A GEOMETRIA PROJETIVA DO JOGO *DOBBLE*

Milena Arantes Rocha Maciel [8]

Resumo: Este trabalho consiste em mostrar como é possível perceber uma estrutura algébrica tão teórica quanto um plano projetivo finito em um material simples, e não-matemático, que é o jogo *Dobble*.

Definição 1 *Seja V um conjunto finito cujos elementos são chamados pontos e alguns de seus subconjuntos são chamados retas tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) Duas retas distintas se encontram precisamente em um único ponto;

(ii) Dois pontos distintos definem uma única reta;

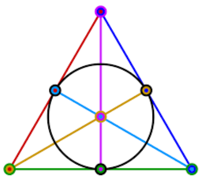
(iii) Toda reta contém pelo menos três pontos.

*Então, V é chamado de **plano projetivo finito**.*

Definição 2 *Chamamos de n a **ordem do plano**, assim, um plano projetivo de ordem n tem $n+1$ pontos sobre cada reta, todo ponto está contido em $n+1$ retas, e por fim, há n^2+n+1 retas e n^2+n+1 pontos no total.*

Um plano projetivo pode ser considerado um plano comum equipado com "pontos no infinito" adicionais onde retas paralelas se cruzam. Assim, quaisquer duas retas distintas em um plano projetivo sempre se cruzam em um e somente um ponto [1].

O menor plano projetivo é o de ordem 2, chamado de "Plano de Fano", construído por Gino Fano (1871 - 1952), com 3 pontos sobre cada reta, todo ponto contido em 3 retas, 7 retas e 7 pontos no total, como podemos ver a seguir:



Todos planos projetivos conhecidos têm ordem n que é potência de um número primo. A existência de planos projetivos de outras ordens ainda é uma questão em aberto, mas já foi provado a inexistência para ordens 6, 10, 14, 21 e 22 [2].

Dobble é um jogo que contém 55 cartas, 8 símbolos por carta e são 57 símbolos no total, de maneira que duas cartas sempre têm um (e apenas um) símbolo em comum. O jogo

[8]Universidade Federal de Juiz de Fora,
milena.arantes@ice.ufjf.br

oferece 5 maneiras distintas de ser jogado, mas todos se resumem em: ser o mais rápido a enxergar qual o símbolo em comum entre duas cartas quaisquer.

Como no jogo temos 55 cartas, cada uma com 8 símbolos distintos, totalizando 440 símbolos (contados com multiplicidade), então uma pergunta que surge naturalmente ao jogar é: "como pode o jogo funcionar perfeitamente apenas com 57 símbolos diferentes?", aí que entra a geometria projetiva. Podemos associar o *Dobble* à um plano projetivo de ordem 7, pois como vimos as propriedades na **Definição 1**, substituindo "ponto" por "carta" e "reta" por "símbolo", temos:

(i) Dois símbolos distintos se encontram precisamente em uma única carta;

(ii) Duas cartas distintas têm apenas um símbolo em comum;

(iii) Todo símbolo está em pelo menos três cartas.

Pela **Definição 2**, deveríamos ter 8 símbolos em cada carta, cada símbolo aparecendo em 8 cartas, 57 símbolos distintos e 57 cartas no total. Mas, sabemos que vêm apenas 55 cartas no *Dobble*, então ele não representa de fato um plano projetivo, mas a estrutura por trás dele que faz com que sua única regra seja satisfeita só é possível pelas propriedades de um plano projetivo. O fato de faltar 2 cartas - pontos - não interfere no fato das demais terem apenas um símbolo - reta - em comum, interfere somente no fato de que alguns símbolos não estão em 8 cartas. Ninguém sabe, no entanto, porque o jogo é produzido com 55 em vez de 57 cartas.

Um símbolo específico irá aparecer em 6 cartas distintas, 14 símbolos irão aparecer em 7 cartas distintas e o restante aparece exatamente em 8 cartas distintas. Assim, juntando todas informações que temos podemos "descobrir" quais são as duas cartas que faltam no nosso *Dobble* e investigar a estrutura projetiva por trás do jogo.

Além disso, observamos que, motivados pelo jogo, dado um plano projetivo conhecido, como o de Fano, podemos construir nosso próprio *Dobble* a partir dele. Fizemos isso com o plano de Fano e também com o plano *jogo da velha*.

Referências

[1] L. Lovász, J. Pelikán, K.Vesztergombi. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. Portuguese translation: Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005).

[2] R. Coggin, A. Meyer. *The Mathematics of "Spot It!", Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 13, No. 8 (Spring 2013)*, **pp**. 459-467.