

MODELO SIR(x)

Matheus Tobias Mendonça³²

Sandro Rodrigues Mazorche³³

Resumo: Ao longo de toda a história da humanidade, doenças infecciosas proporcionam episódios pandêmicos devastadores para a sociedade. Obviamente, estes episódios introduzem grandes sobrecargas de morbidade e mortalidade na raça humana e com isso alterando o comportamento humano frente a estas pandemias. Pois, no meio de uma pandemia notamos grupos de pessoas que tem o padrão de serem mais cuidadosas e outra menos cuidadosas. Dentro deste contexto de mudança de comportamento humano frente a pandemia, iremos discutir numericamente um modelo SIR (Suscetíveis, Infectados e Recuperados) com um programa de vacinação onde por meio da teoria dos jogos evolucionários a dinâmica da imitação é acoplada para simular o comportamento humano onde denotaremos esse novo modelo por SIR(x). A dinâmica da imitação foi introduzida na epidemiologia matemática por C.T. Bauch e Bhattacharyya [3], no contexto de um modelo para vacinação infantil. Poletti, [4], introduziu a ideia de usar a dinâmica de imitação para modelar a resposta humana a uma epidemia. Segue em [2] uma breve descrição do modelo.

Dado que a doença se torna endêmica se nada for feito, é razoável desenvolver um programa de vacinação. Suponha que uma fração x dos recém-nascidos sejam vacinados contra a doença e que a vacinação seja totalmente eficaz. Assim, uma fração x de recém-nascidos entra na categoria recuperada e uma fração $1 - x$ entra na categoria suscetível. Os pais que optam por não vacinar seu recém-nascido têm uma recompensa negativa porque seu filho pode contrair a doença. Essa recompensa é proporcional ao número de contagiosos na população. Portanto, é $-mI$ onde m é uma constante positiva. Por outro lado, os pais que optam por vacinar seu recém-nascido têm um retorno negativo devido à possibilidade de efeitos colaterais da vacina. Este pagamento é $-k$, onde k é uma constante positiva. Portanto, a recompensa de vacinar subtraída da recompensa de não vacinar é igual a $-k + mI$. Para vacinas em uso, k é muito menor do que m . Assim, quando I não é muito baixo ($I > \frac{k}{m}$), a vacinação tem um retorno maior, mas quando I é muito baixo ($I < \frac{k}{m}$), como será se o programa de vacinação já estiver em vigor há muito tempo, não vacinar tem uma recompensa maior. Supondo a dinâmica de imitação, temos $\dot{x} = \rho x(1 - x)(-k + mI)$ com ρ uma constante positiva.

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \mu(1 - x) - \beta SI - \mu S, \\
 \dot{I} &= \beta SI - \gamma I - \mu I, \\
 \dot{R} &= \gamma I - \mu R + \mu x, \\
 \dot{x} &= \rho x(1 - x)(-k + mI),
 \end{aligned} \tag{4}$$

³²Aluno de graduação, Universidade Federal de Juiz de Fora, tobias@ice.ufjf.br

³³Professor orientador, Universidade Federal de Juiz de Fora, sandro.mazorche@ufjf.edu.br

onde, β , γ e μ são constantes positivas. Com $S + I + R = 1$ e $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$, podemos ignorar a equação para \dot{R} e considerar o sistema reduzido para as equações \dot{S} , \dot{I} e \dot{x} e assim o estudo dos pontos de equilíbrios $Pe1 = (1, 0, 0)$, $Pe2 = (0, 0, 1)$, $Pe3 = (S^*, I^*, 0)$ e $Pe4 = (S^*, \frac{k}{m}, x^*)$ se restringem ao prisma $P = \{(S, I, x) \in \mathbb{R}^3 | S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Onde $S^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$, $I^* = \mu(\frac{1}{\gamma + \mu} - \frac{1}{\beta})$, $x^* = \frac{\beta + \gamma + \mu}{\beta} - \frac{(\gamma + \mu)k}{\mu m}$.

Para realizar a análise numérica do modelo, usamos uma discretização padrão em diferenças finitas nas equações (4). Como pontos iniciais (S_0, I_0, R_0, X_0) , foi usado 1331 pontos distribuídos dentro do prisma P , os parâmetros usados foram $\beta = 0.6$, $\gamma = 1/6$, $\mu = 0.1$, $\rho = 5.1$, $k = 3/10$ e $m = 3$. Com passo no tempo $dt = 0.1$ e tempo terminal $T = 1000$.

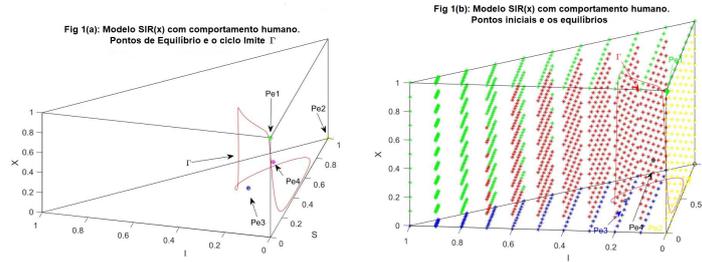


Figura 4: Simulação numérica. Fonte: autor.

Na simulação, encontramos um ciclo limite Γ como visto na Figura 4(a). Dos 1331 pontos iniciais, tivemos a seguinte distribuição de convergência aos equilíbrios visto na Figura 4(b): $Pe1$ (verde) 110 pontos; $Pe2$ (amarelo) 537 pontos; $Pe3$ (azul) 112 pontos; $Pe4$ (preto) nenhum ponto; para o ciclo limite Γ (vermelho) tivemos 574 pontos. As regiões de convergência para os equilíbrios $Pe2$, $Pe3$ se localizam na face do prisma P , para $Pe1$ a região contém uma face e uma parte interior ao prisma P enquanto para Γ a região é interior ao prisma P . Esse estudo preliminar irá nos ajudar na construção das provas de estabilidade dos 04 pontos de equilíbrios e também de uma prova para o ciclo limite Γ . Isso será fundamental para que possamos implementar uma versão deste modelo em derivadas fracionárias usando uma técnica como feito em [1].

Referências

- [1] Monteiro, N. Z. and Mazorche, S. R, Fractional Derivatives Applied to Epidemiology, *Trends in Computational and Applied Mathematics*, 2021. DOI: 10.554/tcam.2021.022.02.00157.
- [2] Lopez-Flores, M. M. and Marchesin, D. and Matos, V. and Schechter, S. Equações diferenciais e modelos epidemiológicos, *33° Colóquio Brasileiro de Matemática*, 2021.
- [3] Bauch, C. T. and Bhattacharyya, S., Evolutionary Game Theory and Social Learning Can Determine How Vaccine Scares Unfold, *PLoS Computational Biology*, 2012, 10.1371/journal.pcbi.1002452.
- [4] Poletti, P., Evolutionary Game Theory and Social Learning Can Determine How Vaccine Scares Unfold, *PLoS Computational Biology*, 2012. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002452.