

UMA BREVE INTRODUÇÃO À GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Rafaela Cristina Oliveira da Cunha ¹²

Resumo: A Geometria Não Euclidiana, surge por volta de 1830, após o insucesso nas tentativas realizadas por alguns matemáticos de demonstrar o quinto postulado de Euclides¹, através dos outros postulados/axiomas já existentes. A descoberta de uma nova Geometria causou grande alvoroço nos matemáticos da época, principalmente devido ao fato da grande tradição na crença completa no antigo sistema descrito por Euclides em “Os Elementos”. Os principais responsáveis por este sucesso foram Carl Friedrich Gauss (1777-1855) na Alemanha, Janos Bolyai (1802-1860) na Hungria e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) na Rússia. Essencialmente, os três matemáticos observaram que ao alterar o enunciado do 5º Axioma, o conjunto de axiomas de Euclides parecia permanecer logicamente consistente, embora tal consistência não tenha sido provada.

Levaram-se anos para a construção de um modelo concreto para essa nova geometria, o que foi realizado por Eugenio Beltrami (1835-1899) usando superfícies de curvatura constante. Beltrami concluiu empiricamente que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Sendo K a constante de curvatura, ele obteve modelo para os seguintes casos:

- se $K = 0$, a Geometria Euclidiana;
- se $K > 0$, a Geometria Esférica;
- se $K < 0$, a Geometria Hiperbólica.

Ao longo deste trabalho, exploraremos algumas propriedades geométricas da Geometria Hiperbólica, que é, historicamente, a primeira Geometria Não Euclidiana descoberta. Dentre as três geometrias bidimensionais, a Geometria Hiperbólica é a mais rica em simetrias. Começaremos descrevendo o Espaço Hiperbólico, utilizando para isso o modelo do semiplano superior. Em seguida, apresentamos uma nova forma de medir distância entre dois pontos quais nesse espaço. Com o propósito de obtermos isometrias para a Geometria Hiperbólica, apresentaremos as inversões (também denominadas por reflexões) sobre as retas verticais e os círculos neste mesmo Espaço.

O conceito de reta euclidiana, aquele que minimiza a distância entre dois pontos quaisquer, será generalizado aqui para o conceito de geodésica. As propriedades que envolvem o conceito de geodésica mudarão de acordo com a natureza da geometria. Na Geometria Hiperbólica, dada uma geodésica ℓ e um ponto p fora desta geodésica, passam por p

¹²Universidade Federal de Juiz de Fora,
rafaelaoliveira@ice.ufjf.br

¹**Axioma das Paralelas:** Por um ponto fora de uma reta dada, passa uma, e somente uma, paralela à essa reta.

infinitas geodésicas paralelas à ℓ . Por fim, veremos algumas propriedades das geodésicas no Espaço Hiperbólico, dentre elas, as possíveis posições relativas para um par de geodésicas.

Referências

- [1] Doria, M. C., *Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica*, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2019.