ENCONTRANDO A-IDENTIDADES POLINOMIAIS PARA A ÁLGEBRA $M_{1,1}(E)$

Fernando Augusto Naves [4]
Humberto Luiz Talpo[5]

Resumo: Nos dias atuais um dos objetos matemáticos mais utilizados são as matrizes. Elas possuem aplicações em quase todas as áreas do conhecimento, passando pela genética, análise de dados estatísticos, cálculos de engenharia, computação gráfica e muitas outras. Assim sendo, elas despertam um interesse próprio na medida em que quanto mais informações se sabe sobre elas, mais podemos explorar todo o seu potencial de aplicabilidade. Este trabalho está inserido no contexto do estudo das PI-álgebras. Esta importante área da Matemática se preocupa em estudar as álgebras que possuem *identidade polinomial*. Os interessados em mais detalhes desta área podem consultar a referência [2]. O objetivo é obter resultados acerca da existência de certas classes de identidades polinomiais para um determinado tipo de álgebra que descrevemos abaixo. Sejam F corpo e n um inteiro positivo. Denota-se por A_n o grupo das permutações pares no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Um polinômio escrito em variáveis não-comutativas

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, \qquad \alpha_\sigma \in F \tag{1}$$

é uma *A-identidade polinomial* de grau n para uma álgebra R se

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

para quaisquer elementos $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$. Com relação à importante álgebra matricial $M_{1,1}(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, duas importantes perguntas a serem feitas são: qual o grau mínimo para uma A-identidade de $M_{1,1}(E)$? É possível encontrar de maneira explícita uma tal identidade?

O espaço vetorial de todos os polinômios da forma (1) é denotado por P_n^A. Ao invés de procurar por polinômios em P_n^A (que é um espaço muito "grande" com dimensão igual a $\frac{n!}{2}$), usa-se uma decomposição de P_n^A em espaços menores de acordo com Henke e Regev [4]. Esses espaços, denotados por $\overline{I}_\lambda$, estão associados a partições λ do inteiro n. Em seguida, encontra-se uma base para $\overline{I}_\lambda$ usando uma modificação da técnica de Alves Jorge

[4]Universidade Federal de Lavrs,
fernandonaves@ufla.br
[5]Universidade Federal de São Carlos,
htalpo@ufscar.br

e Vieira [1]. Um roteiro foi implementado no sistema de álgebra computacional GAP [6] para produzir um sistema linear cuja (possível) solução é o polinômio desejado, uma vez que os cálculos manuais tornam-se extremamente trabalhosos. Os resultados obtidos foram publicados no artigo [5]. Provou-se que a álgebra $M_{1,1}(E)$ não admite A-identidades de grau 5 ou menor. Além disso, um exemplo explícito de A-identidade de grau 6 para a álgebra $M_{1,1}(E)$ foi encontrado. Trata-se de um polinômio que está associado à partição $(4,2)$ do inteiro 6 e é formado por 144 monômios de grau 6. Comparando nosso resultado com o obtido por Gonçalves, Schützer e Talpo [3], conclui-se que tanto $M_{1,1}(E)$ quanto a álgebra das matrizes "convencionais" $M_2(F)$, onde F é um corpo algebricamente fechado e de característica zero, possuem o mesmo grau mínimo para A-identidades. Além disso, há uma simetria entre as identidades encontradas nesses dois trabalhos. Esperamos que tal avanço contribua para a compreensão das identidades das álgebras matriciais de ordem maior, tópico que há inúmeras questões ainda em aberto.

Referências

[1] Alves Jorge, S. M; Vieira, A. C. Central polynomials for matrix algebras over the Grassmann algebra. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* **3** (2): 179-191, (2009).

[2] Drensky, V. *Free algebras and PI-algebras*. Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, (1999).

[3] Gonçalves, D. J.; Schützer, W.; Talpo, H. L. A-identities for the 2×2 matrix algebra, *Archiv der Mathematik* **106** (5): 417-429, (2016).

[4] Henke, A.; Regev, A. Explicit decompositions of the group algebras FS_n and FA_n, *Polynomial identities and combinatorial methods* (Pantelleria, 2001), **235**: 329-357, (2003).

[5] Naves, F. A.; Talpo, H. L. Minimum degree of an A-identity of $E \otimes E$, *International Journal of Algebra and Computation*, **30** (06): 1237–1256, (2020).

[6] The GAP Group, 2002. GAP - Group, Algorithms and Programming, versão 4.3. Disponível em: <http://www.gap-system.org>.