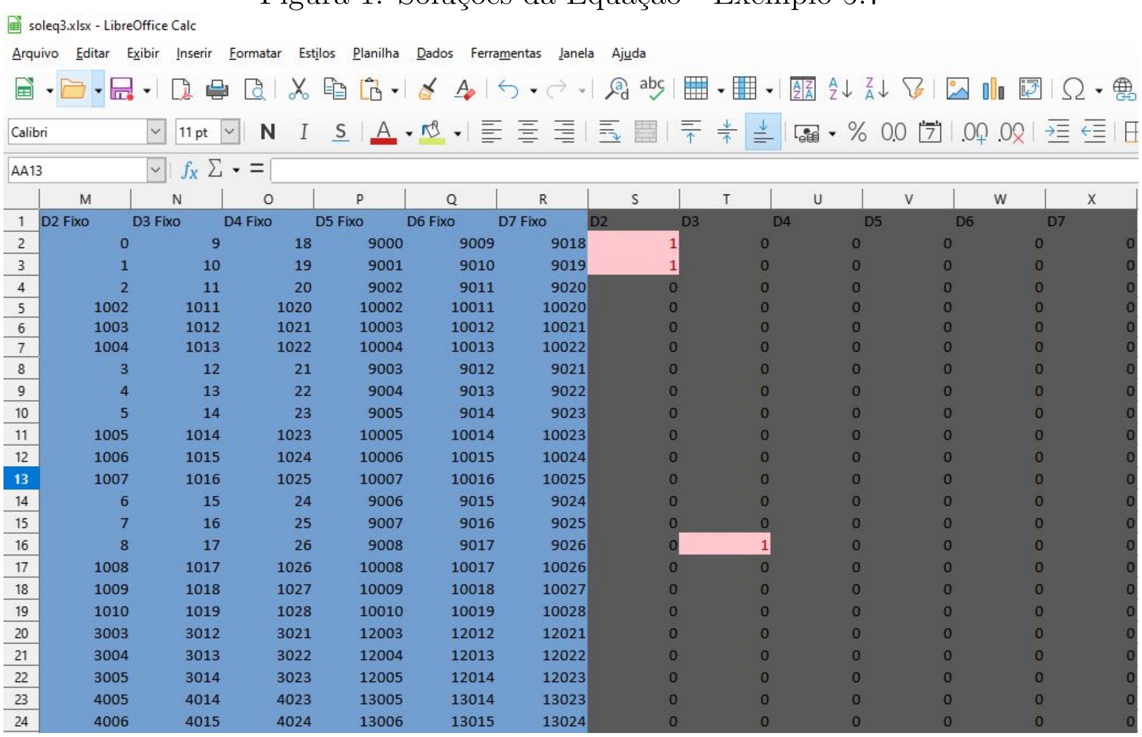
$$1 = [1]_4 \quad e \; 17 = [122]_3.$$

Portanto 1 e 17 são os únicos pontos 3-fixos na base 3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	x	y	z	x^3	y^3	z^3	Soma D2	Soma D2	Soma D2	Soma D3	Soma D3	Soma D3	Soma D4	Soma D4	Soma D4	
2	0	0	0	0	0	0	0	1	8	1	2	9	8	9	16	
3	1	1	1	1	1	1	1	2	9	2	3	10	9	10	17	
4	2	2	2	8	8	8	8	9	16	9	10	17	16	17	24	
5							Sol D2	Sol D2	Sol D2	Sol D3	Sol D3	Sol D3	Sol D4	Sol D4	Sol D4	
6							0	4	8	16	20	24	32	36	40	
7							1	5	9	17	21	25	33	37	41	
8							2	6	10	18	22	26	34	38	42	

Figura 1: Soluções da Equação - Exemplo 5.7



	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1	D2 Fixo	D3 Fixo	D4 Fixo	D5 Fixo	D6 Fixo	D7 Fixo	D2	D3	D4	D5	D6	D7
2	0	9	18	9000	9009	9018	1	0	0	0	0	0
3	1	10	19	9001	9010	9019	1	0	0	0	0	0
4	2	11	20	9002	9011	9020	0	0	0	0	0	0
5	1002	1011	1020	10002	10011	10020	0	0	0	0	0	0
6	1003	1012	1021	10003	10012	10021	0	0	0	0	0	0
7	1004	1013	1022	10004	10013	10022	0	0	0	0	0	0
8	3	12	21	9003	9012	9021	0	0	0	0	0	0
9	4	13	22	9004	9013	9022	0	0	0	0	0	0
10	5	14	23	9005	9014	9023	0	0	0	0	0	0
11	1005	1014	1023	10005	10014	10023	0	0	0	0	0	0
12	1006	1015	1024	10006	10015	10024	0	0	0	0	0	0
13	1007	1016	1025	10007	10016	10025	0	0	0	0	0	0
14	6	15	24	9006	9015	9024	0	0	0	0	0	0
15	7	16	25	9007	9016	9025	0	0	0	0	0	0
16	8	17	26	9008	9017	9026	0	1	0	0	0	0
17	1008	1017	1026	10008	10017	10026	0	0	0	0	0	0
18	1009	1018	1027	10009	10018	10027	0	0	0	0	0	0
19	1010	1019	1028	10010	10019	10028	0	0	0	0	0	0
20	3003	3012	3021	12003	12012	12021	0	0	0	0	0	0
21	3004	3013	3022	12004	12013	12022	0	0	0	0	0	0
22	3005	3014	3023	12005	12014	12023	0	0	0	0	0	0
23	4005	4014	4023	13005	13014	13023	0	0	0	0	0	0
24	4006	4015	4024	13006	13015	13024	0	0	0	0	0	0

Figura 2: Soluções da Equação - Exemplo 5.8

◇

Exemplo 5.9 *Segue do Teorema 5.5 que todos os 3-pontos fixos, na base 2, satisfazem a equação*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 2y + z,$$

com $0 \leq x, y, z \leq 1$. *É claro, que se* $x \neq 0$ *ou* $y \neq 0$ *teremos* $x^2 + y^2 + z^2 < 4x + 2y + z$. *Portanto, o único ponto fixo da função* $F_{3,2}$ *é o trivial*

$$1 = [1]_2.$$

◇

6 Planilhas

Vamos detalhar abaixo como foram criadas as planilhas utilizadas para cálculos com a função feliz($F_m(n)$), usadas ao longo deste trabalho.

Utilizamos, para tal, o software livre "LibreOffice". Vamos mostrar, primeiramente, como construir uma planilha para obtenção de números n-felizes na base 10. A planilha apresenta em sua primeira coluna a sequência dos números naturais e, então, cálcula os valores da função n-feliz a cada próxima coluna, para algum valor natural de n anteriormente especificado. Na sua última coluna indicamos se o número é n-feliz ou n-triste.

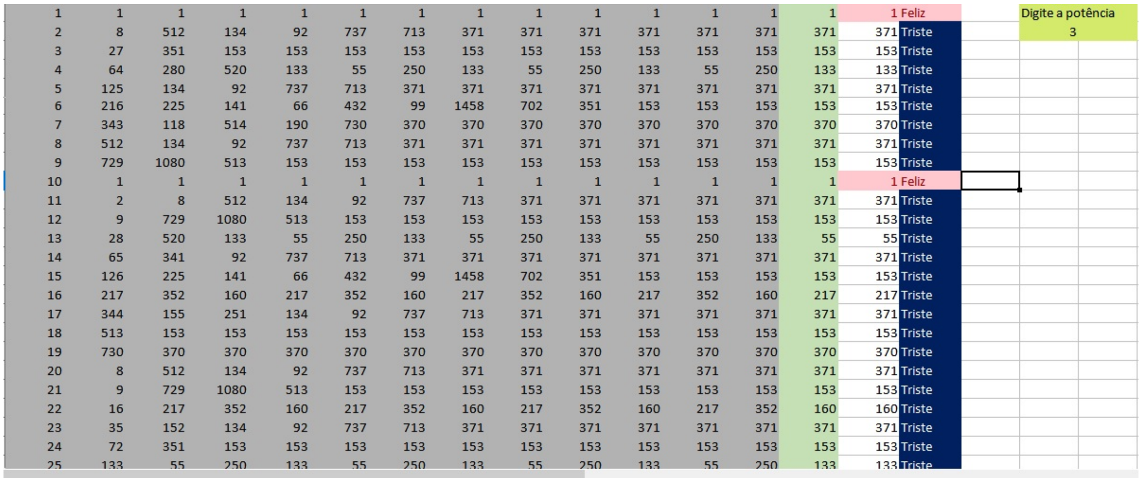
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	Digite a potência
2	4	16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	2
3	9	81	65	61	37	58	89	145	42	20	4	16	37	37	Triste	
4	16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	89	145	145	Triste	
5	25	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	145	145	Triste	
6	36	45	41	17	50	25	29	85	89	145	42	20	4	4	Triste	
7	49	97	130	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
8	64	52	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	
9	81	65	61	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	58	Triste	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
11	2	4	16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	58	Triste	
12	5	25	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	
13	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
14	17	50	25	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	58	Triste	
15	26	40	16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	58	Triste	
16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	89	145	42	42	Triste	
17	50	25	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	
18	65	61	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	
19	82	68	100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
20	4	16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	
21	5	25	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	89	Triste	
22	8	64	52	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	58	Triste	
23	13	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
24	20	4	16	37	58	89	145	42	20	4	16	37	58	58	Triste	
25	29	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	145	42	42	Triste	

Funcão Feliz Planilha1 Planilha3

Figura 3: Números 2-felizes

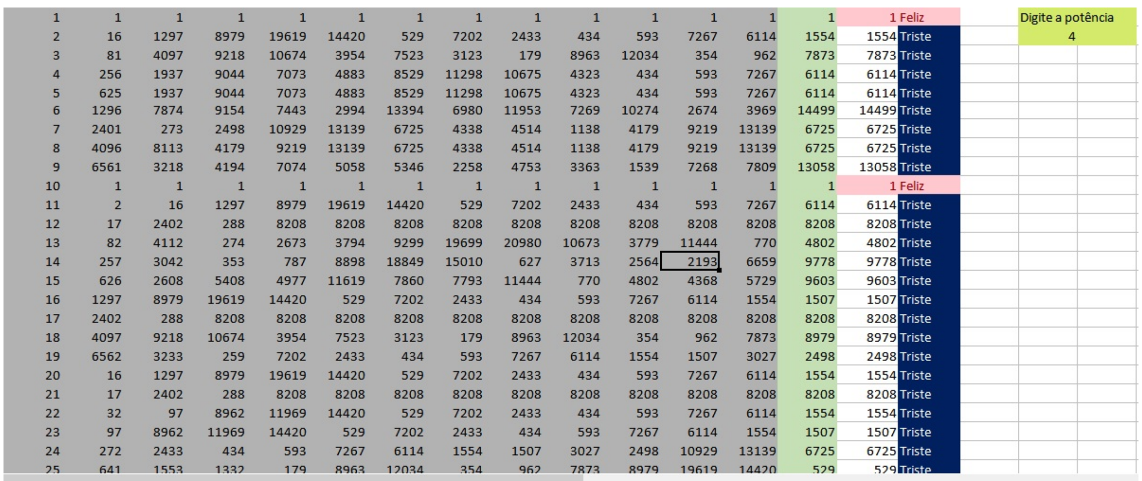
Ao utilizar a planilha também temos a opção de escolher a potêcia aplicada no cálculo da função feliz(cor verde), isto é, se estamos trabalhando com números 2-felizes, 3-felizes, etc.

O processo para construção dessa planilha consiste na inserção dos números naturais em sua primeira coluna, em ordem crescente. Em uma segunda coluna obtemos a potência utilizada na função felicidade para o primeiro algarismo, em uma próxima coluna obtemos a potência para o segundo algarismo e assim por diante. Para facilitar a leitura deixamos essas colunas ocultas. Em uma próxima coluna, que não iremos ocultar, obtemos a soma dessas colunas anteriores, que será o resultado da primeira iterada da função felicidade. Aplicamos o processo reiteradamente para a obtenção das demais iteradas, aumentando a quantidade de colunas se necessário. Note que, fixada a potência utilizada, o total de colunas é limitado, de acordo com o Corolário 3.21. A última coluna, indicada em verde, contém apenas valores dentro dos ciclos.



1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	Digite a potência
2	8	512	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	371	Triste	3
3	27	351	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	Triste	
4	64	280	520	133	55	250	133	55	250	133	55	250	133	133	Triste	
5	125	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
6	216	225	141	66	432	99	1458	702	351	153	153	153	153	153	Triste	
7	343	118	514	190	730	370	370	370	370	370	370	370	370	370	Triste	
8	512	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
9	729	1080	513	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	Triste	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
11	2	8	512	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
12	9	729	1080	513	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	Triste	
13	28	520	133	55	250	133	55	250	133	55	250	133	55	55	Triste	
14	65	341	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
15	126	225	141	66	432	99	1458	702	351	153	153	153	153	153	Triste	
16	217	352	160	217	352	160	217	352	160	217	352	160	217	217	Triste	
17	344	155	251	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
18	513	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	Triste	
19	730	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	370	Triste	
20	8	512	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
21	9	729	1080	513	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	Triste	
22	16	217	352	160	217	352	160	217	352	160	217	352	160	160	Triste	
23	35	152	134	92	737	713	371	371	371	371	371	371	371	371	Triste	
24	72	351	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	153	Triste	
25	133	55	250	133	55	250	133	55	250	133	55	250	133	133	Triste	

Figura 4: Números 3-felizes



1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	Digite a potência
2	16	1297	8979	19619	14420	529	7202	2433	434	593	7267	6114	1554	1554	Triste	4
3	81	4097	9218	10674	3954	7523	3123	179	8963	12034	354	962	7873	7873	Triste	
4	256	1937	9044	7073	4883	8529	11298	10675	4323	434	593	7267	6114	6114	Triste	
5	625	1937	9044	7073	4883	8529	11298	10675	4323	434	593	7267	6114	6114	Triste	
6	1296	7874	9154	7443	2994	13394	6980	11953	7269	10274	2674	3969	14499	14499	Triste	
7	2401	273	2498	10929	13139	6725	4338	4514	1138	4179	9219	13139	6725	6725	Triste	
8	4096	8113	4179	9219	13139	6725	4338	4514	1138	4179	9219	13139	6725	6725	Triste	
9	6561	3218	4194	7074	5058	5346	2258	4753	3363	1539	7268	7809	13058	13058	Triste	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Feliz	
11	2	16	1297	8979	19619	14420	529	7202	2433	434	593	7267	6114	6114	Triste	
12	17	2402	288	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	Triste	
13	82	4112	274	2673	3794	9299	19699	20980	10673	3779	11444	770	4802	4802	Triste	
14	257	3042	353	787	8898	18849	15010	627	3713	2564	2193	6659	9778	9778	Triste	
15	626	2608	5408	4977	11619	7860	7793	11444	770	4802	4368	5729	9603	9603	Triste	
16	1297	8979	19619	14420	529	7202	2433	434	593	7267	6114	1554	1507	1507	Triste	
17	2402	288	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	Triste	
18	4097	9218	10674	3954	7523	3123	179	8963	12034	354	962	7873	8979	8979	Triste	
19	6562	3233	259	7202	2433	434	593	7267	6114	1554	1507	3027	2498	2498	Triste	
20	16	1297	8979	19619	14420	529	7202	2433	434	593	7267	6114	1554	1554	Triste	
21	17	2402	288	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	8208	Triste	
22	32	97	8962	11969	14420	529	7202	2433	434	593	7267	6114	1554	1554	Triste	
23	97	8962	11969	14420	529	7202	2433	434	593	7267	6114	1554	1507	1507	Triste	
24	272	2433	434	593	7267	6114	1554	1507	3027	2498	10929	13139	6725	6725	Triste	
25	641	1553	1332	179	8963	12034	354	962	7873	8979	19619	14420	529	529	Triste	

Figura 5: Números 4-felizes

7 Proposta Didática

Uma reclamação comum de muitos estudantes de ensino fundamental e médio nos últimos tempos tem sido pela ausência por parte dos professores da apresentação de conteúdos que fujam ao currículo base. É bastante ausente a utilização de conteúdos pertinentes e que estimulem a imaginação dos alunos ao mesmo tempo. Todavia, uma reclamação comum de muitos professores é de que o currículo atual não entende o tempo em que vivemos, no qual os jovens utilizam cada vez mais redes sociais e sofrem com vasto estímulo visual e excesso de informações. Tendo este embate como referência, tentamos desenvolver uma proposta didádita sobre o tema dessa dissertação que traga assuntos pertinentes ao currículo base e, ao mesmo tempo, faz uso e propõe a elaboração de planilhas e algoritmos capazes de ajudar na solução de problemas.

Roteiro de Aula

Objetivos: apresentar ao aluno o conceito de números felizes, abordando conjuntamente sobre números naturais, representação posicional decimal, operações elementares, construção e elaboração de planilhas.

Escopo: Faça uma explicação breve em sala de aula sobre os números felizes, desde sua história até o cálculo da função 2-feliz. Dê exemplos e ajude-os a entender bem sobre o conceito. Estenda a expliação para números 3-felizes, 4-felizes, etc. Proponha que os alunos encontrem todos os números 2-felizes de 1 a 100. Repita o processo com números 3-felizes, 4-felizes, etc.

Aula 1

Utilize um ambiente dotado de computador e internet. Siga os passos referidos abaixo:

- Peça ou indique conteúdos na web sobre diferentes sistemas de representação, tais como o egípicio, o romano, o arábico, etc.
- Mostre algum exemplo de como fazer a transformação de uma base na outra, como de binário para decimal.

número binário	0	1	0	0	1
coluna	4	3	2	1	0
potências	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
base 2	0×2^4	1×2^3	0×2^2	0×2^1	1×2^0
resultado	0	8	0	0	1
somatória (decimal)	0 + 8 + 0 + 0 + 1 = 9				

- Mostre para eles as vantagens do sistema posicional e a importância do zero.
- Mencione o Algoritmo da Divisão de Euclides e os informe que é possível a inscrição de qualquer número em outras bases, além da decimal.
- Dê exemplos de números escritos na base 2 ou 5. Explique detalhadamente o processo.
- Abra o editor de planilhas do software LibreOffice ou outro editor de sua preferência. Peça-os para digitar os números de 1 a 100 na primeira coluna.
- Na segunda coluna, em sua primeira célula, obtenha o quadrado do primeiro algarismo do número da primeira coluna. Indique qual função usar no LibreOffice(ou editor que estiver utilizando).
- Na próxima coluna obtenha o quadrado do segundo algarismo. Repitao processo para as células abaixo(arrastando a função obtida na célula anterior). Faça o processo até a linha 100.
- Em uma próxima coluna, indique a soma dos valores das duas colunas anteriores. Repita o processo nas colunas subsequentes até obter o total de iterações maior que o ciclo da função 2-feliz.
- Em uma próxima coluna, crie uma fórmula condicional para texto que escreva se o número é feliz, que ocorrerá quando a última coluna for igual a 1 ou triste, caso contrário.

Aula 2

- Após a construção da planilha obtida na aula 1, analise os números de 1 a 100 para a função 2-feliz. Entre os resultados obtivos existem pontos fixos? Peça-os para indicar quais são. Repita o processo para a função 3-feliz, 4-feliz e assim por diante.
- Voltando aos números 2-felizes, peça-os para identificar a existência de algum ciclo.
- Questione e traga o argumento de o ciclo obtido para certo número pode não ser o mesmo para outro número, tampouco pode-se afirmar, antes de qualquer demonstração, que o ciclo sugerido vale para todos os números naturais.
- Repita o processo para números 3-felizes, 4-felizes, etc.

Referências

[1] Alan F. Beardon, *Sums of squares of digits*, The Mathematical Gazette, v. 82, p. 379-388, 1998.

[2] Esam El-Sedy e Samir Siksek, *On Happy Numbers*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v. 30, p. 565-570, 2000.

[3] Robert Styer, *Smallest Examples of Strings of Consecutive Happy Numbers*, v. 82, p. 279-388, 1998.

[4] Samanta A. Mutter, *Happy Numbers: An Exploration of An Iterated Function in Different Bases*, p. 11-21, 2010.

[5] Richard K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, v. 3, 2004.

[6] Hefez Abramo, *ARITMÉTICA. Coleção PROFMAT*, 2ª edição, p. 6-53, Rio de Janeiro, 2016.

[7] DA MATA C. RUDNEY, VELOSO O. MARCELO, *Números Felizes, Representação Posicional e Pontos Fixos*, Dissertação(Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de São João Del Rey, 2015.

[8] Arkell I. Ester, *GIZMODO: Why Happy Numbers are Also the Naughtiest Numbers in History, 2012*. Disponível em: https://gizmodo.com/why-happy-numbers-are-also-the-naughtiest-numbers-in-hi-5948138. Acesso em 04 de agosto de 2021.