Seqüências Pouco Prováveis e Valores Extremos num Processo Multiplicativo Aleatório

Amanda Alves de Oliveira[1]
Telles Timóteo da Silva[2]

Resumo: Muitos modelos matemáticos são dados em termos de equações de recorrência a tempo discreto [1]. Quando os coeficientes são aleatórios, podemos ver que a solução envolve um processo multiplicativo [3]. Considere, por exemplo, a equação a tempo discreto $y_{i+1} = a_i + b_i y_i$, onde y_i é a sequência a ser determinada, a_i, b_i são em geral sequências aleatórias de números reais, para $i = 0, 1, \ldots$. A solução da equação no tempo $n+1$ pode ser escrita como $y_{n+1} = \left[\prod_{i=0}^{n} b_i\right] y_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{i=j}^{n} b_i\right] a_{j-1}$, em que se observa o produto de variáveis aleatórias. Um exemplo específico de aplicação deste modelo é o fracionamento de rochas [4]. Neste caso, ponha $a_i = 0$ e considere que y_i é o tamanho de uma rocha no i-ésimo estágio de sua fragmentação. Então b_i é o fator de redução da rocha entre os estágios i e $i+1$ e o tamanho da rocha na n-ésima iteração fica dado por $y_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} b_i\right] y_0$.

Os processos multiplicativos, no entanto, são pouco estudados, principalmente porque não existe uma versão do Teorema Central do Limite (TCL) [2] que permita estudar seu padrão assintótico e fazer inferências. Uma característica interessante dos processos multiplicativos aleatórios, com um número grande de variáveis aleatórias, é que eles podem conter sequências "pouco prováveis" mas com valores extremos. Essas sequências tendem a influenciar demasiadamente o valor médio do processo.

Podemos observar este fenômeno num modelo multiplicativo binomial descrito a seguir de forma resumida. Fixe um número $n \in \mathbb{N}$, dois números reais distintos $b_1, b_2 > 0$ e um número real p, $0 < p < 1$. Seja Ω o conjunto de todas a n-uplas $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ em que $\omega_i \in \{b_1, b_2\}$. A probabilidade de ocorrência de um dado $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ é definida tal que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^i(1-p)^{n-i}$, caso b_1 ocorra i vezes em ω (consequentemente b_2 ocorre $n-i$ vezes).

Agora vamos definir a variável aleatória produto $\mathcal{P} : \Omega \to \mathbb{R}$ que, para cada $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, calcula o produto $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$, isto é, $\mathcal{P}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \omega_i$. Vamos calcular a distribuição de $\mathcal{P}$. Note que o evento $[\mathcal{P} = b_1^i b_2^{n-i}]$ representa as amostras $\omega \in \Omega$ em que b_1 ocorre i vezes. A quantidade dessas amostras é, portanto, $\binom{n}{i}$. Logo

$$\mathbb{P}(\mathcal{P} = b_1^i b_2^{n-i}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

[1]Escola Municipal Profa. Nilce Moreira, Conselheiro Lafaiete - MG, oliveira.amandinha@yahoo.com.br
[2]Departamento de Estatística, Física e Matemática, UFSJ, timoteo@ufsj.edu.br

O valor médio do produto $\mathcal{P}$ é

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] \;=\; [pb_1 + (1-p)b_2]^n.$$

Observamos que $\mathbb{E}[\mathcal{P}]$ cresce geometricamente com n sempre que $pb_1 + (1-p)b_2 > 1$, ou seja, quando $p > \frac{1-b_2}{b_1-b_2}$. A Moda de $\mathcal{P}$ representa o valor *mais provável*, ou seja ela é obtida observando-se a distribuição dos valores de $\mathcal{P}$ e identificando aquele que tem maior probabilidade de ocorrer. Para n grande temos

$$\mathbb{M}(\mathcal{P}) \approx b_1^{np} b_2^{n(1-p)}.$$

Podemos considerar um exemplo simples e observar o efeito das seqüências pouco prováveis sobre a média. Imagine dois jogadores disputando Cara-ou-Coroa numa sequência de n lançamentos de uma moeda, com apenas dois resultados possíveis: ganhar ou perder. A cada partida, o ganhador multiplica sua pontuação por 2 e o perdedor multiplica sua pontuação por $\frac{1}{2}$. A pontuação inicial de ambos é 1. Suponha que $p = 1/2$. A pontuação do primeiro jogador depois de n partidas será o produto $\mathcal{P}$ referente aos seus ganhos ou perdas nas n partidas. O valor médio do produto fica

$$\mathbb{E}[\mathcal{P}] = \left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

Já a moda (ou valor mais provável) é dado por

$$\mathbb{M}(\mathcal{P}) = 1.$$

Vemos que o valor mais provável funciona como uma miragem, já que, de fato, quando n cresce, o efeito das sequências pouco prováveis mas com valores extremos se acentua e começa a interferir em $\mathbb{E}[\mathcal{P}]$.

Financiamento: Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, sob os processos RED-00133-21 e APQ 01987-22.

Referências

[1] DE JESUS, Eliane Alves. *Sistemas Dinâmicos Discretos.* 2016. 78f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ / Campus Alto do Paraopeba, Ouro Branco, 2016.

[2] JAMES, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário.* 2a.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.

[3] MANRUBIA, Susanna C. e ZANETTE, Damian H. Stochastic multiplicative processes with reset events. *Physical Review E* **59** (5) 1999.

[4] REDNER, S. Random multiplicative processes: an elementary tutorial. *Am. J. Phys* **58** (3) 1990.