

**ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA: uma análise de invariantes
operatórios nos esquemas cognitivos de crianças
dos anos iniciais do ensino fundamental**

**MATHEMATICS LITERACY: AN ANALYSIS OF OPERATORY
INVARIANTS COGNITIVE SCHEMAS OF CHILDREN FROM
THE EARLY YEARS OF EDUCATION**

Heitor Antônio Gonçalves*

Resumo

Este artigo busca identificar os invariantes operatórios utilizados na resolução de problemas matemáticos tendo como foco o cálculo mental. Foram investigadas 10 crianças da faixa etária entre 6-7 anos de idade. O principal referencial teórico que utilizamos foi a teoria dos campos conceituais do francês Gerard Vergnaud. Dessa teoria, utilizamos fundamentalmente os conceitos: campo conceitual, conceito, situações, esquemas e invariantes operatórios. A análise qualitativa associada à análise microgenética foi escolhida, uma vez que procuramos trabalhar com detalhes das situações observadas. Para a coleta dos dados, recorreremos à videografia (estudo das atividades por meio de filmagens em vídeo).

Os problemas apresentados aos sujeitos envolveram operações de adição e subtração. Entre outros resultados, evidenciamos em nossa pesquisa que o cálculo mental pode ser utilizado em problemas mais simples, envolvendo uma única operação e números pequenos, mas também pode ser usado em problemas de maior complexidade.

Palavras-chave: *Cálculo Mental, Invariantes Operatórias, Cotidiano.*

Abstract

Our research sought to identify the operational invariants used in solving mathematical problems by focusing on mental computation. We investigated 10 children aged between 6-7 years. The main theoretical framework we used was the theory of conceptual fields of Frenchman Gerard Vergnaud. From this theory, the primary concepts used were: conceptual field, concept, scenarios, diagrams and operatory invariants. Qualitative analysis, together with microgenetic analysis, was chosen since the article tries to work with the details of situations observed. To collect the data we used videography (study of activities through video footage). The problems presented to the individuals involved addition and subtraction. Among others findings, we noted that the mental computation can be for simpler problems, involving a single operation and small numbers, but can also be used in problems of greater complexity.

Key words: *Mental Computation, Operatory Invariants, Daily*

I Introdução

Em suas experiências diárias na escola e fora da escola, a criança utiliza vários campos conceituais a partir dos quais compreende e atua em diversas situações com cálculos e medidas, na escola, fazendo compras ou em brincadeiras. Esses campos conceituais são ampliados e modificados segundo a intensidade com que são utilizados. Em nossa pesquisa, estabelecemos como problema central de investigação a identificação e a caracterização de estruturas cognitivas constituintes desses campos conceituais, quais sejam, os **invariantes operatórios**, que compõem a base dos esquemas cognitivos que atuam na resolução de problemas matemáticos.

Estabelecemos como linha norteadora de nossa investigação caracterizar os invariantes operatórios no cálculo mental em problemas do cotidiano. Entendemos como problema do cotidiano aqueles que surgem no dia a dia das crianças, como comprar e pagar balas e doces, dar troco e contar dinheiro, quantificar e utilizar números em jogos e brincadeiras, compreender uma informação com dados matemáticos em um filme ou revista em quadrinhos etc.

Propomos a seguinte questão norteadora para o desenvolvimento da pesquisa: **“Quais são e como se caracterizam os invariantes operatórios utilizados na resolução de problemas matemáticos do cotidiano dos alunos, tendo como foco o cálculo mental?”**

O principal referencial teórico que elegemos é a teoria dos campos conceituais proposta pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud. Situamos nosso estudo dentro do campo da Educação Matemática, considerando que a psicologia cognitiva nos forneceu as principais ferramentas para o desenvolvimento da investigação.

Uma das principais razões para a escolha do cálculo mental como tema de nossa investigação se deu pelo fato de considerarmos que esse tipo de cálculo está presente em nosso cotidiano todas as vezes em que nos deparamos com situações-problema nas quais o conhecimento matemático se faz necessário para a solução desses problemas. Como exemplo, citamos os cálculos realizados em compras, em problemas escolares e em operações de contagem e medidas em brincadeiras.

2 Fundamentos Teóricos

O termo cálculo mental, segundo Gómez (1995), pode ser usado para designar o cálculo de cabeça ou de cor (sem ajuda externa). É tomado no sentido mais amplo, que inclui a adaptação mental dos artifícios formais e os métodos de recontagem. Quando se fala de métodos de cálculo mental, deve ser entendido que se trata dos métodos histórico-intrínsecos usados na literatura e que não se servem de outros dispositivos além da própria elaboração simbólica (p. 24). Ainda segundo Gómez (1995), o cálculo mental pode substituir o cálculo escrito na maioria das situações cotidianas em que não se requer uma calculadora, considerando que cada vez menos existem oportunidades para se usar cálculo escrito na vida diária. Não obstante a aritmética mental ser uma valiosa destreza, o conhecimento da *tabuada* e de operações básicas é essencial nesse tipo de cálculo (p. 32).

O cálculo mental torna-se importante devido ao papel que pode desempenhar quando é abordado na sala de aula como cálculo pensado, inteligente, lúdico e não somente como um conjunto de regras que simplesmente fomentam um grupo de habilidades. A escola hoje pede um ensino de exploração e reflexão, e não um ensino mecânico.

A aprendizagem do cálculo mental supõe a reflexão e a verbalização de diversas estratégias usadas em uma determinada operação. Para o professor na escola, será bom tirar proveito de erros, avaliar e reorientar o processo escolhido (DCB¹, 1989 *apud* Gómez, 1995, p. 34). Mostrar mais de uma regra que pode ser aplicada em uma situação é fundamentalmente algo promovido por meio do diálogo e da explicitação das diversas estratégias usadas na solução dos problemas que possuem um enunciado. Gomez ressalta ainda que o cálculo mental:

- a) contribui para a compreensão e o sentido do número ao se considerar a forma como é constituído;
- b) pode ser um domínio interessante para contrastar as concepções dos estudantes com os procedimentos de cálculo e seu envolvimento com a matemática;
- c) enriquece e flexibiliza a experiência e a compreensão algorítmica ao trabalhar com regras histórico-culturais vinculadas a propriedades estruturais fundamentais (associatividade e distributividade); também pode estimular a procura de soluções por caminhos alternativos de cálculo;
- d) pode influenciar no desenvolvimento de capacidades cognitivas, uma vez que favorece a versatilidade e a independência de procedimentos;
- e) estimula a análise de situações numéricas, bem como pode ser objeto de estudo em si mesmo, em um enfoque de aritmética generalizada (estimular a generalização dos processos descobertos); e

f) pode dar uma visão participativa da matemática, pode ser lúdico, já que sua componente divertida e desafiadora dá lugar a uma grande diversidade de jogos na matemática recreativa.

Sintetizando uma definição, consideramos cálculo mental como aquele realizado sem nenhum aparato material como lápis, papel ou algum tipo de instrumento de cálculo, definição essa que também compartilhamos e utilizamos em nosso trabalho de pesquisa.

Com relação à fundamentação teórica que nos permite analisar os invariantes operatórios, escolhemos a teoria dos campos conceituais como aporte principal. Ampliando o foco da abordagem piagetiana sobre o raciocínio lógico-matemático, o psicólogo francês Gerard Vergnaud estabelece uma ligação com a perspectiva vigotskiana e elabora a teoria dos campos conceituais, cujo principal objetivo é compreender as filiações e as rupturas na formação do conhecimento de crianças e adolescentes. Na perspectiva de Vergnaud (1996), deve-se entender como “conhecimentos” tanto as habilidades de resolver problemas matemáticos quanto compreender as informações expressas (Vergnaud, 1993, p. 82).

Um argumento essencial a favor do estudo de campos conceituais, mais que de conceitos isolados, é: 1) um conceito ganha sentido em situações de grande variedade; 2) não se analisa uma situação graças a um conceito único, mas graças a um conjunto deles; e 3) os mesmos aspectos de um conceito não são necessariamente adequados para tratar diferentes situações ou para realizar diferentes procedimentos de tratamento.

Com relação aos invariantes operatórios, Vergnaud e Laborde (1994) esclarecem que, aos seis anos, a criança dispõe de poucas competências matemáticas. No entanto, na base dessas competências estão conhecimentos matemáticos implícitos profundos que servirão de alicerce para a construção de todo o edifício. Tais conhecimentos, os invariantes operatórios, podem ser analisados como conceitos-em-ação (coleção, cardinal, união, soma etc.) e como teoremas-em-ação (o algoritmo da soma, por exemplo). Vamos caracterizá-los sucintamente:

1) Teoremas-em-ação: são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos. Os teoremas-em-ação constituem o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem em sua vida diária e “tal conhecimento, forjado durante a experiência cotidiana, é a base sobre a qual o ensino de

matemática deve ser construído”.

2) Conceitos-em-ação: não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas são indispensáveis à construção das proposições. Esses conceitos poucas vezes são explicitados pelos alunos, embora sejam construídos por eles na ação. Segundo Vergnaud e Laborde (1994), a função dos conceitos-em-ação é antes de tudo uma função de seleção: reter da situação apresentada o que é necessário e suficiente para se alcançar o objetivo.

Os *invariantes operatórios* se associam às *situações e representações simbólicas* para constituir o *conceito*. Assim, o conceito é formado pela tríade $C = (S, I, R)$, em que:

S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito, ou seja, que tornam o conceito significativo (a referência), apresentando, em geral, certa diversidade;

I: conjunto de invariantes – objetos, propriedades e relações – nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas e que podem ser reconhecidos e utilizados pelo sujeito (Magina, 2001) para analisar e dominar as situações (o significado); há também uma diversidade de aspectos a considerar;

R: conjunto das representações simbólicas, pertencentes e não-pertencentes à linguagem, usadas para caracterizar e representar os invariantes, e, portanto, permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). Como consequência, permite tratar as situações de referência e as operações de pensamento necessárias à simbolização (Vergnaud, 1988, p. 33).

3 Metodologia Utilizada

A abordagem qualitativa foi escolhida para a pesquisa, tendo em vista os objetivos de compreender *como* o conhecimento surge nas interações entre os sujeitos e as situações-problema. O trabalho de campo baseou-se nos princípios da pesquisa qualitativa que, segundo Bogdan e Biklen (1994), são os seguintes: a) o ambiente natural é a fonte direta dos dados, sendo o investigador o principal

instrumento; b) os dados são apresentados de forma descritiva e analisados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos; c) o interesse da investigação qualitativa está mais no processo do que nos resultados ou produtos; e d) a análise é feita de forma indutiva e as interpretações são construídas à medida que os dados particulares, que foram recolhidos, vão se agrupando.

Complementamos com D'Ambrósio (1996), que afirma que a abordagem qualitativa tem como elemento central o indivíduo

com toda sua complexidade e na sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural. O referencial teórico, que resulta de uma filosofia do pesquisador, é intrínseco ao processo (p. 103).

Em nossa pesquisa, trabalhamos com 10 crianças, na fase de alfabetização escolar com idades de 6 e 7 anos, sendo cinco crianças do primeiro ano e cinco do segundo ano do Ensino Fundamental, todas pertencentes a uma mesma escola pública de área urbana de classe economicamente desfavorecida. Escolhemos para investigação alunos com idades de 6 e 7 anos, considerando que esta fase marca o início de uma etapa escolar e considerando o fato de os conteúdos básicos da matemática, sistema decimal e operações fundamentais, terem sua base conceitual formada nessa fase da infância. Além disso, esta pesquisa teve caráter complementar a uma pesquisa realizada anteriormente com crianças de 10 - 11 anos de idade.

Na coleta e na análise de dados, recorreremos à videografia (estudo por meio de filmagens em vídeo) das entrevistas e das atividades no horário de recreio dos alunos. As entrevistas seguiram o “método clínico” piagetiano, o que permitiu, entre outros, acrescentar às questões trazidas pelo pesquisador as manifestações das crianças que julgamos relevantes à nossa investigação. Com relação à coleta de dados no horário do recreio, fizemos um estudo exploratório inicial para identificar as situações que puderam contribuir efetivamente para a investigação, considerando os nossos objetivos.

A videografia foi associada à análise microgenética que, segundo Meira (1994), “combinam-se para formar um modelo de coleta e análise de dados que permite uma interpretação mais robusta e consistente dos mecanismos psicológicos subjacentes à atividade humana” (p. 59). A análise

microgenética justifica-se, uma vez que procuramos trabalhar com detalhes das situações observadas. Góes (2000) salienta que essa é uma forma de construção de dados

que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos (p. 9).

Ao discutir o significado da análise microgenética, Góes (2000) ressalta que não é *micro* por se referir à curta duração dos eventos, mas porque é orientada para minúcias indiciais, o que provoca recortes num tempo que tendem a ser restritos (p. 14). É *genética* no sentido de ser histórica, “por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura” (p. 15).

Siegler (1996) enfatiza que os métodos microgenéticos têm três características essenciais: a) as observações cobrem o período de mudança rápida na competência em causa; b) a densidade das observações é alta relativamente ao ritmo da mudança na competência; e c) as observações são sujeitas a uma análise intensiva, tentativa a tentativa, com o objetivo de inferir os processos que deram origem à mudança (p. 263).

As videograções utilizadas atenderam adequadamente aos objetivos de melhorar a precisão ou coerência na apreensão do fenômeno por parte do observador. Segundo Carvalho *et al.* (1996), a videografia possibilita a exposição repetida do observador à mesma ocorrência do observado e, por essa mesma razão, ela amplifica a capacidade de análise uma vez que possibilita ao observador repensar o observado (p. 261).

Na análise dos invariantes operatórios, os esquemas cognitivos foram expostos em quadros dentro dos quais foram identificados os invariantes operatórios utilizados por cada sujeito. Essa análise foi realizada ao final de cada entrevista e seguiu a cronologia das questões. Os quadros de análise têm os seguintes itens: a *situação problema*; o *esquema* utilizado pelo sujeito; os *teoremas-em-ação*; os *conceitos-em-ação* subjacentes aos teoremas-em-ação. Junto aos teoremas-em-ação, foram dispostos nos quadros os fragmentos de referência relacionados às transcrições.

Como a nossa análise foi realizada a partir das manifestações orais e gestuais dos sujeitos, colocamos os fragmentos das transcrições das videografias como ponto de partida para a discussão dos quadros dos invariantes. Isso permitiu que uma apresentação das manifestações dos

sujeitos e a identificação dos invariantes fossem justificadas no decorrer do texto da transcrição.

4 Análise dos Resultados

Estabelecemos uma definição dos diversos tipos de invariantes operatórios identificados nas entrevistas. Para analisar os invariantes operatórios utilizados pelos sujeitos, pautamo-nos em alguns parâmetros que nos serviram de guia sem que fizéssemos usos obrigatórios destes na análise de todos os invariantes, mesmo porque alguns dos parâmetros não eram pertinentes em todas as situações. São eles: a *frequência* com que o invariante operatório foi usado; a *eficiência* alcançada pelo sujeito no seu uso; as possíveis *variações*; a *comparação* dos usos entre os sujeitos da dupla; a *relação* com a complexidade da questão; e a *colocação do invariante focalizado na sequência de invariantes*, antes de qual invariante e depois de qual invariante se situa o invariante focalizado.

Considerando o caráter exploratório desta análise, salientamos que os invariantes identificados podem não ser os únicos subjacentes aos esquemas dos sujeitos, pois não tivemos a pretensão de esgotar todas as identificações possíveis.

4.1 Os Invariantes Operatórios Identificados

Para este artigo, escolhemos as entrevistas da dupla Juliana e Carlos para uma discussão mais completa. Esta escolha se deu pelos dados adequados para este tipo de apresentação. Vamos explicitar inicialmente os invariantes operatórios identificados e, logo em seguida, expô-los em um quadro com a respectiva análise.

Os invariantes operatórios identificados como teoremas-em-ação, na entrevista de Juliana e Carlos, analisada mais à frente em nosso texto, são os seguintes:

a) a *bijeção*, identificada em todos os sujeitos de nossa pesquisa, caracteriza-se pela correspondência biunívoca do conjunto dos dedos sobre o conjunto dos números. A *bijeção* foi utilizada na maioria das contagens e, segundo seus usos pelos sujeitos de nossa pesquisa, tem as seguintes finalidades: i) auxiliar na delimitação do número de parcelas a serem consideradas para o cálculo; ii) controlar a quantidade de parcelas previstas pelo sujeito na relação entre o conjunto de números de referência e o conjunto a ser contado; e iii) auxiliar a memória, principalmente nos casos em que os números são grandes ou mais complexos.

b) A *composição aditiva*, que quase sempre está associada à *bijeção*, surge como um invariante que permite adicionar valores iguais ou diferentes a partir de um referente maior que zero para a primeira soma realizada. Consideraremos também,

como composição aditiva, as adições que se iniciam sem um referente e têm parcelas com valores diferentes.

c) A *correspondência* se estabelece entre elementos de conjuntos de números de ordem de grandezas diferentes. Essa propriedade permite que as operações matemáticas sejam realizadas pelos sujeitos dentro de uma ordem de grandeza que eles dominem.

d) A *atribuição de resultado equivalente* é um teorema-em-ação que permite a equiparação entre os resultados das somas dos elementos de conjuntos de grandezas diferentes como os totais de dedos e de parcelas. A diferença fundamental entre a *correspondência* e a *atribuição de resultado equivalente* é que a correspondência se estabelece entre elementos (parcelas) do conjunto de números a serem somados e a *atribuição de resultado equivalente* se estabelece entre totais.

e) A *composição subtrativa* é o teorema-em-ação que permite realizar subtrações. É inerente a esse cálculo o valor limite como parâmetro máximo para o minuendo. A composição subtrativa tem como base também o estado inicial de parcelas a subtrair e o parcelamento subtrativo.

f) A *decomposição* é o teorema-em-ação que permite separar a parte inteira da parte decimal dos números.

No estudo que realizamos, identificamos os seguintes conceitos-em-ação na entrevista de Juliana e Carlos:

a) a *correlação* está na base do teorema-em-ação da bijeção e permite a correspondência entre números e dedos da mão, possibilitando o parcelamento das quantidades a partir das quais os sujeitos realizaram as operações aritméticas. Esse conceito-em-ação marca o início das sequências que permitiram o avanço, auxiliado pelos dedos da mão, em direção aos cálculos com as partes decimais e inteiras, nos problemas que exigiram tal procedimento.

b) O *estado inicial de parcelas a adicionar* é um conceito utilizado quando os sujeitos percebem que há unidades/parcelas a adicionar e que elas serão transformadas por outros acréscimos que lhes serão efetuados. Esse conceito-em-ação marca o início de um cálculo mental e se repetirá se outro cálculo mental diferente for iniciado.

c) A *iteração aditiva* esteve presente nas diversas situações em que os sujeitos adicionam parcelas iguais. Encontra-se na base dos teoremas-em-ação da recorrência e da composição aditiva com parcelas iguais. A iteração aditiva leva a efeito as adições necessárias em cada etapa de cada situação-problema colocada aos sujeitos e por isso encontra-se presente em todas as questões e algumas vezes com repetição.

d) O *valor limite* estabelece limites superiores para os cálculos e funciona como parâmetro para as composições aditivas e recorrências de adições sucessivas que têm um total limite para a operação de adição.

e) A *equivalência* é um conceito importante para a correspondência entre parcelas de números diferentes, na atribuição de resultados equivalentes e para números em correspondência que têm ordem de grandezas diferentes. Esse conceito permite aos sujeitos trabalharem com números de ordem de grandezas diferentes, assim como denominadores de operações diversas, mas que estão em correspondência. Assim, a equivalência é um conceito que permite a correspondência entre totais (denominadores) e a correspondência entre partes de números. Nos quadros dos invariantes operatórios, foram identificadas as seguintes equivalências: i) equivalência entre números de ordem de grandezas diferentes; ii) equivalência entre quantidades de mesmo valor com referentes diferentes; e iii) equivalência entre denominadores de conjuntos de grandezas diferentes, subjacente ao teorema-em-ação da atribuição de resultado equivalente de dois totais de categorias.

f) O *estado inicial de parcelas a subtrair* é um conceito-em-ação subjacente à composição subtrativa. Esse conceito permite a subtração de duas parcelas, sendo o limite conhecido pelo sujeito antes de iniciar o cálculo. É utilizado quando há unidades/parcelas a subtrair.

g) O *parcelamento subtrativo* é um conceito-em-ação subjacente às composições subtrativas entre duas quantidades que devem ser subtraídas.

h) A *relação parte/todo* está na base do teorema-em-ação da decomposição e permite o reconhecimento da relação parte/todo a partir de suas partes decompostas. Esse conceito-em-ação tem a característica de permitir o início dos cálculos quando os sujeitos realizam as operações matemáticas com valores inteiros e os centavos são considerados inteiros a partir da decomposição de números em partes decimais e inteiras.

4.2 Discussão das Análises

Para que o método que utilizamos em nossa pesquisa fique claro, vamos mostrar os passos mais detalhados relacionados apenas à análise da primeira entrevista, considerando que o mesmo processo foi realizado nas demais entrevistas. Escolhemos para exemplificar a Questão 3 da entrevista de Juliana e Carlos.

Questão 3 – Para ir a um jogo, os 6 jogadores de um time iam de van, porém no dia do jogo faltaram 2. Quantos jogadores irão de van?

Carlos repete “são 6”. O entrevistador confirma que um time só é 6. Mas supõe que no dia faltaram 2 jogadores, e pergunta “quantos que vão entrar na van?”. Juliana e Carlos fazem os cálculos com a ajuda dos dedos. Juliana coloca primeiro 6 dedos, os 5 da mão esquerda e o indicador da mão direita. Quando ouve do entrevistador “faltaram 2”, ela mostra 2 dedos da mão direita – aproveitando o dedo indicador que completava a quantidade de 6 jogadores mais o dedo médio. Depois Juliana tira esses 2 dedos da mão direita, restando os 5 dedos da mão esquerda. Aparentemente Carlos fez a mesma coisa, pois responde rapidamente o mesmo que Juliana. Carlos diz “fica 5”. O entrevistador pergunta

novamente, “quantos?”. Os alunos respondem ao mesmo tempo, “5”.

Questão 3- Quadro 3 (numerações da questão e quadro como no original)			
SITUAÇÃO-PROBLEMA	ESQUEMA	TEOREMA-EM-AÇÃO	conceito-EM-AÇÃO
Calcular a quantidade de jogadores de um time de vôlei com 2 jogadores ausentes	Subtrair 2 parcelas unitárias a partir do valor de referência 6	<p>Juliana</p> <p>Ref.: (...) Juliana coloca primeiro 6 dedos, os 5 da mão esquerda e o indicador da mão direita. Quando ouve do entrevistador “faltaram 2”, ela mostra 2 dedos da mão direita – aproveitando o dedo indicador que completava a quantidade de 6 jogadores mais o dedo médio. Depois Juliana tira esses 2 dedos da mão direita, restando os 5 dedos da mão esquerda. Os alunos respondem ao mesmo tempo, “5”.</p> <p>-correspondência entre os números/partes sugeridas e os dedos da mão</p> <p>-bijeção nome do numeral/gesto dos dedos para cada elemento do conjunto</p> <p>-composição aditiva de 1 unidade (dedo médio) aos 6 jogadores, resultando em 7 dedos</p> <p>-composição subtrativa de 7 dedos (7 jogadores do time de vôlei), tirando 2 dedos (2 jogadores), resultando em 5 dedos</p>	<p>-equivalência entre números de ordens de grandeza diferentes</p> <p>-correlação entre 1 dedo e 1 unidade</p> <p>-estado inicial de parcelas a adicionar</p> <p>-valor limite</p> <p>-estado inicial de parcelas a subtrair</p>

			-valor limite
			-parcelamento subtrativo

Destacamos aqui, na entrevista de Juliana e Carlos, que, ao solicitarmos o cálculo da quantidade de jogadores de um time de vôlei com 2 jogadores ausentes, os dois alunos utilizaram os mesmos esquemas cognitivos para desenvolver o cálculo e demonstraram isso pela mesma maneira como utilizaram os dedos.

O “erro” foi por nós interpretado como uma necessidade de ver a quantidade 2 expressa nos dedos, assim como a quantidade 6 foi expressa anteriormente; porém, eles não percebem que utilizam uma unidade da primeira quantidade para constituir a segunda quantidade, provocando um cálculo “incorreto”.

Pedimos, então, para eles calcularem a quantidade de jogadores de vôlei acrescentando mais 2 jogadores ao valor de referência 5. Insistimos na continuidade da questão, pois acreditamos que os sujeitos, na maioria das vezes, não se prendem a contextos, como o número ideal de jogadores de vôlei para formar um time, e, sim, consideram os números e os cálculos. Juliana mostrou-se concentrada, e com o auxílio dos dedos solucionou o cálculo rapidamente, enquanto que Carlos apenas repetiu o resultado proposto pela menina.

Carlos e Juliana realizaram cálculos de forma consciente, refletindo sobre a estratégia e dando o resultado logo em seguida. No que diz respeito à subtração e à adição, eles solucionaram as situações sem grandes dificuldades. Uma estratégia comum entre eles foi a contagem nos dedos, e ambos a fizeram permitindo que o entrevistador visualizasse o processo. A competitividade foi perceptível entre os alunos na solução das situações-problemas. Algumas vezes, querendo ser mais rápido que Juliana, Carlos se perdeu e realizou o cálculo posteriormente à aluna.

Os alunos demonstraram ter contato em seu cotidiano com valores monetários. Juliana afirmou que comprava salgadinhos, chocolates etc. Carlos, por sua vez, afirmou que comprava chiclete, balas e pipoca. No entanto, esses dois sujeitos mostraram que não tinham conhecimentos e habilidades com o cálculo envolvendo uma quantidade maior de mercadorias e o valor verdadeiro de

determinadas unidades, fazendo confusão, por exemplo, entre 10 centavos e 10 reais.

Uma outra dupla, composta pelos alunos Alê e Helena, apresentou grande desembaraço para resolver situações-problema no que diz respeito ao conhecimento matemático, tanto em situações que envolveram a subtração como naquelas que envolveram a adição. Os dois alunos conseguiram resolver situações-problema que envolveram cálculo com o dinheiro. Helena fez cálculos com quantias pequenas, com valores inteiros, porém relativos aos valores decimais, como para compra de balas que custavam R\$0,10 cada. Alê, por sua vez, realizou com certa facilidade situações com valores pequenos, como comprar balas que custam R\$0,05 cada duas unidades, e relativamente altos, como comprar misto quente no valor de R\$1,50 cada, ou seja, ele realizou cálculos tanto com valores decimais associados aos valores inteiros quanto com valores originalmente inteiros.

Alê, comparado com Helena e com todas as outras crianças entrevistadas, demonstrou maior facilidade de expressar seu cálculo mental, explicando, com detalhes, as estratégias que utilizou para calcular. Além disso, ele se mostrou altamente competitivo, procurando dar as respostas rapidamente, o que, de certa forma, incentivou Helena. Como exemplo, citamos uma passagem da entrevista de Alê:

A entrevistadora fala “para comprar um misto quente para você e outro para a Helena você precisou de R\$3,00. Mas agora eu vou querer 1 também. Quanto que vai dá?” Alê repete “quantos que vai dá?” A entrevistadora continua “Então vai ser um misto quente pra mim, um pra Helena e um pra você...” Antes da entrevistadora terminar de explicar a situação, ele responde “R\$4,50... R\$4,50...” A entrevistadora diz “R\$4,50? Como que você fez isso, mostra pra mim...” Alê fala “é assim, oh, na cabeça... R\$3,00, agora é 2. 3 né? Ai mais R\$1,50. Ai... Agora 3 mais 1 é 4. Agora mais 50 do seu misto também. Ai é R\$4,50”.

Em nossa investigação, todas as duplas conseguiram solucionar as situações-problemas propostas pelos entrevistadores, uns com mais facilidade e outros com menos facilidade. Cada criança possui particularidades na forma de pensar e cada uma constrói, à sua maneira, seus conceitos, suas estratégias de cálculo e desenvolve habilidades para solucionar situações-problemas, principalmente aquelas que aparecem em seu cotidiano.

Cabe destacar ainda que, de acordo com Gonçalves (2008), a formação de um conceito em especial, se é feita por meio de atividades de resolução de problema, cobre em geral um longo período de tempo, com muitas interações e muitas reconstruções. Não se pode compreender o

significado dos erros ou os procedimentos de uma criança de 13 anos se não se conhece a maneira como se formaram suas concepções e as suas competências à idade de 8 ou 9 anos, e a forma como essas concepções e competências evoluíram mediante uma mistura de situações, de definições, de interpretações e de representações simbólicas (Vergnaud, 1990, p. 62).

A ideia de situação, nesta pesquisa, segue a mesma ideia utilizada em pesquisa por nós realizada anteriormente.

[A situação] não deve ser tomada na sua acepção ampla e sim no sentido que os psicólogos lhe dão habitualmente: as situações com as quais o sujeito se confronta é que determinam seus processos cognitivos e suas respostas (Vergnaud, 1990, p. 75).

Segundo Inhelder e Caprona (1992), para pesquisas que se propõem analisar detalhadamente condutas cognitivas individualizadas, convém definir um tipo de experimentação que permita desencadear um processo longo. Para os autores, na noção de microgênese, encontra-se a ideia de pesquisar numa outra escala temporal diferente da macrogênese, mas, principalmente, analisar as condutas cognitivas com o maior pormenor possível e em toda a sua complexidade natural (p. 25). Em nossa pesquisa, desenvolvemos uma análise na perspectiva microgenética, pois acreditamos que, para compreender e identificar aspectos cognitivos, é necessário acompanhar o processo do raciocínio detalhadamente e, dessa maneira, compreender e identificar os invariantes operatórios nos esquemas cognitivos das crianças na fase de alfabetização.

5 Conclusão

Em nossa pesquisa, a questão geradora “**Quais são os invariantes operatórios utilizados na resolução de problemas matemáticos do cotidiano dos alunos, tendo como foco o cálculo mental?**” foi a base para identificarmos os invariantes operatórios presentes no cálculo mental de crianças de 6-7 anos de idade, em fase de alfabetização, por meio de resolução de situações-problemas retiradas de seu cotidiano. Isso nos permitiu apresentar considerações e reflexões de como o conhecimento matemático pode ser expresso pelas crianças e, principalmente, compreendido pelo professor, a fim de que a ação educativa busque a compreensão do processo realizado no cálculo, e não apenas o resultado apresentado.

O uso dos dedos como apoio aos cálculos mostrou ser um recurso “natural” para auxílio do cálculo: foi utilizado como forma de apoio em contagens, ordenações e comparações. Percebemos que a utilização dos dedos é variável em suas formas e os sujeitos que tiveram um bom desempenho também utilizaram os dedos, mostrando que esse recurso não pode ser associado ao “mau” desempenho dos alunos ou às suas dificuldades. Um fator importante é que, para cálculos mais complexos, é fundamental conhecer o funcionamento do sistema decimal. O uso dos dedos tem base no teorema-em-ação da bijeção.

Nos invariantes operatórios identificados, percebemos a complexidade das estruturas cognitivas utilizadas pelos sujeitos. Os resultados apontam também o quanto as proposições de Vergnaud permitem compreender os processos pelos quais os sujeitos realizaram as operações matemáticas. Os invariantes operatórios subjacentes aos esquemas empregados pelos sujeitos mostram as diversas relações, inferências e noções aplicadas por eles, assim como o patamar de elaboração em que elas se encontram.

Os invariantes operatórios formaram uma sequência ordenada dentro de cada cálculo, “na qual” ou “em que” existe uma interação entre os diversos teoremas-em-ação, permitindo que os cálculos se constituam em etapas articuladas. Os invariantes operatórios utilizados pelos sujeitos foram os mesmos em diversas circunstâncias, sugerindo uma certa regularidade no grupo de sujeitos com os quais investigamos. Também constatamos mudanças em alguns sujeitos, que optaram por esquemas diferentes do original.

Acreditamos que, na escola, o cálculo mental pode ser o ponto de partida, mas também o ponto de chegada para o ensino da matemática, considerando que um dos objetivos de uma educação matemática significativa é promover a autonomia dos alunos. Evidenciamos em nossa pesquisa que o cálculo mental pode ser utilizado em problemas mais simples, envolvendo uma única operação e números pequenos, mas também pode ser usado em problemas mais sofisticados. O início da aprendizagem da matemática, seja na fase da alfabetização matemática ou após essa fase, no trabalho com conceitos matemáticos mais avançados, pode ser acompanhada, durante todo o tempo, com o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, desde as mais simples até as mais avançadas. A simples menção por parte da criança a algum tipo de operação ou procedimento deve ser considerada.

É interessante destacar que quase todas as questões foram resolvidas utilizando processos aditivos. Devemos reconhecer que as soluções apresentadas pelos sujeitos tiveram, sim, uma base no conhecimento escolar, mas também utilizaram esquemas cuja articulação e aplicação seguiram um caminho próprio dentro da resolução de cada problema. Uma das conclusões a que chegamos é que, em situações do cotidiano, com problemas que envolvem quantidades e dinheiro, as crianças utilizam basicamente as estruturas aditivas.

Ainda com relação às estruturas aditivas, percebemos que seu uso insistente pode ser um indício da necessidade de se explorarem com os alunos outras possibilidades não só de operações, como também de outros esquemas que possam permitir um cálculo mental mais eficiente. Devemos lembrar que os conceitos se formam a partir das situações em que são empregados. Assim, deve o professor aplicar um conjunto de atividades que contribuam para a formação de estruturas cognitivas específicas, em menor escala, como se preocupar também com os campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Contudo, consideramos que é de grande importância nas atividades pedagógicas levar em conta o conhecimento cotidiano do aluno, aquele que ele traz consigo de suas experiências fora da escola. Os resultados de nossa análise mostraram um conhecimento diversificado e alternativo com relação àquele que é tratado na escola. Acreditamos ser muito saudável um “entrar e sair” no dia a dia do aluno não só porque podemos mostrar a importância dos fatos cotidianos da criança e do jovem, mas também porque esse conhecimento é carregado de saberes alternativos e muito significativos.

Nota

¹ DCB – *Documento Diseño Curricular base*. Madrid: MEC, 1989.

Referências

Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Ed., 1994.

CARVALHO, A. M. A. *et al.* Registro em vídeo na pesquisa em psicologia: reflexões a partir de relatos de

experiência. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 261-267, set./dez. 1996.

D'Ambrosio, U. A prática na sala de aula. In: _____. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996. cap. 5, p. 91-108.

GÓES, M. C. R. de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. *Cadernos Cedes*, Campinas, n. 50, p. 9-25, abr. 2000.

Gómez, A. B. *los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Editorial Comares, 1995.

GONÇALVES, h. a. *educação matemática e cálculo mental: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud*. 2008. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

INHELDER, B.; Caprona, D. Em direção ao construtivismo psicológico: Estruturas? Procedimentos? Os dois são indissociáveis. In: INHELDER, B.; CELLERIER, G. *O percurso das descobertas da criança: pesquisa sobre as microgêneses cognitivas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1992. cap. 1, p. 19-63.

MAGINA, S. et al. *Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais*. São Paulo: PROEM, 2001.

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. *Temas em Psicologia*, Recife, n. 3, p. 59-71, 1994.

Siegler, R. *Inteligências e desenvolvimento da criança: variações, evolução, modalidades*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, G. Question de representation et de formulation dans la resolution de problemes mathematiques. In: IREM, 1988, Estrasburgo. *Anais... Estrasburgo*, 1988, p. 33-55.

_____. Psychologie du developpement cognitif et didactique des mathematiques. *Petit X*, Paris, n. 22, p. 51-69, 1990.

_____. Piaget e Vigotsky: convergências e controvérsias. *Revista do Geempa*, Porto Alegre, n. 2, p. 77-83, nov. 1993.

Vergnaud, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. *Didáctica da matemática*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. cap. 3, p. 155-191.

_____. a psicologia da educação. In: Plaisance, E.; vergnaud, g. *As ciências da educação*. São Paulo: Loyola, 2003.

_____; LABORDE, C. el aprendizaje y la enseñanza de la matemática: teoría e conceptos fundamentales. In: VERGNAUD, G. (Org.). *Aprendizajes y didácticas: que hay de nuevo?* Buenos Aires: Edicial, 1994.

Dados do autor:

*Heitor Antônio Gonçalves

Doutor em Educação e Professor – Departamento das Ciências da Educação/Universidade Federal de São João del-Rei.

Endereço para contato:

Universidade Federal de São João del-Rei

Departamento das Ciências da Educação

Campus Dom Bosco

Praça Dom Helvécio, nº 74

36301-160 São João del-Rei/MG – Brasil

Endereço eletrônico: heitorag@ufsj.edu.br

Data de recebimento: 1º nov. 2010

Data de aprovação: 4 fev. 2011